MATH*unesa*
Jurnal Ilmiah Matematika | ***Volume 09 No 01***
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115 | ***Tahun 2021***

PELABELAN TOTAL AJAIB TITIK BERLABEL GANJIL PADA GRAF POHON

Megacelia Maharani
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : megacelia.17030214032@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, n+m\}$ disebut pelabelan total ajaib titik pada G, jika terdapat konstanta k sedemikian hingga $\forall v \in V(G), w_f(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(vu) = k$. Selanjutnya, nilai $w_f(v)$ disebut bobot titik v dalam pelabelan f dan nilai k disebut konstanta ajaib untuk pelabelan f. Jika $f\big(V(G)\big) = \{1,3,5, \dots, 2n-1\}$, maka f disebut sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada G, dan G disebut graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Secara umum, menentukan apakah suatu graf merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, merupakan permasalahan sulit. Dalam artikel ini dibuktikan hubungan antara k, m, dan n adalah $k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$. Dibuktikan juga bahwa pohon dengan n titik merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil jika dan hanya jika n ganjil. Demikian juga, sebuah bintang $K_{1,n}$ merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil jika dan hanya jika $n = 2$. Syarat perlu bagi sebuah pohon T_n mempunyai pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil adalah n ganjil. Akhirnya, ditunjukkan bahwa titik-titik internal, titik-titik daun, dan derajat maksimum pohon T_n merupakan syarat-syarat agar T_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.
Kata kunci: Pelabelan total ajaib, Titik Ganjil, Lintasan, Bintang, Ulat bulu

Abstract

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$ with $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$. A bijective function $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3, \dots, n+m\}$ is called a magic total labeling on G, if there is a constant k such that $\forall v \in V(G), w_f(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(vu) = k$. Furthermore, the value of $w_f(v)$ is called the weight of vertex v, and the value of k is called the magic constant for f. If $f\big(V(G)\big) = \{1,3,5, \dots, 2n-1\}$, then f is called an odd vertex magic total labeling on G, and G is called an odd vertex magic total labeling graph. Generally, determining whether a given graph to be an odd vertex magic total labeling graph or not, is a very hard problem. In this paper we prove the relationship between k, m, and n is $k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$. It is also proven that every path on n vertices is an odd vertex magic total labeling graph if and only if n is odd. Furthermore, It is proven that a star $K_{1,n}$ an odd vertex magic total labeling graph $n = 2$. We establish

A necessary condition for a tree T_n has an odd vertex magic total labeling is n odd. Finally, we show that the number of internal vertices, leaves, and the maximum degrees of T_n can be used as requirements for T_n to be an odd vertex magic total labeling graph.
Keywords : Magic total labeling; Odd vertex; Path; Star; Caterpillar

1. PENDAHULUAN

Teori graf adalah suatu cabang matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun silam. Jurnal mengenai teori graph pertama kali diperkenalkan di tahun 1736 oleh Euler (seorang matematikawan terkenal yang berasal dari Swiss). Teori graf berkembang sangat pesat karena aplikasi dalam kehidupan sehari-hari sangat luas. Sebuah graf G terdiri dari himpunan titik G atau $V(G)$ dan himpunan sisi G atau $(E(G)$. $V(G)$ merupakan himpunan berhingga dan tak kosong dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*). $E(G)$ merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) sehingga setiap anggota E(G) disebut sisi (*edge*) (Budayasa, 2007).

Pelabelan graf adalah salah satu topik yang menarik dalam teori graf. Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sadlàck pada tahun 1964, Stewart pada tahun 1966 dan Kotzig dan Rosa pada tahun 1970. Pelabelan adalah pemetaan injektif dari himpunan titik atau himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat positif yang disebut label.

Pelabelan yang domainnya himpunan titik disebut pelabelan titik, pelabelan yang domainnya himpunan sisi disebut pelabelan sisi dan pelabelan yang domainnya gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (Simangunsong dan Mulyono, 2015). Pelabelan titik dan sisi pada graf dilabeli dengan bilangan bulat postitif (Kotzig & Rosa, 1970).

