MATHunesa

Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 8 No. 2 Tahun 2020*

ISSN 2716-506X

MODEL MATEMATIKA MANGSA PEMANGSA TIGA SPESIES DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE II DAN HOLLING TIPE IV SERTA PEMANENAN PADA POPULASI MANGSA

Tyan Hidayatus Sholihah

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya

e-mail : tyansholihah16030214031@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Di alam ini, makhluk hidup saling ketergantungan satu dengan lainnya. Setiap makhluk hidup membutuhkan makhluk hidup lain, sehingga terbentuklah interaksi antar keduanya. Salah satu interaksi yang terjadi di ala mini adalah interaksi mangsa pemangsa. Interaksi mangsa dan pemangsa dalam dunia ekologi merupakan hal yang penting dan menarik untuk dibahas. Oleh karena itu banyak peneliti membuat model matematika mangsa pemangsa untuk mengetahui interaksi dari mangsa pemangsa tersebut. Pada penelitian ini melibatkan tiga spesies, yakni dua spesies mangsa dan satu spesies pemangsa. Penelitian ini membahas mengenai perilaku mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi mangsa kedua. Pada penilitian ini fungsi Holling tipe IV digunakan ketika pemangsa memangsa mangsa pertama, dan fungsi respon Holling tipe II digunakan ketika pemangsa memangsa mangsa kedua. Penelitian ini merupakan jenis penelitian kuantitatif yang mengkaji teori dan juga konsep yang berkaitan dengan permasalahan yang dibahas pada penelitian ini melalui berbagai sumber pustaka. Artikel ini khusus membahas tentang konstruksi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi mangsa kedua. Model yang diperoleh dari hasil konstruksi pada penelitian ini terdapat pada persamaan (21).

Kata kunci: Fungsi respon, Holling tipe II, Holling tipe IV, pemanenan, sistem mangsa pemangsa.

Abstract

In this world, living things are interdependent. Every living creature needs another living creature, so there is an interaction between the two. One of interactions that occur in mini style is predator prey interaction. The interaction of prey and predator in the world of ecology is an important and interesting thing to discuss. Therefore many researchers make mathematical models of predator prey to find out the interacions of these prey predators. In this study involved three species, namely two species of prey and one species of predator. Concerning predatory prey behavior with Holling type II, and Holling type IV response functions and harvesting in second prey populations. In this study, the type IV Holling function is used when the predator preys on the first prey, and the type II Holling response function is used when the predator preys on the second prey. This research is a type of quantitative research that examines theories and concepts relating to the problems discussed in this study through various literature sources. This article specifically discusses concerning the construction of predator prey models with Holling type II, and Holling type IV response functions as well as harvesting in the second prey population models obtained from the results of construction in this study are in equation (21).

Keywords : Respon Function, Holling type II, Holling type IV, harvesting, prey predator system.

1. PENDAHULUAN

Di alam ini, makhluk hidup saling ketergantungan satu dengan lainnya. Setiap makhluk hidup membutuhkan makhluk hidup lain, sehingga terbentuklah interaksi antar keduanya. Interaksi adalah suatu jenis tindakan yang terjadi ketika dua atau lebih objek mempengaruhi atau memiliki efek satu sama lain. Di antara individu tersebut akan terjadi berbagai kemungkinan tipe interaksi antara individu yang satu dengan individu lainnya yaitu mutualisme atau simbiosis, kompetisi, komensalisme, amensalisme, dan predasi (Neuhauser & Roper, 1962). Predasi atau pemangsaan adalah salah satu interaksi yang sering terjadi dialam ini, dimana pemangsa akan memangsa mangsa demi kelangsungan hidupnya.

Dalam cabang ilmu matematika terapan, setiap fenomena sehari-hari dapat dibentuk model matematikanya. Begitupula dengan interaksi mangsa pemangsa. Hal tersebut berguna agar kestabilan jumlah populasi mangsa dan pemangsa dapat diamati dalam bentuk perumusan yang sistematis, sehingga dapat digunakan untuk mengendalikan populasi mangsa dan pemangsa agar tidak terjadi kepunahan.

