MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 8 No.1 Tahun 2020*
ISSN 2716-506X

BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI PADA PEWARNAAN-SISI GRAF

Dia Lestari
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya email: dialestari16030214007@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya email: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misalkan $G = (V(G), E(G))$ graf dan f pewarnaan-sisi pada G, adalah sebuah fungsi $f: E(G) \rightarrow C$, dimana C himpunan warna.Subgraf H dari G terhadap pewarnaan f disebut pelangi jika semua sisi H mendapat warna berbeda. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik berbeda di G dihubungkan oleh lintasan pelangi. Bilangan keterhubungan pelangi G, dilambangkan dengan $rc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga G terhubung pelangi. Pada artikel ini, ditentukan nilai eksak dari bilangan keterhubungan pelangi beberapa graf khusus, seperti; Graf Sikel (C_n), Graf Komplet (K_n), dan Pohon (T_n). Ditentukan juga batas bawah dan batas atas bilangan keterhubungan pelangi suatu graf.

Kata Kunci: Bilangan Keterhubungan Pelangi, Graf, Pewarnaan-Sisi Graf.

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a graph. An edge-coloring of G is a function $f: E(G) \rightarrow C$, where C is a set of colors. Respect to f a subgraph H of G is called a rainbow subgraph if all edges of H get different colors. Graph G is called rainbow connected if for every two distinct vertices of G is joined by a rainbow path. The rainbow connection number of G, denoted by $rc(G)$, is the minimum number of colors needed in coloring all edges of G such that G is a rainbow connected. The main problem considered in this thesis is determining the rainbow connection number of graph. In this thesis, we determine the exact value of the rainbow connection number of some classes of graphs such as Cycles, Complete graph, and Tree. We also determining the lower bound and upper bound for the rainbow connection number of graph.

Keywords: Rainbow Connection Number, Graph, Edge-Coloring on Graph.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan cabang ilmu yang perkembangannya sangat pesat dan paling banyak diterapkan dalam kehidupan manusia. Salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang secara pesat adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan matematika yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736, ketika ingin memecahkan permasalah jembatan Konigsberg di atas Sungai Pregel, Rusia. Permasalah Jembatan Konigsberg adalah mungkin tidaknya melewati tujuh jembatan yang ada dengan setiap jembatan hanya dilewati tepat satu kali (Budayasa, 2007).

Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga (tak-kosong) objek–objek yang disebut titik G dan $E(G)$ adalah himpunan berhingga (mungkin kosong) elemen–elemen yang disebut sisi G sedemikian hingga setiap sisi G merupakan pasangan tak-berurutan titik G.(Budayasa, 2007). Banyak hal yang dikaji dalam teori graf, salah satunya pewarnaan.

Dalam tulisan ini yang akan dibahas adalah pewarnaan-sisi graf, yang selanjutnya disebut pewarnaan-sisi-sejati. Sebuah pewarnaan-sisi G dikatakan pewarnaan-sisi-sejati jika setiap dua sisi G yang berbeda dan terkait pada titik yang sama mendapatkan warna berbeda. Misalkan G sebuah graf dan F sebuah pewarnaan-sisi G. Subgraf H dari G disebut pelangi jika semua sisi H mendapat warna berbeda. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika setiap dua titik di G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi. Bilangan keterhubungan pelangi G, dilambangkan dengan $rc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga G terhubung pelangi.

Pewarnaan pelangi memiliki sejumlah aplikasi; salah satunya di bidang komunikasi (Budayasa, 2007). Selain aplikasinya, masalah yang banyak dikaji terkait pewarnaan pelangi adalah menentukan bilangan keterhubungan pelangi pada beberapa kelas graf seperti yang dilakukan Syafrizal yang berhasil menentukan bilangan terhubung pelangi pada graf kipas dan graf matahari (Sy et al., 2013), Irvania pada graf bunga dan graf lemon (Kumala, 2019). Terkait hal tersebut, maka dilakukan penelitian lebih lanjut mengenai objek graf lainnya, dan semua graf dalam tulisan ini terbatas, sederhana dan tidak berarah.

Untuk menentukan bilangan keterhubungan pelangi dari suatu graf secara umum merupakan hal yang sulit dalam teori graf. Oleh karena itu, dalam tulisan ini akan ditentukan rumus umum bilangan keterhubungan pelangi suatu graf.

KAJIAN TOERI

Pewarnaan-Sisi Graf

Definisi 2.1 :

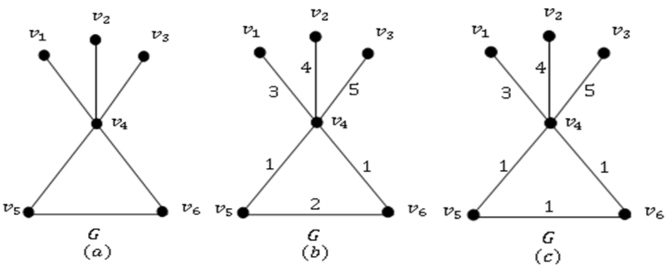
Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pewarnaan-sisi pada G adalah fungsi $f: E(G) \rightarrow C$, dimana C adalah himpunan warna. Pewarnaan-sisi f dikatakan sejati jika setiap dua sisi G yang berbeda terkait dengan titik yang sama mendapatkan warna berbeda. Indeks kromatik G, dilambangkan dengan $\chi'(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi G sedemikian hingga pewarnaan-sisi pada G disebut pewarnaan-sisi-sejati .

Keterhubungan Pelangi pada Graf

Definisi 2.2 :

Misalkan $\boldsymbol{G}$ graf dengan $\boldsymbol{f}$ pewarnaan-sisi pada $\boldsymbol{G}$. Subgraf $\boldsymbol{H}$ dari $\boldsymbol{G}$ terhadap pewarnaan $\boldsymbol{f}$ disebut pelangi jika semua sisi $\boldsymbol{H}$ mendapat warna berbeda. Graf $\boldsymbol{G}$ dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik berbeda di $\boldsymbol{G}$ dihubungkan oleh lintasan pelangi. Bilangan keterhubungan pelangi $\boldsymbol{G}$, dilambangkan dengan $\boldsymbol{rc}(\boldsymbol{G})$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai semua sisi $\boldsymbol{G}$ sedemikian hingga $\boldsymbol{G}$ terhubung pelangi.

Contoh 2.2 :



Gambar 2. 1 (a) $\boldsymbol{G}$ graf dengan 6 titik; (b) Sebuah pewarnaan-sisi pelangi $\boldsymbol{f_1}$ pada graf $\boldsymbol{G}$ dengan 5 warna; (c) Sebuah pewarnaan-sisi pelangi $\boldsymbol{f_2}$ pada graf $\boldsymbol{G}$ dengan 4 warna.