Peran pelabelan graf sangat dapat dirasakan, terutama di sektor sistem komunikasi dan transportasi (Wardhani dan Budayasa, 2019). Beberapa jenis pelabelan graf yang berkembang hingga saat ini, yaitu pelabelan harmoni, pelabelan *gracefull*, pelabelan total tak beraturan, pelabelan anti ajaib dan pelabelan ajaib (Irawati dan Heri, 2010). Pelabelan ajaib diperkenalkan pertama kali oleh Sedlàček tahun 1963 kemudian Stewart tahun 1960 (Gallian, 2019). Pelabelan ajaib dikembangkan lagi menjadi pelabelan total ajaib titik, pelabelan total ajaib sisi, pelabelan total ajaib titik super, dan pelabelan total ajaib sisi super (Irawati dan Heri, 2011). Pelabelan total ajaib titik pada G adalah pemetaan fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\dots,n+m\}$ sehingga $\forall v \in V(G)$ berlaku $w_f(v) = f(v) + \sum_{u\in N(v)} f(vu) = k$, dimana k adalah konstanta ajaib pada pelabelan f dan $w_f(v)$ adalah bobot titik v (MacDougall dkk., 2002). Dalam artikel ini yang akan dibahas adalah mengenai pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Dalam artikel C.T. Nagaraj dkk. berjudul “Odd Vertex Magic Total Labeling of Trees” (Nagaraj dkk., 2017), Lemama 3.1 dan Teorema 3.2 (dalam artikel ini) belum ada bukti sehingga dibuktikan dalam artikel ini dan dalam artikel tersebut terdapat kesalahan dan tidak lengkap sehingga di artikel ini direvisi kesalahan-kesalahan dan melengkapi yang tidak lengkap serta diberikan contoh pelabelan untuk memperjelas.

Tidak semua graf mempunyai pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Rumusan masalah yang muncul adalah apakah suatu graf mempunyai pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil dan bagaimana mengkonstruksikan pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Secara umum, permasalahan ini belum terjawab. Graf yang akan dibahas dalam artikel ini adalah graf pohon. Graf pohon adalah graf terhubung tanpa sikel. Pohon dengan n titik dilambangkan dengan T_n. Graf lintasan adalah pohon khusus yang memiliki tepat dua titik berderajat 1 yaitu titik awal dan titik akhir dan setiap titik internal berderajat 2. Lintasan dengan n titik dilambangkan dengan P_n. Beberapa kelas pohon lain , seperti bintang dan caterpillar (ulat-bulu) juga dibahas dalam artikel ini.

2. KAJIAN TEORI

a. Graf

Definisi 2.1:

Graf G terdiri atas himpunan titik G dan himpunan sisi G. Himpunan titik G dilambangkan dengan $V(G)$ merupakan himpunan berhingga dan tak kosong dari obyek-obyek yang disebut titik. Himpunan sisi G dilambangkan dengan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga (boleh kosong) yang elemen-elemennya disebut sisi sehingga setiap elemen di $E(G)$ adalah pasangan tak terurut titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007).

b. Pohon

Definisi 2.2:

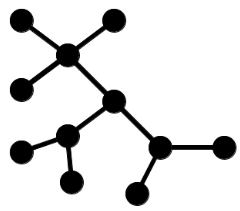
Pohon adalah graf terhubung dan tidak memuat sikel. Beberapa sifat pohon sebagai berikut:

1) Jika T pohon, maka setiap 2 titik yang berbeda di T dihubungkan oleh tepat satu lintasan.
2) Jika T sebuah pohon dan $e \in E(T)$ maka $T - \{e\}$ graph tak terhubung dengan tepat 2 komponen dan setiap komponen berupa pohon.
3). Jika T sebuah pohon, maka $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

(Budayasa, 2007)

Titik berderajat satu pada pohon disebut titik daun, dan titik lain disebut titik internal.

Contoh :



T_{11}

Gambar 1: Pohon dengan 11 titik, 10 sisi, 7 titik daun; dan 4 titik internal

c. Lintasan

Definisi 2.3:

Lintasan adalah pohon yang memiliki tepat dua titik daun dan setiap titik internal berderajat dua. Pohon dengan n titik, dilambangkan dengan P_n. Perhatikan bahwa banyak sisi P_n adalah $n - 1$.

d. Bintang

Definisi 2.4:

Bintang dengan n titik, dilambangkan dengan S_n, adalah pohon yang memiliki tepat $n - 1$ titik daun dan tepat satu titik internal. Titik internal sebuah bintang disebut juga titik pusat bintang dan berderajat $n - 1$. Perhatikan bintang S_n isomorfik dengan graf bipartisi komplit $K_{1,n-1}$ (Ilmayasinta, 2019).

e. **Pelabelan Total Ajaib Titik Berlabel Ganjil**

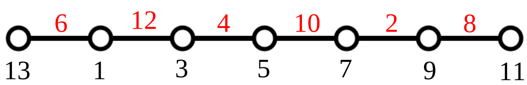
Definisi 2.5:

Misalkan G sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dengan $|V(G)| = n$ dan $|E(G)| = m$. Sebuah fungsi bijektif $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,n+m\}$ disebut pelabelan total ajaib pada G, jika terdapat konstanta k sedemikian hingga $\forall v \in V(G), w_f(v) = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(vu) = k$.

$N(v)$ adalah himpunan tetangga v, yaitu himpunan titik-titik yang berhubungan langsung dengan v. Selanjutnya, nilai $w_f(v)$ disebut bobot titik v dalam pelabelan f dan k disebut konstanta ajaib dari f. Jika $f(V(G)) = \{1,3,5,\ldots,2n-1\}$, maka f disebut pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada G dan G disebut graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil (Nagaraj dkk., 2017).

