MATHunesa
**Jurnal Ilmiah Matematika** *Volume 7 No.2 Tahun 2019*
*ISSN 2301-9115*

# KONEKTIVITAS-TITIK HASIL KALI KRONECKER DUA GRAF

**Evi Anggraini**
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: evianggraini@mhs.unesa.ac.id

**I Ketut Budayasa**
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
email: ketutbudayasa@yahoo.com

**Abstrak**

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ dua buah graf. Hasil kali kronecker $G_1$dan $G_2$, dilambangkan dengan $G_1 \otimes G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \ / \ u_1u_2 \in E(G_1)$ dan $v_1v_2 \in E(G_2)\}$. Konektivitas-titik graf $G$ atau $\kappa(G)$ adalah minimum banyaknya titik $G$ yang harus dihapus agar graf yang baru tak terhubung atau graf trivial. Konektivitas-titik super dari graf $G$, dilambangkan dengan $\kappa_s(G)$, adalah minimum banyak titik yang dihapus agar graf yang baru tak terhubung dan tidak memuat titik terasing. Jelas bahwa jika graf $G$ tak terhubung, maka $\kappa(G) = 0$. Penentuan nilai eksak konektivitas-titik dan konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf secara umum merupakan permasalahan yang sulit. Dalam artikel ini akan ditunjukkan bahwa $\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1)$, jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Begitu juga, akan ditunjukan $\kappa(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G)$, jika $G$ graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$. Dan ditunjukan juga bahwa $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$, jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Akhirnya, dibuktikan bahwa $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$, jika $n \geq 3$, $m \geq 1$, dan $r \geq 1$. Pembahasan ini akan diawali dengan pembuktian bahwa perkalian kronecker dua graf terhubung merupakan graf terhubung jika dan hanya jika salah satu dari kedua graf tersebut memuat sikel ganjil.

**Kata Kunci:** konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf, konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf untuk beberapa kelas graf tertentu.

**Abstract**

Let $G_1$ and $G_2$ be two graphs. Kronecker product of $G_1$ and $G_2$, denoted by $G_1 \otimes G_2$, is a graph with a set of vertex $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ and a set of edge $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \ / \ u_1u_2 \in E(G_1)$ dan $v_1v_2 \in E(G_2)\}$. The vertex-connectivity of graph $G$ atau $\kappa(G)$ is the minimum number of vertex $G$ that must be removed so that a new graph is disconnected or a trivial graph. The super connectivity-vertex of graph G, denoted by $\kappa_s(G)$, are the minimum number of vertex removed so that the new graph is disconnected and does not contain isolated vertexs. It is clear that if graph $G$ is disconnected, then $\kappa(G) = 0$. Determining the exact value of connectivity-vertex and super connectivity-vertex kronecker products of two graphs is generally a difficult problem. In this paper it will be shown that $\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1)$, if $n \geq m \geq 2$ and $n \geq 3$. Likewise, it will be shown $\kappa(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G)$, if $G$ bipartite graphs with $\kappa(G) = \delta(G)$ and $n \geq 3$. Finally, it is proved that $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$, if $n \geq 3, m \geq 1$ and $r \geq 1$. This discussion will begin with proof that the kronecker product of two connected graphs is a connected graph if and only if one of the two graphs contains an odd cycle.

**Keywords:** connectivity-vertex of two graphs, super connectivity-vertex kronecker products of two graphs for some classes of graph.

## 1. PENDAHULUAN

Penentuan keterhubungan (konektivitas) pada graf memegang peranan penting dalam merancang suatu jaringan (*network*), karena konektivitas ini menunjukkan reliabilitas atau keajegan dari suatu jaringan. Misalnya pengaplikasian konektivitas dalam kehidupan sehari-hari yaitu pada suatu jaringan komunikasi. Pusat (sentra atau stasiun) komunikasi berkorespondensi dengan titik pada graf. Sehingga, konektivitas-titik pada graf menyatakan banyaknya sentra yang harus dihancurkan untuk memutus jaringan komunikasi tersebut. Terdapat dua jenis konektivitas dalam teori graf yaitu konektivitas-titik dan konektivitas-sisi (Budayasa, 2007).

