

Indeks Kromatik Kuat Beberapa Klas Graf

Izdihar Kamila Rahmatika Surya Candra

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
 email: izdiharcandra@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
 email: ketutbudayasa@yahoo.com

Abstrak

Misal G adalah sebuah graf, sebuah pewarnaan-sisi-kuat- k pada sebuah graf G adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap sisi ke sebuah warna, sehingga setiap dua buah sisi yang berjarak maksimum dua, mendapat warna yang berbeda, dengan menggunakan paling banyak k warna. Minimum k warna yang digunakan disebut Indeks kromatik kuat dari graf G dan dilambangkan dengan $\chi'_S(G)$. Pada artikel ini akan ditunjukkan indeks kromatik kuat dari Graf Sikel (C_n), Graf Komplet (K_n), Graf Bipartit Komplet ($K_{m,n}$), Graf Pohon, dan Graf Ubur-ubur

Kata Kunci: pewarnaan sisi kuat, indeks kromatik kuat, Graf Pohon, Graf Ubur-ubur

Abstract

Let G is a graph, A strong k -edge-coloring a graph G is a function that assigns each edge to a color, such that any two edges within distance two apart receive different colors, using at most k colors. Minimum k colors are used is called strong chromatic index of graph G and denote by $\chi'_S(G)$. In this article, the strong chromatic index will be obtained for Cycle Graph (C_n), Complete Graph (K_n), Bipartite Complete Graph ($K_{m,n}$), Tree, and Jellyfish Graph.

Keywords: strong edge coloring, strong chromatic index, Tree, Jellyfish Graph

1. PENDAHULUAN

Graf didefinisikan sebagai Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan titik $V(G)$ yang merupakan himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ dari obyek-obyek yang disebut disebut himpunan titik dan himpunan sisi $E(G)$ merupakan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tak berurutan titik-titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007)

Kajian yang terdapat dalam graf telah banyak dikenal dan telah banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari seperti permasalahan penjadwalan, jaringan kelistrikan, lintasan terpendek dan masih banyak lagi. Gerard J Chang menyatakan dalam jurnal artikel yang ditulisnya , permasalahan pewarnaan-sisi-kuat pada graf pertamakali dipelajari oleh Fouquoet dan Jolivet pada tahun 1983 untuk graf kubus planar (Gerard J. Chang et al., 2015)

Sebuah pewarnaan-sisi-kuat pada sebuah graf adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap sisi ke

sebuah warna, sehingga setiap dua buah sisi yang berjarak maksimum dua, mendapat warna yang berbeda. Sebuah pewarnaan-sisi-kuat- k dari G adalah sebuah pewarnaan-sisi-kuat pada G menggunakan paling banyak k warna yang disebut indeks kromatik kuat dari graf G dan dilambangkan dengan $\chi'_S(G)$. Pewarnaan sisi kuat juga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti untuk sistem penjadwalan, mencari solusi penyelesaian permainan *Sudoku*, sistem jaringan komunikasi, dan sebagainya.

Beberapa graf yang telah diteliti untuk mendapatkan indeks kromatik totalnya diantara lain indeks-kromatik-kuat pada Graf Kubik Halin, Graf Palanar, Graf Terpisah, Graf Bipartit-(3, Δ), dan beberapa graf lainnya. Pada permasalahan pewarnaan kuat graf tidak semua yang memiliki nilai eksak dalam mencari jumlah pewarnaan kuat, beberapa graf lainnya hanya dapat ditentukan batas bawah dan batas atas jumlah pewarnaan kuat graf tersebut. Berdasarkan latar belakang, maka pada skripsi ini akan diberikan teorema-teorema untuk menentukan indeks-kromatik-kuat beberapa klas graf yang memiliki nilai eksak, meliputi graf sikel, graf komplet, graf bipartit komplet, graf pohon, dan graf ubur-ubur.

2. KAJIAN TEORI

A. Pewarnaan Sisi dan Bilangan Kromatik Sisi

Pewarnaan sisi pada graf tak-kosong G adalah penetapan warna pada sisi graf G , satu warna setiap sisi, sedemikian hingga sisi-sisi yang terkait pada titik yang sama mendapat warna berbeda. Jumlah minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan sisi pada G disebut bilangan kromatik sisi (atau biasa disebut indeks kromatik) dan dilambangkan dengan $\chi'(G)$. Pewarnaan sisi yang menggunakan k warna disebut pewarnaan sisi- k (Gary Chartrand, Ping Zhang, 2005)

B. Blok Graf

Blok graf G adalah sebuah graf bagian terhubung maksimal tanpa titik pemutus. Blok akhir graf G adalah blok dengan tepat satu titik pemutus G . Jika setiap blok dari graf G adalah graf komplet, maka G disebut Graf Blok. (Chang et al., 2015)

C. Penjodohan Terinduksi

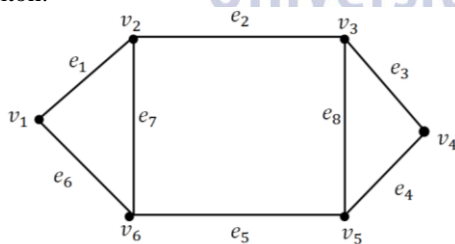
Misalkan G sebuah graf, dua sisi e_1 dan e_2 di G dikatakan saling bebas jika kedua sisi tersebut tidak memiliki titik ujung persekutuan. Sebuah penjodohan M di graf G adalah sebuah himpunan sisi-sisi G yang saling bebas. (Budayasa, 2007) Sebuah penjodohan M dikatakan penjodohan terinduksi jika setiap dua sisi e_1 dan $e_2 \in M$, maka $d_G(e_1, e_2) > 2$ (Chang et al., 2015)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Pengertian Indeks Kromatik Kuat

Misalkan G graf dan $e, e' \in E(G)$. Jarak antara sisi e dan sisi e' pada G , dilambangkan dengan $d_G(e, e')$, adalah minimum k , yang memenuhi syarat bahwa terdapat barisan sisi e_0, e_1, \dots, e_k sedemikian hingga $e = e_0, e' = e_k$, dan e_{i-1} dan e_i terkait dengan satu titik yang sama, $\forall 1 \leq i \leq k$.

Contoh:



Gambar 1. Graf G

Perhatikan bahwa $d_G(e_1, e_2) = 1$, $d_G(e_1, e_6) = 1$, $d_G(e_1, e_5) = 2$, $d_G(e_1, e_3) = 2$, $d_G(e_1, e_4) = 3$, dan seterusnya.

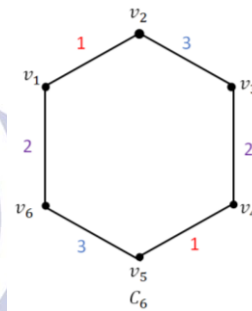
B. Pewarnaan sisi kuat dan indeks kromatik kuat

Misalkan G graf. Pewarnaan-sisi-kuat graf G adalah fungsi yang memetakan setiap sisi G ke satu warna sedemikian hingga setiap dua sisi yang berjarak maksimum dua mendapat dua warna berbeda. Kelas warna sebuah pewarnaan-sisi-kuat graf G adalah himpunan semua sisi yang berwarna sama. Pewarnaan sisi- k -kuat G adalah sebuah pewarnaan-sisi-kuat pada G dengan paling banyak k warna.

