

**BILANGAN PEWARNAAN HARMONIS PADA GRAF BERARAH**

**Santi Indriani**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
 e-mail : santiindriani16030214029@mhs.unesa.ac.id

**I Ketut Budayasa**

Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
 e-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

**Abstrak**

Misalkan  $D$  graf berarah dengan  $n$  titik dan  $m$  busur. Fungsi  $f: V(D) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$  dimana  $k \leq n$  disebut pewarnaan harmonis pada  $D$  jika untuk setiap dua busur berbeda,  $xy$  dan  $uv$  pada  $D$ , pasangan terurut  $(f(x), f(y)) \neq ((f(u), f(v)))$ . Untuk setiap busur  $uv$  pada  $D$ ,  $(f(u), f(v)) \neq (i, i)$  dan  $|R_f| = k$ , maka  $f$  disebut pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$ . Bilangan pewarnaan harmonis sejati pada graf berarah  $D$ , dinotasikan dengan  $\vec{\chi}_h(D)$ , yaitu minimum  $k$  sedemikian hingga ada pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada graf berarah  $D$ . Permasalahan utama dalam skripsi ini adalah menentukan nilai eksak dari bilangan pewarnaan harmonis sejati pada graf berarah. Pada skripsi ini, diperoleh bilangan pewarnaan harmonis sejati pada beberapa kelas graf berarah  $D$ , meliputi graf komplet berorientasi ( $\vec{K}_n$ ), lintasan berarah ( $\vec{P}_n$ ), sikel berarah ( $\vec{C}_n$ ), bintang berarah ( $\vec{S}_n$ ), roda berarah ( $\vec{W}_n$ ), dan pohon berarah ( $\vec{T}_n$ ).

**Kata Kunci:** Pewarnaan harmonis sejati, graf berarah.

**Abstract**

Let  $D$  be a directed graph on  $n$  vertices and  $m$  arcs. A function  $f: V(D) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$  where  $k \leq n$  is called be harmonious coloring of  $D$  if for any two arcs,  $xy$  and  $uv$  of  $D$ , the ordered pair  $(f(x), f(y)) \neq ((f(u), f(v)))$ . For any arc  $uv$  in  $D$ ,  $((f(u), f(v)) \neq (i, i)$  and  $|R_f| = k$ , then  $f$  is called a  $k$ -proper-harmonious-coloring of  $D$ . Proper harmonious coloring number of directed graph  $D$ , denoted by  $\vec{\chi}_h(D)$ , is the minimum  $k$  such that there is a  $k$ -proper-harmonious-coloring of diagraph  $D$ . The main problem in this thesis is determining exact value of  $k$ -proper-harmonious-coloring of diagraph. In this thesis, we established the proper harmonious coloring number of some classes of diagraph, such as the completely oriented graph ( $\vec{K}_n$ ), directed path ( $\vec{P}_n$ ), directed cycle ( $\vec{C}_n$ ), directed star ( $\vec{S}_n$ ), directed wheel ( $\vec{W}_n$ ), and directed tree ( $\vec{T}_n$ ).

**Keywords:** Proper harmonious coloring, diagraph.

**1. PENDAHULUAN**

Matematika adalah salah satu ilmu yang banyak memberikan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan di segala bidang. Salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori graf. Teori graf sebagai salah satu cabang matematika sebenarnya sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang silam. Jurnal pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Euler. Dari segi matematika, pada awalnya teori graf “kurang” signifikan karena kebanyakan dipakai untuk memecahkan teka-teki (*puzzle*), namun akhirnya mengalami perkembangan yang sangat pesat yaitu terjadi pada beberapa puluh tahun terakhir ini. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasi dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu (Budayasa, 2007).

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang dapat dimodelkan dalam graf. Misal kota-kota dalam suatu daerah dapat direpresentasikan dengan titik pada suatu graf dan jalan yang menghubungkan langsung kota-kota tersebut dapat direpresentasikan dengan sisi pada suatu graf, sehingga jaringan jalan yang menghubungkan kota-kota dapat dimodelkan dalam graf.

Graf  $G$  terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  objek-objek yang disebut titik  $G$  dan himpunan berhingga (mungkin kosong)  $E(G)$  yang elemen-elemennya disebut sisi  $G$  sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan tak berurutan titik  $G$ . (Budayasa, 2007).

Banyak hal yang dikaji dalam teori graf, salah satunya yaitu pewarnaan, baik pewarnaan titik maupun pewarnaan sisi. Pewarnaan graf mempunyai banyak aplikasi dalam kehidupan. Misalnya dalam pembuatan

jadwal suatu kegiatan, penentuan frekuensi radio *mobile*, pembagian tugas, penempatan komoditas tertentu yang efektif dan efisien, pengkontruksian jaringan listrik, pembuatan rancangan percobaan yang valid dalam statistika dan sebagainya. Dalam jurnal ini yang akan dibahas adalah pewarnaan titik pada graf berarah yang selanjutnya akan membahas pewarnaan harmonis dan bilangan pewarnaan harmonis pada graf berarah.

Graf berarah  $D$  adalah suatu pasangan dua himpunan  $V(D)$  yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik  $D$  dan  $\Gamma(D)$  yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur  $D$  sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dua titik (Budayasa, 2007). Graf berarah mempunyai banyak aplikasi dalam kehidupan. Misalnya dalam pertandingan sepak bola antar dua tim dan pembuatan sistem alur lalu lintas.

Misalkan  $D$  graf berarah dengan  $n$  titik dan  $m$  busur. Fungsi  $f:V(D) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$  dimana  $k \leq n$  disebut pewarnaan harmonis pada  $D$  jika untuk setiap dua busur berbeda,  $xy$  dan  $uv$  pada  $D$ , pasangan terurut  $(f(x), f(y)) \neq ((f(u), f(v)))$ . Jika untuk setiap busur  $uv$  pada  $D$ ,  $(f(u), f(v)) \neq (i, i)$  dan  $|R_f| = k$ , maka  $f$  disebut pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$ . Minimum  $k$ , sedemikian hingga ada pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$  disebut bilangan pewarnaan harmonis sejati pada graf berarah  $D$ , dinotasikan dengan,  $\overline{\chi}_h(D)$  (Hegde & Castelino, 2015). Pewarnaan harmonis mempunyai banyak aplikasi dalam kehidupan. Misalnya pada bidang transportasi yaitu sistem gelombang radio dalam navigasi udara. Dalam hal ini digunakan sebagai sistem pemandu saat kondisi cuaca buruk dimana titik mewakili radio *beacons* dan busur sebagai gelombang radio.

Dalam jurnal ini, secara khusus akan dibahas bilangan pewarnaan harmonis sejati dari beberapa kelas graf berarah  $D$ , meliputi graf komplet berorientasi, lintasan berarah, sikel berarah, bintang berarah, roda berarah, dan pohon berarah.

**2. KAJIAN TEORI**

**Graf Berarah**

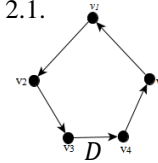
**Definisi 2.1:**

Graf berarah  $D$  adalah suatu pasangan dua himpunan  $V(D)$  yaitu himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik  $D$  dan  $\Gamma(D)$  yaitu himpunan berhingga (boleh kosong) yang anggota-anggotanya disebut busur  $D$  sedemikian hingga setiap busur merupakan pasangan berurutan dua titik  $D$ . Jika  $v_1$  dan  $v_2$  adalah dua titik  $D$  dan  $\tau = (v_1, v_2)$  adalah busur  $D$ , maka  $\tau$  disebut busur keluar dari titik  $v_1$  disimbolkan dengan  $od_{v_1}$  dan  $\tau$  disebut busur masuk titik  $v_2$  disimbolkan dengan  $id_{v_2}$ . Untuk efisiensi, busur  $\tau =$

$(v_1, v_2)$  sering ditulis  $\tau = v_1 v_2$  atau  $(1,2)$  (Budayasa, 2007).