Perkalian dua graf telah banyak diteliti. Pada tahun 1962, P.M. Weichsel tertarik mempelajari konektivitas perkalian kronecker dari dua graf yang terhubung. Marmut dan Vumar (2008) menentukan beberapa parameter kerentanan titik perkalian kronecker dari graf komplet. Guji dan Vumar (2009) mempelajari konektivitas perkalian kronecker dari graf bipartit dan graf komplet. Ada beberapa jenis perkalian dua graf yaitu, perkalian kartesius, perkalian kuat, perkalian leksikografik, dan perkalian kronecker dua graf. Hasil kali kronecker dari dua graf $G$ dan graf $H$, dilambangkan dengan $G \otimes H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \otimes H) = \{(p,q)(r,s) | \ pr \in E(G)$ dan $qs \in E(H)\}$ (Ekinci & Kırlangiç, 2015). Dalam penentuan nilai eksak konektivitas-titik dan konektivitas-titik super perkalian kronecker dua graf secara umum merupakan permasalahan yang sulit. Dalam skripsi ini akan dibahas konektivitas-titik dan konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf untuk beberapa kelas graf tertentu.

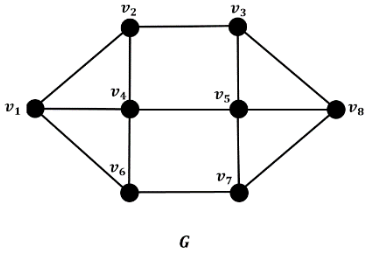
## 2. KAJIAN TEORI

### A. Konektivitas-Titik Hasil Kali Kroneker Dua Graf

**Definisi 2.1**

Misalkan $G$ graf terhubung dan $V_1 \subset V(G)$. Himpunan $V_1$ disebut himpunan-titik-pemutus $G$, jika $G - V_1$ menjadi graf tak terhubung atau graf trivial $(K_1)$. Minimum $|V_1|$ sedemikian hingga $V_1$ himpunan-titik-pemutus $G$ disebut **konektivitas-titik $G$**, disimbolkan dengan $\kappa(G)$. Dengan kata lain, konektivitas-titik graf $G$ atau $\kappa(G)$ adalah minimum banyaknya titik $G$ yang harus dihapus agar graf yang baru tak terhubung atau graf trivial. Jelas bahwa jika graf $G$ tak terhubung, maka $\kappa(G) = 0$. Graf $G$ disebut terhubung-titik-*k***,** jika penghapusan sebanyak kurang dari $k$ titik $G$, menghasilkan graf baru yang tetap terhubung. Jadi setiap graf terhubung adalah graf terhubung-titik-1. Kiranya jelas bahwa graf $G$ terhubung-titik-*k* jika dan hanya jika $\kappa(G) \geq k$ (Budayasa, 2007).

**Contoh 2.1:**




Gambar 1. Graf $G$ dengan $\kappa(G) = 3$

Misalkan $G$ sebuah graf tanpa gelung dan $v$ adalah sebuah titik $G$ dengan $d(v) = \delta(G)$. Misalkan $N_G(v)$ adalah himpunan titik $G$ yang berhubungan langsung dengan $v$ di $G$. Selanjutnya, $N_G(v)$ disebut persekitaran titik $v$ di graf $G$. Maka pada graf $G - N_G(v)$ titik $v$ merupakan titik terasing (titik dengan derajat nol) atau graf $G - N_G(v)$ tak terhubung, maka diperoleh lemma berikut:

**Lemma 2.1**

Jika $G$ graf terhubung, maka

$$1 \leq \kappa(G) \leq \delta(G) \qquad \blacksquare$$

(Budayasa, 2007).

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. Hasil Kali Kronecker Dua Graf dan Sifat-Sifatnya

Pembahasan pada bab ini akan diawali dengan pengertian tentang hasil kali kronecker dua graf.

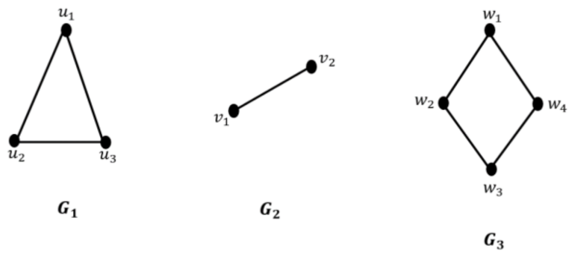
**Definisi 3.1**

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ dua graf sederhana. Hasil kali kronecker $G_1$ dan $G_2$, dilambangkan dengan $G_1 \otimes G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) \ / \ u_1u_2 \in E(G_1)$ dan $v_1v_2 \in E(G_2)\}$

(Ekinci & Kırlangiç, 2015)