Indeks-kromatik-kuat dari sebuah graf G dilambangkan dengan $\chi'_S(G)$, adalah minimum k sedemikian hingga ada sebuah pewarnaan-sisi-kuat- k pada G .

Contoh:

Dibawah ini merupakan contoh pewarnaan sisi kuat pada C_6



Gambar 2. Graf G dengan $\chi'_S(C_6) = 3$

Akibat dari definisi diperoleh:

Lemma 3.1: Jika graf H graf bagian dari graf G , maka

$$\chi'_S(H) \leq \chi'_S(G)$$

Bukti: Karena H graf bagian G , maka $E(H) \subseteq E(G)$. Maka minimum warna yang digunakan untuk mewarnai graf H tidak akan melebihi warna yang digunakan pada graf, maka diperoleh

$$\chi'_S(H) \leq \chi'_S(G)$$

Dengan demikian lemma terbukti ■

Untuk pembahasan selanjutnya perlu didefinisikan konsep berikut. Misalkan G sebuah graf sederhana, definisikan $\sigma(G)$ sebagai berikut:

$$\sigma(G) = \max_{uv \in E(G)} \{d(u) + d(v) - 1\}$$

Teorema 3.2:

Jika G sebuah graf, maka,

$$\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$$

Bukti: Misal $e = uv \in E(G)$ sedemikian hingga $d(u) + d(v) - 1$ karena $e = uv \in E(G)$, maka setiap dua sisi e_1, e_2 yang terkait di titik u atau titik v , $d(e_1, e_2) \leq 2$. Akibatnya, berdasar definisi pewarnaan sisi kuat, semua sisi G yang terkait di titik u dan v memiliki warna yang berbeda. Jelas bahwa, banyak sisi G yang terkait di u dan di v adalah $d(u) + d(v) - 1$. Sehingga,

$$\chi'_S(G) = d(u) + d(v) - 1 \geq \sigma(G)$$

$$\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$$

Dengan demikian teorema terbukti ■

C. Indeks Kromatik Kuat Graf Sikel, Graf Komplet dan Graf Bipartisi Komplet

Teorema 3.3:

Untuk semua $n \geq 3$ berlaku,

$$\chi'_s(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 5, & n = 5 \\ 4, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $C_n = (v_1 e_1, v_2 e_2, \dots, v_n e_n, v_1)$ dengan $V(C_n) = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ dan $E(C_n) = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$

Kasus 1 : $n = 5$

Karena setiap dua sisi C_5 berjarak tidak lebih dari dua, maka semua sisi C_5 harus menerima warna berbeda, berakibat $\chi'_s(C_5) = 5$ ■

Kasus 2 : $n \equiv 0 \pmod{3}$

Berdasarkan Teorema 3.2 diperoleh :

$$\chi'_s(C_3) \geq 3 \quad (1)$$

Misal, $n = 3k, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Misal $E_1, E_2, E_3 \in E(C_n)$ dengan:

$$E_1 = \{e_1, e_4, e_7, e_{10}, \dots, e_{3k-2}\}$$

$$E_2 = \{e_2, e_5, e_8, e_{11}, \dots, e_{3k-1}\}$$

$$E_3 = \{e_3, e_6, e_9, e_{12}, \dots, e_{3k}\}$$

Perhatikan bahwa setiap dua sisi $e_i, e_j \in E_k, k = 1, 2, 3$. $d(e_i, e_j) > 2$. Akibatnya $\chi'_s(C_3) \leq 3$ (2)

Berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$\chi'_s(C_3) = 3 \quad \blacksquare$$

Kasus 3: n bukan kelipatan 3,

$$\chi'_s(C_n) \geq 4 \quad (3)$$

Sub kasus 3.1: untuk $n = 3k + 1, k \in \{1, 2, 3, \dots\}$

diperoleh $\chi'_s(C_n) \leq 4$ (4)

Dari (3) dan (4) disimpulkan $\chi'_s(C_n) = 4$ ■

Sub kasus 3.2: untuk $n = 3k + 2, k \in \{2, 3, 4, \dots\}$

diperoleh $\chi'_s(C_n) \leq 4$ (5)

Dari (3) dan (5) disimpulkan $\chi'_s(C_n) = 4$ ■

Teorema 3.4:

Jika K_n graf komplet dengan n titik, maka

$$\chi'_s(K_n) = \frac{1}{2} n(n-1)$$

Bukti:

Karena $d(e_i, e_j) \leq 2$, maka.

$$\chi'_s(K_n) = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5:

Jika $K_{m,n}$ graf bipartit komplet, maka

$$\chi'_s(K_{m,n}) = m \cdot n$$

Bukti:

Karena $d(e_i, e_j) \leq 2$, maka.

$$\chi'_s(K_{m,n}) = |E(K_{m,n})| = m \cdot n$$

Dengan demikian teorema Terbukti ■

D. Indeks Kromatik Kuat Graf Pohon

Teorema 3.6:

Jika G pohon, maka

$$\chi'_s(G) = \sigma(G)$$

Bukti:

Misal $e = uv \in E(G)$ sedemikian hingga $d(u) + d(v) - 1 = \sigma(G)$ karena $e = uv \in E(G)$, maka setiap dua sisi e_1, e_2 yang terkait dengan titik u atau titik v , $d(e_1, e_2) \leq 2$. Akibatnya, berdasar definisi pewarnaan sisi kuat, semua sisi G yang terkait di titik u dan v memiliki warna yang berbeda.

$$\chi'_s(G) \geq d(u) + d(v) - 1 = \sigma(G) \quad (1)$$

$$\chi'_s(G) \geq \sigma(G)$$

Pikirkan dalam mewarnai sisi G , semua sisi G yang terkait di u dan v sudah diwarnai dengan $\sigma(G)$ warna berbedaakibatnya

$$\chi'_s(G) \leq \sigma(G) \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$\chi'_s(G) = \sigma(G) \quad \blacksquare$$

D. Indeks Kromatik kuat Graf Ubur-ubur

Misalkan H graf, graf ubur-ubur- H dilambangkan dengan $H(p_v : v \in V(H))$, adalah sebuah graf yang diperoleh dari H dengan menambah sebanyak p_v titik baru yang berhubungan langsung ke v untuk setiap titik v di H . selanjutnya sisi yang menghubungkan sebuah titik baru ke titik v disebut sisi pendan titik v .

E. Ubur-ubur Blok dari Suatu Blok Graf

Misalkan graf G memiliki paling sedikit 2 blok, misalkan G_1, G_2, \dots, G_T , dengan T minimal 2, adalah blok-blok dari G . Ubur-ubur-blok- G_i adalah G_i' , sedemikian hingga $G_i' \subseteq G$ yang dibangun oleh $V(G_i) \cup A$, dimana A adalah himpunan titik-titik di $V(G) - V(G_i)$ yang mempunyai tepat satu tetangga di $V(G_i)$. Jika G_i blok akhir dari G dan $G_i = K_2$ maka ubur-ubur-blok- G_i disebut ubur-ubur blok trivial. Selain itu, ubur-ubur-blok- G_i disebut ubur-ubur blok non trivial.