**Contoh 2.1:**

Misalkan graf berarah  $D = ((V(D), \Gamma(D)))$  dengan  $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $\Gamma(D) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$  yang dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf berarah  $D$

**Teorema 2.1 (Teorema Jabat Tangan) :**

Jika  $G$  graf, maka  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$

Sebagai akibat dari Teorema 2.1 adalah Akibat 2.2

**Akibat 2.2 :**

Jika  $G$  graf, maka banyaknya titik  $G$  berderajat ganjil adalah genap (Budayasa, 2007).

**Teorema 2.3:**

Misalkan graf berarah  $D$  terhubung lemah dengan paling sedikit satu busur. Graf  $D$  merupakan graf Euler jika dan hanya jika  $id(v) = od(v), \forall v \in V(G)$  (Budayasa, 2007).

**Pewarnaan**

**Definisi 2.2:**

Misalkan  $G$  graf. Sebuah pewarnaan pada graf  $G$  adalah sebuah fungsi  $f:V(D) \rightarrow X$ , dimana  $X$  adalah himpunan warna, sehingga  $f(u) \neq f(v)$  untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$  (Hegde & Castelino, 2015).

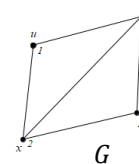
**Pewarnaan-  $k$**

**Definisi 2.3:**

Misalkan  $G$  graf. Pewarnaan-  $k$  pada  $G$  adalah pewarnaan semua titik  $G$  dengan menggunakan  $k$  warna sedemikian hingga setiap dua titik  $G$  yang berhubungan langsung mendapatkan warna berbeda. Jika  $G$  memiliki pewarnaan-  $k$ , maka  $G$  dikatakan dapat diwarnai dengan  $k$  warna. Pewarnaan-  $k$  dari graf  $G$  biasanya ditunjukkan dengan melabel titik-titik  $G$  dengan warna  $1,2,3, \dots, k$  (Budayasa, 2007).

**Contoh 2.2:**

Titik-titik pada graf  $G$  diwarnai dengan 4 warna dengan titik-titik yang berhubungan langsung diwarnai dengan warna yang berbeda. Pewarnaan titik graf  $G$  dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Pewarnaan titik pada graf  $G$

**Bilangan Kromatik Graf**

**Definisi 2.4:**

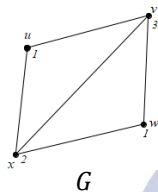
Misalkan  $G$  graf. Bilangan kromatik graf  $G$ , dilambangkan dengan  $\chi(G)$ , didefinisikan sebagai:

$$\chi(G) = \min\{k \mid k \text{ banyaknya warna yang digunakan}\}$$

Sehingga ada pewarnaan- $k$  pada  $G$ . Dengan kata lain, bilangan kromatik graf  $G$  adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan untuk mewarnai semua titik  $G$ , sedemikian hingga setiap dua titik yang berhubungan langsung mendapat warna yang berbeda (Budayasa, 2007).

**Contoh 2.3:**

Graf  $G$  pada Gambar 2.3 dapat diwarnai dengan 3 warna. Titik  $w$  diwarnai dengan warna 1 karena titik  $w$  tidak berhubungan langsung dengan titik  $u$  yang juga diberi warna 1. Karena graf  $G$  tidak dapat diwarnai dengan kurang dari 3 warna, maka bilangan kromatik  $G$  adalah 3, atau  $\chi(G) = 3$ .



Gambar 2.3 Pewarnaan-3 dari graf  $G$

**3. PEMBAHASAN**

Pada bagian akan dibahas konsep bilangan pewarnaan harmonis sejati pada beberapa kelas graf berarah.

**3.1 Konsep Bilangan Pewarnaan Harmonis Graf Berarah**

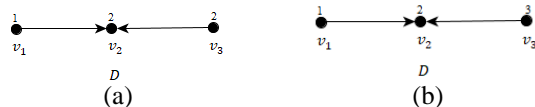
**Definisi 3.1:**

Misalkan  $D$  graf berarah dengan  $n$  titik dan  $m$  busur. Fungsi  $f:V(D) \rightarrow \{1,2,3, \dots, k\}$  dimana  $k \leq n$  disebut pewarnaan harmonis pada  $D$  jika untuk setiap dua busur berbeda,  $xy$  dan  $uv$  pada  $D$ , pasangan terurut  $(f(x), f(y)) \neq ((f(u), f(v)))$ . Jika untuk setiap busur  $uv$  pada  $D$ ,  $(f(u), f(v)) \neq (i, i)$  dan  $|R_f| = k$  dengan  $R_f$  adalah daerah hasil dari fungsi, maka  $f$  disebut pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$ . Minimum  $k$ , sedemikian hingga ada pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$  disebut bilangan pewarnaan harmonis sejati pada graf berarah  $D$ , dinotasikan dengan,  $\overrightarrow{\chi}_h(D)$  (Hegde & Castelino, 2015).

Akibat dari Definisi 3.1 maka dapat disimpulkan bahwa jika  $\overrightarrow{\chi}_h(D) = k$  maka ada pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$ , tetapi jika ada pewarnaan-harmonis-sejati- $k$  pada  $D$  maka  $\overrightarrow{\chi}_h(D) \leq k$ .

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.1.

**Contoh 3.1:**



Gambar 3.1 Graf berarah  $D$

Perhatikan pewarnaan  $f_1:V(D) \rightarrow \{1,2\}$  sedemikian hingga  $f_1(v_1) = 1$ ,  $f_1(v_2) = 2$ , dan  $f_1(v_3) = 2$  pada Gambar 3.1 (a). Dalam hal ini  $f_1$  adalah pewarnaan harmonis karena  $(f_1(v_3), f_1(v_2)) = (2,2)$ .

Selanjutnya Perhatikan pewarnaan  $f_2:V(D) \rightarrow \{1,2,3\}$  sedemikian hingga  $f_2(v_1) = 1$ ,  $f_2(v_2) = 2$ , dan  $f_2(v_3) = 3$  pada Gambar 3.1 (b). Dalam hal ini  $f_2$  adalah pewarnaan harmonis sejati karena  $(f_2(v_1), f_2(v_2)) \neq (f_2(v_3), f_2(v_2))$ . Karena tidak ada pewarnaan harmonis sejati pada  $D$  dengan menggunakan kurang dari 3 warna, maka menunjukkan pewarnaan-harmonis-sejati-3 dan  $\overrightarrow{\chi}_h(D) = 3$ .

Sebagai akibat langsung dari Definisi 3.1, diperoleh Lemma 3.1.

**Lemma 3.1:**

Jika  $F$  adalah subgraf berarah dari graf berarah  $D$ , maka  $\overrightarrow{\chi}_h(F) \leq \overrightarrow{\chi}_h(D)$ . ■

**3.2 Beberapa Hasil Elementer**

**Teorema 3.2:**

Jika  $D$  adalah graf berarah dengan  $n$  titik dan  $\Delta = \max \{id(v), od(v) | v \in V(D)\}$ , maka  $\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi}_h(D) \leq n$ .

**Bukti:**

Misalkan  $D$  graf berarah dengan  $n$  titik dan  $v \in V(D)$  sedemikian hingga  $\max \{id(v), od(v)\} = \Delta$ .