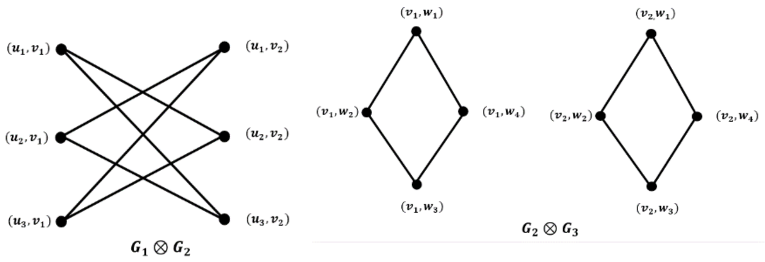
**Contoh 3.1:**

Diberikan graf $G_1, G_2,$ dan $G_3$ seperti pada gambar berikut:




(a)

Hasil kali kronecker dari graf $G_1$ dan $G_2$ dapat dilihat pada Gambar 2(b), sedangkan hasil kali kronercker dari $G_2$ dan $G_3$ dapat dilihat pada Gambar 2(c).




(b) (c)

Gambar 2. (a) Tiga graf $G_1, G_2, G_3$; (b) Graf $G_1 \otimes G_2$; (c) Graf $G_2 \otimes G_3$

Sebagai akibat langsung dari Definisi 3.1, diperoleh hasil berikut:

**Lemma 3.1**

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah buah graf terhubung, maka

i. $|V(G_1 \otimes G_2)| = |V(G_1)|\,.\,|V(G_2)|$

ii. $|E(G_1 \otimes G_2)| = |E(G_1)|\,.\,|E(G_{2)}|\,.\,2$

iii. Untuk setiap $(u, v) \in V(G_1 \otimes G_2)$ ,

$$d_{G_1 \times G_2}\big((u, v)\big) = d_{G_1}(u)\,.\,d_{G_2}(v)$$

(Bottreau & Metivier *, 1998).

Dari Contoh 3.1 di atas, terlihat bahwa hasil kali kronecker dari dua graf terhubung bisa merupakan graf terhubung, seperti Gambar 2(b), dan bisa juga merupakan graf tak terhubung, seperti Gambar 2(c).

Sebuah jejak di graf $G$ dari titik $v_i$ ke titik $v_k$ , dilambangkan dengan $v_i \to v_k$. Sedangkan banyaknya sisi pada jejak $v_1 \to v_k$ , dilambangkan dengan $n(v_1 \to v_k)$. Selanjutnya kita buktikan teorema berikut:

**Teorema 3.2**

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ dua graf dengan himpunan titik $G_1$ adalah $\{v_i\}$ dan himpunan titik $G_2$ adalah $\{w_i\}$. Jika $(v_1, w_1)$ dan $(v_2, w_2)$ dua titik pada $G_1 \otimes G_2$ dan jika terdapat jejak $v_1 \to v_2$ di $G_1$ dan jejak $w_1 \to w_2$ di $G_2$ sedemikian sehingga $n(v_1 \to v_2) + n(w_1 \to w_2)$ genap, maka terdapat jejak $(v_1, w_1) \to (v_2, w_2)$ di graf $G_1 \otimes G_2$.

Menggunakan Teorema 2, dibuktikan karakterisasi hasil kali kronecker dua graf merupakan graf terhubung seperti berikut:

**Teorema 3.3**

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ dua graf terhubung. Graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung jika dan hanya jika $G_1$ atau $G_2$ memuat sikel ganjil.

**Teorema 3.4**

Misalkan $G_1$ dan $G_2$ adalah dua graf terhubung. Jika $G_1$ dan $G_2$ tidak memuat sikel ganjil, maka $G_1 \otimes G_2$ merupakan graf tak terhubung dan memiliki tepat dua komponen.

Sebagai akibat dari Teorema 3.4 dan Definisi 3.1, diperoleh hasil berikut:

**Akibat 3.5**

Misalkan $G$ graf terhubung dan $G$ tidak memiliki sikel ganjil, maka $G \otimes K_2$ mempuyai dua komponen, masing-masing isomorfik dengan $G$.

**B. Konektivitas-Titik Hasil Kali Kronecker Dua Graf**

Perhatikan bahwa Teorema 3.3, merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar graf $G_1 \otimes G_2$ merupakan graf terhubung. Berdasarkan Lemma 2.1, jika $G_1 \otimes G_2$ terhubung, maka $1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1 \otimes G_2)$ . Selanjutnya dari Lemma 3.1 (iii), $d_{G_1 \times G_2}\big((u, v)\big) = d_{G_1}(u)\,.\,d_{G_2}(v)$ dengan demikian,

$$\begin{aligned}\delta(G_1 \otimes G_2) &= \min\{d_{G_1 \otimes G_2}(u, v)\,|uv \in V(G_1 \otimes G_2)\} \\ &= \min\{d_{G_1}(u)\,.\,d_{G_2}(v)\,|u \in G_1 \text{ dan } v \in G_2\} \\ &= \min\{d_{G_1}(u)\ |u \in G_1\}\,.\min\{d_{G_2}(v)\ |v \in G_2\} \\ &= \delta(G_1) \times \delta(G_2)\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh lemma berikut.