Diperoleh bilangan keterhubungan pelangi dari graf G adalah 4 atau $rc(G) = 4$

Teorema 2.1 : (Budayasa, 2007)

Jika G pohon, maka untuk setiap dua titik u dan v yang berbeda di G terdapat tepat satu lintasan *(path)* yang menghubungkan kedua titik.

Teorema 2.2 : (Budayasa, 2007)

Jika G pohon, maka $|V(G)| = |E(G)| + 1$.

Teorema 2.3 : (Budayasa, 2007)

Graf G terhubung jika dan hanya jika G memuat pohon rentang.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Batas Bawah Bilangan Keterhubungan Pelangi

Lemma 3.1 :

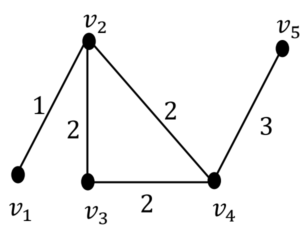
Jika G graf terhubung, maka $rc(G) \geq diam(G)$

Bukti :

Misalkan G graf dengan $diam(G) = D$, dan misalkan $u, v \in V(G)$ sedemikian hingga $d(u,v) = D$, hal ini berarti lintasan terpendek yang menghubungkan titik u dan v panjangnya D, supaya lintasan tersebut pelangi maka setiap sisi lintasan terpendek tersebut harus memiliki warna yang berbeda. Jadi diperlukan D warna, sehingga $rc(G) \geq diam(G)$. ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut

Contoh 3.1 :



Gambar 3. 1 $\boldsymbol{G}$ graf dengan 5 titik

Pada Contoh 3.1, $diam(G) = 3$, salah satu dari dua titik di G yang berjarak 3 adalah v_1 ke v_5. Sebuah lintasan terpendek dari v_1 ke v_5 pada G adalah (v_1, v_2, v_4, v_5)

dengan panjang 3. Untuk mendapatkan keterhubungan pelangi maka sisi – sisi lintasan tersebut harus berwarna berbeda. Dalam hal ini warna 1, 2 dan 3. Jadi $rc(G) = 3 \geq diam(G) = 3$.

2. Bilangan Keterhubungan Pelangi Beberapa Graf Khusus

Lemma 3.2 :

$rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G graf komplet

Bukti :

Jika G graf komplet (K_n), maka semua sisi G diwarnai dengan warna yang sama. Sehingga setiap dua titik berbeda di G dihubungkan oleh lintasan pelangi (sisi dengan 1 warna) dan $(G) = 1$.

Di sisi lain, jika G bukan graf komplet, maka ada dua titik berbeda di G katakan titik u dan v yang tidak berhubungan langsung di G sehingga $d(u, v) \geq 2$. Berdasarkan Definisi 2.15, $diam(G) \geq 2$ sehingga berdasarkan Lemma 3,1, $rc(G) \geq 2$. ■

Lemma 3.3 :

$$rc(C_n) = \begin{cases} 1 & , n = 3 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & , n > 3 \end{cases}$$

Bukti :

➢ Untuk $n = 3$, $C_3 = K_3$. Berdasarkan Lemma 3.2, $rc(C_3) = rc(K_3) = 1$

➢ Untuk $n > 3$

Misalkan $C_n = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_1)$

Kasus 1 : n genap

Dalam hal ini $diam(C_n) = \frac{n}{2}$. Sehingga berdasarkan Lemma 3.1,

$$rc(C_n) \geq diam(C_n) = \frac{n}{2} \ldots\ldots (1)$$

Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi f pada C_n sebagai berikut

$f(v_i v_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ dan $f\left(v_{\frac{n}{2}+i} v_{\frac{n}{2}+i+1}\right) = i, 1 \leq i \leq \frac{n}{2}$.

Jelas bahwa pewarnaan f menggunakan $\frac{n}{2}$ warna dan terhadap pewarnaan f, C_n terhubung pelangi.

Sehingga $rc(C_n) \leq \frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots (2)$

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$$rc(C_n) = \frac{n}{2}$$

Kasus 2 : n ganjil

Misalkan $n = 2k + k$, bilangan bulat positif. Perhatikan bahwa $diam(C_n) = k = \frac{n-1}{2}$. Berdasarkan Lemma 3.1, $rc(C_n) \geq diam(C_n) = \frac{n-1}{2} = k$. Asumsikan $rc(C_n) = k$ dan misalkan h pewarnaan sisi C_n dengan k warna sedemikian hingga C_n terhubung pelangi. Tanpa kehilangan keumuman, misalkan $h(v_k v_{k+1}) = k$. Karena lintasan P dari v_1 ke v_{k+1}: $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ merupakan lintasan pelangi dan lintasan Q dari v_1 ke v_{k+2}: $v_1, v_{n-1}, \ldots, v_{k+2}$ juga merupakan lintasan pelangi, suatu sisi P dan suatu sisi Q berwarna sama, yaitu k. Karena lintasan terpendek dari v_2 ke v_{k+2} yang melalui $v_2, v_3, \ldots, v_{k+2}$ nerupakan lintasan pelangi, $h(v_1 v_2) = k$. Dengan menggunakan cara yang sama, lintasan terpendek dari v_n ke v_{k+1} yang melewati $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1}$ adalah lintasan pelangi dan akibatnya sisi $h(v_n v_1) = k$. Jadi $h(v_k v_{k+1}) = h(v_n v_1) = k$. Ini berarti tidak ada lintasan pelangi $v_2 - v_n$ di C_n, yang menghasilkan suatu kontradiksi. Karena itu,

$$rc(C_n) \geq \frac{n-1}{2} + 1 \ldots\ldots (3)$$

Selanjutnya perhatikan pewarnaan f pada sisi C_n sebagai berikut :

$$f(v_i v_{i+1}) = i, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2};$$

$$f\left(v_{\frac{n-1}{2}+i} v_{\frac{n-1}{2}+i+1}\right) = i, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2};$$

$$f(v_n v_1) = \frac{n-1}{2} + 1;$$

Perhatikan bahwa banyak warna yang digunakan adalah $\frac{n-1}{2} + 1$. Dan terhadap pewarnaan f, C_n adalah terhubung pelangi. Berdasarkan Definisi 3.2,

$$rc(C_n) \leq \frac{n-1}{2} + 1 \ldots\ldots (4)$$

Dari (3) dan (4) diperoleh :

$$rc(C_n) = \frac{n-1}{2} + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Dengan demikian lemma terbukti. ■

Lemma 3.4 :

$rc(G) = n - 1$ jika dan hanya jika G pohon

Bukti :

Jika G bukan pohon, maka G tidak terhubung atau G terhubung dan memuat sikel.

- Graf G tidak terhubung

  Jika G tidak terhubung, maka jelas G tidak mungkin terhubung pelangi.