Kasus 1  $id(v) \geq od(v)$ . Dalam hal ini  $\Delta = id(v)$ .

Untuk memperoleh pewarnaan harmonis sejati pada  $D$ , maka titik  $v$  dan semua titik yang berhubungan ke  $v$  di  $D$  harus diwarnai dengan warna berbeda. Sehingga untuk diperlukan lebih dari atau sama dengan  $\Delta + 1$  warna.

Kasus 2  $od(v) \geq id(v)$ . Dalam hal ini  $\Delta = od(v)$ .

Langkah selanjutnya sama dengan kasus 1.

Dari kasus 1 dan kasus 2 diperoleh,  $\overrightarrow{\chi}_h(D) \geq \Delta + 1 \dots (1)$

Jika semua titik  $D$  diwarnai dengan warna berbeda dan banyak titik  $D$  adalah  $n$ , maka ada pewarnaan-harmonis-sejati- $n$  dari  $D$ . Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,  $\overrightarrow{\chi}_h(D) \leq n \dots (2)$

Dari (1) dan (2) disimpulkan bahwa,

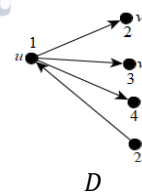
$$\Delta + 1 \leq \overrightarrow{\chi}_h(D) \leq n$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.2.

**Contoh 3.2:**

Untuk  $n = 5$ , dapat dibuat graf berarah  $D$  seperti pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Pewarnaan-harmonis-sejati-4 pada  $D$  Dari Gambar 3.2 jelas bahwa  $\Delta = 3$ , sehingga diperoleh  $4 = \Delta + 1 = \overrightarrow{\chi}_h(D) = 4 \leq n = 5$ .

**Teorema 3.3:**

Jika  $D$  graf berarah dengan  $m$  busur, maka

$$\overrightarrow{\chi}_h(D) \geq \left\lceil \frac{1 + \sqrt{4m + 1}}{2} \right\rceil$$

**Bukti:**

Pikirkan pewarnaan harmonis sejati pada graf berarah  $D$  dengan menggunakan minimum banyaknya warna, misalkan  $k$ . Karena setiap busur ditentukan oleh satu pasang titik  $D$  dan semua busur  $D$  harus berbeda, maka banyaknya pasangan titik yang mungkin adalah  $\binom{k}{2} \cdot 2 = k(k-1)$ , sehingga,  $m \leq k(k-1)$ , ekuivalen dengan  $k^2 - k - m \geq 0$ .

Karena  $k$  adalah banyaknya warna, maka harus bilangan non negatif, maka  $k \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \right\rceil$ .

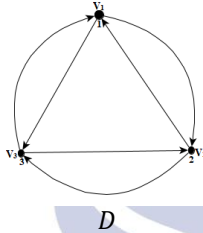
Karena  $k = \overline{\mathcal{X}}_h(D)$ , maka  $\overline{\mathcal{X}}_h(D) \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \right\rceil$ .

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.3.

**Contoh 3.3:**

Graf berarah  $D$  pada Gambar 3.3 memenuhi tanda kesamaan dalam Teorema 3.3.



Gambar 3.3 Pewarnaan harmonis-sejati-3 pada  $D$

Dari Gambar 3.3 jelas bahwa  $D$  memiliki 6 busur. Maka untuk  $m = 6$  diperoleh  $\left\lceil \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \right\rceil = 3 = \overline{\mathcal{X}}_h(D)$ .

**3.3 Bilangan Pewarnaan Harmonis Graf Komplek Berorientasi**

Ingat bahwa graf komplet berorientasi adalah graf berarah yang diperoleh dari  $K_n$  dengan menyisipkan arah pada setiap sisi  $K_n$ , yang disimbolkan dengan  $\vec{K}_n$ .

**Teorema 3.4:**

Jika  $\vec{K}_n$  sebuah graf komplet berorientasi, maka

$$\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_n) = n.$$

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{K}_n$  adalah graf komplet berorientasi dengan  $n$  titik. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2,  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_n) \leq n$ .

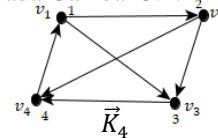
Andaikan  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_n) < n$ . Karena  $\overline{\mathcal{X}}_h$  bilangan bulat, maka  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_n) \leq n - 1$ . Berdasarkan Definisi 3.1, ini berarti ada pewarnaan-harmonis-sejati- $(n - 1)$ . Namakan pewarnaan tersebut dengan  $f$ . Karena  $|V(\vec{K}_n)| = n$ , akibatnya ada 2 titik  $\vec{K}_n$ , misalkan  $u$  dan  $v$  mendapat warna yang sama, namakan warna tersebut dengan  $i$ . Karena  $u, v \in V(\vec{K}_n)$ , maka  $uv \in \Gamma(\vec{K}_n)$  atau  $vu \in \Gamma(\vec{K}_n)$ . Padahal  $(f(u), f(v)) = (i, i)$ . Kontradiksi bahwa  $f$  adalah pewarnaan harmonis sejati. Sehingga,  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_n) = n$ .

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.4.

**Contoh 3.4:**

$\vec{K}_4$  sebuah graf komplet berorientasi dari  $K_4$  yang direpresentasikan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Graf komplet berorientasi dengan 4 titik. Sehingga dari Gambar 3.4, diperoleh  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{K}_4) = 4$ .

**3.4 Bilangan Pewarnaan Harmonis Lintasan Berarah**

**Teorema 3.5:**

Jika  $\vec{P}_n$  lintasan berarah dengan  $n$  titik, maka

$$\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{P}_n) = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2} \right\rceil.$$

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{P}_n$  adalah lintasan berarah dengan  $n$  titik.

Karena  $|V(D)| = n$ , maka  $|\Gamma(D)| = n - 1$ .

Sehingga, berdasarkan Teorema 3.3, diperoleh :

$$\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{P}_n) \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} \right\rceil \dots \dots \dots (1)$$

Misalkan  $k = \left\lceil \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} \right\rceil$ . Sehingga  $k \geq \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2}$ .

Disederhanakan diperoleh :  $k(k - 1) + 1 \geq n$ .

Sehingga  $n \leq k(k - 1) + 1 \dots \dots \dots (2)$

Karena  $k = \left\lceil \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} \right\rceil < \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} + 1$ ,

maka  $2k < \sqrt{4(n-1)+1} + 3$ .

Disederhanakan diperoleh  $(k - 1)(k - 2) + 1 < n \dots \dots (3)$

Dari (2) dan (3), diperoleh :

$$(k - 1)(k - 2) + 1 < n \leq k(k - 1) + 1.$$

Akan ditunjukkan bahwa  $\overline{\mathcal{X}}_h(\vec{P}_n) \leq k$ ,

untuk  $(k - 1)(k - 2) + 1 < n \leq k(k - 1) + 1$ .

Untuk itu pikirkan graf komplet berarah simetrik dengan

$k$  titik, disimbolkan dengan  $\vec{K}_k$ . Jelas bahwa banyaknya

busur dari  $\vec{K}_k$  adalah  $k(k - 1)$ . Pewarnaan harmonis sejati

dari lintasan berarah  $\vec{P}_n$  ekuivalen dengan pewarnaan

sebuah jejak berarah euler pada busur-busur  $\vec{K}_k$  dengan

panjang  $-1$ , dimana  $(k - 1)(k - 2) + 1 < n \leq k(k -$

$1) + 1$ . Untuk itu perlu dibuktikan bahwa ada jejak euler

berarah dengan panjang  $k(k - 1)$  pada  $\vec{K}_k$ .