Model mangsa pemangsa pada awalnya diusulkan oleh Alfred J. Lotka pada tahun 1925 dan Vita Volterra pada tahun 1926, yang kemudian dikenal dengan model Lotka-Volterra. Model mangsa pemangsa adalah Model

Lotka-Volterra diformulasikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial yang seiring perkembangannya terus mengalami perubahan. Dalam ekologi, fungsi respon adalah jumlah mangsa yang berhasil diserang per predator sebagai fungsi kepadatan mangsa (Solomon, 1949). Pada tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang kemudian dikenal dengan istilah fungsi respon Holling.

Penelitian tentang interaksi mangsa pemangsa ini telah banyak dilakukan dan masih terus dikembangkan hingga saat ini. Salah satunya adalah penelitian oleh (Madhusudanan & Vijaya, 2016) tentang *Stability Analysis In Prey-Predator System With Mixed Functional Response.* Pada penelitian tersebut membahas kestabilan mangsa pemangsa tiga spesies dengan dua spesies mangsa, dan satu spesies pemangsa dengan menggunakan fungsi respon Holling tipe I daan Holling tipe IV. Penelitian (T.K.Kar dkk, 2009) tentang *A Bio-Economic Model Of Two-Prey One-Predator Sistem* yang menggunakan fungsi respon Holling tipe I dan Holling tipe II dalam penelitianya. Penelitian lainnya seperti (Zhang dkk, 2007) tentang model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies dengan pemanenan pada populasi mangsa pertama dan populasi pemangsa.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka peniliti tertarik untuk menkaji model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi mangsa kedua. Pada penelitian ini akan dikonstruksikan suatu model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies, yaitu dua spesies mangsa dan satu spesies pemangsa yang mengacu pada (Madhusudanan & Vijaya, 2016). Selain itu, pada penelitian ini juga dilakukan pemanenan terhadap populasi mangsa kedua yang mengacu pada (T.K.Kar dkk, 2009). Pada penelitian ini akan diasumsikan bahwa tidak ada interaksi antar kedua mangsa, dan populasi mangsa pertama mengalami pertumbuhan secara logistik. Dalam model mangsa pemangsa ini juga menggunakan dua fungsi respon yang berbeda, yaitu fungsi respon Holling tipe IV ketika pemangsa memangsa mangsa pertama, dan fungsi respon Holling tipe II ketika pemangsa memangsa mangsa kedua. Tujuan dari penilitian ini adalah untuk mengkontruksi model mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II, dan Holling tipe IV, serta pemanenan pada populasi mangsa kedua.

2. KAJIAN TEORI

Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial biasa merupakan kumpulan dari beberapa persamaan diferensial. Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ menyatakan turunan pertama x terhadap t, maka sistem persamaan diferensial dapat ditulis sebagai berikut (Ross, 1989):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Bentuk lain dari sistem (1) adalah:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

Berdasarkan kelineararannya sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial non linear.

Pertumbuhan Logistik

Ukuran suatu populasi mempengaruhi laju pertumbuhan populasi tersebut. Jika diasumsikan secara matematis, maka fungsi ukuran populasi adalah laju pertumbuhan populasi itu sendiri, sehingga

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{3}$$

$f(x)$ adalah fungsi turun jika x bertambah besar. Karena populasi tumbuh secara eksponensial maka laju pertumbuhan perkapita turun sebesar konstanta b setiap individu yang ditambah ke dalam populasi. Lalu misalkan $b = \frac{r}{K}$, dengan r dan K merupakan konstanta positif. r adalah laju pertumbuhan intrinsik populasi, sedangkan K adalah ukuran populasi maksimal yang dapat ditampung oleh lingkungan di mana populasi berada. Maka model persamaan diferensial untuk pertumbuhan populasi akan menjadi:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right), \tag{4}$$

(Brauer & Castillo-Chaves, 2010).