**Lemma 3.6**

Jika graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung, maka

$$1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1) \times \delta(G_2)$$

Secara umum menentukan formula konektivitas dari $G_1 \otimes G_2$ merupakan persoalan yang sulit. Berikut akan ditentukan nilai $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ untuk graf $G_1$ dan $G_2$ tertentu.

Selanjutnya akan ditunjukkan jika $G_1$ dan $G_2$ masing-masing merupakan graf komplet, maka batas atas dari $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ dalam Lemma 6 dicapai. Untuk itu diperlukan terminologi berikut :

Misalkan $V(K_m) = V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ dan $V(K_n) = V_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan $S_i = \{u_i\} \times V_2$, $i = 1, \dots, m$. Selanjutnya $(u_i, v_j)$ ditulis $w_{ij}$ untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$ . Sehingga $S_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\}$, $i = 1, \dots, m$ adalah sebuah himpunan titik-titik independen di $K_m \otimes K_n$ dan $V(K_m \otimes K_n)$ mempunyai sebuah partisi $V_1 \times V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$. Untuk dua titik $u$ dan $v$ di graf $G$, kita tulis $u \sim v$ jika $uv \in E(G)$, dan $u \nsim v$ jika $uv \notin E(G)$.

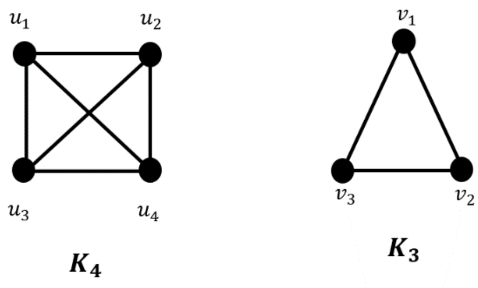
**Teorema 3.7**

Jika $K_m$ dan $K_n$ dua graf komplet dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka

$$\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1).$$

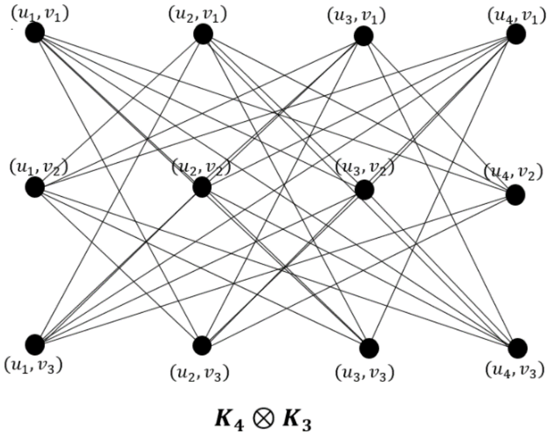
**Contoh 3.2:**

Diberikan graf $K_4$ dan $K_3$ seperti gambar berikut:




(a)

Hasil kali kronecker dari graf $K_4$ dan graf $K_3$ dapat dilihat pada Gambar 3(b).




(b)

Gambar 3. (a) Graf $\boldsymbol{K_4}$ dan graf $\boldsymbol{K_3}$; (b) Graf $\boldsymbol{K_4 \otimes K_3}$ dengan $\boldsymbol{\kappa(K_4 \otimes K_3) = 6}$

Perhatikan bahwa:
$V_1 = \{(u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_3, v_2)(u_3, v_3), (u_4, v_2), (u_4, v_3)\}$ sebuah himpunan titik-pemutus dengan kardinalitas minimum pada graf $K_4 \otimes K_3$.