Untuk itu kita gunakan induksi matematika pada  $k$ .

Untuk  $k = 2$  jelas pernyataan benar.

Asumsikan pernyataan benar untuk  $k = m$ , artinya ada

jejak euler berarah dengan panjang  $m(m - 1)$  di  $\vec{K}_m$ .

Pikirkan  $\vec{K}_m$  dan satu titik  $v$  diluar  $\vec{K}_m$ . Hubungkan titik

$v$  ke semua titik di  $\vec{K}_m$  dengan busur bolak-balik, sehingga

diperoleh  $\vec{K}_{m+1}$ . Akan ditunjukkan ada jejak euler di  $\vec{K}_{m+1}$

dengan panjang  $(m + 1)m$ . Untuk itu, misalkan

$u_1, u_2, \dots, u_m$  adalah titik-titik di  $\vec{K}_m$ . Misalkan  $u_m$  adalah

titik akhir dari jejak euler dengan panjang  $m(m - 1)$  di

$\vec{K}_m$ . Kemudian kita kontruksi jejak euler pada  $\vec{K}_{m+1}$  dengan cara sebagai berikut:

Menelusuri jejak euler pada  $\vec{K}_m$  dengan titik awal dan titik akhir adalah  $u_m$  dengan panjang  $m(m-1)$ , kemudian dilanjutkan dengan menelusuri busur-busur  $u_m v, v u_1, u_1 v, v u_2, u_2 v, \dots, v u_m, u_m v$ . Jadi jejak yang diperoleh adalah jejak euler di  $\vec{K}_{m+1}$  dengan panjang  $m(m-1) + 2m = (m+1)m$ . Berarti terbukti untuk  $k = m + 1$ .

Jadi pernyataan benar untuk semua  $k$ .

Dengan demikian,  $\vec{X}_h(\vec{P}_n) \leq k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} \right\rfloor \dots \dots \dots (4)$

Dari (1) dan (4) diperoleh  $\vec{X}_h(\vec{P}_n) = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4(n-1)+1}}{2} \right\rfloor$ .

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

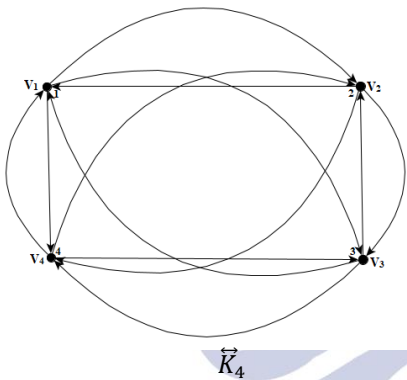
Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.5.

**Contoh 3.5:**

Karena  $(k-1)(k-2) + 1 < n \leq k(k-1) + 1$ , maka untuk  $k = 4$  diperoleh  $7 < n \leq 13$ .

Karena  $n$  bilangan bulat, maka berakibat  $n = \{8,9,10,11,12,13\}$ .

Pewarnaan-harmonis-sejati-4 pada  $\vec{K}_4$  dapat dilihat pada Gambar 3.5.

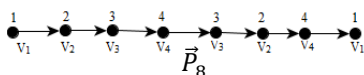


Gambar 3.5 Graf berarah lengkap simetrik dengan pewarnaan-harmonis-sejati-4

Untuk  $n = 8$ ,

Perhatikan jejak berarah dengan 8 titik dan 7 busur pada pewarnaan-harmonis-sejati-4 pada  $\vec{K}_4$  berikut :

$(v_1, v_1 v_2, v_2, v_2 v_3, v_3, v_3 v_4, v_4, v_4 v_3, v_3, v_3 v_2, v_2, v_2 v_4, v_4, v_4 v_1, v_1, v_1 v_4, v_4, v_4 v_2, v_2, v_2 v_1)$ . Pewarnaan pada jejak ini berkorespondensi dengan pewarnaan-harmonis-sejati-4 dari  $\vec{P}_8$  yang dapat dilihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Lintasan berarah dengan pewarnaan-harmonis-sejati-4

Sehingga,  $\vec{X}_h(\vec{P}_8) = 4 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4(8-1)}}{2} \right\rfloor$

**Teorema 3.6:**

Misalkan graf berarah  $D = \vec{P}_1 \cup \vec{P}_2 \cup \dots \cup \vec{P}_i$  merupakan gabungan dari lintasan-lintasan berarah yang saling lepas, dimana  $P_i$  adalah lintasan berarah dengan  $i$  titik, maka

$$\vec{X}_h(D) \geq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2i^2-2i+1}}{2} \right\rfloor$$

**Bukti:**

Misalkan  $D = \vec{P}_1 \cup \vec{P}_2 \cup \dots \cup \vec{P}_i$  dan  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2i^2-2i+1}}{2} \right\rfloor$ ,

maka  $|V(D)| = 1 + 2 + 3 + \dots + i = \frac{i(i+1)}{2}$

dan  $|\Gamma(D)| = 0 + 2 + 3 + \dots + (i-1) = \frac{(i-1)i}{2}$ .

Berdasarkan Teorema 3.3,  $\vec{X}_h(D) \geq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4\left(\frac{(i-1)i}{2}\right)+1}}{2} \right\rfloor$ .

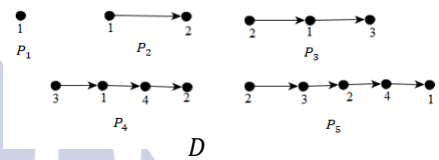
Disederhanakan diperoleh :  $\vec{X}_h(D) \geq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2i^2-2i+1}}{2} \right\rfloor = k$ .

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.6.

**Contoh 3.6:**

Untuk  $i = 5$  dapat dibuat graf berarah  $D = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5$  seperti Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Gabungan lintasan berarah yang saling lepas

Dari Gambar 3.7 diperoleh  $\vec{X}_h(D) = 4 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2(5)^2-2(5)+1}}{2} \right\rfloor$ .

**3.5 Bilangan Pewarnaan Harmonis Sikel Berarah**

**Teorema 3.7:**

Jika  $\vec{C}_n$  adalah sikel berarah dengan  $n$  titik, maka

$$\vec{X}_h(\vec{C}_n) = \begin{cases} k + 1 & \text{untuk } n = k(k-1) - 1 \\ k & \text{untuk } n \neq k(k-1) - 1 \end{cases}$$

dengan  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2} \right\rfloor$  untuk  $(k-1)(k-2) + 1 < n \leq k(k-1)$ .

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{C}_n$  adalah sikel berarah dengan  $n$  titik.

Karena  $|\Gamma(D)| = n$ , berdasarkan Teorema 3.3

$$\vec{X}_h(\vec{C}_n) \geq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2} \right\rfloor = k$$

Karena  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2} \right\rfloor$ , maka berakibat

1)  $k \geq \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$ .

Ekuivalen dengan  $2k - 1 \geq \sqrt{4n + 1}$ ,

Dikuadratkan kedua ruas, diperoleh

$$4k^2 - 4k + 1 \geq 4n + 1$$

sehingga diperoleh  $k(k-1) \geq n \dots \dots \dots (1)$

2)  $k \leq \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2} + 1$ .

Ekuivalen dengan  $2k - 3 \leq \sqrt{4n + 1}$ .