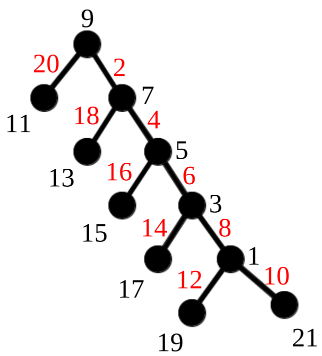
Contoh :

a) Sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada lintasan dengan 7 titik P_7 dapat dilihat pada Gambar 2.a. Dalam hal ini, $n = 7$, $m = 6$, dan $k = 19$.



Gambar 2.a

b) Sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada pohon T dapat dilihat pada Gambar 2.b. Dalam hal ini, $n = 11$; $m = 10$ dan $k = 31$.



Gambar 2.b

3. PEMBAHASAN

Berikut ditunjukkan hubungan antara banyaknya titik, banyaknya sisi, konstanta ajaib k pada pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil suatu graf.

Lemma 3.1:

Misalkan G graf non trivial dengan n titik dan m sisi. Jika G graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil dengan konstanta ajaib k, maka

$$k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Bukti :

Misalkan $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,m+n\}$ sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada G.

Berdasarkan Definisi 2.5,

$\forall v \in V(G)$,

$$k = f(v) + \sum_{u \in N(v)} f(vu)$$

Sehingga

$$\sum_{v \in V(G)} k = \sum_{v \in V(G)} f(v) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N(v)} f(vu)$$

Karena $|V(G)| = n$, maka $\sum_{v \in V(G)} k = kn$, sehingga

$$kn = \sum_{v \in V(G)} f(v) + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N(v)} f(vu)$$

Misalkan

$$x = \sum_{v \in V(G)} f(v)$$

= Total label semua titik G

$$y = \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in N(v)} f(vu)$$

= dua kali total label semua sisi G

Maka $kn = x + y$ (1)

Selanjutnya, dicari nilai x dan y. Kita tinjau dua kasus

<u>Kasus 1</u> : $m + n$ ganjil

Dalam hal ini,

$$x = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (m+n)}_{n \text{ suku}}$$
$$= \frac{n}{2}(m + n + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(mn + n^2 + n)$$

dan

$$y = 2(\underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + (m + n - 1)}_{m \text{ suku}})$$
$$= 2.\frac{m}{2}(m + n + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(2m^2 + 2mn + 2m)$$

Sehingga dari persamaan (1) diperoleh

$$kn = \frac{1}{2}(mn + n^2 + n) + \frac{1}{2}(2m^2 + 2mn + 2m)$$
$$= \frac{1}{2}(3mn + n^2 + 2m^2 + n + 2m)$$

Bagi kedua ruas dengan n diperoleh

$$k = \frac{3m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m^2}{n} + \frac{1}{2} + \frac{m}{n}$$
$$= \frac{3m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n} \quad (2)$$

Karena dalam deret aritmatika berlaku

$$Un = a + (n-1)b$$

maka $m + n = 1 + (n-1)2$

atau $m = n - 1$

Sehingga

$$\frac{3m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3m}{2} + \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2}$$
$$= 1 + 2m$$

Dengan demikian, dari persamaan (2) diperoleh

$$k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$$

<u>Kasus 2</u> : $m+n$ genap

Dalam hal ini,

$$x = \underbrace{1+3+5+\ldots+(m+n-1)}_{n \text{ suku}}$$
$$= \frac{n}{2}(m+n)$$
$$= \frac{mn+n^2}{2}$$
$$y = 2(\underbrace{2+4+6+\ldots+(m+n)}_{m \text{ suku}})$$
$$= 2.\frac{m}{2}(m+n+2)$$
$$= \frac{2m^2+2mn+4m}{2}$$

Sehingga dari persamaan (1) diperoleh

$$kn = \frac{mn+n^2}{2} + \frac{2m^2+2mn+4m}{2}$$
$$= \frac{3mn}{2} + 2m + m^2 + \frac{n^2}{2}$$

Bagi kedua ruas dengan n, diperoleh

$$k = \frac{3m}{2} + \frac{2m}{n} + \frac{m^2}{n} + \frac{n}{2}$$
$$= \frac{3m}{2} + \frac{m}{n} + \frac{n}{2} + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n} \qquad (3)$$

Karena $Un = a + (n-1)b$, maka

$m + n - 1 = 1 + (n-1)2$,

akibatnya, $m = n$ dan

$$\frac{3m}{2} + \frac{m}{n} + \frac{n}{2} = 1 + 2m$$

sehingga dari persamaan (3) diperoleh

$$k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Dengan demikian, Lemma terbukti. ■

Berikut diberikan syarat perlu dan cukup sebuah pohon merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Teorema 3.2:

Misal P_n sebuah lintasan dengan n titik. Terdapat sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada P_n jika dan hanya jika n ganjil.