Selanjutnya akan dicari konektivitas-titik hasil kali kronecker graf bipartit dan graf komplet. Untuk itu diperlukan terminologi berikut :

Misalkan $G$ graf bipartit dengan bipartisi $(X, Y)$ dan $K_n$ $(n \geq 3)$. Misalkan $V(G) = V_1 = \{u_1, \dots, u_m\}$, $V(K_n) = V_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$, dan himpunan $S_i = V_1 \times \{v_i\}$, $X_i = X \times \{v_i\}$, $Y_i = Y \times \{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sehingga diperoleh $S_i = X_i \cup Y_i$. Seperti sebelumnya, titik $(u_i, v_j)$ di graf $G \otimes K_n$ dilambangkan dengan $w_{ij}$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. maka $S_i = \{w_{1i}, w_{2i}, \dots, w_{mi}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, adalah sebuah himpunan titik independen di $G \otimes K_n$, dan $V(G \otimes K_n)$ mempunyai partisi $V_1 \times V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$.

Konektivitas hasil kali kronecker antara graf bipartit dan graf komplet diperoleh hasil sebagai berikut:

**Teorema 3.8**

Jika $G$ adalah graf bipartit dan $n \geq 3$, maka $\kappa(G \otimes K_n) = \min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}$.

Jika $G$ graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$, maka min $\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}$ = min $\{n\delta(G), (n-1)\delta(G)\}$
$= (n-1)\delta(G)$

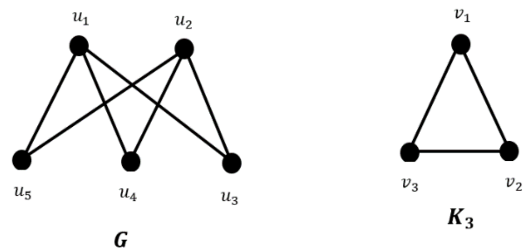
Sehingga akibat langsung dari Teorema 3.8, diperoleh hasil sebagai berikut:

**Akibat 3.9**

Jika $G$ graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka

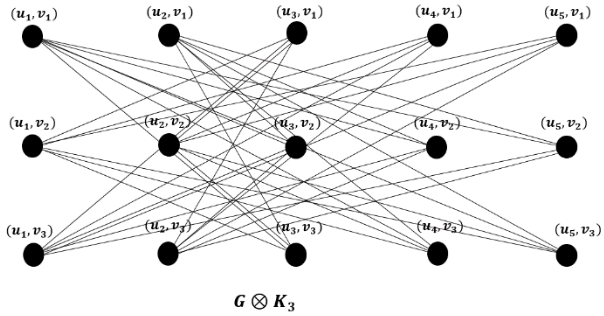
$$\kappa(G \otimes K_n) = \delta(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G).$$

**Contoh 3.3:**




(a)

Hasil kali kronecker dari graf $G$ dan graf $K_3$ dapat dilihat pada Gambar 4(b).




(b)

Gambar 4. (a) Graf $\boldsymbol{G}$ dan Graf $\boldsymbol{K_3}$; (b) Graf $\boldsymbol{G \otimes K_3}$ dengan $\boldsymbol{\kappa(G \otimes K_3) = 4}$

Dalam hal ini $\delta(G) = 2$ dan $n = 3$, berdasarkan Akibat 3.9, $\kappa(G \otimes K_3) = (3-1).2 = 4$. Perhatikan bahwa $S = \{(u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus minimum pada graf $G \otimes K_3$.

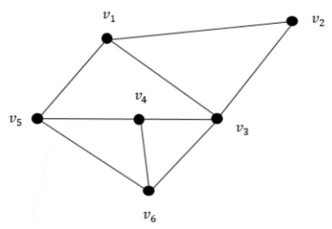
## C.Konektivitas-Titik Super Hasil Kali Kronecker Dua Graf

**Definisi 3.3**

Sebuah himpunan-titik-pemutus $S$ di graf $G$ disebut himpunan-titik-pemutus super ($\kappa$ –Super), jika $G - S$ tak terhubung dan tidak memuat titik terasing. Definisi ini berakibat bahwa setiap titik $u \in V(G - S)$, maka $N_G(u) \nsubseteq S$. Konektivitas-titik super dari graf $G$ disimbolkan dengan $\kappa_s(G)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\kappa_s(G) = \min\{|S| : S \subseteq V(G) \text{ adalah himpunan-titik-pemutus super dari } G\}.$$

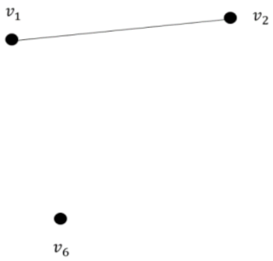
**Contoh 3.4:**
Perhatikan graf $G$ pada gambar berikut.