Dikuadratkan kedua ruas, diperoleh

$$4k^2 - 12k + 9 \leq 4n + 1$$

sehingga diperoleh  $(k-1)(k-2) + 1 \leq n \dots \dots \dots (2)$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$(k-1)(k-2) + 1 \leq n \leq k(k-1)$$

Untuk membuktikan teorema, cukup dibuktikan bahwa ada graf berarah yang memuat sirkuit euler berarah, dengan  $n$  busur dan  $k$  titik untuk  $(k-1)(k-2) + 1 < n \leq k(k-1)$  kecuali  $n = k(k-1) - 1$ .

Berdasarkan Teorema 2.3, graf berarah  $D$  memuat sirkuit euler jika dan hanya jika,  $id(v) = od(v), \forall v \in V(D)$ .

Untuk  $n = k(k-1) - 1$ , barisan derajat titik yang mungkin dari  $k$  titik adalah  $(k-1), (k-1), \dots, (k-1), (k-2)$ . Akibat teorema jabat tangan, tidak mungkin ada graf berarah dengan barisan tersebut. Untuk pewarnaan sirkuit dengan panjang  $k(k-1) - 1$  dengan mengambil sirkuit dengan panjang  $k(k-1) - 2$  dan menambahkan satu warna baru pada titik  $\vec{C}_{k(k-1)-1}$  yang belum diwarnai. Untuk itu pikirkan graf komplet berarah simetrik dengan  $k$  titik, disimbolkan dengan  $\vec{K}_k$ .

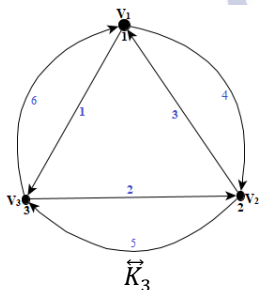
Pada  $\vec{K}_k, id(v) = od(v) = k-1, \forall v \in V(\vec{K}_k)$ , sehingga berdasarkan Teorema 2.3  $\vec{K}_k$  memuat sirkuit Euler berarah. Dengan demikian kita telah membuktikan  $n = k(k-1)$ . Selanjutnya, hapus sebuah sirkuit berarah panjang  $i$ , dimana  $i = 2, \dots, 2(k-3)$  dari  $\vec{K}_k$ . Penghapusan busur-busur pada sirkuit tidak merubah persamaan  $id(v) = od(v)$  untuk setiap  $v$  pada sirkuit. Sehingga untuk setiap  $v$  diagonal baru, berlaku  $id(v) = od(v)$ . Dengan demikian, graf berarah baru memuat sirkuit berarah Euler dengan panjang  $k(k-1) - 2, k(k-1) - 3, \dots, (k-1)(k-2) + 1$ . Sehingga kita mendapatkan hasil untuk seluruh  $n$ . Maka sirkuit yang dihasilkan dari pewarnaan harmonis sejati graf berarah eulerian pada graf yang baru berkorespondensi dengan pewarnaan harmonis sejati pada sikel berarah dengan panjang  $n$ .

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.7.

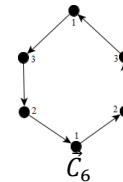
**Contoh 3.7:**

Karena  $(k-1)(k-2) + 1 \leq n \leq k(k-1)$ , maka untuk  $k = 3$  diperoleh  $3 \leq n \leq 6$ . Karena  $n$  bilangan bulat, maka berakibat  $n = \{3,4,5,6\}$ . Untuk  $n = 6$ , Dapat dibentuk graf komplet berarah simetrik dengan 3 titik, disimbolkan dengan  $\vec{K}_3$  dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3 yang dapat dilihat pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Graf berarah komplet simetrik dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3

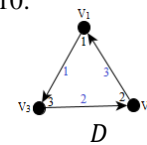
Sirkuit yang dihasilkan dari pewarnaan-harmonis-sejati-3 pada  $\vec{K}_3$  berkorespondensi dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3 pada sikel berarah dengan panjang 6 yang dapat dilihat pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Sikel berarah dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3

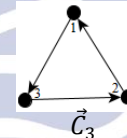
Sehingga diperoleh,  $\vec{X}_h(\vec{C}_6) = 3 = k$ .

Untuk  $n = 3$ , Menghapus sirkuit berarah dengan panjang  $i = 3$  dari  $\vec{K}_3$ . Dengan demikian, graf berarah baru memuat sirkuit berarah Euler dengan panjang  $k(k-1) - 3 = 3$  dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3 yang dapat dilihat pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Graf D baru memuat sirkuit berarah Euler dengan panjang 3

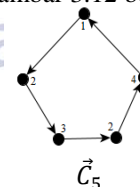
Sirkuit yang dihasilkan dari pewarnaan-harmonis-sejati-3 pada graf berarah Euler pada graf yang baru berkorespondensi dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3 pada sikel berarah dengan panjang 3 yang dapat dilihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Sikel dengan pewarnaan-harmonis-sejati-3 Sehingga diperoleh,  $\vec{X}_h(\vec{C}_3) = 3 = k$ .

Untuk  $n = 4$ , Menghapus sirkuit berarah dengan panjang  $i = 2$  dari  $\vec{K}_3$ . Langkah selanjutnya sama dengan  $n = 3$ .

Untuk  $n = 5$ , mengambil sirkuit dengan panjang 4 dan menambahkan satu warna baru pada titik  $\vec{C}_5$  yang belum diwarnai yang dapat dilihat pada Gambar 3.12 berikut.



Gambar 3.12 Sikel berarah dengan pewarnaan-harmonis-sejati-4

Sehingga diperoleh,  $\vec{X}_h(\vec{C}_5) = 4 = k + 1$ .

**3.6 Bilangan Pewarnaan Harmonis Bintang Berarah**

**Teorema 3.8:**

Jika  $\vec{S}_n$  adalah bintang berarah dengan  $n$  titik dan  $v$  adalah titik pusat dari  $\vec{S}_n$ , maka  $\vec{X}_h(\vec{S}_n) = \max\{id(v), od(v)\} + 1$ .

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{S}_n$  bintang berarah dengan  $n$  titik. Misalkan terdapat sebanyak  $s$  busur  $\vec{S}_n$  yang masuk ke titik  $v$  dan terdapat sebanyak  $t$  busur  $\vec{S}_n$  yang keluar dari titik  $v$ .

Misalkan  $A = \{x \in V(\vec{S}_n) | (x, v) \in \Gamma(\vec{S}_n)\}$  dan  $B = \{x \in V(\vec{S}_n) | (v, x) \in \Gamma(\vec{S}_n)\}$ . Sehingga,  $|A| = s$  dan  $|B| = t$ . Misal  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  dan  $B = \{y_1, y_2, \dots, y_t\}$ .

Kasus 1 untuk  $s > t$ . Kontruksi sebuah pewarnaan titik  $W$  pada  $\vec{S}_n$  sebagai berikut

$$W(x) = \begin{cases} 1; & x = v \\ i + 1; & x = x_i, 1 \leq i \leq s \vee x = y_i, 1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Jelas bahwa  $W$  adalah pewarnaan harmonis sejati dari  $\vec{S}_n$  dengan menggunakan  $s + 1$  warna. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) \leq s + 1$  .....(1)

Untuk mendapatkan pewarnaan harmonis sejati pada subgraf  $\vec{S}_n[A \cup \{v\}]$ , semua titik harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Sehingga  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n[A \cup \{v\}]) = |A \cup \{v\}| = |A| + 1$ . Sehingga berdasarkan Lemma 3.1,

$$\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) \geq s + 1$$
 .....(2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = s + 1$ . Karena  $id(v) = s$ , maka  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = id(v) + 1$ .

