

## BEBERAPA SYARAT GRAF TIDAK BERSAHABAT

**Salwa Yuliantina**

(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)  
E-mail : salwayuliantina@mhs.unesa.ac.id

**I Ketut Budayasa**

(Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya)  
E-mail : ketutbudayasa@yahoo.com

### Abstrak

Misalkan  $G$  sebuah graf dengan himpunan titik  $G$  dilambangkan dengan  $V(G)$ . Misalkan  $v$  sebuah titik di  $G$ . Persekitaran titik  $v$  di  $G$ , dilambangkan dengan  $N(v)$ , adalah himpunan semua titik  $G$  yang berhubungan langsung dititik  $v$ . Misalkan  $S \subseteq V(G)$ . Sebuah titik  $v \in S$  dikatakan tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran  $v$  di  $V(G) \setminus S$  lebih dari atau sama dengan banyak titik persekitaran  $v$  di  $S$ . Dengan kata lain,  $|N(v) \cap V(G) \setminus S| \geq |N(v) \cap S|$ . Sedangkan titik  $v$  dikatakan sangat tidak bersahabat apabila banyak titik persekitaran  $v$  di  $V(G) \setminus S$  lebih besar dari banyaknya titik persekitaran  $v$  di  $S$ . Dengan kata lain,  $|N(v) \cap V(G) \setminus S| > |N(v) \cap S|$ . Jika setiap titik  $v \in S$  dan setiap titik  $u \in V(G) \setminus S$  adalah titik-titik yang tidak bersahabat maka  $(S, V(G) \setminus S)$  dinamakan sebuah bipartisi tidak bersahabat dari graf  $G$ , dan  $G$  dikatakan graf tidak bersahabat. Begitu juga untuk setiap titik  $v \in S$  dan setiap titik  $u \in V(G) \setminus S$  dinamakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf  $G$ , dan  $G$  dikatakan graf sangat tidak bersahabat.

Dalam skripsi ini dibahas syarat-syarat graf tidak bersahabat maupun graf sangat tidak bersahabat.

**Kata Kunci :** graf tidak bersahabat, graf sangat tidak bersahabat

### Abstract

Let  $G$  be a graph with vertex set  $V(G)$  and  $v \in V(G)$ . The neighborhood of a vertex  $v$  in  $G$  graph, is denoted by  $N(v)$ , is the set of all vertices in  $G$  which are adjacent to the vertex  $v$ . Let  $S$  be a proper subset of  $V(G)$ . A vertex  $v \in S$  is called an unfriendly vertex if the number of neighborhood vertices of  $v$  in  $V(G) \setminus S$  grather than or equal two the number of neighborhood vertices of  $v$  in  $S$ . That is,  $|N(v) \cap V(G) \setminus S| \geq |N(v) \cap S|$ . And, a vertex  $v$  is called a very unfriendly vertex if the neighborhood vertices of  $v$  in  $V(G) \setminus S$  is grather than the number of neighborhood vertices of  $v$  in  $S$ . That is,  $|N(v) \cap V(G) \setminus S| > |N(v) \cap S|$ . If every vertex  $v \in S$  and every vertex  $u \in V(G) \setminus S$  is unfriendly (very unfriendly) vertex, than  $(S, V(G) \setminus S)$  is called unfriendly (very unfriendly) bipartition of  $G$ . Furthermore, such a graph  $G$  is called unfriendly (very unfriendly) graph. In this thesis, we have established some sufficient conditions for a graph to be unfriendly or very unfriendly we also have established a necessary and sufficient condition for a cactus graph to be very unfriendly graph.

**Keywords:** unfriendly graph, very unfriendly graph

### PENDAHULUAN

Teori Graf merupakan cabang dari matematika yang sudah ada sejak lama. Salah satu topik dari teori graf adalah himpunan dominasi. Secara historis, masalah dominasi mulai dipelajari dari tahun 1950 oleh Hedetniemi dan Laskar, kemudian topik-topik lanjutan dalam dominasi yang telah didefinisikan oleh beberapa penulis dan lebih dari 75 jenis dominasi dituliskan dalam buku oleh Haynes dkk (Sivakumar dkk:2012). Haynes (2015:1) menyatakan bipartisi tidak bersahabat jika  $graph G = (V, E)$  memiliki

himpunan bagian  $S \subseteq V(G)$ , dengan sebuah titik  $v$  di  $S$ . Banyak titik persekitaran  $v$  di  $V(G) \setminus S$  tidak kurang dari banyak persekitaran titik  $v$  di  $S$ . Selanjutnya, titik  $v$  di  $S$  dikatakan sangat tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran  $v$  di  $V(G) \setminus S$  lebih dari banyaknya persekitaran titik  $v$  di  $S$ .