Model Mangsa Pemangsa

Populasi mangsa dan pemangsa, masing-masing pada waktu t dinotasikan sebagai x dan y. Diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut dalam membangun model interaksi kedua spesies:

1. Ketika pemangsa tidak ada, maka jumlah populasi saat adalah jumlah mangsa saat itu; sehingga $\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$, dengan a adalah tingkat pertumbuhan mangsa.
2. ketika mangsa tidak ada, maka pemangsa menjadi punah karena tidak memiliki sumber makanan; sehingga $dy/dt = -cy, c > 0$, dengan c adalah tingkat kematian predator.
3. Pertemuan antara pemangsa dan mangsa sebanding jumlahnya dengan produk populasi mereka. Setiap pertemuan cenderung membuat pertumbuhan pemangsa meningkat dan menghambat

pertumbuhan mangsa. Dalam hal ini tingkat pertumbuhan pemangsa meningkat sebesar γx , sedangkan tingkat pertumbuhan mangsa berkurang sebesar $-\alpha xy$, di mana α dan γ adalah ukuran dari efek interaksi antar spesies mangsa dan pemangsa, dengan α dan γ adalah konstanta positif.

Sehingga persamaan yang terbentuk berdasarkan asumsi-asumsi diatas adalah:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \qquad (6)$$

(Boyce dkk, 1977).

Fungsi Respon

Fungsi respon Holling yaitu tingkat predasi (daya makan) pemangsa terhadap jumlah makanan (mangsa). Fungsi respon yang diperkenalkan oleh Holling yaitu fungsi respon Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III.

Pada fungsi respon Holling tipe I terdapat hubungan linier antara jumlah maksimum mangsa yang terbunuh dan kepadatan mangsa, di mana ketika populasi mangsa meningkat maka daya konsumi pemangsa pun meningkat, sehingga menyebabkan populasi predator juga meningkat. Persamaan dari fungsi respon Holling tipe I diberikan sebagai berikut (Wang dkk, 2001).

$$p(x) = mx, \qquad (7)$$

dimana $p(x)$ menunjukkan fungsi respon Holling tipe I, m menunjukkan laju pemangsaan mangsa oleh pemangsa, dan x menunjukkan kepadatan populasi mangsa.

Pada fungsi respon Holling tipe II diasumsikan bahwa pemangsa menghabiskan waktunya pada dua macam kegiatan, yaitu mencari mangsa dan menangani mangsa. Saat kepadatan mangsa tinggi, pemangsa membutuhkan waktu yang sangat sedikit untuk mencari mangsa, dan menghabiskan hampir seluruh waktunya untuk menangani mangsa yang termasuk membunuh, memakan, dan mencerna. Pemangsa kemudian kenyang ketika laju pemangsaan mangsa mencapai tingkat tertinggi (Denny, 2014). Adapun persamaan dari fungsi respon Holling tipe II diberikan sebagai berikut (Wang dkk, 2001).

$$p(x) = \frac{mx}{A+x}, \qquad (8)$$

di mana A adalah tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa.

Fungsi respon Holling tipe III menyerupai Holling tipe II. Namun pada fungsi respon Holling tipe III terjadi penurunan tingkat pemangsaan ketika kepadatan mangsa rendah. Fungsi respon Holling tipe III merupakan fungsi sigmoidal, di mana ketika populasi mangsa yang dimakan mulai berkurang maka pemangsa akan mencari populasi mangsa yang lain. Persamaan dari fungsi respon Holling tipe III diberikan sebagai berikut (Wang dkk, 2001).