- Graf G terhubung dan memuat sikel

  Misalkan T pohon perentang di G. Karena G memuat sikel maka ada sisi $e \in E(G)$ sedemikian hingga $e \notin E(T)$ dan diperoleh graf $\hat{T} = T + e$ yang memuat tepat satu sikel. Misalkan sikel tersebut adalah $C: v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k, v_1$. Dengan $k \geq 3$, sedemikian hingga $e = v_1 v_k$. Perhatikan bahwa P : $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$ adalah lintasan tunggal di T dengan banyak sisi $k - 1$. Karena T pohon rentang di G yang memuat n titik, untuk membuat G terhubung pelangi maka dibutuhkan paling banyak $n - 1$ warna dengan catatan semua sisi di T berwarna berbeda. Perhatikan sikel C dengan banyak sisi k. Berdasarkan Lemma 3.3, kita bisa mewarnai sisi-sisi dari C dengan paling banyak $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ warna $\left(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil < k - 1\right)$ untuk $k \geq 4$, dan satu warna $(1 < k - 1)$ untuk $k = 3$. Jadi kita dapat mewarnai sisi G dengan kurang dari $n - 1$ warna, sedemikian hingga diperoleh pewarnaan terhubung pelangi di G. Dengan demikian diperoleh $rc(G) <$

$n-1$.

Selanjutnya, karena G pohon, berdasarkan Teorema 2.2 G memiliki $n-1$ sisi. Berdasarkan Teorema 2.1, karena G pohon maka setiap dua titik berbeda di G dihubungkan oleh tepat satu lintasan. Agar lintasan tersebut pelangi maka semua sisi lintasan tersebut harus memiliki warna berbeda, yaitu dengan menggunakan $n-1$ warna. Berdasarkan Definisi 3.2 sehingga diperoleh :

$rc(G) \leq n-1 \ldots\ldots (1)$

Klaim 1 : $rc(G) \geq n-1$

Andaikan $rc(G) \leq n-2$. Misalkan c adalah minimum pewarnaan pelangi di G. Karena banyak sisi $n-1$, maka ada dua sisi di G katakan sisi e dan f sedemikian hingga sisi e dan f memiliki warna yang sama atau $c(e) = c(f)$. Asumsikan bahwa $e = uv$ dan $f = xy$, perhatikan di G terdapat tepat satu lintasan $u, v, \ldots., x, y$. Maka tidak ada lintasan pelangi $u-y$ melalui v dan x di G. Katakan lintasan tersebut adalah lintasan P, karena sisi e dan f memiliki warna yang sama maka lintasan P bukan lintasan pelangi. Dari (1) dan Klaim 1 dapat disimpulkan bahwa $rc(G) = n-1$ ■

Teorema 3.5 :

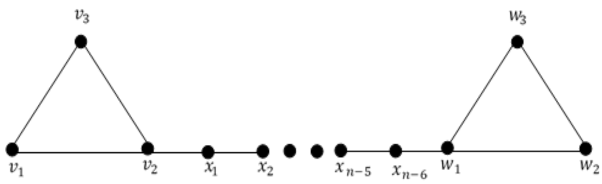
Terdapat graf G dengan n titik dan $\delta(G) = 2$ sedemikian hingga $rc(G) = n-3$.

Bukti :

Misalkan G graf yang diperoleh dari dua salinan C_3 pisah-titik dan menghubungkan kedua sikel tersebut dengan sebuah lintasan panjang $n-5$. Misalkan himpunan titik C_3 pertama adalah $\{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan titik C_3 kedua adalah $\{w_1, w_2, w_3\}$. Supaya G terhubung pelangi, maka setiap sisi dari graf bagian G[$\{v_1, v_2, v_3\}$] berwarna sama, katakan warna 1. Kemudian setiap sisi dari graf bagian G[$\{w_1, w_2, w_3\}$] berwarna sama tetapi tidak boleh dengan warna 1, katakan warna 2. Begitu juga setiap sisi dari P_{n-4} harus berwarna berbeda, katakan 3, 4, 5, . . . , n – 3. Jadi $rc(G) = n-3$ ■.

Sebagai ilustrasi, pewarnaan-sisi graf G pada contoh berikut.

Contoh 3.2 :



Gambar 3. 2 Pewarnaan-sisi pada graf G dengan $\delta(G) = 2$, $|V(G)| = n$ dan $rc(G) = n-3$

3. Batas Atas Bilangan Keterhubungan Pelangi

Lemma 3.6

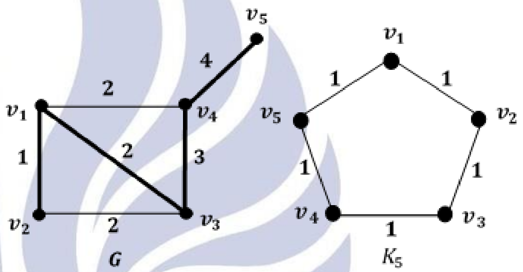
Jika G graf terhubung dengan n titik, maka $rc(G) \leq n-1$

Bukti :

Berdasarkan Teorema 2.3, maka G memuat pohon dengan n titik. Misalkan T adalah sebuah pohon rentang di G dengan n titik. Berdasarkan Teorema 2.2, banyak sisi T adalah $n-1$. Warnai sisi pohon rentang T sedemikian hingga setiap sisi T memiliki warna berbeda, sedangkan sisi $E(G)\backslash E(T)$ diwarnai dengan satu warna yang ada di sisi T, maka akan diperoleh sebuah pewarnaan-sisi G dengan menggunakan $n-1$ warna. Sedemikian hingga untuk setiap dua titik di G dihubungkan oleh lintasan pelangi (lintasan yang menghubungkan dua titik di T), sehingga G terhubung pelangi dengan menggunakan $n-1$ warna. Berdasarkan Definisi 3.2, maka $rc(G) \leq n-1$.

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.3 :



Gambar 3. 3 (a) Sebuah pohon rentang $\boldsymbol{T}$ pada graf $\boldsymbol{G}$ ditunjukkan oleh sisi - sisi yang "ditebalkan" dengan $\boldsymbol{rc(G) = 4 = n-1}$; (b) Graf $\boldsymbol{K_5}$ dengan $\boldsymbol{rc(K_5) = 1 < n-1}$.

Dari Lemma 3.1 dan 3.5 dapat disimpulka bahwa

$$diam(G) \leq rc(G) \leq n-1$$

Lemma 3.7 :

Jika G sebuah graf terhubung dan H_1, H_2, H_3, . . ., H_k adalah sebuah partisi dari himpunan titik G yang masing-masing membangun subgraf terhubung di G, maka $rc(G) \leq k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(G[H_i])$.