Kasus 2 untuk  $t > s$ . Kontruksi sebuah pewarnaan titik  $W$  pada  $\vec{S}_n$  sebagai berikut

$$W(x) = \begin{cases} 1; & x = v \\ i + 1; & x = y_i, 1 \leq i \leq t \vee x = x_i, 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

Jelas bahwa  $W$  adalah pewarnaan harmonis sejati dari  $\vec{S}_n$  dengan menggunakan  $t + 1$  warna. Sehingga berdasarkan Definisi 3.1,  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) \leq t + 1$  .....(3)

Untuk mendapatkan pewarnaan harmonis sejati pada subgraf  $\vec{S}_n[B \cup \{v\}]$ , semua titik harus diwarnai dengan warna yang berbeda. Sehingga  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n[B \cup \{v\}]) = |B \cup \{v\}| = |B| + 1$ . Sehingga berdasarkan Lemma 3.1 ,

$$\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) \geq t + 1$$
 .....(4)

Dari (3) dan (4) dapat disimpulkan bahwa  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = t + 1$ . Karena  $od(v) = t$ , maka  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = od(v) + 1$ .

Dari kasus 1 dan kasus 2 , diperoleh

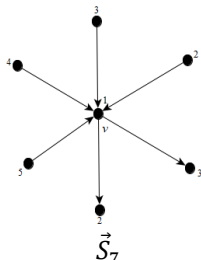
$$\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = \max\{id(v), od(v)\} + 1.$$

Dengan demikian , teorema terbukti . ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.8

**Contoh 3.8:**

Untuk  $n=7$ , dapat dibentuk  $\vec{S}_7$  yang dapat dilihat pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Bintang berarah dengan pusat  $v$

Karena  $id(v) = 4$  dan  $od(v) = 2$ , maka  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_7) = 5 = \max\{4,2\} + 1$ .

**3.7 Bilangan Pewarnaan Harmonis Roda Berarah**

Misalkan  $\vec{W}_n$  adalah sebuah hasil orientasi dari  $W_n$  sedemikian hingga hasil orientasi dari  $C_{n-1}$  pada  $\vec{W}_n$  membentuk sebuah siklus berarah.

**Teorema 3.9:**

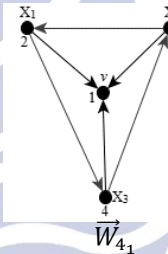
Jika  $\vec{W}_n$  adalah roda berarah dengan  $n$  titik dan  $v$  sebagai titik pusat, maka :

- (i)  $\vec{\chi}_h(\vec{W}_4) = id(v) + od(v) + 1$
- (ii) Untuk  $n = 5$  dan  $6$ 

$$\vec{\chi}_h(\vec{W}_n) = \begin{cases} n & \text{jika } id(v) = 0 \text{ atau } od(v) = 0 \\ id(v) + od(v) & \text{yang lainnya} \end{cases}$$
- (iii) Untuk  $n \geq 7$ ,
$$\vec{\chi}_h(\vec{W}_n) = \max\{id(v), od(v)\} + 1.$$

**Bukti:**

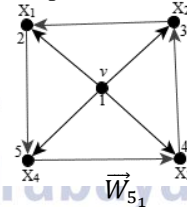
(i) Untuk  $n = 4$ , hanya ada 4 kemungkinan dari  $\vec{W}_4$  yang tidak isomorfik, salah satunya terlihat pada Gambar 3.14 .



Gambar 3.14 Graf roda berarah dengan 4 titik Pada Gambar 3.14,  $id(v) = 3$  dan  $od(v) = 0$ .

Sehingga  $\vec{\chi}_h(\vec{W}_{4_1}) = 4 = 3 + 0 + 1$ .

(ii) Untuk  $n = 5$ , hanya ada 5 kemungkinan dari  $\vec{W}_5$  yang tidak isomorfik, salah satunya terlihat pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Graf roda berarah dengan 5 titik Pada Gambar 3.15,  $id(v) = 0$  dan  $od(v) = 4$ .

Sehingga  $\vec{\chi}_h(\vec{W}_{5_1}) = 5$ .

(iii) Misalkan  $\vec{W}_n$  adalah roda berarah dengan siklus berarah tunggal dimana  $n \geq 7$ .  $|\Gamma(\vec{W}_n)| = 2(n - 1)$ .

Misalkan terdapat sebanyak  $s$  busur  $\vec{W}_n$  yang masuk ke titik  $v$  dan terdapat sebanyak  $t$  busur  $\vec{W}_n$  yang keluar dari titik  $v$ . Misalkan  $X = \{a \in V(\vec{W}_n) / (a, v) \in \Gamma(\vec{W}_n)\}$  dan  $Y = \{a \in V(\vec{W}_n) / (v, a) \in \Gamma(\vec{W}_n)\}$ .

Sehingga,  $|X| = s$  dan  $|Y| = t$ .

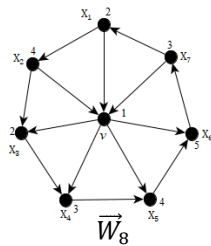
Misal  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$  dan  $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ .

Langkah selanjutnya sama seperti pembuktian pada Teorema 3.8

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.9 berikut.

**Contoh 3.9:**

Untuk  $n=8$ , dapat dibentuk  $\vec{W}_8$  yang dapat dilihat pada Gambar 3.16.



Gambar 3.16 Graf roda berarah dengan 8 titik  
 Karena  $id(v) = 3$  dan  $od(v) = 4$ ,  
 maka  $\vec{X}_h(\vec{W}_9) = 5 = \max\{3,4\} + 1$ .

**3.8 Bilangan Pewarnaan Harmonis Pohon Berarah**  
**Definisi 3.2:**

Misalkan  $\vec{T}$  pohon berarah. Titik  $v \in V(\vec{T})$  disebut titik akar dari  $\vec{T}$  jika  $id(v) = 0$ . Titik  $u \in V(\vec{T})$  disebut titik internal dari  $\vec{T}$  jika  $id(v) \neq 0$  dan  $od(v) \neq 0$ . Sedangkan titik  $x \in V(\vec{T})$  disebut titik terminal dari  $\vec{T}$  jika  $od(v) = 0$ .

**Definisi 3.3:**

Pohon berarah  $\vec{T}$  dengan titik akar  $v$  disebut pohon  $n$ -ary, yang disimbolkan dengan  $\vec{T}_n$ , jika dipenuhi :

- (i)  $id(v) = 0$  dan  $od(v) = n$ , jika  $v$  titik akar
- (ii)  $id(v) = 1$  dan  $od(v) = n$ , jika  $v$  titik internal
- (iii)  $id(v) = 1$  dan  $od(v) = 0$ , jika  $v$  titik terminal.

**Definisi 3.4:**

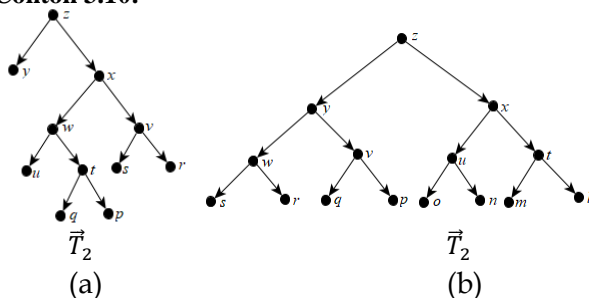
Sebuah titik  $x \in V(\vec{T}_n)$  dikatakan terletak pada level  $l$ , jika ada lintasan berarah dengan  $l$  titik dari titik akar ke  $x$ . Tinggi dari pohon  $\vec{T}_n$  adalah maksimum level-level semua titik  $\vec{T}_n$ .