Bukti :

($\Longrightarrow$) Misal f sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada P_n dengan konstanta ajaib k. Karena P_n adalah pohon dengan n titik, maka banyak sisi P_n adalah $m = n - 1$.

Berdasarkan Lemma 3.1,

$$k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Karena $m = n - 1$, maka

$$k = 1 + 2(n-1) + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{n}$$
$$= 3n - 2$$

Misal $v \in V(P_n), \ni d(v) = 1$. Maka

$$k = f(v) + f(vu)$$

Karena $f(v)$ ganjil dan $f(vu)$ genap, maka

$$k = f(v) + f(vu) \text{ ganjil}$$

sehingga $3n - 2$ ganjil, akibatnya

n ganjil.

($\Longleftarrow$) Misalkan n ganjil dan

$$P_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

dengan $V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan

$$E(P_n) = \{e_i = v_i\, v_{i+1} \,/\, 1 \le i \le n-1\}$$

Konstruksi sebuah pelabelan total f pada P_n sedemikian hingga :

$$f(v_i) = \begin{cases} 2n-1 & , i = 1 \\ 2i-3 & , 2 \le i \le n \end{cases}$$

dan

$$f(e_i) = \begin{cases} k - f(v_i) & , i = 1 \\ k - f(v_i) - f(e_{i-1}) & , 2 \le i \le n-2 \\ k - f(v_{i+1}) & , i = n-1 \end{cases}$$

dengan $k = 3n - 2$.

Pertama akan ditunjukkan bahwa fungsi $f: V(P_n) \cup E(P_n) \to \{1,2,3,\ldots,2n-1\}$ merupakan fungsi bijektif.

- Menurut fungsi f diperoleh
  $f(v_i) = \{2n-1, 1, 3, 5, \ldots, 2n-3\}$
  $f(e_i) = \{n-1, 2n-2, n-3, 2n-4, n-5, 2n-6, \ldots, 4, n+3, 2, n+1\}$
  Himpunan semua peta f adalah $\{1,2,3,4,\ldots,2n-2, 2n-1\}$, sehingga range f = kodomain f. Ini berarti fungsi f surjektif.
- Perhatikan bahwa untuk setiap 2 elemen dari $V(P_n) \cup E(P_n)$ yang berbeda mempunyai 2 label yang berbeda. Ada 3 kemungkinan 2 elemen tersebut, yaitu :
  1. $v_i, v_j \in V(P_n)$ dan $v_i \ne v_j$
     Karena $v_i \ne v_j$, maka $i \ne j$. Sehingga,
     $f(v_i) = 2i - 3 \ne 2j - 3 = f(v_j)$
  2. $e_i, e_j \in E(P_n)$ dan $e_i \ne e_j$
     Misalkan $f(e_i) = k - f(v_i)$ dan $f(e_j) = k - f(v_j)$
     Maka $f(e_i) \ne f(e_j)$.
  3. $v_i \in V(P_n)$ dan $e_j \in E(P_n)$
     Karena $f(v_i)$ ganjil dan $f(e_j)$ genap, maka $f(v_i) \ne f(e_j)$

  Ini berarti fungsi f injektif.

Karena fungsi f injektif dan surjektif maka fungsi f bijektif.

Karena $f(v_i) = \begin{cases} 2n-1 & , i = 1 \\ 2i-3 & , 2 \le i \le n \end{cases}$ dan $2n-1$; $2i-3$ bilangan ganjil, maka label setiap titik P_n bilangan ganjil.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa bobot dalam pelabelan f di setiap titik P_n adalah k.

- Bobot dalam pelabelan f di titik v_1

$$w_f(v_1) = f(v_1) + f(e_1)$$
$$= f(v_1) + \{k - f(v_1)\}$$

$$= k$$

- Bobot dalam pelabelan f di titik v_i, $2 \le i \le n-1$

$$w_f(v_i) = f(v_i) + f(e_{i-1}) + f(e_i)$$
$$= f(v_i) + f(e_{i-1}) + \{k - f(v_i) - f(e_{i-1})\}$$
$$= k$$

- Bobot dalam pelabelan f di titik v_n

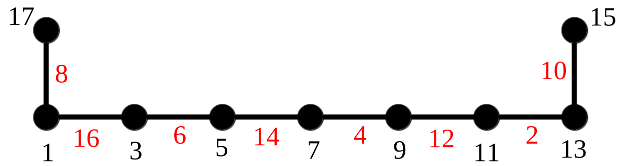
$$w_f(v_n) = f(v_n) + f(e_{n-1})$$
$$= f(v_n) + \{k - f(v_n)\}$$
$$= k$$

Jadi, $\forall v \in V(P_n), w_f(v) = k$. Sehingga berdasarkan Definisi 2.5, fungsi f adalah sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada P_n dengan konstanta ajaib $k = 3n - 2$.

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.1:

Sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada lintasan P_9 ditunjukkan pada Gambar 3.1 berikut. Dalam hal ini, $n = 9$; $m = 8$; $k = 25$.