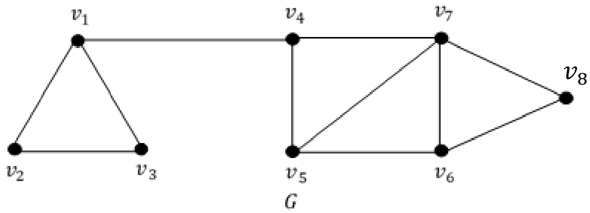
Bukti :

Bentuk graf G' dari G dengan cara mengkontraksi setiap subgraf G yang dibangun oleh H_i menjadi sebuah titik, $1 \leq i \leq k$. Perhatikan bahwa G' graf terhubung dengan k titik. Berdasarkan Lemma 3.6, $rc(G') \leq k-1$. Warnai sisi G' dengan $k-1$ warna sedemikian hingga pada pewarnaan ini G' terhubung pelangi. Selanjutnya setiap sisi H_i di G diwarnai dengan $rc(H_i)$ warna. Sedemikian hingga terhadap pewarnaan ini H_i terhubung pelangi di G. Warna – warna ini harus berbeda dengan warna – warna sisi di G'. Selanjutnya sisi-sisi G yang berkorespondensi dengan sisi-sisi G'diwarnai sama dengan warna sisi – sisi G' sehingga diperoleh pewarnaan-sisi G dengan menggunakan $k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(G[H_i])$ warna, dan terhadap pewarnaan ini G

terhubung pelangi. Sehingga berdasarkan Definisi 3.2 $rc(G) \leq k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(G[H_i])$. Dengan demikian teorema terbukti. ■

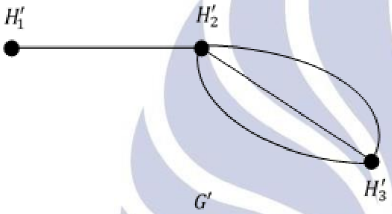
Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut:

Contoh 3.4 :



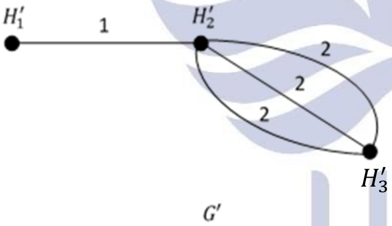
Gambar 3. 4 $\boldsymbol{G}$ graf dengan 8 titik

Perhatikan graf G terhubung, pada Gambar 3.5 Jika $H_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $H_2 = \{v_4, v_5, v_7\}$, $H_3 = \{v_6, v_8\}$, maka pengkontraksian H_i menjadi sebuah titik, untuk $1 \leq i \leq 3$ diperoleh graf baru dinamakan G' yaitu graf terhubung dengan 3 titik seperti gambar berikut :



Gambar 3. 5 $\boldsymbol{G'}$ graf baru hasil pengkontraksian sisi dari $\boldsymbol{G}$

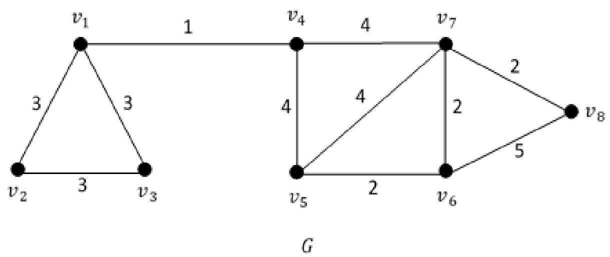
Sebuah pewarnaan terhubung pelangi dengan menggunakan 2 warna pada graf G'dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 3. 6 Sebuah pewarnaan sisi pada graf $\boldsymbol{G'}$

Perhatikan bahwa $(G[H_1]) = 1$; $rc(G[H_2]) = 1$; $rc(G[H_3]) = 1$. Sehingga kita bisa membuat pewarnaan-sisi terhubung pelangi dengan menggunakan $k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(G[H_i]) = 3 - 1 + \sum_{i=1}^{3} rc(G[H_i]) = 5$

Seperti pada gambar berikut :



Gambar 3. 7 Sebuah pewarnaan-sisi pada graf $\boldsymbol{G}$

Lemma 3.8 :

Jika G graf terhubung-2 dengan n titik, maka $rc(G) \leq \frac{2n}{3}$

Bukti :

Jika $G = C_3$, maka berdasarkan Lemma 3.3

$rc(G) = 1 \leq \frac{2(3)}{3} = 2$ (lemma berlaku)

Jika $G = C_5$, maka berdasarkan Lemma 3.3

$rc(G) = \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3 \leq \frac{2(5)}{3} = \frac{10}{3}$ (lemma berlaku)

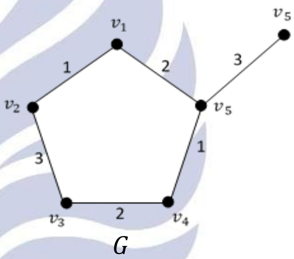
Misalkan G graf terhubung-2 dengan n titik dan G bukan C_3 dan C_5. Misalkan H subgraf G terhubung maksimal mempunyai sifat bahwa $(H) \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3}$, dimana h adalah banyaknya titik H.

Klaim 1 : h ada

Jika G memuat sebuah sikel dengan panjang $k \geq 4$ dan $k \neq 5$, maka $H = C_k$. Berdasarkan Lemma 3.3

$$rc(H) = rc(C_k) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \leq \frac{2k}{3} - \frac{2}{3}$$

Sebaliknya, andaikan jika setiap sikel di G adalah C_5, maka dengan mengambil H sebagai C_5 yang ditambah sebuah sisi G yang terkait di sebuah titik C_5, seperti gambar berikut :



Gambar 3. 8 $\boldsymbol{G}$ graf dengan 6 titik

Jelas bahwa $rc(H) = 3$ dan banyak titik H adalah 6 dan memenuhi $3 \leq \frac{2(6)}{3} - \frac{2}{3}$ □

Klaim 2 : $h \geq n - 2$

Andaikan terdapat tiga titik di luar H katakan v_1, v_2, v_3 sedemikian hingga setiap titik tersebut mempunyai dua tetangga di H. Kita dapat menambahkan titik-titik v_1, v_2, v_3 ke H dan membentuk graf bagian H' yang lebih besar dari H dengan $h + 3$ titik. Misalkan e_i, f_i adalah dua sisi yang menghubungkan v_i dengan H, $\forall i, 1 \leq i \leq 3$. Kita hanya menggunakan dua warna untuk mewarnai 6 sisi tersebut yaitu sisi – sisi e_1, e_2, e_3 berwarna sama dan sisi-sisi f_1, f_2, f_3 berwarna sama. Sehingga kita peroleh :

$$rc(H') \leq rc(H) + 2 \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2(h+3)}{3} - \frac{2}{3}$$

Hal ini kontradiksi dengan maksimalitas graf bagian H di G. Sehingga jika ada tiga titik di luar H maka sekurang-kurangnya satu dari tiga titik tersebut. Katakan v, memiliki sifat bahwa sebuah lintasan terpendek dari sebuah titik di H ke sebuah titik lain di H melalui titik v mempunyai panjang paling sedikit 3 (adanya lintasan seperti itu karena G terhubung-2). Misalkan $(x, v_1, \ldots, v_t, y)$ adalah sebuah lintasan dengan $x, y \in V(H)$ dan $v_1, v_2, \ldots, v_t \notin V(H)$ dan

$t \geq 2$. Kita dapat menambahkan $v_1, v_{2,} \dots, v_t$ ke H dan membentuk graf bagian H' dengan $h + t$ titik.