$\boldsymbol{G}$

Gambar 5. Graf $\boldsymbol{G}$ terhubung

Jika $S_1 = \{v_3, v_4, v_5\}$ maka $G - S_1$ Graf tak terhubung dengan dua komponen seperti berikut:

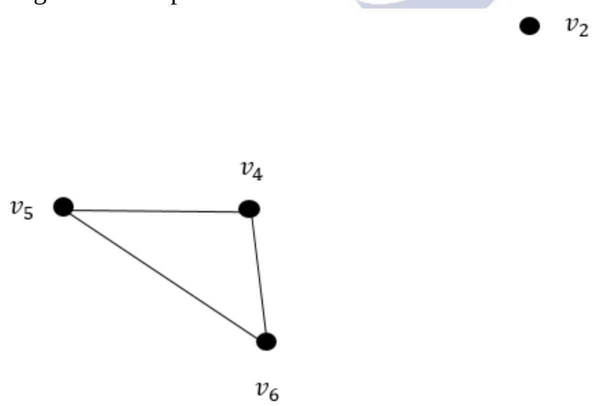



$\boldsymbol{G - S_1}$

(a)

Sehingga $S_1$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus di $G$. Tetapi $S_1$ bukan himpunan titik-pemutus super di $G$ karena $G - S_1$ memuat titik terasing yaitu $v_6$.

Jika $S_2 = \{v_1, v_3\}$ maka $G - S_2$ Graf tak terhubung dengan dua komponen berikut:

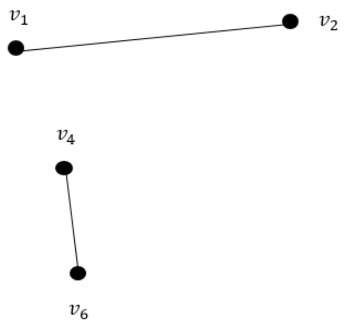



$\boldsymbol{G - S_2}$

(b)

Sehingga $S_2$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus dari $G$. Tetapi $S_2$ bukan himpunan titik-pemutus super di $G$ karena $G - S_2$ memuat titik terasing yaitu $v_2$.

Jika $\boldsymbol{S_3 = \{v_3, v_5\}}$ maka $\boldsymbol{G - S_3}$ Graf tak terhubung dengan dua komponen




$\boldsymbol{G - S_3}$

(c)

Gambar 6. (a) $\boldsymbol{G - S_1}$; (b) $\boldsymbol{G - S_2}$; (c) $\boldsymbol{G - S_3}$

Sehingga $S_3$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus di $G$ dan $S_3$ himpunan titik-pemutus super di $G$ karena $G - S_3$ tidak memuat titik terasing.

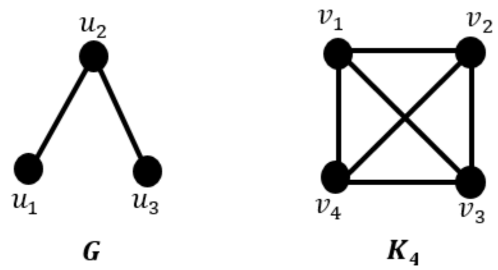
Mudah diamati bahwa tidak ada himpunan titik-pemutus super dari $\boldsymbol{G}$ yang mempunyai kardinalitas kurang dari dua. Sehingga konektivitas-titik super dari $\boldsymbol{G}$ adalah dua, atau $\boldsymbol{\kappa_s(G) = 2}$.

Baru-baru ini, Guo et al mempelajari konektivitas super hasil kali kronecker dari graf bipartit dan graf komplet bahwa $G \otimes K_n$ $(n \geq 3)$ adalah $\kappa$-super untuk graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$.

**Teorema 3.10**

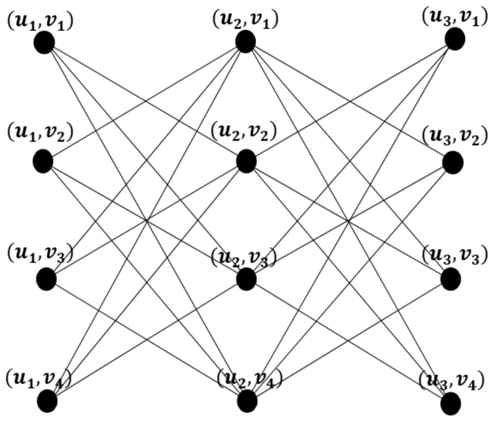
Jika $G$ sebuah graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka $G \otimes K_n$ $\kappa$-super.