Teorema 3.7

Misalkan G graf terhubung dan G bukan sebuah bintang. Jika G memiliki tepat r ubur-ubur blok non trivial $G_1', G_2', G_3', \dots, G_r'$ maka

$$\chi'_s(G) = \max \{ \chi'_s(G_i') \mid 1 \leq i \leq r \}$$

Bukti:

Karena G_i' subgraf dari G , $\forall i, 1 \leq i \leq r$, berdasar Lemma 3.1, diperoleh akan dibuktikan $\chi'_s(G) \leq \max \{ \chi'_s(G_i) ; 1 \leq i \leq r \}$ dengan induksi pada r .

Untuk $r = 1$

Diperoleh $G = G_1'$ dan $\chi'_s(G) = \chi'_s(G_1')$. Sehingga

$$\chi'_s(G) \leq \max \{ \chi'_s(G_i') \mid 1 \leq i \leq r \}$$

Untuk $r \geq 2$

$$\max \{ \chi'_s(G) \} \leq \max_{1 \leq i \leq r} \{ \chi'_s(G_i) \} \quad (2)$$

Berdasar (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa

$$\max \{ \chi'_s(G) \} = \max_{1 \leq i \leq r} \{ \chi'_s(G_i) \} \quad \blacksquare$$

Berdasar Teorema 3.7 diperoleh hasil berikut:

Akibat 3.8:

Jika G graf blok, maka

$\chi'_S(G) = \text{maks} \{|E(H')| \mid H' \text{ sebuah ubur-ubur blok non trivial dari } G\}$

Teorema 3.9

Jika G ubur-ubur- C_3 dengan m sisi maka $\chi'_S(G) = m$.

Bukti:

karena setiap dua sisi di C_3 berjarak satu, maka setiap sisi e_1, e_2 di $G, d(e_1, e_2) \leq 2$. Akibatnya

$$\chi'_S(G) = |E(G)| = m \quad \blacksquare$$

Lemma 3.10

Jika $G = H (p_v: v \in V(H))$ adalah sebuah ubur-ubur- H sedemikian hingga $\{v: P_v \neq \emptyset\} \subseteq X \cup Y$ dimana X dan Y dua himpunan titik H yang independen X dan Y maka $\chi'_S(G) \leq \chi'_S(H) + \text{maks}(p_u + p_v; u \in X, v \in Y, uv \in E(H))$

Bukti:

Misal $s = \text{maks}(p_u + p_v; u \in X, v \in Y, uv \in E(H))$. Untuk setiap $u \in X$ warnai sisi-sisi pedal di u dengan warna $\{1, 2, \dots, |P_u|\}$ dan setiap $v \in Y$ warnai sisi-sisi pedal di v dengan warna $\{s - p_v, s - p_v + 1, s - p_v + 2, \dots, s\}$ perhatikan dengan pewarnaan tersebut tidak melanggar definisi pewarnaan sisi kuat, faktanya jika sebuah sisi pedal di uu' berjarak dua dari sisi pedal vv' , maka $uv \in E(H)$. Karena $p_u + p_v \leq s$, maka $p_u \leq s - p_v$ sehingga $p_u < s - p_v + 1$, sehingga uu' dan vv' harus diwarnai berbeda. Kemudian gunakan warna-warna $\{s + 1, s + 2, \dots, s + \chi'_S(H)\}$ untuk mewarnai sisi-sisi H sehingga dipeoleh pewarnaan sisi kuat G dengan warna

$$\chi'_S(G) \leq \chi'_S(H) + \text{maks}(p_u + p_v; u \in X, v \in Y, uv \in E(H)) \quad \blacksquare$$

Lemma 3.11

Jika G adalah ubur-ubur- C_n dan n genap maka

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + \chi'_S(C_n) - 3$$

Bukti:

Misal $C_n = (v_1e_1, v_2e_2, \dots, v_n e_n, v_1)$ dan $X = \{v_i; i \text{ ganjil}\}$ dan $Y = \{v_i; i \text{ genap}\}$. sehingga berdasar Lemma 3.10 dan fakta bahwa $\text{maks}\{p_i + p_{i+1}; 1 \leq i \leq r\} = \sigma(G) - 3$, diperoleh

$$\begin{aligned} \chi'_S(C_n) &\leq \chi'_S(C_n) + \text{maks}\{p_i + p_{i+1}; 1 \leq i \leq r\} \\ &= \chi'_S(C_n) + \sigma(G) - 3 \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + \chi'_S(C_n) - 3 \quad \blacksquare$$

Lemma 3.12

Jika n genap dan G ubur-ubur- C_n maka

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + 1$$

Bukti:

Berdasar Teorema 3.3 diperoleh $\chi'_S(C_n) \leq 4$ (1)

Dan berdasar Teorema 3.11 diperoleh

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + \chi'_S(C_n) - 3 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + \chi'_S(C_n) - 3 = \sigma(G) + 1 \quad \blacksquare$$

Teorema 3.13

Jika G ubur-ubur- C_4 maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$

Bukti:

Berdasar Lemma 3.12, $\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + 1$ (1)

Disisi lain, pandang sebuah sisi pada sikel misal xy dengan $d_G(x) + d_G(y) - 1 = \sigma(G)$

karena sisi pada sikel yang tidak terkait pada x atau y berjarak tidak melebihi 2 dari sisi yang terkait pada x atau y , maka mewarnai sisi-sisi di G diperlukan paling sedikit $\sigma(G) + 1$ warna. Dengan demikian,

$$\chi'_S(G) \geq \sigma(G) + 1 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1 \quad \blacksquare$$

Teorema 3.14

Jika n kelipatan 6, dan G ubur-ubur- C_n , maka

$$\chi'_S(G) = \sigma(G)$$

Bukti:

Karena n kelipatan 6, maka n genap. Sehingga berdasar Lemma 3.11, diperoleh

$$\chi'_S(G) \leq \chi'_S(C_n) + \sigma(G) - 3 \quad (1)$$

berdasar Teorema 3.2, $\chi'_S(C_n) = 3$ (2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) \quad (3)$$

Karena G terhubung, berdasar Teorema 3.2,

$$\chi'_S(G) \geq \sigma(G) \quad (4)$$

Dari (3) dan (4) dapat disimpulkan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ \blacksquare

Teorema 3.15

Misalkan G ubur-ubur- C_n dengan $d_G(v_j) = 2$ untuk suatu j . Jika $\sigma(G) \neq C_5$ maka $\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + 1$. Lebih lanjut jika n kelipatan 3, maka $\chi'_S(G) = \sigma(G)$

Bukti:

Tanpa menghilangkan keumuman, $j = n$. sedemikian hingga $d_G(v_j) = d_G(v_n) = 2$. Misal $x = \{v_i; i \neq n \text{ dan } i \text{ ganjil}\}$ dan $y = \{v_i; i \neq n \text{ dan } i \text{ genap}\}$. Karena

$\text{maks}_{1 \leq i \leq r} \{p_i + p_{i+1}\} \leq \sigma(G) - 3$. maka berdasar Lemma 3.11,

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + \chi'_S(C_n) - 3 \quad (1)$$

Jika $n \neq 5$, berdasar Teorema 3.3, $\chi'_S(C_n) \leq 4$ (2)

Berdasar (1) dan (2) diperoleh $\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + 1$ \blacksquare

Jika n kelipatan 3, berdasar Teorema 3.3,

$$\chi'_S(C_n) = 3 \quad (3)$$

Berdasar (1) dan (3) diperoleh $\chi'_S(G) \leq \sigma(G)$ (4)

Berdasar Teorema 3.2, $\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$ (5)

Berdasar (4) dan (5) diperoleh $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ \blacksquare

Jika $n = 5$, misalkan ubur-ubur- C_5 $H = C_5 (\min\{p_i + p_{i+1}\} \leq \sigma(G) - 3; 1 \leq i \leq 5)$. Perhatikan sertiap titik

pada siklus \$H\$ memiliki paling banyak satu sisi pendaan, maka \$\chi'_S(H) \le 5\$, Misalkan \$p'_i = p_i - \min\{p_i, 1; 1 \le i \le 5\}\$. Perhatikan \$P'_5 = P_5 = 0\$ karena \$G \neq C_5\$. Maka, ada paling sedikit satu \$p_i \neq 0\$. Sehingga \$\max_{1 \le i \le 4} \{p'_i + p'_{i+1}\} \le \sigma(G) - 4\$. Perhatikanlah bahwa \$G\$ dapat dipandang sebagai ubur-ubur-\$H\$ dimana pendaan di titik berderajat 1 dan 2 adalah 0 dan banyak pendaan di \$v_i = p'_i; 1 \le i \le 4\$.

Berdasar Lemma 3.10,

$$\begin{aligned} \chi'_S(G) &\leq \chi'_S(H) + \max_{1 \leq i \leq 4} \{P'_i + P'_{i+1}\} \\ \chi'_S(G) &\leq 5 + \sigma(G) - 4 = \sigma(G) + 1 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lemma 3.16

Jika \$G\$ adalah graf ubur-ubur-\$C_n\$ dengan \$m\$ sisi, maka setiap kelas warna dari pewarnaan-sisi-kuat mempunyai

paling banyak \$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\$ sisi dan \$\chi'_S(G) \geq \lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \rfloor\$

Bukti:

Misal \$1 \le i \le n\$, \$E_i\$ adalah himpunan semua sisi \$G\$ yang terkait di \$v_i\$ atau \$v_{i+1}\$ kecuali sisi \$v_{i-1}v_i\$. Maka untuk suatu warna tertentu, katakan warna \$c\$. Warna \$c\$ hanya digunakan untuk mewarnai paling banyak satu sisi \$E_i\$. Karena setiap dua sisi di \$E_i\$ katakan \$e_{i1}\$ dan \$e_{i2}\$ \$d(e_{i1}, e_{i2}) \le 2\$. Selanjutnya setiap sisi \$G\$ muncul di tepat dua himpunan \$E_1, E_2, \dots, E_n\$. Sehingga paling banyak ada \$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\$ sisi \$G\$ menggunakan warna \$c\$. Sehingga untuk mewarnai semua sisi \$G\$ diperlukan paling sedikit \$\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \rfloor\$ warna. Karena banyak warna adalah bilangan bulat, maka

$$\chi'_S(G) \geq \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \quad \blacksquare$$

Lemma 3.17

$$\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \begin{cases} \leq \sigma(G), \text{ jika } n \text{ genap atau } d_G(v_j) = 2, \text{ untuk suatu } j \\ = \sigma(G), \text{ jika } n \text{ ganjil dan } d_G(v_i) = d, 1 \leq i \leq n \text{ dan } 2 \leq d \leq \frac{(n+1)}{2} \\ = \sigma(G) + 1, \text{ jika } n \text{ ganjil dan } d_G(v_i) = d, \text{ dan } \frac{(n+3)}{2} \leq d \leq n \\ \geq \sigma(G) + 2, \text{ jika } n \text{ ganjil dan } d_G(v_i) = d, d \geq n + 1 \end{cases}$$

Bukti:

Jika \$n\$ genap atau \$d_G(v_i) = 2\$ untuk suatu \$j\$, maka

$$\sigma(G) \geq \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor$$

Jika \$n\$ ganjil atau \$d_G(v_i) = d\$ untuk setiap \$1 \le i \le n\$, dalam hal ini diperoleh

$$\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor = 2d - 2 + \left\lfloor \frac{2d - 2}{n - 1} \right\rfloor = \sigma(G) - 1 + \left\lfloor \frac{2d - 2}{n - 1} \right\rfloor$$

Karena $\left\lfloor \frac{2d-2}{n-1} \right\rfloor =$

$$\begin{cases} 1, & 2 \leq d \leq \frac{n+1}{2} \\ 2, & \frac{n+1}{2} \leq d \leq n \\ 3, & d \geq n + 1 \end{cases}$$

Maka $\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor =$

$$\begin{cases} \sigma(G), & 2 \leq d \leq \frac{n+1}{2} \\ \sigma(G) + 1, & \frac{n+1}{2} \leq d \leq n \\ \sigma(G) + 2, & d \geq n + 1 \end{cases}$$

Dengan demikian lemma terbukti \blacksquare

Lemma 3.18

Jika \$G\$ adalah graf ubur-ubur-\$C_n\$ dengan \$d_G(v_i) = d \ge 3\$ untuk \$1 \le i \le n\$, maka

$$\chi'_S(G) \geq \begin{cases} \sigma(G) + 1, & \text{jika } n = 4 \text{ atau } (n, d) = (7, 3) \\ \sigma(G), & \text{jika } n \text{ genap dan } n \geq 6 \\ \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor, & \text{jika } n \text{ ganjil, } n \geq 3, \text{ tetapi } (n, d) \neq (7, 3) \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1: \$n = 4\$

Dalam kasus ini berdasarkan Teorema 3.13 \$\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1\$

Kasus 2: \$(n, d) = (7, 3)\$

Pada kasus ini, graf \$G\$ terbentuk dari \$C_7\$ dan terdapat tepat satu titik pendaan pada setiap titik di \$C_7\$, sehingga \$|E(G)| = m = 14\$. Berdasar Lemma 3.16 setiap kelas warna dari pewarnaan-sisi-kuat-\$G\$ mempunyai paling banyak \$\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3\$ sisi dan

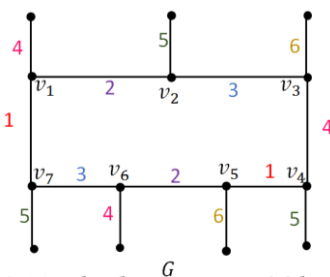
$$\chi'_S(G) \geq \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 5 \quad (1)$$