Jika t ganjil, kita dapat mewarnai $t + 1$ sisi pada lintasan tersebut dengan $\frac{(t+1)}{2}$ warna baru. Dengan setengah pertama lintasan tersebut diwarnai warna berbeda, kemudian setengah berikutnya diwarnai dengan warna pada urutan setengah pertama lintasan. Dalam hal ini, H' terhubung pelangi. Jika t genap, kita warnai $t + 1$ sisi dari lintasan tersebut dengan $\frac{t}{2}$ warna, dengan cara sebagai berikut : $\frac{t}{2}$ sisi pertama pada lintasan diwarnai dengan $\frac{t}{2}$ warna baru. Sisi yang paling tengah pada lintasan tersebut yaitu sisi $e = v_{\frac{t}{2}} v_{\frac{t}{2}+1}$ diwarnai dengan sebuah warna yang ada di H. Dan $\frac{t}{2}$ sisi sisanya pada lintasan tersebut diwarnai dengan $\frac{t}{2}$ warna yang sama dengan warna $\frac{t}{2}$ sisi sebelumnya. Dalam hal ini, H' terhubung pelangi. Sehingga kita peroleh :

$$rc(H') \leq rc(H) + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \leq \frac{2h}{3} - \frac{2}{3} + \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil = \frac{2(h+t)}{3} - \frac{2}{3}$$

Kontradiksi dengan maksimalitas H. □

Dari Klaim 1 dan Klaim 2, kita peroleh :

$$rc(G) \leq \frac{2(n-2)}{3} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2n}{3}$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Apabila graf G terhubung dan tidak memuat jembatan, maka batas atas $rc(G)$ pada Lemma 3.8 dapat disempurnakan seperti terlihat pada teorema berikut.

Lemma 3.9 :

Jika G graf terhubung tanpa jembatan dengan n titik, maka $rc(G) \leq \frac{4n}{5} - 1$

Bukti :

Misalkan G graf terhubung tanpa jembatan dan mempunyai n titik kita tinjau dua kasus :

Kasus 1 : Graf G terhubung-2

Berdasarkan Lemma 3.8 $rc(G) \leq \frac{2n}{3}$

Karena $rc(G)$ bilangan bulat, maka $rc(G) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$

Untuk $n \geq 8$ diperoleh,

$$\begin{aligned} 2n &\geq 16 \\ 12n - 10n &\geq 15 \\ 10n &\leq 12n - 15 \\ \frac{2}{3}n &\leq \frac{4}{5}n - 1 \end{aligned}$$

Sehingga $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor \leq \frac{2}{3}n \leq \frac{4}{5}n - 1$

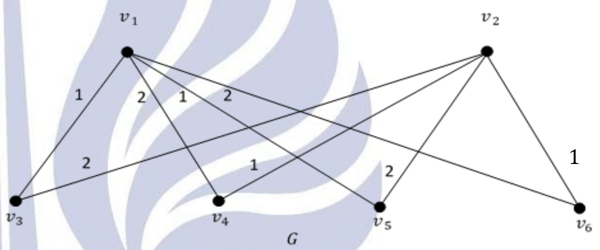
Untuk $n = 7$, juga berlaku $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor < \frac{4}{5}n - 1$

Sehingga untuk $n \geq 7$, diperoleh $\left\lfloor \frac{2}{3}n \right\rfloor \leq \frac{4}{5}n - 1$

Sehingga $rc(G) \leq \frac{4}{5}n - 1,\ n \geq 7$

Karena G terhubung-2, maka G memuat sikel, maka G bukan pohon. Jadi Berdasarkan Lemma 3.4 dan Lemma 3.6 maka $rc(G) < n - 1$. Karena $rc(G)$ bilangan bulat maka $rc(G) \leq n - 2$. Karena untuk $n \in \{3, 4, 5\}$ berlaku $n - 2 \leq \frac{4}{5}n - 1$

Untuk $n = 6$, jika sikel terpanjang di G mempunyai panjang 6 maka, berdasarkan Lemma 3.3 $rc(G) \leq 3$. Jika sikel terpanjang di G mempunyai panjang 5, namakan sikel tersebut C_5, maka ada sebuah titik G di luar C_5 namakan v, dan titik berderajat 2 dan dua tetangga dari v tidak boleh berhubungan langsung di C_5. Karena $rc(C_5) = 3$ maka untuk mewarnai sisi G di luar C_5 dapat menggunakan warna yang ada di C_5 sehingga G terhubung pelangi, dengan $rc(G) = rc(C_5) = 3 \leq \frac{4(6)}{5} - 1 \leq \frac{4}{5}n - 1$. Jika sikel terpanjang di G adalah 4 katakan C_4, dan karena G terhubung-2 maka $G = K_{2,4}$. Jelas bahwa $rc(G) \leq 2$. Dalam hal ini sebuah pewarnaan-sisi G dengan dua warna sedemikian hingga G terhubung pelangi sebagaimana dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3. 9 G graf dengan 6 titik

Dalam hal ini $rc(G) = 2 \leq \frac{4}{5}n - 1$ □

Kasus 2 : G tidak terhubung-2

Karena G tidak terhubung-2 maka G mempunyai sejumlah titik pemutus atau G mempunyai beberapa blok. Pembuktian dalam kasus ini digunakan induksi pada banyaknya blok dari G. Misalkan X adalah himpunan titik – titik pada sebuah blok G yang memuat hanya satu titik pemutus G katakan titik pemutus tersebut adalah x. Misalkan $H = G[(V(G) - X) \cup \{x\}]$ jelas bahwa $|V(H)| = n - |x| + 1$.