### KAJIAN TEORI

#### A. Graf

**Definisi 2.1:** Sebuah graf  $G$  berisikan dua himpunan yaitu titik dan sisi. Titik merupakan obyek-obyek

yang himpunannya berhingga tak kosong  $V(G)$  dan sisi berisikan himpunan berhingga (boleh kosong)  $E(G)$ , sehingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasangan tak berurutan dari titik-titik di  $V(G)$ . Himpunan titik pada  $G$  disebut  $V(G)$  dan himpunan sisi  $G$  disebut  $E(G)$ . Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah dua titik di  $G$  dan  $e = (u, v)$  adalah sebuah sisi  $G$ . Titik  $u$  dan  $v$  berhubungan langsung di  $G$ , sisi  $e$  menghubungkan titik  $u$  dan titik  $v$  di  $G$ , sisi  $e$  terkait dengan titik  $u$  dan juga titik  $v$

(Budayasa, 2007)

## B. Graf Sederhana

**Definisi 2.2:** Graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan tidak memiliki gelung (*loop*) disebut **graf sederhana**

(Budayasa, 2007)

## C. Sikel

**Definisi 2.3:** Misalkan graf  $G$  memiliki jejak  $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, \dots, e_k, v_k)$  adalah sebuah jejak tertutup (*closed trail*) di  $G$ , maka  $W$  disebut sikel jika titik awal dan semua titik internalnya berbeda

(Budayasa, 2007)

## D. Graf Bagian

**Definisi 2.4:** Sebuah graf  $H$  disebut graf bagian dari graf  $G$ , ditulis  $H \subset G$ , jika  $V(H) \subset V(G)$  dan  $E(H) \subset E(G)$

(Budayasa, 2007)

## E. Derajat Titik Graf

**Definisi 2.5:** Misalkan  $G$  sebuah graf dan  $v$  sebuah titik  $G$ . Derajat titik  $v$ , dilambangkan dengan  $d_G(v)$  atau  $d(v)$ , adalah banyaknya sisi  $G$  yang terkait dengan titik  $v$  (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). Derajat minimum  $G$ , dilambangkan dengan  $\delta(G)$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$\delta(G) = \text{minimum} \{d(v) / v \in V(G)\}$$

Sedangkan derajat maksimum  $G$ , dilambangkan dengan  $\Delta(G)$ , didefinisikan sebagai berikut:

$$\Delta(G) = \text{maksimum} \{d(v) / v \in V(G)\}.$$

Graf  $G$  disebut **Graf beraturan- $k$**  jika setiap titik  $G$  berderajat  $k$ . Misalnya, graf komplit dengan  $n$  titik adalah graf beraturan- $(n-1)$ . Sikel dengan  $n$  titik,  $C_n$ , adalah graf beraturan-2. Graf  $H$  pada Gambar 2.13 adalah graf beraturan-3. Perhatikan bahwa, jika  $G$  graf beraturan, maka  $\delta(G) = \Delta(G)$

(Budayasa, 2007)

## F. Graf Non-trivial

**Definisi 2.6:** Suatu graf  $G$  disebut graf *non-trivial* jika graf  $G$  memiliki derajat paling sedikit dua

(Chartrand & Oellermann 1993)

## G. Graf Bipartisi dan Graf Bipartisi komplit

**Definisi 2.7:** Sebuah graf  $G$  disebut graf bipartisi jika himpunan titik  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian  $A$  dan  $B$  pada graf sedemikian hingga setiap sisi dari  $G$  menghubungkan sebuah titik di  $A$  dan sebuah titik di  $B$ , dilambangkan dengan  $G(A, B)$ .  $(A, B)$  merupakan bipartisi dari  $G$