Gambar 3.1

Karakterisasi sebuah bintang merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3:

Graf bintang $K_{1,n}$ merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil jika dan hanya jika $n = 2$.

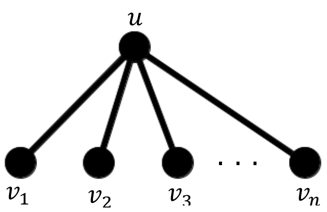
Bukti :

Misalkan $S_{n+1} = K_{1,n}$ dengan

$$V(S_{n+1}) = \{u, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

dan

$$E(S_{n+1}) = \{uv_i \,/\, 1 \le i \le n\}$$



$S_{n+1} = K_{1,n}$

Gambar 3.2

Misalkan f sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada $S_{n+1} = K_{1,n}$ dengan konstanta ajaib k. Karena $|V(S_{n+1})| = n + 1$ dan $|E(S_{n+1})| = n$, berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh

$$k = 1 + 2n + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{n+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{n+1}(2n^2 + 2n + n + n^2)$$
$$= 1 + \frac{1}{n+1}(3n^2 + 3n)$$
$$= 1 + 3n$$

Karena $f(u)$ ganjil dan $f(uv_i)$ genap $\forall i, 1 \le i \le n$, maka

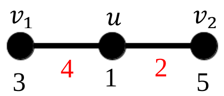
$$w_f(u) = f(u) + \sum_{i=1}^{n} f(uv_i)$$
$$\ge 1 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$$
$$= 1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$
$$= 1 + 2.\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n^2 + n + 1$$

sehingga $w_f(u) \ge n^2 + n + 1$

Selanjutnya $w_f(u) = k$ jika dan hanya jika

$$n^2 + n + 1 = 1 + 3n$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2 - 2n = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad n(n-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad n = 2 \text{ (karena } n \ge 1)$$

Sebaliknya, jika $n = 2$ maka $S_3 = K_{1,2}$ adalah sebuah lintasan $P_3 = (v_1, u, v_2)$. Berdasarkan Teorema 3.2, P_3 sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, dengan konstanta ajaib $k = 7$.



$S_3 = K_{1,2} = P_3$

Gambar 3.3

sebuah pelabelan yang dimaksud dapat dilihat pada Gambar 3.3

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Berikut diberikan syarat perlu bagi pohon T_n mempunyai pelabelan ajaib titik berlabel ganjil.

Teorema 3.4:

Jika T_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, maka n ganjil.

Bukti :

Misalkan banyak sisi T_n adalah m. Berdasarkan sifat pohon, maka

$$m = n - 1$$

Misalkan f sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada T_n dengan konstanta ajaib adalah k, maka berdasarkan Lemma 3.1,

$$k = 1 + 2(n-1) + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{n}$$
$$= \frac{n + 2n^2 - 2n + n - 1 + n^2 - 2n + 1}{n}$$
$$= 3n - 2$$

Andaikan n genap. Maka $k = 3n - 2$ genap.

Misalkan u sebuah titik berderajat satu (titik daun) pada T_n dan uv sebuah sisi T_n. Maka

$$k = w_f(u) = f(u) + f(uv).$$

Karena $f(u)$ ganjil dan $f(uv)$ genap, maka

$$k = f(u) + f(uv) \text{ ganjil.}$$

Kontradiksi. Dengan demikian teorema terbukti. ∎

Berikut akan ditunjukkan jika banyak titik daun pada pohon melebihi banyak titik internal ditambah satu, maka pohon tidak memiliki pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Teorema 3.5:

Misalkan pohon T_n mempunyai s titik internal dan st titik daun. Jika $t > \frac{s+1}{s}$, maka pohon T_n bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Bukti :

Karena T_n mempunyai sebanyak s titik internal dan st titik daun, maka

$$n = s + st$$

Jika m adalah banyak sisi T_n, maka

$$m = n - 1 = s + st - 1$$

sehingga

$$n + m = 2s + 2st - 1$$

Misal f sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada T_n dengan konstanta ajaib k.

Maka himpunan label yang digunakan untuk melabel titik-titik T_n adalah $\{1,3,5,\dots,2s+2st-1\}$,

dan himpunan label yang digunakan untuk melabel sisi-sisi T_n adalah $\{2,4,6,\dots,2s+2st-2\}$.