Berdasar Teorema 3.4 \$\chi'_S(C_7) = 4\$, sedangkan dua sisi pendaan yang berdekatan pada \$C_7\$ harus mendapat yang berbeda, Sehingga \$\chi'_S(G) \ge 6\$ (2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan \$\chi'_S(G) \ge 6\$ (3)

Karena ada pewarnaan-sisi-kuat-6 pada \$G\$ seperti tampak pada gambar berikut

Terdapat pewarnaan-sisi-kuat-6 pada \$G\$ seperti tampak pada gambar berikut untuk mengilustrasikan Lemma 3.18



Gambar 3. sebuah pewarnaan-sisi-kuat-6 graf \$G\$

Sehingga berdasar Definisi 3.2, $\chi'_S(G) \leq 6$ (4)

Dari (3) dan (4) dapat disimpulkan

$$\chi'_S(G) = 6 = 5 + 1 = \sigma(G) + 1$$

■ **Kasus 3:** n genap dan $n \geq 6$

Berdasar Teorema 3.14 $\chi'_S(G) = \sigma(G)$, untuk n genap namun bukan kelipatan 6, $n \geq 6$. maka $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ (Misal $C_n = (v_1 e_1, v_2 e_2, \dots, v_n e_n, v_1)$ pada G dengan $e_i = v_i v_{i+1}$ adalah sisi-sisi C_n untuk $1 \leq i \leq n$ dan $f_{i,1}, f_{i,2}, \dots, f_{i,d-2}$ adalah sisi-sisi pendan pada v_i $1 \leq i \leq n$).

Perhatikan bahwa dalam hal ini $E(G)$ dapat dipartisi menjadi $\sigma(G) = 2d - 1$, menjadi sekian penjodohan tereduksi sebagai berikut:

$$n \equiv 0 \pmod{3}, \begin{cases} M_1 = \{f_{1,1}, e_3\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod{3}\}, \\ M_2 = \{f_{3,1}, e_5\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod{3}\}, \\ M_3 = \{f_{5,1}, e_2\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{3}\}, \\ M_4 = \{e_1, e_4\} \cup \{f_{i,1} : 7 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{2}\}, \\ M_5 = \{f_{i,1} : 2 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{2}\}; \end{cases}$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \begin{cases} M_1 = \{f_{1,1}, f_{6,1}, e_3\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod{3}\}, \\ M_2 = \{f_{2,1}, f_{4,1}\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod{3}\}, \\ M_3 = \{f_{3,1}, f_{5,1}\} \cup \{e_i : 6 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{3}\}, \\ M_4 = \{e_1, e_4\} \cup \{f_{i,1} : 7 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{2}\}, \\ M_5 = \{e_2, e_5\} \cup \{f_{i,1} : 7 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod{2}\}; \end{cases}$$

$$2 \leq j \leq d - 2, \begin{cases} M_{2j+2} = \{f_{i,j} : 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{2}\} \\ M_{2j+3} = \{f_{i,j} : 1 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod{2}\} \end{cases}$$

Sehingga ada pewarnaan-sisi-kuat- $\sigma(G)$, sehingga

$$\chi'_S(G) \leq \sigma(G) \quad (1)$$

Berdasar Teorema 3.2 $\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$ (2)

Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$

■ **Kasus 4:** Untuk n ganjil, $n \geq 3$, dan $(n, d) \neq (7, 3)$

Karena n ganjil $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ dan

$$|E(G)| = m = n + (d-2)n = nd - n = n(d-1)$$

$$\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor = \frac{n(d-1)}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2n(d-1)}{n-1}$$

$$\text{Berdasar Lemma 3.16} \quad \chi'_S(G) \geq \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \quad (1)$$

Sekarang ditinjau dua sub kasus

Sub Kasus 4.1:

$3 \leq d \leq \frac{n+1}{2}$ pada sub kasus ini, diperoleh $\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor = 2d - 1$

1. Selanjutnya akan ditunjukkan ada pewarnaan-sisi-kuat- $(2d - 1)$ pada graf G , lalu $\chi'_S(G) = \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor$. untuk itu,

untuk sebarang bilangan bulat t dan bilangan ganjil q $1 \leq q \leq \frac{n}{3}$, misal

$$I(t, q) = \{e_{t+3}, e_{t+6}, \dots, e_{t+3q}\} \cup \{f_{t+3q+3}, f_{t+3q+5}, \dots, f_{t+n+1}$$

Indeks diambil modulo n dan setiap sisi pendan di v_i dilambangkan dengan f_i . Karena setiap dua sisi di $I(t, q)$ saling bebas sehingga membentuk sebuah penjodohan pada G . Setiap dua sisi di $I(t, q)$ berjarak lebih dari dua. Sisi-sisi di $I(t, q)$ dapat diwarnai dengan warna yang

sama pada pewarnaan-sisi-kuat G . Perhatikanlah bahwa penjodohan $I(t, q)$ memuat sebanyak q sisi sikel dan $\frac{n-3q}{2}$ sisi-sisi pendan pada G . Karena $5 \leq 2d - 1 \leq n$, n ganjil, dan $(n, d) \neq (7, 3)$ maka kita dapat menulis n sebagai jumlahan dari $2d - 1$ bilangan-bilangan ganjil. Namakan $q_1, q_2, \dots, q_{2d-1}$ sedemikian hingga masing-masing bilangan ganjil tidak melebihi $\frac{n}{3}$. Ini dapat dilakukan dengan memilih q_i sedemikian hingga selisih antara maksimum dan minimum paling banyak 2.

Misalkan $Q_0 = 0$ dan $Q_i = \sum_{j=1}^i 3q_j$; $1 \leq i \leq 2d - 1$. Apabila $n \equiv 0 \pmod{3}$. Kita definisikan $I(Q_{i-1}, q_i)$; $1 \leq i \leq 2d - 1$

Perhatikanlah bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq 2d - 1$, $I(Q_{i-1}, q_i)$ merupakan sebuah penjodohan di G . sedemikian hingga jarak dua buah sisi di $I(Q_{i-1}, q_i)$ melebihi 2 dan lebih jauh $I(Q_{i-1}, q_i)$ untuk setiap i mempertisi himpunan sisi $E(G)$. Dengan kata lain

$E(G) = \bigcup_{i=1}^{2d-1} I(Q_{i-1}, q_i)$ selanjutnya konstruksi sebuah pewarnaan-sisi-kuat pada G sebagai berikut:

$$w(Q_{i-1}, q_i) = i, \text{ untuk setiap } 1 \leq i \leq 2d - 1$$

Jelas bahwa w sebuah pewarnaan-sisi-kuat- $(2d - 1)$ pada G . berdasar Definisi 3.2, $\chi'_S(G) \leq 2d - 1$

$$\chi'_S(G) = \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \quad (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh: $\chi'_S(G) = \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor$