(Budayasa, 2007)

## H. Titik Terasing Graf

**Definisi 2.8:** Sebuah graf  $G$  dikatakan graf yang memiliki titik terasing jika graf  $G$  memiliki titik yang berderajat nol

(Permatasari, 2016)

## I. Graf Pohon

**Definisi 2.9:** Jika  $G$  graf terhubung dan tidak ada sikel maka  $G$  dikatakan sebuah pohon

(Budayasa, 2007)

## J. Perkalian Kartesius Dua Buah Graf (Cartesius Product)

**Definisi 2.10:** Misal  $G$  dan  $H$  dua graf yang saling lepas. Perkalian kartesius dari  $G$  dan  $H$ , dilambangkan dengan  $G \times H$ , adalah sebuah graf dengan himpunan titik  $V(G \times H) = V(G) \times V(H) = \{(u, v) / u \in V(G) \text{ dan } v \in V(H)\}$ . Himpunan sisi  $E(G \times H)$  terdiri dari titik  $(u, v)$  dan  $(w, x)$  berhubungan langsung di  $G \times H$  dengan  $u = w$  dan berhubungan langsung dengan  $x$  di  $H$ , atau  $u$  berhubungan langsung dengan  $w$  di  $G$  dan  $v = x$

(Haynes, 2015:156)

## K. Graf Kaktus (Cactus Graph)

**Definisi 2.11:** Terhubung-2 maksimal pada graf  $G$  adalah banyaknya graf bagian yang berhubungan langsung maksimal 2. Blok pada graf  $G$  merupakan sebuah graf bagian  $G$  yang terhubung-2 maksimal. Blok akhir merupakan sebuah blok di graf  $G$  yang hanya memiliki satu titik pemutus di graf  $G$ .

Graf  $G$  disebut graf kaktus jika  $G$  terhubung dan setiap blok dari  $G$  berupa sebuah sisi atau sebuah sikel

(Paten, et al., 2011)

## L. Komplemen Graf

**Definisi 2.12:** Misalkan  $G$  sebuah graf sederhana. Komplemen  $G$ , dilambangkan dengan  $\bar{G}$  adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan

himpunan titik  $G$ . Jika titik  $u$  dan  $v$  di  $\bar{G}$  berhubungan langsung maka titik  $u$  dan  $v$  tidak berhubungan langsung pada  $G$ . Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  dan  $H = (V(H), E(H))$  merupakan dua buah graf, maka gabungan  $G$  dengan  $H$ , dinotasikan  $G \cup H$ , adalah graf dengan himpunan titik  $V(G) \cup V(H)$  dan himpunan sisi  $E(G) \cup E(H)$ . Dengan demikian, jika  $G$  graf sederhana dengan  $n$  titik, maka  $G \cup \bar{G} = K_n$   
(Budayasa, 2007)

**PEMBAHASAN**

**A. Bipartisi tidak bersahabat pada graf**

**Definisi 3.1:** Misal  $G = (V(G), E(G))$  sebuah graf dan  $v$  sebuah titik di  $G$ . Persekitaran buka di  $v$ , dilambangkan dengan  $N_G(v)$  atau  $N(v)$ , adalah himpunan semua titik  $G$  yang berhubungan langsung dengan  $v$ . Dengan kata lain,

$$N(v) = \{u \in V(G) / (u, v) \in E(G)\}$$

Sedangkan persekitaran tutup dari titik  $v$ , dilambangkan dengan  $N[v]$ , didefinisikan sebagai berikut

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

Misal  $S \subseteq V(G)$ , persekitaran buka dari  $S$ , dilambangkan  $N(S)$ , didefinisikan sebagai berikut

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$$

Sedangkan Persekitaran tutup  $S$ , dilambangkan  $N[v]$  adalah

$$N[v] = N(S) \cup S$$

**Definisi 3.1.1:** Misal  $S \subseteq V(G)$ . Sebuah titik  $v$  di  $S$  dikatakan tidak bersahabat jika banyak titik persekitaran pada  $v$  di  $V(G) \setminus S$  tidak kurang dari banyak persekitaran buka titik  $v$  di  $S$ . Dengan kata lain,  $|N(v) \cap (V(G) \setminus S)| \geq |N(v) \cap S|$ .