**Definisi 3.5:**

Pohon  $n$ -ary  $\vec{T}_n$  disebut komplet, jika setiap titik terminal  $\vec{T}_n$  terletak pada level yang sama.

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.10.

**Contoh 3.10:**



Gambar 3.17 Pohon berarah dengan akar  $v$

(a) Pohon berarah 2-ary dengan akar  $v$

(b) Pohon berarah 2-ary komplet dengan akar  $v$

**Teorema 3.10:**

Jika  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary komplet dengan tinggi  $t$ , maka

$$\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \frac{n^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$$

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary komplet dengan tinggi  $t$  dan  $k = \frac{n^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ . Misalkan  $V_i$  adalah himpunan titik  $\vec{T}_n$  pada level  $i = 1, 2, 3, \dots, t$ . Karena  $\vec{T}_n$  komplet, maka  $|V_i| = n^{i-1}$ . Sehingga,  $|V(\vec{T}_n)| = |\cup_{i=1}^t V_i| = \sum_{i=1}^t |V_i| = \sum_{i=1}^t n^{i-1} = \frac{1(n^n - 1)}{n - 1} = \frac{n^n - 1}{n - 1}$ .

Berdasarkan Teorema 2.4, maka  $|\vec{T}_n| = |V(\vec{T}_n) - 1|$ .

Sehingga diperoleh  $|\vec{T}_n| = \frac{n(n^{t-1} - 1)}{n - 1}$ .

Selanjutnya akan dibuat pewarnaan harmonis sejati dari  $\vec{T}_n$  dengan cara sebagai berikut :

- (1) Warnai titik akar  $v$  dengan 1.
- (2) Warnai titik-titik di  $V_2$  dengan  $2, 3, \dots, n + 1$ .
- (3) Warnai titik-titik di  $V_3$  sebagai berikut :

$$W(v_i) = \begin{cases} j, & \text{jika } j \leq r + 1 \\ j + 1, & \text{jika } j > r + 1. \end{cases}$$

Dimana  $i = rn + j, r = 0, 1, \dots, n - 1, j = 1, 2, \dots, n$  dan  $v_i \in V_3$ .

Sehingga, pada  $V_3$  total warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di  $V_3$  adalah  $n + 1$ .

- (4) Warnai titik-titik di  $V_4$  sebagai berikut :

- a. Warnai titik yang berhubungan langsung dengan warna 1 dengan  $n + 2, n + 3, \dots, 2n + 1; 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 1; \dots; n^2 + 2, n^2 + 3, \dots, n(n + 1) + 1$ .
- b. Gunakan warna-warna yang sama untuk mewarnai titik-titik yang berhubungan langsung dengan warna  $2, 3, \dots, n + 1$ . Sehingga, untuk mewarnai titik-titik pada level  $V_4$ , ada sebanyak  $n^2$  tambahan warna dari warna sebelumnya.

- (5) Pada level-level selanjutnya, semua titik yang berhubungan langsung dengan titik-titik  $n + 2, n + 3, \dots, n(n + 1) + 1$  dapat diwarnai dengan warna  $1, 2, \dots, n(n + 1) + 1$ . Sehingga, pada level ini kita tidak perlu menambah warna baru.

- (6) Lanjutkan proses ini dengan mengamati banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada level  $t$ . Jika  $t$  ganjil, banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada level  $t$  tidak melebihi banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik sampai level  $t - 1$ . Dengan cara ini pewarnaan yang dihasilkan pewarnaan harmonis sejati.

Selanjutnya, kita buktikan teorema dengan induksi matematika pada  $t$ . Jika  $t = 1$ , maka  $k = \frac{n^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1} = 1$ .

Sehingga,  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = 1 = \frac{n^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

Maka, pernyataan benar untuk  $t = 1$ .

Jika  $t = 2$ , maka  $k = \frac{n^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1} = n + 1$ .

Sehingga,  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = n + 1 = k = \frac{n^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .



Maka, pernyataan benar untuk  $t = 2$ .

Asumsikan pernyataan benar untuk  $t = m$ . Artinya, jika  $\vec{T}_n$  pohon  $n$ -ary dengan tinggi  $m$ , maka  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \frac{n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

Selanjutnya akan dibuktikan akan dibuktikan benar untuk  $t = m + 1$ . Artinya, misalkan  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary dengan tinggi  $m + 1$ , ditinjau dari 2 kasus.

Kasus 1 Jika  $m$  genap, maka  $m + 1$  ganjil.

Sehingga, banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di level  $m + 1$  tidak melebihi banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik  $\vec{T}_n$  dari akar sampai level  $m$ , kecuali level 1. Karena  $m$  genap, maka penambahan warna untuk mewarnai titik-titik di level  $m$  adalah  $\frac{m}{2}$ . Karena  $m + 1$  ganjil, maka untuk mewarnai titik-titik di level  $m + 1$  tidak perlu ada penambahan warna. Sehingga banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik  $\vec{T}_n$  dari akar sampai pada level  $m + 1$  sama dengan banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik  $\vec{T}_n$  dari akar sampai pada level  $m$ . Misalkan subgraf dari pohon  $\vec{T}_n$ , yang dibangun oleh  $\cup_{i=1}^m V_i$ , dilambangkan dengan  $\vec{T}_n'$ .

Sehingga, berdasarkan asumsi  $\vec{X}_h(\vec{T}_n') = \frac{n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

Sehingga, diperoleh  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \vec{X}_h(\vec{T}_n') = \frac{n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

Karena  $m$  genap, maka  $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

Akibatnya  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \frac{n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

Kasus 2 Jika  $m$  ganjil, maka  $m + 1$  genap.

Sehingga, banyaknya tambahan warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada level  $m + 1$  adalah  $n^{\frac{m+1}{2}}$ .

Sehingga,  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \vec{X}_h(\vec{T}_n') + n^{\frac{m+1}{2}}$ . Berdasarkan asumsi,

$\vec{X}_h(\vec{T}_n') = \frac{n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ . Sehingga diperoleh,  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) = \frac{n^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$ .

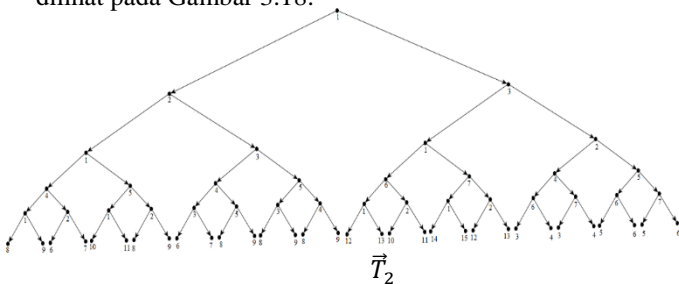
Dengan demikian pernyataan benar untuk  $t = m + 1$ .

Sehingga, bukti teorema lengkap. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan Contoh 3.11.

**Contoh 3.11:**

Untuk  $n = 2$  dan  $l = 6$  dapat dibentuk  $T$  yang dapat dilihat pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18 Pohon berarah 2-ary lengkap

Pewarnaan harmonis sejati dari  $\vec{T}_2$  pada Gambar 3.18 dengan cara sebagai berikut :

1. Mewarnai titik akar  $v$  dengan 1.
2. Mewarnai titik-titik di  $V_2$  dengan 2 dan 3.

3. Mewarnai titik-titik di  $V_3$  sebagai berikut :

$$W(v_i) = \begin{cases} j, & \text{jika } j \leq r + 1 \\ j + 1, & \text{jika } j > r + 1. \end{cases}$$

Dimana  $i = rn + j, r = 0, 1, j = 1, 2$  dan  $v_i \in V_3$ .