Jika $n \equiv 0 \pmod{3}$, untuk $n = 3$ berdasar Akibat 3.9

$$\chi'_S(G) = |E(G)| = m \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor$$

Karena $d \neq 3$. Maka asumsikan $n \geq 9$. Karena $5 \leq 2d - 1 \leq n$ maka kita bisa memartisi $2d - 1$ menjadi 3 bilangan ganjil, namakan d_1, d_2, d_3 . masing-masing memenuhi $1 \leq d_i \leq \frac{n}{3}$. Untuk $1 \leq r \leq 3$ partisi $\frac{n}{3}$ menjadi d_r bilangan ganjil, namakan $q_{r,1}, q_{r,2}, \dots, q_{r,d_r}$. Kita definisikan $Q_{r,i}$ sebagai berikut

$$Q_{r,i} = r + \sum_{j=1}^i 3q_{r,j}; \quad 1 \leq r \leq 3$$

Selanjutnya kita konstruksi $I(Q_{r,i-1}, q_{r,i})$. Perhatikan bahwa setiap dua sisi di himpunan $I(Q_{r,i-1}, q_{r,i})$ saling bebas dan berjarak lebih dari dua, dan

$$\bigcup_{r=1}^3 \bigcup_{i=1}^{2d-1} I(Q_{r,i-1}, q_{r,i}) = E(G)$$

Perhatikan bahwa didalam himpunan terdapat sebanyak $r(2d - 1)$ penjodohan, lebih jauh hanya ada $2d - 1$ penjodohan yang tak kosong. Setiap penjodohan yang tak kosong diwarnai dengan sebuah warna dan setiap dua penjodohan yang berbeda dan tak kosong diwarnai

dengan warna berbeda, sehingga diperoleh pewarnaan-sisi-kuat- $2d - 1$ pada G . Sehingga $\chi'_S(G) \leq 2d - 1 = \left\lceil \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil$ (3)

Dari (1) dan (3) diperoleh: $\chi'_S(G) = \left\lceil \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil$

Sub Kasus 4.2:

Dalam kasus ini $E(G)$ dipartisi menjadi dua himpunan bagian. Himpunan bagian pertama berisi sisi-sisi sikel dengan $\frac{n-3}{2}$ sisi-sisi pendaan pada setiap titik sikel. Dan himpunan bagian kedua berisi sebanyak $\frac{d-(n+1)}{2}$ sisi pendaan di setiap titik sikel.

Bagian pertama, memuat m_1 sisi. Dimana $m_1 = \frac{n(n-1)}{2}$ berdasar Sub Kasus 4.1 dapat dipartisi menjadi n penjodohan. Selanjutnya kita urut sisi-sisi pendaan di himpunan bagian kedua sebagai $h_1, h_2, \dots, h_{m-m_1}$ dimana h_j adalah sisi pendaan di titik sikel v_j dengan $i \equiv 2j - 1 \pmod{3}$.

Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat t dan $r \leq \frac{(n-1)}{2}$, himpunan $\{h_{t+1}, h_{t+2}, \dots, h_{t+r}\}$ adalah sebuah penjodohan terinduksi, sedemikian hingga jarak dua pendaan pada himpunan ini ≥ 2 . Sehingga himpunan bagian kedua dapat dipartisi menjadi

$$\left\lceil \frac{m_1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-m_1}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{\frac{n-1}{2}} \right\rceil \text{ penjodohan}$$

$$\left\lceil \frac{m_1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-m_1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rceil \quad \blacksquare$$

Sekarang dipandang kasus dengan $d_G(v_j) = 2$ untuk beberapa v_j , katakan v_n . Berdasar Teorema 3.15 $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ atau $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$

Lemma 3.20

Jika G adalah graf ubur-ubur- C_{10} sedemikian hingga $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 3$ untuk setiap i ganjil, maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1 = 5$

Bukti:

Karena $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 3 \quad \forall i, i$ ganjil, maka $d_G(v_j) = 2$ untuk j genap, sehingga berdasar Teorema 3.15 $\chi'_S(G) \leq \sigma(G) + 1$ (1)

Andaikan ada pewarnaan-sisi-kuat- $\sigma(G)$ pada G . maka untuk setiap i ganjil sebanyak $\sigma(G) - 3$ sisi-sisi pendaan di v_i , sisi e_{i-1} , sisi e_i , bersama dengan sisi e_{i-2} (atau sisi e_{i+1}) menggunakan semua $\sigma(G)$ warna. Akibatnya e_{i-2} dan e_{i+1} harus mendapat warna yang sama. Maka demikian sisi-sisi $e_1, e_4, e_7, \text{ dan } e_{10}$ harus mendapat warna yang sama. Karena $d(e_1, e_{10}) = 1$, maka e_1 dan e_{10} harus berwarna berbeda, kontradiksi.

Akibatnya, tidak ada pewarnaan-sisi-kuat- $\sigma(G)$, sehingga $\chi'_S(G) > \sigma(G)$

Karena $\chi'_S(G)$ dan $\sigma(G)$ adalah bilangan bulat, maka, $\chi'_S(G) \geq \sigma(G) + 1$ (2)

Dari (1) dan (2) disimpulkan $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1 \quad \blacksquare$

Lemma 3.21

Jika G adalah graf ubur-ubur- C_n dengan $d_G(v_j) = 2$ untuk suatu $j = n$, $\sigma(G) = 4$ maka

$$\chi'_S(G) = \begin{cases} \sigma(G) + 1, \text{ jika setelah rotasi, } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ sedemikian hingga} \\ d_G(v_i) = 3 \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dengan } 1 \leq i \leq 3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2; \text{ atau} \\ n = 10 \text{ sedemikian hingga } d_G(v_i) = 3, \text{ untuk semua } i \text{ ganjil} \\ \sigma(G), \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Bukti:

Jika $n \equiv 0 \pmod{3}$ Berdasar Teorema 3.14 $\chi'_S(G) = \sigma(G)$

Jika $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ sedemikian hingga $d_G(v_i) = 3$ untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $1 \leq i \leq 3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$.

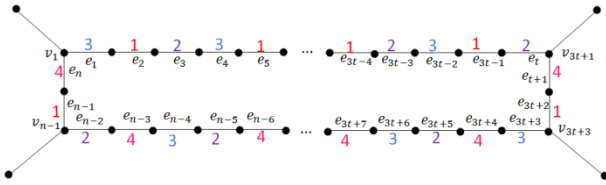
Berdasar Lemma 3.19 maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$. Jika $n = 10$ sedemikian hingga $d_G(v_i) = 3$, untuk semua i ganjil, berdasar Lemma 3.19, maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$.

Sampai perotasian, misalkan $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_s$ adalah semua indeks-indeks sedemikian hingga $d_G(v_{i_r}) = 3; 1 \leq i \leq s$. Lintasan P_r dari v_{i_r} ke $v_{i_{r+1}}$ memuat sebanyak $n_r = i_{r+1} - i_r$ sisi-sisi sikel, dimana $i_{n+1} = n + 1$. Menggunakan notasi ini, Graf ubur-ubur- C_n dapat ditentukan oleh lintasan n_1, n_2, \dots, n_s . Perhatikan jika kasus pertama yang terjadi maka semua $n_r = 3$ kecuali ada satu $n_r \in \{2, 4, 5\}$. Atau ada tepat dua n_r berurutan yang masing-masing nilainya 2. Selanjutnya jika kasus kedua yang terjadi, maka $n = 10$ dan semua $n_r = 2$.