Himpunan  $S$  dikatakan tidak bersahabat jika setiap titik di  $S$  tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi,  $B = (S, V \setminus S)$  dikatakan tidak bersahabat jika setiap dari  $S$  dan  $V(G) \setminus S$  tidak bersahabat. Sebuah graf yang memiliki sebuah bipartisi tidak bersahabat disebut graf tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi  $B = (S, V(G) \setminus S)$  pada graf  $G$  dikatakan  $e[S, V(G) \setminus S]$  maksimum jika banyaknya sisi yang menghubungkan  $(S, V(G) \setminus S)$  maksimum.

**Teorema 3.1:** Jika  $G$  terhubung dengan  $n$  titik dan  $n \geq 2$  maka  $G$  mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

**Bukti:**

Misalkan  $B = (S, V(G) \setminus S)$  sebuah bipartisi graf  $G$  sedemikian hingga  $e[S, V(G) \setminus S]$  maksimum.

Andaikan  $B$  bipartisi bukan tidak bersahabat. Maka  $S$  bukan tidak bersahabat atau  $V(G) \setminus S$  bukan tidak bersahabat.

Jika  $S$  bukan tidak bersahabat maka ada titik di  $S$  bukan tidak bersahabat. Misalkan titik tersebut  $v$ . Akibatnya  $|N(v) \cap (V(G) \setminus S)| < |N(v) \cap S|$ .

Selanjutnya titik  $v$  dipindah ke  $V(G) \setminus S$ , sehingga didapat bipartisi baru  $B' = (S', V(G) \setminus S')$  dengan  $S' = S \setminus \{v\}$  dengan  $e[S', V(G) \setminus S'] > e[S, V(G) \setminus S]$ , kontradiksi dengan  $e[S, V(G) \setminus S]$  maksimum.

Jika  $V(G) \setminus S$  bukan tidak bersahabat. Maka ada titik di  $V(G) \setminus S$  bukan tidak bersahabat misalkan titik tersebut  $v$ . Akibatnya  $|N(v) \cap S| < |N(v) \cap (V(G) \setminus S)|$ .

Selanjutnya titik  $v$  dipindah ke  $S$  sehingga didapat bipartisi baru  $B' = (S', V(G) \setminus S')$  dengan  $S' = S \cup \{v\}$ .

Jelas bahwa  $e[S', V(G) \setminus S'] > e[S, V(G) \setminus S]$ , kontradiksi dengan  $e[S, V(G) \setminus S]$  maksimum. ■

**B. Bipartisi sangat tidak bersahabat pada graf.**

**Definisi 3.2:** Misal  $S$  sebuah himpunan bagian dari  $V(G)$ . Sebuah titik  $v$  di  $S$  dikatakan sangat tidak bersahabat jika  $|N(v) \cap (V(G) \setminus S)| > |N(v) \cap S|$ . Himpunan  $S$  dikatakan sangat tidak bersahabat jika setiap titik di  $S$  sangat tidak bersahabat.

Sebuah bipartisi  $B = (S, V(G) \setminus S)$  dikatakan sangat tidak bersahabat jika setiap dari  $S$  dan  $V(G) \setminus S$  sangat tidak bersahabat. Sebuah graf yang memiliki sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat disebut graf sangat tidak bersahabat.

**Teorema 3.2:** Jika  $G$  graf bipartisi tanpa titik terasing maka  $G$  sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

**Bukti:**

Misalkan  $G$  graf, bipartisi dengan  $(A, B)$  maka setiap sisi  $G$  hanya menghubungkan sebuah titik di  $A$  dan sebuah titik di  $B$  dan tidak ada sisi  $G$  yang menghubungkan dua titik di  $A$  begitu juga tidak ada sisi  $G$  yang menghubungkan dua titik di  $B$ .