Perhatikan bahwa graf H terhubung, tidak memiliki jembatan dan mempunyai blok = banyaknya blok G dikurangi 1. Berdasarkan hipotesis induksi, berlaku

$$\begin{aligned} rc(H) &\leq \frac{4(|V(H)|)}{5} - 1 \\ &= \frac{4(n - |X| + 1}{5} - 1 \ . \ . \ . \ . \ (1) \end{aligned}$$

Karena $G[X]$ sebuah blok dari G maka graf bagian ini terhubung-2. Berdasarkan Kasus 1 :

$$rc(G[X]) \leq \frac{4(|X|)}{5} - 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh :

$$\begin{aligned} rc(G) &\leq \frac{4(n - |X| + 1)}{5} - 1 + \frac{4(|X|)}{5} - 1 \\ &= \frac{4n + 4}{5} - 2 \end{aligned}$$

$= \frac{4n}{5} - \frac{6}{5} \leq \frac{4n}{5} - 1$ □

Dengan demikian teorema terbukti. ■

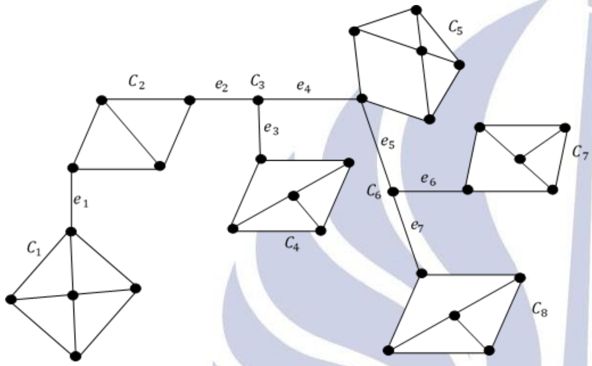
Apabila graf G terhubung dan derajat minimum G tidak kurang dari 3, maka diperoleh hasil berikut.

Teorema 3.10 :

Jika G graf terhubung dengan n titik dan $\delta(G) \geq 3$, maka $rc(G) < \frac{5}{6}n$

Bukti :

Diberikan G graf terhubung dengan n titik dengan derajat minimum 3. Misal $B \subset E(G)$ adalah himpunan jembatan di G. Jika $B = \emptyset$, berdasarkan Lemma 3.9 kita telah membuktikannya. Maka kita asumsikan $B \neq \emptyset$, sebagaimana dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 3. 10 G Graf dengan 8 komponen

Misal C adalah himpunan komponen terhubung di $G = (V(G), E(G) \backslash B)$. Perhatikan C memuat sekurang – kurangnya dua elemen. Terdapat dua tipe elemen di C, yaitu *singleton* dan graf bagian terhubung tanpa jembatan di G. Misal $S \subset C$ adalah *singleton* dan $D = C \backslash S$. Setiap elemen dari S adalah titik, dan setiap elemen dari D adalah graf bagian terhubung tanpa jembatan.

Kita konstruksikan menjadi pohon akar T yang himpunan titiknya merupakan elemen dari C^*. Akar T adalah elemen C sebarang, sedangkan anak T adalah sebuah titik C dari semua elemen C^* yang dapat dicapai dari C melalui sebuah jembatan tunggal. Daun T adalah titik yang tidak mempunyai anak di T (titik yang berderajat satu). Perhatikan C memuat sekurang – kurangnya dua elemen, begitu juga dengan T, oleh karena itu akar bukan daun. Kita urutkan anak T dari kiri ke kanan. Untuk anak yang paling kiri dilambangkan dengan $\ell(C)$ dan anak yang paling kanan dilambangkan dengan $r(C)$. $\ell(C) = r(C)$ jika C hanya memiliki tepat satu anak, dan daun – daun $\ell(C) = r(C) = \emptyset$. Untuk daun yang paling kiri dari pohon bagian T yang mempunyai akar di C dilambangkan dengan $L(C)$ dan jika C adalah daun maka $L(C) = C$.

Misal $\mathcal{L}^* \subset C^*$ adalah himpunan daun di T. Perhatikan $\mathcal{L}$ adalah himpunan bagian dari D, karena setiap *singleton* di S terkait dengan sekurang – kurangnya tiga jembatan. Jika daun – daun di T terkait dengan tepat satu jembatan, maka terdapat jembatan yang menghubungkan daun – daun tersebut dengan induknya di T. Dengan alasan yang sama untuk setiap $s \in S$, s memiliki sekurang – kurangnya dua anak di T dan $\ell(C) \neq r(C)$, dengan demikian $|S| \leq |\mathcal{L}|$.

Informasi penting lainnya, setiap elemen $\mathcal{L}$ memuat sekurang – kurangnya 4 titik. Faktanya, jika $X \in \mathcal{L}$ maka X terhubung dengan graf bagian tanpa jembatan di G yang terkait dengan tepat satu jembatan. Semua titik X lainnya (kecuali yang terkait dengan tepat satu jembatan tersebut) memiliki tetangga di X, dan G memiliki derajat sekurang – kurangnya 3, maka $|X| \geq 4$. Kita partisi S menjadi dua bagian, S' adalah semua *singleton* s untuk $L(r(s)$ dengan kardinalitas 4, dan S'' adalah semua *singleton* s untuk $L(r(s)$ dengan kardinalitas minimum 5. Dengan demikian diperoleh :

$$|S| + 4|S'| + 5|S''| = 5|S'| + 6|S''| \leq n \qquad (1)$$

Kita warnai sisi $E(G)$ agar graf G terhubung pelangi. Dengan menggunakan Lemma 3.9, sisi setiap elemen $X \in D$ telah diwarnai menggunakan $\frac{4|X|}{5} - 1$ warna baru. Warnai jembatan yang menghubungkan X ke induknya di T (kecuali jika X akar T), dengan menambahkan satu warna baru, maka diperoleh $\frac{4|X|}{5}$ warna. Sama hal nya untuk setiap $s \in S$ kita warnai jembatan yang menghubungkan s ke induknya di T (kecuali jika X akar T), dengan menambahkan satu warna baru diperoleh :

$$|S| - 1 + \frac{4}{5}\sum_{X \in D}|X|$$
$$= |S| - 1 + \frac{4}{5}(n - |S|)$$
$$= |S| - 1 + \frac{4}{5}n - \frac{4}{5}|S|$$
$$= \frac{4}{5}n + \frac{1}{5}|S| - 1 \text{ warna}$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa sekurang-kurangnya $|S'|$ elemen D dengan kardinalitas 4. Pada graf terhubung-2 dengan kardinalitas $|X| = 4$ dikatakan terhubung pelangi dengan hanya menggunakan dua warna, pada kasus ini kita tidak menggunakan $\frac{4|X|}{5} - 1$ warna, tetapi menggunakan $\frac{4|X|}{5} - \frac{6}{5}$ warna. Dengan menambahkan $\frac{1}{5}$ pada perhitungan diatas sekurang – kurangnya $|S'|$ kali, diperoleh :

$$\frac{4}{5}n + \frac{1}{5}|S| - 1 - \frac{1}{5}|S'|$$
$$\text{rc(G)} \leq \frac{4}{5}\text{n} + \frac{1}{5}|\text{S}''| - 1$$

Dari (1), diperoleh : $5|S'| + 6|S''| \leq n$

$$|S''| \leq \frac{n}{6} - \frac{5}{6}|S'|$$
$$|S''| \leq \frac{n}{6}$$

Dengan demikian diperoleh $rc(G) < \frac{5}{6}n$, dan teorema terbukti. ■

Teorema berikut, mempunyai konsekuensi luas terhadap bilangan keterhubungan pelangi suatu graf.