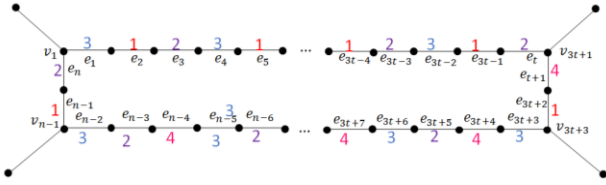
Maka selanjutnya kita tinjau kasus lain dari kedua kasus tersebut. Karena kasus $n = 4, 5$ termasuk dalam kasus pertama dan $n - 6$ kelipatan 3, maka akan dibicarakan $n \geq 7$. Untuk itu akan ditunjukkan ada pewarnaan-sisi-kuat-4 pada G . dengan menambah sisi pendaan, bisa diasumsikan nilai $n_r \in \{2, 3\}$ dan terdapat dua n_r yang tidak berurutan masing-masing bernilai 2. Apabila terdapat paling sedikit satu n_r , dan $n_r = 3$, maka, sampai perotasian bisa diasumsikan bahwa $n_r = 2$, dan terdapat suatu $t \leq s - 1$ sedemikian hingga $n_r = 3$ untuk semua $1 \leq r \leq t$ dan $n_{t+1} = 2$. Sebab, jika tidak, maka sudah tercakup pada dua kasus sebelumnya.

Didefinisikan pewarnaan-sisi-kuat pada sikel-sikel saja seperti berikut. Untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$ dan $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Pewarnaan sisi pada sikel G tampak pada seperti Gambar 4 dan Gambar 5 berikut



Gambar 4. pelabelan untuk $n \equiv 1 \pmod{3}$



Gambar 5. pelabelan untuk $n \equiv 2 \pmod{3}$

Pewarnaan sisi kuat seperti ini memenuhi dua hal yaitu:

- (1) Setiap dua sisi siklus yang berjarak tidak lebih dari 2 mendapat warna yang berbeda
- (2) Dua sisi siklus yang berjarak tepat dua dari sebuah sisi pendants menerima warna yang sama.

Perhatikanlah bahwa berdasar (2), 4 sisi siklus yang berjarak tidak melebihi 2 dari sisi pendants diwarnai dengan 3 warna saja. Sehingga kita bisa mewarnai sisi pendants dengan warna ke-4 untuk memperoleh sebuah pewarnaan-sisi-kuat-4 pada G . dengan demikian berdasar Definisi 3.2 $\chi'_S(G) \leq \sigma(G) = 4$ (1)

Berdasar Teorema 3.2 $\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$ (2)

Berdasar (1) dan (2) disimpulkan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ ■

Lemma 3.22

Jika G adalah graf ubur-ubur- C_n , $d_G(v_j) = 2$ untuk suatu j dan $\sigma(G) \geq 4$

$$\chi'_S(G) = \begin{cases} \sigma(G) + 1, \text{ jika sampai perotasian, } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ sedemikian hingga} \\ d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dengan } 1 \leq i \leq 3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2; \text{ atau} \\ n = 10 \text{ sedemikian hingga } d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 3, \text{ untuk setiap } i \text{ ganjil} \\ \sigma(G), \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Bukti:

Jika G adalah graf ubur-ubur- C_n dengan $d_G(v_j) = 2$ untuk suatu j , sampai perotasian, sedemikian hingga $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1$ untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $1 \leq i \leq 3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$. Berdasar Lemma 3.19, maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$.

Jika $n = 10$ sedemikian hingga $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 3$ untuk setiap i ganjil. Berdasar Lemma 3.20, maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1 = 5$.

Jika $\sigma(G) = 4$ berdasar Lemma 3.21 berlaku $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$, jika sampai perotasian $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ sedemikian hingga $d_G(v_i) = 3$ untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $1 \leq i \leq 3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$ atau $n = 10$ sedemikian hingga $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 3$ untuk setiap i ganjil dan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ untuk yang lain.

Sekarang akan dibuktikan untuk $\sigma(G) \geq 5$.

Untuk keperluan ini didefinisikan sebuah rantai pada C_n adalah barisan maksimal titik-titik $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+j}$ pada titik-titik pada siklus C_n sedemikian hingga setiap titik-titik tersebut berderajat paling sedikit 3 di G . Himpunan titik-titik v_{i+r} pada rantai R sedemikian hingga r genap dilambangkan dengan R_{genap} dan r ganjil dilambangkan dengan R_{ganjil} . Perhatikan bahwa R_{genap} pada sebuah rantai R bukan himpunan kosong, sedangkan R_{ganjil} himpunan kosong jika dan hanya jika $j = 0$. Pikirkan ubur-ubur- C_n G' didapat dari G dengan menghapus sebuah sisi pendants di setiap titik dari tepat satu R_{genap} atau R_{ganjil} disetiap rantai. Maka $\chi'_S(G) = \sigma(G) + 1$ dan $\chi'_S(G) \leq \chi'_S(G') + 1$ karena himpunan sisi pendants yang dihapus dari G membentuk suatu penjadwalan tereduksi sedemikian hingga dua sisi pendants yang dihapus tersebut berjarak lebih dari 2 di G . Kita tinjau dua kasus.

Kasus 1:

Ubur-ubur- C_n G' tidak memenuhi syarat pertama dalam Lemma, untuk menunjukan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ digunakan induksi matematika pada banyak sisi G . Berdasar asumsi induksi, maka $\chi'_S(G') = \sigma(G')$, sehingga,

$$\begin{aligned} \chi'_S(G) &\leq \chi'_S(G') + 1 = \sigma(G') + 1 = \sigma(G) \\ \chi'_S(G) &\leq \sigma(G) \end{aligned} \quad (1)$$

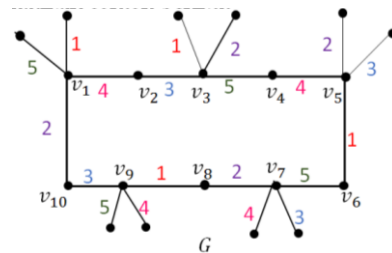
Berdasar Teorema 3.2 $\chi'_S(G) \geq \sigma(G)$ (2)

Berdasar (1) dan (2) disimpulkan $\chi'_S(G) = \sigma(G)$ ■

Kasus 2:

Ubur-ubur- C_n G' memenuhi syarat pertama. Jika terdapat sebuah rantai panjang 1 di G' yang diperoleh dari suatu rantai dengan panjang lebih dari satu di G , maka kita mengubah ke penghapusan R_{genap} atau R_{ganjil} , rantai ini pada G , dan mendapat G' yang tidak memenuhi syarat pertama. Karena kasus pertama tidak terpenuhi, maka setiap rantai di G dengan panjang 1 di G' yang didapat dari menghapus R_{genap} atau R_{ganjil} di sebuah rantai G dengan panjang 1. Karena G' tidak memenuhi syarat pertama tetapi memenuhi syarat kedua, maka, $n = 10$ dan $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 = 4$ untuk semua i ganjil. Maka dalam hal ini $\chi'_S(G) = \sigma(G) = 5$

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut Gambar 3.4 merupakan contoh pewarnaan sisi kuat pada graf G diproleh dengan menghapus sisi-sisi pendants pada R_{genap}



Gambar 6. Pewarnaan Graf G

Setelah lemma-lemma diatas terbentuk, selanjutnya siap dibuktikan Teorema 3.23

Teorema 3.23

Jika G adalah graf ubur-ubur- C_n dengan m sisi dan $\sigma(G) \geq 4$, maka

$$\chi'_S(G) = \begin{cases} m, & \text{jika } n = 3 \\ \sigma(G) + 1, & \text{jika } n = 4 \\ \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor, & \text{yang lainnya, jika } n \text{ ganjil dengan semua } d_G(v_i) = d, \\ & \text{tetapi } (n, d) \neq (7, 3) \text{ atau } \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \geq \sigma(G) + 1 \\ \sigma(G) + 1, & \text{yang lainnya, jika } (n, d) = (7, 3) \text{ dengan semua,} \\ & d_G(v_i) = d \text{ atau } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ sudah sampai perotasian} \\ & d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dengan} \\ & 1 \leq i \leq 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \text{ atau } (n, \sigma(G)) = (10, 4) \text{ dengan} \\ & d_G(v_i) = 3 \text{ untuk setiap } i \text{ ganjil atau } i \text{ genap} \\ \sigma(G), & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1: Untuk kasus $n = 3$, teorema terbukti berdasar Akibat 3.4.

Kasus 2: Untuk kasus $n = 4$, teorema terbukti berdasar Teorema 3.12.

Kasus 3: Untuk kasus yang lainnya,

Sub Kasus 3.1 : Jika n ganjil dengan semua $d_G(v_i) = d$, tetapi $(n, d) \neq (7, 3)$, teorema terbukti berdasar Lemma 3.18.

Sub Kasus 3.2 : $\left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \geq \sigma(G) + 1$, teorema terbukti berdasar Lemma 3.17.

Kasus 4: Untuk kasus yang lainnya,

Sub Kasus 4.1 : Jika $(n, d) = (7, 3)$ dengan semua $d_G(v_i) = d$, teorema terbukti berdasar Lemma 3.18.

Sub Kasus 4.2 : $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ sudah sampai perotasian, $d_G(v_i) = \sigma(G) - 1$ untuk $i \equiv 1 \pmod{3}$ dengan $1 \leq i \leq 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2$, teorema terbukti berdasar Lemma 3.19.

Sub Kasus 4.3 : $(n, \sigma(G)) = (10, 4)$ dengan $d_G(v_i) = 3$, untuk semua i ganjil atau genap, teorema telah terbukti berdasar Lemma 3.21.

Kasus 4: Untuk kasus yang lainnya, teorema terbukti berdasar Teorema 3.14, Teorema 3.15, Lemma 3.18, Lemma 3.21, Lemma 3.22.

PENUTUP

Simpulan

1. Untuk graf sikel, telah terbukti berdasar Teorema 3.1. Diperoleh indeks kromatik kuat sebagai berikut:

$$\chi'_S(C_n) = \begin{cases} 3, & n \text{ kelipatan } 3 \\ 5, & n = 5 \\ 4, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

2. Untuk graf komplet, terbukti berdasar Teorema 3.2. Diperoleh indeks kromatik kuat sebagai berikut:

$$\chi'_S(K_n) = \frac{1}{2} n(n - 1)$$

3. Untuk graf kpartit komplet, terbukti berdasar Teorema 3.3. Diperoleh indeks kromatik kuat sebagai berikut:

$$\chi'_S(K_{m,n}) = m \cdot n$$

4. Untuk graf pohon, terbukti berdasar Teorema 3.2. Diperoleh indeks kromatik kuat sebagai berikut:

$$\chi'_S(G) = \sigma(G)$$

5. Untuk graf ubur-ubur, terbukti berdasar Teorema 3.23. Diperoleh indeks kromatik kuat sebagai berikut:

$$\chi'_S(G) = \begin{cases} m, & \text{jika } n = 3 \\ \sigma(G) + 1, & \text{jika } n = 4 \\ \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor, & \text{yang lainnya, jika } n \text{ ganjil dengan semua } d_G(v_i) = d, \\ & \text{tetapi } (n, d) \neq (7, 3) \text{ atau } \left\lfloor \frac{m}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right\rfloor \geq \sigma(G) + 1 \\ \sigma(G) + 1, & \text{yang lainnya, jika } (n, d) = (7, 3) \text{ dengan semua,} \\ & d_G(v_i) = d \text{ atau } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ sudah sampai perotasian} \\ & d_G(v_i) = \sigma(G) - 1 \text{ untuk } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dengan} \\ & 1 \leq i \leq 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \text{ atau } (n, \sigma(G)) = (10, 4) \text{ dengan} \\ & d_G(v_i) = 3 \text{ untuk setiap } i \text{ ganjil atau } i \text{ genap} \\ \sigma(G), & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

Saran

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai Pewarnaan sisi kuat dan Indeks kromatik kuat dari beberapa klas graf. Secara umum indeks kromatik dari beberapa klas graf lain belum ditemukan nilai eksakny. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama, untuk lebih mendalami dan mengembangkan teori-teori indeks kromatik total yang belum dibahas dalam jurnal artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. K. (2007). In *Teori Graph dan Aplikasinya* (p. 1). Surabaya: Unesa University Press.

Dávid Hudák, Borut Lužar, Roman Soták, Riste Škrekovski. (2014). Strong Edge-Coloring of Planar Graphs. *Discrete Mathematics*, 41-49.

Gary Chartrand, Ping Zhang. (2005). In *Introduction to Graph Theory* (p. 108). United States: New York.

Gerard J.Chang, Sheng-Hu Chen, Chi-Yun Hsu, Chia-Man Hung, Huei-Ling Lai. (2015). Stronge Edge-Coloring for Jellyfish Graphs. *Discrete Mathematics*, 338, 2348.

Gerard Jennhwa Chang, Daphne Der-FenLi. (2012). Strong Edge-Coloring for Cubic Halin Graphs. *Discrete Mathematics*, 1468-1475.

Imelda Roza, Zulakmal, Narwen . (2014). Graf Garis (Line Graph) dari Graf Siklus, Graf Lengkap dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND* , 3, 3.

Julien Bensmail, Aurélie Lagoutte ,Petru Valicov. (2016). Strong Edge-Coloring of $(3,\Delta)$ -Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, 391-398.

R.J. Faudree, R.H. Schelp. (1990). The Strong Chromatic Index of Graph. *Ars Combinatoria 29B*, 205.