Maksimum jumlah bobot titik-titik daun T_n adalah

$$\{(2s+1)+(2s+3)+(2s+5)+\cdots+(2s+2st-1)\}+\{(2s)+(2s+2)+(2s+4)+\cdots+(2s+2st-2)\}$$

$$= st(2st+4s-1)$$

Karena banyak titik daun T_n adalah st dan bobot setiap titik T_n adalah k, maka jumlah bobot titik-titik daun T_n adalah kst. Sehingga

$$kst \le st(2st+4s-1)$$

Ekuivalen dengan

$$k \le 2st + 4s - 1 \qquad (1)$$

Minimum jumlah bobot titik-titik internal T_n muncul jika label-label terkecil $\{2,4,6,\dots,2s-2\}$ dijadikan label-label sisi internal (sisi-sisi yang tidak terkait dengan titik daun) T_n (sebab label-label sisi akan ditambahkan dua kali).

dan sisi-sisi yang terkait titik-titik daun dilabel dengan

$$\{2s, 2s+2, 2s+4, \dots, 2s+2st-2\}$$

dan titik-titik internal dilabel dengan

$$\{1,3,5,7,\dots,2s-1\}$$

sehingga minimum jumlah bobot titik-titik internal T_n adalah

$$\{1+3+5+7+\cdots+2s-1\}$$
$$+\{2s+(2s+2)+\cdots+2s+2st-2\}$$
$$+2\{2+4+6+\cdots+(2s-2)\}$$
$$= s(t^2s+2ts-t+3s-2)$$

Karena banyak titik internal T_n adalah s dan bobot setiap titik adalah k, maka jumlah bobot titik internal T_n adalah sk. Sehingga

$$sk \ge s(t^2s+2ts-t+3s-2)$$

Bagi kedua ruas dengan s diperoleh

$$k \ge t^2s+2ts-t+3s-2 \qquad (2)$$

Dari (1) dan (2), diperoleh

$$t^2s+2ts-t+3s-2 \le 2st+4s-1 \qquad (3)$$

Ketaksamaan (3) merupakan syarat perlu agar T_n memiliki pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Sehingga jika ketaksamaan (3) tidak dipenuhi maka T_n tidak memiliki pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Ketaksamaan (3) tidak dipenuhi, jika

$$t^2s+2ts-t+3s-2 > 2st+4s-1$$

$$\Leftrightarrow \qquad t^2s-t-s-1>0$$

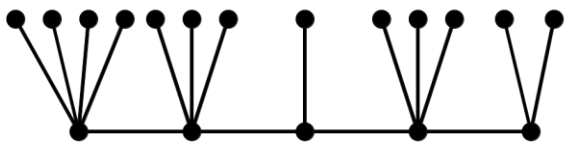
Karena $t>0, s>0$,

$$t > \frac{1+\sqrt{1+4s(s+1)}}{2s} > \frac{1+s}{s}$$

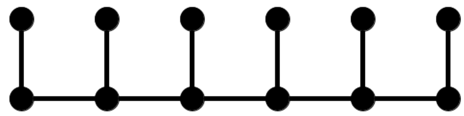
Dengan demikian, teorema terbukti. ∎

Misalkan $P_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sebuah lintasan dengan n titik. Tambahkan sebanyak $m_i \ge 0$ titik-titik daun (anting) $u_{i,j}$, $1 \le j \le m_i$, pada setiap titik v_i, $1 \le i \le n$, maka graf yang dihasilkan dinamakan ulat bulu (*Caterpillar*), dilambangkan dengan $P_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Jika $\forall i, 1 \le i \le n, m_i = 1$, maka $P_n(1,1,\dots,1)$ disebut sebuah sisir (*comb*), dan dilambangkan SP_n atau $P_n(1^{(n)})$.

Sebagai contoh graf ulat bulu $P_5(4,3,1,3,2)$ dan graf sisir SP_6, secara berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 3.6 (a) dan 3.6 (b) berikut



$P_5(4,3,1,3,2)$
Gambar 3.6 (a)



SP_6
Gambar 3.6 (b)

Catatan: Perhatikan bahwa graf sisir SP_n adalah sebuah pohon dengan $2n$ (genap) titik, maka berdasarkan Teorema 3.4, SP_n bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Tetapi, jika ditambahkan sebuah sisi (titik) daun terkait ke titik yang berderajat dua, maka graf baru merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, seperti yang akan dibuktikan berikut.

Teorema 3.6:

Misalkan graf G diperoleh dari sisir SP_n dengan menambah sebuah titik daun (anting) dan berhubungan langsung ke sebuah titik berderajat dua di SP_n. Maka G graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

Bukti:

Perhatikan bahwa

$$G = P_n(2,1,1,\dots,1)$$

Misalkan himpunan titik-titik internal G adalah

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

dan himpunan titik-titik daun G adalah

$$B = \{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{31}, \dots, u_{n1}\}$$

Maka

$$V(G) = A \cup B$$

dan

$$E(G) = \{v_i v_{i+1} / 1 \le i \le n-1\} \cup \{v_1 u_{11}, v_1 u_{12}, v_2 u_{21}, \dots, v_n u_{n1}\},$$

sehingga

$$|V(G)| = |A| + |B| = n + (n+1) = 2n + 1$$

dan

$$|E(G)| = 2n$$

Dengan demikian

$$|V(G)| + |E(G)| = 4n + 1.$$

Konstruksi fungsi f sebagai berikut:

$$f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,3,\dots,4n+1\}$$

sedemikian hingga,

i) $f(v_i v_{i+1}) = 2n - 2i$, $1 \le i \le n-1$

ii) $f(v_1 v_{12}) = 2n$

iii) $f(v_i v_{i1}) = 2n + 2i$, $1 \le i \le n$

iv) $f(u_{i1}) = 4n + 1 - 2i$, $1 \le i \le n$

v) $f(u_{12}) = 4n + 1$

vi) $f(v_i) = 2i - 1$, $1 \le i \le n$

Perhatikan dari i) sd vi), secara berturut-turut, himpunan label yang dipakai adalah :