Teorema 3.11 :

Misalkan G graf terhubung dengan n titik. Jika terdapat himpunan sikel pisah-titik yang menutup sebanyak $n-s$ titik, maka $rc(G) < \frac{3}{4}n + \frac{s}{4} - \frac{1}{2}$.

Bukti :

Misalkan ada sebanyak t sikel – sikel pisah-titik yang menutup sebanyak $n-s$ titik. Misalkan sikel – sikel tersebut adalah $C_1, C_2, C_3, \dots, C_t$. Misalkan c_i adalah panjang dari C_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$. Seperti dalam Lemma 3.7, bahwa menambahkan sebanyak $s+t-1$ sisi G yang tidak terdapat pada himpunan sikel tersebut diperoleh sebuah graf bagian rentang terhubung dari G yang memuat t sikel dan $s+t-1$ jembatan. Kita warnai jembatan dengan menggunakan $s+t-1$ warna baru. Dalam hal ini jika sikel dengan panjang c_i genap, maka warnai dengan menggunakan $\frac{c_i}{2}$ warna baru dan setiap panjang c_i yang merupakan segitiga warnai dengan satu warna. Selanjutnya mari kita pasangkan sikel dengan panjang c_i ganjil dengan minimum 5. Misalkan $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$ adalah sikel dengan panjang c_i ganjil dengan minimum 5. Kita pasangkan C_{2i-1} dengan C_{2i} untuk $i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, dan jika p ganjil maka C_p tidak terpasang, dan kita warnai dengan $\frac{C_p+1}{2}$ warna baru. Kita akan mewarnai sikel ganjil dengan prosedur sebagai berikut : karena sekurang – kurangnya ada satu pasangan yang belum diwarnai, maka pilih pasangan (C_{2i-1}, C_{2i}) dengan titik x pada lintasan berwarna di C_{2i-1} dan titik y pada lintasan berwarna di C_{2i} (minimal harus ada pasangan seperti itu). Misal e adalah sisi yang berlawanan dengan titik x di C_{2i-1}, dan f adalah sisi yang berlawanan dengan titik y di C_{2i}. Warnai sisi e dan sisi f dengan warna yang sama, menggunakan $\frac{C_{2i-1}-1}{2}$ warna baru untuk mewarnai sisa sisi $C_{2i-1} - 1$ di C_{2i-1}, dan menggunakan $\frac{C_{2i}-1}{2}$ warna baru untuk mewarnai sisa sisi $C_{2i} - 1$ di C_{2i}. Perhatikan bahwa kita menggunakan $\frac{C_{2i-1}+C_{2i}}{2}$ warna baru untuk mewarnai pasangan ini, dan setelah pewarnaan ini maka setiap komponen terhubung dari subgraf yang sisi nya telah diwarnai terhubung pelangi.

Secara keseluruhan, jika kita misalkan ℓ adalah banyaknya segitiga pada himpunan sikel, banyak warna yang kita gunakan agar G terhubung pelangi adalah :

$$\ell + \sum_{i=1}^{t-\ell} \frac{c_i}{2} + s + t - \frac{1}{2} = \ell + \frac{1}{2}(n - s - 3\ell) + s + t - \frac{1}{2}$$

jika p genap maka kita mempunyai 1 bukan $\frac{1}{2}$ pada kedua sisi persamaan diatas. Karena $t \leq \ell + \frac{(n-s-3\ell)}{4}$ maka diperoleh :

$$\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n} + \frac{\mathrm{s}}{4} - \frac{1}{2}$$

Dengan demikian teorema terbukti. ■

Berikut adalah beberapa konsekuensi dari Teorema 3.11 :

Akibat 3.12 :

Jika G graf terhubung mempunyai *2*-faktor dengan n titik maka $\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n}$

Bukti :

Karena G graf terhubung mempunyai *2*-faktor, kita dapat mengasumsikan $\mathrm{s} = 0$. Dengan demikian diperoleh $\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n}$ ■

Akibat 3.13 :

Jika G graf terhubung beraturan-k dengan k genap maka $\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n}$

Bukti :

Karena G graf terhubung beraturan-k dengan k genap, maka setiap graf beraturan-k merupakan gabungan dari $\frac{\mathrm{k}}{2}$ 2-faktor. Dengan demikian diperoleh $\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n}$ ■

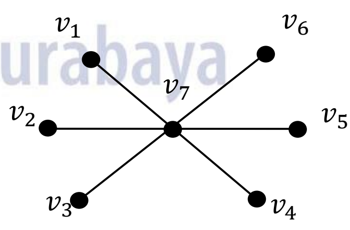
Akibat 3.14 :

Jika G graf terhubung beraturan-k dengan $\chi'(\mathrm{G}) = \mathrm{k}$ maka $\mathrm{rc(G)} < \frac{3}{4}\mathrm{n}$

Bukti :

Karena G graf terhubung beraturan-*k* dengan $\chi'(\mathrm{G}) = \mathrm{k}$, maka gabungan dari k adalah *perfect matching*, dan gabungan dua *perfect matching* disebut juga graf dengan *2*-faktor. ■

Hasil berikut merupakan syarat cukup bagi sebuah graf memiliki bilangan keterhubungan pelangi 2. Berdasarkan Lemma 3.1 $\mathrm{diam(G)} = 2$ merupakan salah satu syarat perlu bagi sebuah graf mempunyai bilangan keterhubungan pelangi = 2. Tetapi, syarat itu tidak cukup. Sebagai contoh, sebuah graf bintang $(\mathrm{S_n})$:



$\mathrm{S_7}$

Gambar 3. 21 $\mathbf{S_7}$ graf bintang dengan 7 titik

$\mathrm{rc(S_7)} = 6$, jelas bahwa jika $\delta(\mathrm{G}) \geq \frac{\mathrm{n}}{2}$ maka $\mathrm{diam(G)} = 2$. Tetapi tidak ada jaminan bahwa $\mathrm{rc(G)} = 2$.

Jika G graf dengan $\delta(\mathrm{G}) \geq \frac{\mathrm{n}}{2}$. Berikut akan ditunjukkan bahwa jika derajat minimum suatu graf melebihi setengah dari banyak titik maka bilangan keterhubungan pelangi dari graf tersebut tidak melebihi dua.

Teorema 3.15 :

Jika G graf dengan n titik dan $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + \log n$,

maka $rc(G) = \begin{cases} 1 \text{ ; jika G graf komplet} \\ 2 \text{ ; jika G graf tak komplet} \end{cases}$

Bukti :

Kasus 1 : jika G graf komplet

Berdasarkan Lemma 3.2 $rc(G) = 1$

Kasus 2 : jika G graf tak komplet

Diberikan graf G dengan n titik dan $\delta(G) \geq \frac{n}{2} + \log n$. Kita warnai secara acak sisi – sisi G denga dua warna, misalkan warna 1 dan 2. Kita tunjukkan peluang pewarnaan acak yang akan membuat G terhubung pelangi adalah positif. Karena G graf tak komplet maka ada dua titik yang tidak berhubungan langsung di G, katakan titik u dan v.