$$p(x) = \frac{mx^2}{A+x^2}, \qquad (9)$$

Fungsi respon Holling tipe I, Holling tipe II, dan Holling tipe III adalah fungsi monoton naik. Namun terdapat juga interaksi mangsa pemangsa yang memiliki sifat yang tidak monoton, yaitu interaksi yang bersesuaian dengan fungsi respon Holling tipe IV. Pada fungsi respon Holling tipe IV, tingkat konsumsi predator menurun pada jumlah mangsa tertentu, hal ini karena adanya sifat bertahan dari mangsa, yaitu ketika populasi mangsa meningkat maka tingkat pertahanan kelompok mangsa juga meningkat, sehingga menyebabkan tingkat predasi menjadi berkurang. Hal tersebut diteliti oleh Monod dan Haldane yang kemudian diperkenalkan sebagai fungsi respon Monod Haldane atau fungsi respon tipe IV. Persamaan dari fungsi respon tipe IV Monod Haldane diberikan sebagai berikut (Agarwal & Pathak, 2012).

$$p(x) = \frac{mx}{A+\gamma x+x^2}, \qquad (10)$$

dimana γ adalah waktu yang diperlukan oleh pemangsa dalam menangani mangsa.

3. METODE

Pada artikel ini khusus membahas tentang konstruksi model penelitian. Sehingga tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah konstruksi model. Konstruksi model dilakukan dengan membentuk sistem persamaan diferensial biasa yang merepresentasikan sistem mangsa pemangsa tiga spesies dengan fungsi respon Holling tipe II dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi mangsa kedua.

4. PEMBAHASAN

Konstruksi Model

Pada penelitian ini menggunakan tiga spesies hewan yang berbeda, yaitu hyena, zebra, dan *catfish*. Ketiga spesies ikan tersebut terbagi menjadi tiga golongan, yaitu mangsa pertama, mangsa kedua, dan *predator* (pemangsa). Sehingga dapat disimpulkan bahwa yang menempati tingkat predator yaitu spesies hyena, sedangkan zebra adalah mangsa pertama, kemudian *catfish* adalah mangsa kedua. Berdasarkan studi literatur, dan pengumpulan data, berikut adalah asumsi yang digunakan dalam konstruksi model dalam penelitian ini:

1. Pertumbuhan populasi pertama adalah pertumbuhan logistik.
2. Pertumbuhan populasi kedua adalah pertumbuhan eksponensial.
3. Tidak ada interaksi antara mangsa pertama dan mangsa kedua.
4. Fungsi respon yang digunakan pada mangsa pertama adalah Holling tipe IV.

5. Fungsi respon yang digunakan pada magsa kedua adalah Holling tipe II.
6. Terdapat kematian alami pada spesies pemangsa.
7. Terdapat perilaku pemanenan pada populasi mangsa kedua.

Secara umum model sistem interaksi mangsa pemangsa dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= p(\bar{x})\bar{x} - q(\bar{x},z)\bar{z} && x(0) > 0 \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= j(\bar{y})\bar{y} - l(\bar{y},\bar{z})\bar{z} && y(0) > 0 \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= m(\bar{x},\bar{z}) + n(\bar{y},\bar{z}) - d\bar{z} && z(0) > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Pada persamaan (11) $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ diasumsikan sebagai populasi mangsa, sedangkan $\bar{z}$ diasumsikan sebagai populasi pemangsa pada waktu $\bar{t}$. Bentuk tingkat pertumbuhan mangsa pertama ketika tidak ada pemangsa dilambangkan dengan $p(\bar{x})\bar{x}$ pada sistem persamaan (11). Pada penelitian ini, pertumbuhan populasi mangsa pertama diasumsikan mengikuti pertumbuhan logistik, sebagai berikut:

$$p(\bar{x}) = r\left(1 - \frac{\bar{x}}{K}\right) \quad (12)$$

dengan:
$r =$ pertumbuhan intrinsik populasi mangsa pertama,
$\bar{x} =$ kepadatan populasi mangsa pertama,
$K =$ daya dukung lingkungan.