**Contoh 3.5:**
Diberikan graf $G$ dan graf $K_4$ seperti pada gambar berikut :



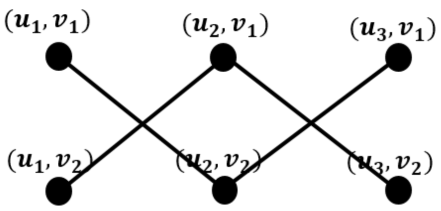

(a)

Hasil kali kronecker dari graf $\boldsymbol{G}$ dan graf $\boldsymbol{K_4}$ dapat dilihat pada Gambar 7(b).




$\boldsymbol{G \otimes K_4}$

(b)




$\boldsymbol{(G \otimes K_4) - S}$

(c)

Gambar 7. (a) Graf $\boldsymbol{G}$ dan Graf $\boldsymbol{K_4}$; (b)Graf $\boldsymbol{G \otimes K_4}$ dengan $\boldsymbol{\kappa_s(G \otimes K_4) = 6}$; (c) Graf $\boldsymbol{(G \otimes K_4) - S}$

Dengan memperhatikan graf $G \otimes K_4$ pada Gambar 7(b), terlihat bahwa:
$S = \ (u_1, v_3), (u_1, v_4), (u_2, v_3)(u_2, v_4), (u_3, v_3), (u_3, v_4)$ sebagai himpunan-titik-pemutus super pada graf $G \otimes K_4$. Perhatikan bahwa graf $(G \otimes K_4) - S$ pada Gambar 7(c) merupakan graf tak terhubung dengan dua komponen.

**Lemma 3.11**

Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) \leq (n-2)(m+r)$.

**Lemma 3.12**

Misalkan $S$ himpunan bagian dari $V(K_{m,r} \otimes K_n)$ dan $S_i - S \neq \emptyset$ untuk paling sedikit tiga $i$ yang berbeda $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

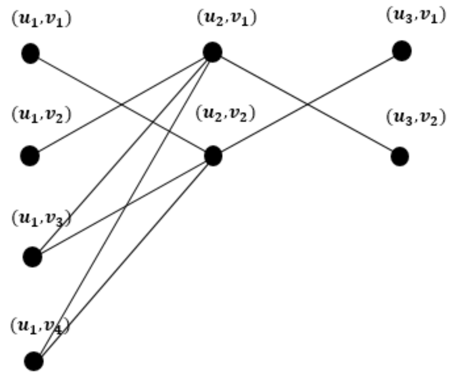
Jika $(K_{m,r} \otimes K_n) - S$ tidak mempunyai titik terasing, maka $(K_{m,r} \otimes K_n) - S$ graf terhubung.

**Contoh 3.6:**

Perhatikan hasil kali kronecker dari graf $K_{1,2}$ dengan graf $K_4$ pada Gambar 7.
Misalkan $S = \{(u_2, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_3), (u_3, v_4)\}$.
Maka,

$$S_1 - S = S_1 \neq \emptyset$$
$$S_2 - S = S_2 \neq \emptyset$$
$$S_3 - S = \{(u_1, v_3)\} \neq \emptyset$$

Dan graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$ dapat dilihat pada gambar berikut:




$\boldsymbol{(K_{1,2} \otimes K_4) - S}$

Gambar 8. Graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$

Graf $(K_{1,2} \otimes K_4) - S$ tidak mempunyai titik terasing dan perhatikan bahwa graf ini terhubung.

**Teorema 3.13**

Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$.

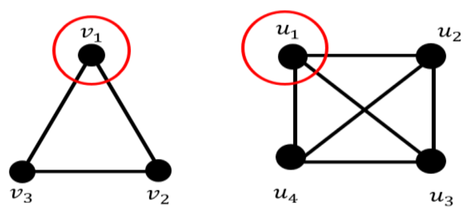
Lemma berikut diperlukan untuk membuktikan lemma selanjutnya.

**Lemma 3.14**

Jika $n \geq m$, maka max $\{m, n\} = n$. Jelas $\alpha(K_m \otimes K_n) = n$.

**Contoh 3.7:**

Perhatikan pada Gambar 9, titik independen pada graf $K_3$ dan graf $K_4$.




$\boldsymbol{\alpha(K_3) = 1}$ $\boldsymbol{\alpha(K_4) = 1}$

Gambar 9. $\boldsymbol{\alpha(K_3) = 1, \alpha(K_4) = 1}$

Sehingga,

$$\alpha(K_m \otimes K_n) = n.$$

Selanjutnya akan dibahas konektivitas-super hasil kali kronecker dua graf komplet. Marmut dan Vumar mempelajari beberapa parameter kerentanan titik perkalian kronecker dari graf komplet $K_m \otimes K_n$ untuk $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Dalam penelitiannya, $\omega(G - S)$ dilambangkan banyak komponen dari graf $G - S$ dan salah satu hasil utama mereka adalah sebagai berikut.