$A = \{2,4,6,\dots,2n-2\}$,

$B = \{2n\}$,

$C = \{2n+2, 2n+4, \dots, 4n\}$,

$D = \{2n+1, 2n+3, \dots, 4n-1\}$,

$E = \{4n+1\}$,

$F = \{1,3,5,\dots,2n-1\}$

jelas bahwa himpunan-himpunan ini saling lepas dan gabungannya adalah

$$\{1,2,3,\dots,4n+1)$$

Sehingga, $\forall x_1, x_2 \in V(G) \cup E(G)$ dengan $x_1 \ne x_2$, maka $f(x_1) \ne f(x_2)$. Dengan demikian f adalah fungsi bijektif. Karena $|V(G)| = 2n+1$ dan $|E(G)| = 2n$, berdasarkan Lemma 3.1 ,

$$k = 1 + 2(2n) + \tfrac{2n}{2n+1} + \tfrac{(2n)^2}{2n+1}$$
$$= 6n + 1$$

Selanjutnya, ditunjukkan bobot label disetiap titik G adalah $k = 6n + 1$.

Titik-titik internal: $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$.

- $w_f(v_1) = f(v_1) + f(v_1 v_2) + f(v_1 u_{11}) + f(v_1 u_{12})$
  $= 1 + (2n-2) + (2n+2) + 2n = 6n + 1$
- $\forall i, 2 \le i \le n-1$,
  $w_f(v_i) = f(v_i) + f(v_i v_{i+1}) + f(v_{i-1} v_i) + f(v_i u_{i1})$
  $= (2i-1) + (2n-2i) + (2n-2i+2)$
  $+ (2n+2i)$
  $= 6n + 1$
- $w_f(v_n) = f(v_n) + f(v_{n-1} v_n) + f(v_n u_{n1})$
  $= (2n-1) + 2 + 4n$
  $= 6n + 1$

Titik-titik daun (anting): u_{12} ; u_{i1} , $1 \le i \le n$.

- $w_f(u_{12}) = f(u_{12}) + f(v_1 u_{12})$
  $= (4n+1) + 2n = 6n + 1$
- $\forall i, 1 \le i \le n$
  $w_f(u_{i1}) = f(u_{i1}) + f(v_i u_{i1})$
  $= (4n + 1 - 2i) + (2n + 2i)$
  $= 6n + 1$

Perhatikan bahwa,

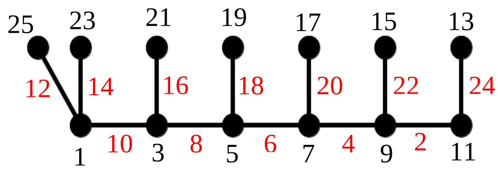
$f(V(G)) = D \cup E \cup F$

$= \{1,3,5,\dots,2n-1, 2n+1, \dots, 4n-1, 4n+1\}$

Sehingga, berdasarkan Definisi 2.5, f adalah sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada G.

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada graf G yang diperoleh dari SP_6, dapat dilihat pada Gambar 3.7 berikut. (Menggunakan definisi f pada pembuktian teorema).



$G = P_6(2,1,1,1,1,1)$

Gambar 3.7 ,

Perhatikan bahwa konstanta ajaibnya $k = 6n + 1 = 37$.

Dalam teorema berikut, derajat maksimum dari pohon T_n dengan n titik, dijadikan syarat apakah T_n graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil atau bukan. Ingat bahwa pohon tak trivial dengan derajat maksimum Δ mempunyai paling sedikit Δ titik berderajat satu (titik daun / anting).

Teorema 3.7:

Jika T_n pohon dengan derajat maksimum Δ, maka T_n bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil apabila

$$\Delta > \frac{1}{2}(\sqrt{1+16n}-3)$$

Bukti :

Misal $v \in V(T_n)$ dengan $d(v) = \Delta$ dan f sebuah pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada T_n. Karena label titik v ganjil dan sebanyak Δ sisi T_n terkait di titik v masing-masing berlabel genap, maka

$$\begin{aligned} k = w_f(v) &\geq 1 + 2 + 4 + \cdots + 2\Delta \\ &= 1 + \frac{\Delta}{2}(2 + 2\Delta) \\ &= 1 + \Delta(\Delta + 1) \end{aligned}$$

sehingga

$$k \geq 1 + \Delta(\Delta + 1) \quad (1)$$

Karena derajat maksimum T_n adalah Δ, maka T_n memiliki paling sedikit Δ titik daun.