Model pertumbuhan logistik digunakan karena adanya batas pertumbuhan yang membatasi populasi makhluk hidup di bumi yaitu daya dukung lingkungan, sehingga suatu populasi tidak mungkin tumbuh secara tidak terkendali dalam kurun waktu yang lama. Dalam hal ini ketika jumlah populasi mangsa melebihi batas maksimum daya dukung lingkungan, maka populasi mangsa akan menurun dan tingkat pertumbuhannya menjadi negatif. Sedangkan ketika jumlah populasi mangsa lebih kecil dari batas maksimum daya dukung lingkungan, maka tingkat pertumbuhan populasi mangsa berbanding lurus dengan ukuran populasi mangsa.

Fungsi $q(\bar{x},\bar{z})$ pada sistem persamaan (11) adalah fungsi predasi mangsa pertama oleh pemangsa. Fungsi respon $q(\bar{x},\bar{z})$ menggunakan fungsi respon Holling tipe IV. Penggunaan fungsi respon ini didasari karena terdapat sifat bertahan populasi mangsa, sehingga ketika populasi mangsa meningkat maka pertahanan kelompoknya pun meningkat. Persamaan fungsi respon Holling tipe IV diberikan sebagai berikut:

$$q(\bar{x},\bar{z}) = \frac{\bar{x}m_1\bar{z}}{A+\gamma x+x^2} \quad (13)$$

dengan m_1 adalah laju pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa, γ adalah waktu yang diperlukan pemangsa dalam menangani mangsa pertama, dan A_1 tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa pertama.

Sehingga secara matematis perubahan kepadatan populasi mangsa dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = r\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{K}\right) - \frac{\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2} \quad (14)$$

dengan:
$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi mangsa pertama terhadap waktu,
$\bar{x} =$ kepadatan populasi mangsa pertama,
$\bar{y} =$ kepadatan populasi mangsa kedua,
$\bar{z} =$ kepadatan populasi pemangsa,
$r =$ pertumbuhan intrinsik populasi mangsa pertama,
$K =$ daya dukung lingkungan bagi mangsa pertama,
$m_1 =$ laju pemangsaan mangsa pertama oleh predator,
$A_1 =$ tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa pertama,
$\gamma =$ waktu yang diperlukan pemangsa dalam menangani mangsa pertama.

Fungsi $j(\bar{y})$ pada sistem persamaan (11) merupakan tingkat pertumbuhan mangsa kedua ketika tidak ada pemangsa. Pada penelitian ini pertumbuhan populasi mangsa kedua diasumsikan mengikuti pertumbuhan eksponensial, sebagai berikut:

$$j(\bar{y}) = \beta\bar{y} \quad (15)$$

dengan β adalah tingkat pertumbuhan intrinsik populasi mangsa kedua.

Populasi mangsa kedua berkurang ketika berinteraksi dan kemudian dimangsa oleh pemangsa. Fungsi $l(\bar{y},\bar{z})$ adalah fungsi respon Holling tipe II yang merupakan fungsi predasi mangsa kedua oleh pemangsa. Fungsi respon Holling tipe II memberikan deskripsi bahwa pemangsa menghabiskan hampir seluruh waktunya untuk menangani mangsa, yang termasuk membunuh, memakan, dan mencerna mangsa. Sehingga persamaan fungsi respon Holling tipe II dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$l(\bar{y},\bar{z}) = \frac{\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} \quad (16)$$

dengan m_2 adalah laju pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa, dan A_2 tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa kedua.

Populasi mangsa kedua selain berkurang karena adanya pemangsaan dari pemangsa, juga diasumsikan berkurang karena adanya pemanenan. Pemanenan pada populasi mangsa kedua menggunakan pemanenan dengan upaya konstan, yang berarti hasil panen akan meningkat secara proporsional di setiap harinya. Dalam hal ini model pemanenan dengan upaya konstan pada penelitian ini dinyatakan sebagai $E\bar{x}$, dengan E merupakan usaha yang dikeluarkan dalam pemanenan populasi mangsa kedua. Secara matematis perubahan kepadatan populasi mangsa kedua adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \beta\bar{y} - \frac{\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} - E\bar{y} \qquad (17)$$

dengan:

$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi mangsa kedua terhadap waku,

$\bar{y} =$ kepadatan populasi mangsa kedua,

$\bar{z} =$ kepadatan populasi pemangsa,

$\beta =$ tingkat pertumbuhan intrinsik populasi mangsa kedua,

$m_2 =$ Laju pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa,

$A_2 =$ Tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa kedua,

$E =$ Usaha yang dikeluarkan dalam pemanenan populasi mangsa kedua.