**Lemma 3.15**

Misalkan $m, n$ bilangan bulat dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, dan $S$ adalah sebuah himpunan titik-pemutus dari $G$ = $K_m \otimes K_n$.

a. Jika $\omega(G - S) = 2$ dan $G_1$ dan $G_2$ adalah komponen-komponen dari $G - S$, maka $|V(G_1)| = |V(G_2)| = 2$ atau $\min\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\} = 1$.
b. Jika $\omega(G - S) \geq 3$, maka setiap komponen $G - S$ adalah sebuah titik terasing dan $|S| \geq mn - n$.

**Teorema 3.16**

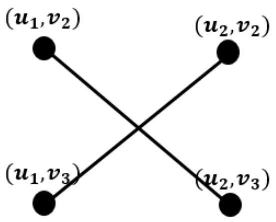
Jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$.

**Contoh 3.8:**

Dengan memperhatikan graf $K_4 \otimes K_3$ pada Gambar 3, terlihat bahwa:

$$S = \{(u_1, v_1), (u_2, v_1), (u_3, v_1), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_1), (u_4, v_2), (u_4, v_3)\}$$

sebagai himpunan titik-pemutus super pada graf $K_4 \otimes K_3$. Perhatikan bahwa $(K_4 \otimes K_3) - S$ merupakan graf tak terhubung dengan dua komponen merupakan graf $K_2$ seperti gambar berikut :




Gambar 10. Graf $(\boldsymbol{K_4} \otimes \boldsymbol{K_3}) - \boldsymbol{S}$

## 4. PENUTUP

### Simpulan

Berdasarkan pembahasan dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Syarat perlu dan cukup hasil kali kronecker dua graf merupakan graf terhubung, yaitu salah satu dari kedua graf tersebut memuat sebuah sikel ganjil.
2. Konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf, yaitu :
   a. Jika graf $G_1 \otimes G_2$ terhubung, maka
   $$1 \leq \kappa(G_1 \otimes G_2) \leq \delta(G_1) \times \delta(G_2)$$
   b. Jika $K_m$ dan $K_n$ dua graf komplet dengan $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka
   $$\kappa(K_m \otimes K_n) = (m-1)(n-1)$$
   c. Jika $G$ adalah graf bipartit dan $n \geq 3$, maka
   $$\kappa(G \otimes K_n) = \min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}$$
   d. Jika $G$ graf bipartit dengan $\kappa(G) = \delta(G)$ dan $n \geq 3$, maka
   $$\kappa(G \otimes K_n) = \delta(G \otimes K_n) = (n-1)\delta(G).$$
3. Konektivitas-titik super hasil kali kronecker dua graf, yaitu:
   a. Jika $n \geq 3, m \geq 1$ dan $r \geq 1$, maka $\kappa_s(K_{m,r} \otimes K_n) = (n-2)(m+r)$
   b. Jika $n \geq m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka $\kappa_s(K_m \otimes K_n) = mn - 4$.

### Saran

Hasil yang diperoleh hanya sebatas hasil kali kronecker dari graf komplet dengan graf komplet dan graf bipartit dengan graf komplet. Jika graf $G_1$ dan $G_2$ bukan graf-graf komplet maupun graf bipartit komplet, maka penentuan nilai $\kappa(G_1 \otimes G_2)$ maupun nilai $\kappa_s(G_1 \otimes G_2)$ masing-masing merupakan persoalan yang sulit. Untuk itu diberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pembahasan konektivitas-titik hasil kali kronecker dua graf.

## DAFTAR PUSTAKA

Bottreau, A., & Metivier *, Y. (1998). Some remarks on the Kronecker product of graphs. *Information Processing Letters 68*, 55-61.

Budayasa, I. K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya.* Surabaya : Unesa University Surabaya Press.

Ekinci*, G. B., & Kırlangiç, A. (2015). Super connectivity of Kronecker product of complete. *Discrete Mathematics 339* , 1950-1953.

Guji, R., & Vumar, E. (2009). A note on the connectivity of Kronecker products of graphs. *Applied Mathematics Letters 22* , 1360-1363.

Mamut, A., & Vumar*, E. (2008). Vertex vulnerability parameters of Kronecker products of complete graphs. *Information Processing Letters 106*, 258-262.

WEICHSEL, P. M. (1962). THE KRONECKER PRODUCT OF GRAF. 47-52.