Karena bobot setiap titik daun adalah k dan label setiap titik daun ganjil dan label setiap sisi T_n genap, maka maksimum jumlah bobot di titik-titik daun ini paling besar jumlah dari Δ label sisi terbesar dan Δ label-titik terbesar. Sehingga

$$\begin{aligned} k\,\Delta &\leq \{(2n-2\Delta) + (2n-2\Delta+2) + \cdots + (2n-2\Delta \\ &\quad +2\Delta-2)\} + \{(2n-2\Delta+1) + (2n-2\Delta+3) \\ &\quad + \cdots + (2n-2\Delta+2\Delta-1)\} \\ &= \frac{2\Delta}{2}\{(2n-2\Delta) + (2n-1)\} \\ &= \Delta\{4n - 2\Delta - 1\} \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan Δ, diperoleh

$$k \leq 4n - 2\Delta - 1 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2),

$$1 + \Delta(\Delta+1) \leq 4n - 2\Delta - 1$$

Sehingga pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil tidak ada pada pohon T_n, apabila

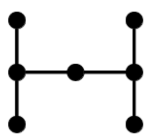
$$\begin{aligned} & 1 + \Delta(\Delta+1) > 4n - 2\Delta - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \Delta^2 + 3\Delta + 2 - 4n > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \Delta > \frac{-3+\sqrt{1+16n}}{2} \ \vee\ \Delta < \frac{-3-\sqrt{1+16n}}{2} \end{aligned}$$

Karena $\Delta \geq 0$, maka

$$\Delta > \frac{\sqrt{1+16n}-3}{2}$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ∎

Catatan : Teorema 3.4 dan Teorema 3.7 memberikan syarat perlu bagi pohon T_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Tetapi, bukan syarat cukup, ditunjukkan oleh graf T_7 berikut



T_7

Dalam hal ini, $n = 7$ (ganjil) dan $\Delta = 3 \leq \frac{\sqrt{1+16n}-3}{2}$, tetapi T_7 bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

4. PENUTUP

a. Simpulan

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa :

1). Jika G sebuah graf dengan n titik, m sisi dan mempunyai pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil dengan konstanta ajaib k, maka

$$k = 1 + 2m + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n}$$

2). Lintasan dengan n titik P_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil jika dan hanya jika n ganjil.

3) Sebuah bintang $S_{n+1} = K_{1,n}$ merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil jika dan hanya jika $n = 2$.

4). Jika pohon dengan n titik T_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, maka n ganjil.

5). Misalkan T_n pohon dengan n titik dan derajat maksimum Δ. Jika $\Delta > \frac{1}{2}(\sqrt{1+16n}-3)$, maka T_n bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

6). Misal pohon T_n mempunyai s titik internal dan st titik daun. Jika $t > \frac{s+1}{s}$, maka pohon T_n bukan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

7). Caterpillar $P_n(2,1,1,\ldots,1)$ adalah graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil.

b. Saran

Dari simpulan diatas, hanya Caterpillar $P_n(2,1,1,\ldots,1)$ yang ditunjukkan merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil. Secara umum, pertanyaan apakah Caterpillar $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, masih belum terjawab.

Lintasan, bintang, maupun caterpillar adalah beberapa kelas dari pohon. Menentukan karakterisasi (syarat perlu dan cukup) agar pohon dengan n titik T_n merupakan graf pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil, masih merupakan "masalah terbuka". Selain itu, pembaca juga dapat mengkonstruksikan pelabelan total ajaib titik berlabel ganjil pada kelas-kelas graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Gallian, J. A. (2019). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 3(DynamicSurveys), DS6.

Ilmayasinta, Nur. (2019). DIMENSI METRIK PADA GRAF BUKU GANDA. Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika, 1(1), 21-27.

Irawati, Novi, dan Heri, Robertus. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph K_n dengan n Ganjil. Jurnal Matematika, 13(3), 136 – 142.

Irawati, Novi, dan Heri, Robertus. (2011). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph K_n dengan n Genap. Semantik.

Kotzig. A., & Rosa, A. (1970). Magic Valuations of Finite Graphs, *Canadian Mathematical Bulletin*, 13(4), 451-461.

MacDougall, J. A., Miller, M., Slamin & Wallis, W. D. (2002). Vertex-Magic Total Labelings of Graphs. *Utilitas Mathematics*, 61, 3-21.

Nagaraj, C. T., Ponnappan, C. Y., & Prabakaran, G. (2017). Odd Vertex Magic Total Labeling of Trees. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, *52*(6), 374-379.

Simangunsong, Johan Wijaya dan Mulyono. (2015). Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Petersen Yang Diperumum. Jurnal Karismatika, 1(3), 11-24.

Wardhani, Devy Anggun & Budayasa, I Ketut. (2019). Pelabelan Anggun-Ajaib-Sisi Super pada Graf Petersen yang Diperumum. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *7*(2), 1-5.