Fungsi $m(\bar{y},\bar{z})$ pada sistem persamaan (11) merupakan tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru lahir untuk setiap mangsa pertama yang ditangkap ketika adanya predasi antara pemangsa dan mangsa pertama. Fungsi $m(\bar{y},\bar{z})$ menggunakan fungsi respon Holling tipe IV, sebagai berikut:

$$m(\bar{y},\bar{z}) = \frac{\mu_1\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2} \qquad (18)$$

dengan μ_1 adalah tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa pertama yang ditangkap, m_1 adalah laju pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa, A_1 adalah tingkat kejenuhan pemangsa dalam menangani mangsa pertama, dan γ adalah waktu yang diperlukan pemangsa dalam menangani mangsa kedua.

Sedangkan $n(\bar{x},\bar{z})$ adalah tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru lahir untuk setiap mangsa kedua yang ditangkap ketika adanya predasi antara mangsa kedua dan pemangsa. Fungsi $n(\bar{x},\bar{z})$ menggunakan fungsi respon Holling tipe II, sehingga persamaan menjadi sebagai berikut:

$$l(\bar{x},\bar{z}) = \frac{\mu_2\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} \qquad (19)$$

dengan μ_2 adalah tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru lahir untuk setiap mangsa kedua yang ditangkap, m_2 adalah laju pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa, dan A_2 adalah tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa kedua.

Populasi pemangsa pada penelitian ini juga diasumsikan berkurang karena kematian alami. Hal ini terjadi ketika pemangsa tidak berinteraksi dengan mangsa pertama ataupun mangsa kedua. Model penurunan populasi dalam kasus ini dinyatakan sebagai $d\bar{z}$, dengan d adalah tingkat kematian alami pemangsa ketika tidak ada mangsa pertama dan mangsa kedua. Sehingga secara matematis perubahan kepadatan populasi pemangsa adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \frac{\mu_1\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2} + \frac{\mu_2\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} - d\bar{z} \qquad (20)$$

dengan:

$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waku,

$\bar{x} =$ kepadatan populasi mangsa pertama,

$\bar{y} =$ kepadatan populasi mangsa kedua,

$\bar{z} =$ kepadatan populasi pemangsa,

$\mu_1 =$ tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa pertama yang ditangkap,

$\mu_2 =$ Tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baruu terlahir untuk setiap mangsa kedua yang ditangkap,

$m_1 =$ Laju pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa,

$m_2 =$ Laju pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa,

$A_1 =$ Tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa pertama,

$A_2 =$ Tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa kedua,

$\gamma =$ Waktu yang diperlukan pemangsa dalam menangani mangsa pertama,

$d =$ Tingkat mortalitas pemangsa.

Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi mangsa kedua yang akan digunakan dalam penelitian ini diperoleh dengan menggabungkan persamaan (14), (17) dan (20) menjadi sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= r\bar{x}\left(1-\frac{\bar{x}}{K}\right) - \frac{\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2} \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \beta\bar{y} - \frac{\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} - E\bar{y} \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= \frac{\mu_1\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2} + \frac{\mu_2\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}} - d\bar{z} \end{aligned} \qquad (21)$$

dengan:

$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi mangsa pertama terhadap waku,

$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi mangsa kedua terhadap waku,

$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} =$ perubahan kepadatan populasi pemangsa terhadap waku,