Sehingga, pada  $V_3$  total warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik di  $V_3$  adalah 3.

4. Mewarnai titik-titik di  $V_4$  sebagai berikut :
  - a. Mewarnai titik yang berhubungan langsung dengan warna 1 dengan 4, 5, 6, dan 7.
  - b. Menggunakan warna-warna yang sama untuk mewarnai titik-titik yang berhubungan langsung dengan warna 2 dan 3. Sehingga, untuk mewarnai titik-titik pada level  $V_4$ , ada sebanyak 4 tambahan warna dari warna sebelumnya.
5. Pada level  $V_5$ , semua titik yang berhubungan langsung dengan titik-titik 1, 2, ..., 7 dapat diwarnai dengan warna 1, 2, ..., 7. Sehingga, pada level 5 ini kita tidak perlu menambah warna baru.
6. Melanjutkan proses ini dengan mengamati banyak warna yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada level 6. Karena  $t = 6$ , maka untuk mewarnai titik-titik pada level  $V_6$ , ada sebanyak 8 tambahan warna dari warna sebelumnya.

Dengan cara ini pewarnaan yang dihasilkan pewarnaan harmonis sejati. Sehingga diperoleh,  $\vec{X}_h(\vec{T}_2) = 15 = \frac{2^{\lfloor \frac{6+1}{2} \rfloor + 1} - 1}{2 - 1}$ .

Akibat dari Teorema 3.10 sebagai berikut.

**Akibat 3.11:**

Jika  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary dengan tinggi  $t$ , maka

$$\vec{X}_h(\vec{T}_n) \leq \frac{n^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}.$$

**Bukti:**

Misalkan  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary dengan tinggi  $t$ , maka  $\vec{T}_n$  adalah subgraf dari pohon  $n$ -ary lengkap dengan tinggi  $t$ , yang disimbolkan dengan  $\hat{T}_n$ .

Berdasarkan Lemma 3.1,  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) \leq \vec{X}_h(\hat{T}_n) \dots \dots \dots (1)$

Berdasarkan Teorema 3.10,  $\vec{X}_h(\hat{T}_n) = \frac{n^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1} \dots \dots \dots (2)$

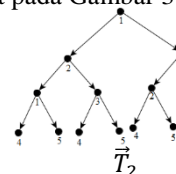
Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan  $\vec{X}_h(\vec{T}_n) \leq \frac{n^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor + 1} - 1}{n - 1}$

Dengan demikian akibat teorema terbukti. ■

Sebagai ilustrasi dari Akibat 3.11 perhatikan Contoh 3.12.

**Contoh 3.12:**

Untuk  $n = 2$  dan  $l = 4$  dapat dibentuk pohon berarah 2-ary yang dapat dilihat pada Gambar 3.19.



Gambar 3.19 Pohon berarah 2-ary dengan pewarnaan-harmonis-sejati-5

Cara dalam pewarnaan Gambar 3.19 sama dengan pewarnaan pada Gambar 3.18. Dengan cara tersebut

pewarnaan yang dihasilkan pewarnaan harmonis sejati.

Sehingga diperoleh,  $\vec{\chi}_h(\vec{T}_2) = 5 < 7 = \frac{2^{|E|+1}-1}{2-1}$ .

#### 4. PENUTUP

##### Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada jurnal ini, maka diperoleh bilangan pewarnaan harmonis sejati dari beberapa kelas graf berarah adalah sebagai berikut :

1. Jika  $F$  adalah subgraf berarah dari graf berarah  $D$ , maka  $\vec{\chi}_h(F) \leq \vec{\chi}_h(D)$ .

2. Jika  $D$  adalah graf berarah dengan  $n$  titik dan

$$\Delta = \max \{id(v), od(v) | v \in V(D)\}, \text{ maka}$$

$$\Delta + 1 \leq \vec{\chi}_h(D) \leq n.$$

3. Jika  $D$  graf berarah dengan  $m$  busur, maka

$$\vec{\chi}_h(D) \geq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4m+1}}{2} \right\rfloor.$$

4. Jika  $\vec{K}_n$  sebuah graf komplet berorientasi, maka

$$\vec{\chi}_h(\vec{K}_n) = n.$$

5. Jika  $\vec{P}_n$  lintasan berarah dengan  $n$  titik, maka

$$\vec{\chi}_h(\vec{P}_n) = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2} \right\rfloor.$$

6. Jika graf berarah  $D = \vec{P}_1 \cup \vec{P}_2 \cup \dots \cup \vec{P}_i$  gabungan dari lintasan-lintasan berarah yang saling lepas, dimana  $\vec{P}_i$  adalah lintasan berarah dengan  $i$  titik, maka

$$\vec{\chi}_h(D) = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{2i^2-2i+1}}{2} \right\rfloor.$$

7. Jika  $\vec{C}_n$  adalah siklus berarah dengan  $n$  titik, maka

$$\vec{\chi}_h(\vec{C}_n) = \begin{cases} k+1 & \text{untuk } n = k(k-1) - 1 \\ k & \text{untuk } n \neq k(k-1) - 1. \end{cases}$$

Dimana  $k = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2} \right\rfloor$  untuk  $(k-1)(k-2) + 1 < n \leq k(k-1)$ .

8. Jika  $\vec{S}_n$  adalah bintang berarah dengan  $n$  titik dan  $v$  adalah titik pusat dari  $\vec{S}_n$ , maka  $\vec{\chi}_h(\vec{S}_n) = \max\{id(v), od(v)\} + 1$ .

9. Jika  $\vec{W}_n$  adalah roda berarah dengan  $n$  titik dan  $v$  sebagai titik pusat, maka :

i.  $\vec{\chi}_h(\vec{W}_4) = id(v) + od(v) + 1$

ii. Untuk  $n = 5$  dan  $6$

$$\vec{\chi}_h(\vec{W}_n) = \begin{cases} n & \text{jika } id(v) = 0 \text{ atau } od(v) = 0 \\ id(v) + od(v) & \text{yang lainnya} \end{cases}$$

iii. Untuk  $n \geq 7$ ,  $\vec{\chi}_h(\vec{W}_n) = \max\{id(v), od(v)\} + 1$

10. Jika  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary komplet dengan tinggi  $t$ ,

maka  $\vec{\chi}_h(\vec{T}_n) = \frac{n^{|E|+1}-1}{n-1}$ .

11. Jika  $\vec{T}_n$  adalah pohon  $n$ -ary dengan tinggi  $t$ , maka

$$\vec{\chi}_h(\vec{T}_n) \leq \frac{n^{|E|+1}-1}{n-1}.$$

##### Saran

Penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama, dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori yang

berkaitan dengan bilangan pewarnaan harmonis sejati yang belum dibahas dalam jurnal ini.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Chartrand, G., & Lesniak, L. (1996). *Graphs and Diagraphs* (third).
- Hegde, S. M., & Castelino, L. P. (2015). Harmonious colorings of digraphs. *Ars Combinatoria*, 119(December), 339–352.
- Irawati, D. (n.d.). *Pelabelan Total Sisi Ajaib pada Graf Bintang*. 2(1), 85–89.
- R, S. E., & Rahadjeng, B. (n.d.). *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. 1–6.
- Rahayuningsih, S. (2018). *TEORI GRAPH DAN PENERAPANNYA*.
- Rahmawati, N., & Rahadjeng, B. (2014). *Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan*. 3(3), 64–71.