Klaim : $|N_G(u) \cap N_G(v)| > 2 \log n$

Bukti :

Karena

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2} + \log n$$

Maka

$$\forall x \in V(G), d(x) \geq \frac{n}{2} + \log n$$

Sehingga

$$d(u) \geq \frac{n}{2} + \log n \ \wedge \ d(v) \geq \frac{n}{2} + \log n$$

Akibatnya

$$d(u) + d(v) \geq \frac{n}{2} + \log n + \frac{n}{2} + \log n$$

Atau

$$d(u) + d(v) \geq n + 2 \log n. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Andaikan $|N_G(u) \cap N_G(v)| \leq 2 \log n - 1$

Karena

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| = |N_G(u)| + |N_G(v)| - |N_G(u) \cap N_G(v)|$$

Maka

$$|N_G(u)| + |N_G(v)| = |N_G(u) \cup N_G(v)| + |N_G(u) \cap N_G(v)|$$

Karena

$$N_G(u) \cup N_G(v) \subseteq V(G)$$

Maka

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \leq |V(G)| = n$$

Akibatnya

$$d(u) + d(v) \leq n + 2 \log n - 1$$

Atau

$$d(u) + d(v) < n + 2 \log n. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hal ini kontradiksi dengan (1). Dengan demikian klaim terbukti. Sekarang $\forall z, z \in N_G(u) \cap N_G(v)$ peluang bahwa lintasan (u, z, v) tidak pelangi adalah $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Karena lintasan – lintasan dengan titik awal u, titik tengah z, dan titik akhir v saling pisah sisi sehingga peluang bahwa semua lintasan ini tidak pelangi kurang dari $(\frac{1}{2})^{2 \log n} \geq \frac{1}{n^2}$. karena terdapat kurang dari $\binom{n}{2}$ pasangan u, v yang mungkin maka peluang untuk menghasilkan G tidak terhubung pelangi kurang dari

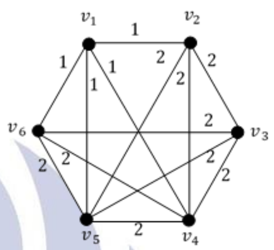
$$\frac{1}{n^2} \cdot \binom{n}{2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Sehingga peluang untuk menghasilkan G terhubung pelangi adalah

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Dengan demikian G terhubung pelangi dengan $rc(G) = 2$ ■

Sebagai ilustrasi perhatikan gambar berikut:



Gambar 3. 32 graf ***G*** terhubung pelangi dengan dua warna

Pada Gambar 3.12, v_1 dan v_3 merupakan salah satu dari dua titik di graf G yang tidak berhubungan langsung. Agar graf G terhubung pelangi, warnai sisi – sisi $N_G(v_1)$ yaitu sisi v_1v_2, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6 dengan satu warna, misalkan warna 1. Dan warnai sisi – sisi $N_G(v_3)$ yaitu sisi v_3v_2, v_3v_6, v_3v_5, v_3v_4 dengan warna yang berbeda dengan warna sisi $N_G(v_1)$, misalkan warna 2. Kemudian warnai sisi – sisi lainnya dengan menggunakan warna yang ada pada sisi $N_G(v_1)$ atau $N_G(v_3)$. Dengan demikian diperoleh graf G terhubung pelangi dengan dua warna.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan :

1. Jika G graf terhubung, maka $rc(G) \geq diam(G)$
2. $rc(K_n) = 1$
3. $rc(C_n) = \begin{cases} 1 & , n = 3 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & , n > 3 \end{cases}$
4. $rc(T_n) = n - 1$
5. Terdapat graf G dengan n titik dan $\delta(G) = 2$ sedemikian hingga $rc(G) = n - 3$
6. Jika G graf terhubung dengan n titik, maka $rc(G) \leq n - 1$
7. Jika G sebuah graf terhubung dan $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_k$ adalah sebuah partisi dari himpunan titik G yang masing-masing membangun subgraf terhubung di G, maka $rc(G) \leq k - 1 + \sum_{i=1}^{k} rc(G[H_i])$.
8. Jika G graf terhubung-2 dengan n titik, maka $rc(G) \leq \frac{2n}{3}$
9. Jika G graf terhubung tanpa jembatan dengan n titik maka $rc(G) \leq \frac{4n}{5} - 1$

10. Jika G graf terhubung dengan n titik dan $\delta(G) \geq 3$, maka $rc(G) < \frac{5}{6}n$
11. Misalkan G graf terhubung dengan n titik, jika terdapat sebuah himpunan sikel pisah-titik yang menutup sebanyak $n - s$ titik, maka $rc(G) < \frac{3}{4}n + \frac{s}{4} - \frac{1}{2}$.
12. Jika G graf dengan n titik dan $\delta(\mathrm{G}) \geq \frac{\mathrm{n}}{2} + \log \mathrm{n}$ maka

$$\mathrm{rc(G)} = \begin{cases} 1 \text{ ; jika G graf komplet} \\ 2 \text{ ; jika G graf tak komplet} \end{cases}$$

Saran

Dalam artikel ini telah dibahas mengenai rumus umum bilangan keterhubungan pelangi suatu graf. Dan graf dalam skripsi ini berhingga, tidak berarah dan sederhana. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama, dapat lebih mendalami dan mengembangkan teori – teori yang berkaitan dengan bilangan keterhubungan pelangi yang memungkinkan dengan graf yang lebih kompleks (graf berarah dan tidak sederhana).

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). Graph Theory With Applications - J. Bondy, U. Murty.pdf. In Operational Research Quarterly 19701977 (Vol. 290, p. 270).

Budayasa, I. K. (2007). Teori Graph dan Aplikasinya (I. K. Budayasa (ed.)). Unesa University Press.

Caro, Y., Lev, A., & Yuster, R. (2008). On rainbow connection. 15(1), 1–13.

Chartrand, G., Kubicki, G., & Schultz, M. (1998). Graph similarity and distance in graphs. Aequationes Mathematicae, 55(1–2), 129–145.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). Graphs & digraphs. In Graphs and Digraphs.

Harris, J., Hirst, J., & Mossinghoff, M. (2008). Combinatorics and Graph Theory. 2nd Edition. In Media (Vol. 51, Issue 1).

Kumala, I. S. (2019). Bilangan terhubung pelangi graf bunga (W_m, K_n) dan graf lemon (Le_n) (. 4(1), 39–48.

Siang, J. . (2009). Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer (IV). ANDI Press.

Sidorowicz, E., & Sopena, É. (2018). Rainbow connections in digraphs. Discrete Applied Mathematics, 1–14.

Sy, S., Medika, G. H., & Yulianti, L. (2013). The rainbow connection of fan and sun. Applied Mathematical Sciences, 7(61–64), 3155–3160.