$\bar{x} =$ kepadatan populasi mangsa pertama,

$\bar{y} =$ kepadatan populasi mangsa kedua,

$\bar{z} =$ kepadatan populasi pemangsa,

$\mu_1 =$ tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baru terlahir untuk setiap mangsa pertama yang ditangkap,

$\mu_2 =$ Tingkat konversi yang menunjukkan jumlah pemangsa yang baruu terlahir untuk setiap mangsa kedua yang ditangkap,
$m_1 =$ Laju pemangsaan mangsa pertama oleh pemangsa,
$m_2 =$ Laju pemangsaan mangsa kedua oleh pemangsa,
$A_1 =$ Tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa pertama,
$A_2 =$ Tingkat kejenuhan pemangsa dalam memangsa mangsa kedua,
$\gamma =$ Waktu yang diperlukan pemangsa dalam menangani mangsa pertama,
$d =$ Tingkat mortalitas pemangsa.
$E =$ Usaha yang dikeluarkan dalam pemanenan populasi mangsa kedua.

Pada sistem persamaan (21) diberikan syarat kondisi awal semua parameter harus bernilai positif.

5. PENUTUP

Kesimpulan

Model interaksi mangsa pemangsa menggunakan fungsi respon Holling tipe II, dan Holling tipe IV serta pemanenan pada populasi kedua dalam penelitian ini sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} &= r\bar{x}\left(1-\frac{\bar{x}}{K}\right)-\frac{\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2}\\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= \beta\bar{y}-\frac{\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}}-E\bar{y}\\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= \frac{\mu_1\bar{x}m_1\bar{z}}{A_1+\gamma\bar{x}+\bar{x}^2}+\frac{\mu_2\bar{z}m_2\bar{y}}{A_2+\bar{y}}-d\bar{z}\end{aligned} \tag{21}$$

Saran

Untuk penelitian selanjutnya, model pada persamaan (21) tersebut dapat dianalisis dengan mencari titik kesetimbangan sistem dengan solusi ekuilbirum, melakukan linearisasi sistem, menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem, serta melakukan simulasi numerik dengan menggunakan *Matcont* dan *Matlab R2015b*.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, M., & Pathak, R. (2012). *Harvesting and Hopf Bifurcation in a prey-predator model with Holling Type IV Functional Response*. *2*(1), 83–92.

Boyce, W., DiPrima, R., & Braun, M. (1977). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. In *The American Mathematical Monthly* (Eleventh E, Vol. 84, Issue 8). https://doi.org/10.2307/2321040

Brauer, F., & Castillo-Chaves, C. (2010). Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. In *Journal of Chemical Information and Modeling* (Second Edi, Vol. 53, Issue 9). Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Denny, M. (2014). Buzz Holling and the Functional Response. *Bulletin of the Ecological Society of America*, *95*(3), 200–203. https://doi.org/10.1890/0012-9623-95.3.200

Ross, S. L. (1989). *Introduction to Ordinary Differential Equations* (Fourth). Wiley.

Solomon, M. E. (1949). The Natural Control of Animal Populations. *The Journal of Animal Ecology*, *18*(1), 1. https://doi.org/10.2307/1578

T.K.Kar, S.K.Chattopadhyay, & KR.Pati, C. (2009). *A Bio-Economic Model Of Two-Prey One-Predaor System* (pp. 1411–1427).

V. Madhusudanan, S.Vijaya. (2016). *Stability analysis in prey-predator system with mixed functional response. Word Journal of Engineering,* 13(4), 364-369. https://doi.org/10.1108/WJE-08-2016-048

Wang, Q., Fan, M., & Wang, K. (2001). Dynamics of a class of nonautonomous semi-ratio-dependent predator-prey systems with functional responses. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *278*(2), 443–471. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00718-7

Wiggins, S. (2003). Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. In *The Mathematical Gazette* (Second Edi, Vol. 75, Issue 472). Springer-Verlag New York. https://doi.org/10.2307/3620310.