Perhatikan bahwa  $V(G) \setminus A = B$

Jika  $v \in A$  maka  $N(v) \cap A = \emptyset$ , sehingga  $|N(v) \cap A| = 0 \dots \dots \dots (1)$

Karena  $v$  bukan titik terasing maka  $d(v) \geq 1$

Sehingga  $|N(v) \cap V(G) \setminus A| \geq 1 \dots \dots \dots (2)$

Dari (1) dan (2) didapatkan  $|N(v) \cap V(G) \setminus A| > |N(v) \cap A|$ , ini berarti setiap titik  $v$  di  $A$  merupakan titik sangat tidak bersahabat sehingga  $A$  merupakan himpunan sangat tidak bersahabat.

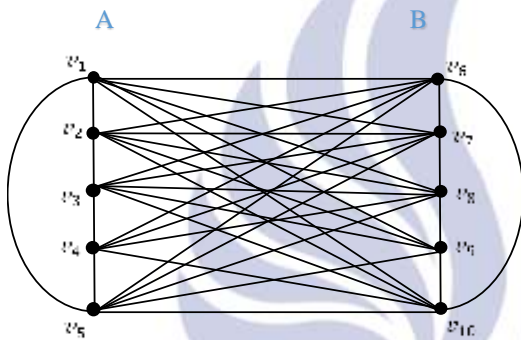
Begitu juga untuk setiap titik  $w$  di  $B = V(G) \setminus A$ ,  $|N(w) \cap V(G) \setminus A| = 0$  dan  $|N(w) \cap V(G) \setminus A| = |N(w) \cap A| \geq 1$ .

Sehingga  $|N(w) \cap A| > |N(w) \cap V(G) \setminus A|$ , ini berarti setiap titik  $B = V(G) \setminus A$  sangat tidak bersahabat sehingga  $B$  merupakan himpunan sangat tidak bersahabat.

Jadi, bipartisi  $(A, B)$  merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dengan demikian graf bipartisi  $G = (A, B)$  merupakan graf sangat tidak bersahabat. ■

**Teorema 3.3:** Jika  $C_5$  sebuah siklus dengan 5 titik dan  $G = C_5 + C_5$ , maka  $G$  sangat tidak bersahabat. (Haynes, 2015)

**Bukti:**



Misal  $(A, B)$  sebuah bipartisi dari  $G$  dengan  $A = \{v_i / 1 \leq i \leq 5\}$  dan  $B = \{v_i / 6 \leq i \leq 10\}$ .

Perhatikan bahwa  $\forall_i, 1 \leq i \leq 5, |N(v_i) \cap A| = 2 < 5 = |N(v_i) \cap B|$ .

Sehingga  $\forall_i, 1 \leq i \leq 5, v_i$  merupakan titik sangat tidak bersahabat di  $G$ .

Selanjutnya  $\forall_i, 6 \leq i \leq 10, |N(v_i) \cap B| = 2 < 5 = |N(v_i) \cap A|$ . Sehingga  $\forall_i, 6 \leq i \leq 10, v_i$  merupakan titik sangat tidak bersahabat di  $G$ .

Jadi  $(A, B)$  merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di  $G$ . Dengan demikian  $G$  sangat tidak bersahabat sehingga Teorema 3.3 terbukti. ■

**Teorema 3.4**

Tidak ada bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf  $G$  merupakan sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf  $\bar{G}$ .

(Haynes, 2015)

**Bukti:**

Misal  $\pi = (A, B)$  bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf  $G$ . Maka  $\pi$  bukan sangat tidak bersahabat dari graf  $\bar{G}$ .

➤ Misal  $v \in A, |N_G(v) \cap A| = n_1, |N_G(v) \cap B| = n_2$

Karena  $v$  sangat tidak bersahabat di  $G$  maka  $n_2 > n_1$  ..... (1)

Selanjutnya,  $|N_G(v) \cap A| = |A| - n_1 - 1$  dan  $|N_G(v) \cap B| = |B| - n_2$

Berdasarkan asumsi,

$$|N_{\bar{G}}(v) \cap B| > |N_{\bar{G}}(v) \cap A|$$

Sehingga,

$$|B| - n_2 > |A| - n_1 - 1 \dots\dots (2)$$

Dari 1 dan 2 diperoleh,  $|B| > |A|$

➤ Misal  $v \in B, |N_G(v) \cap B| = n_1, |N_G(v) \cap A| = n_2$   
 Karena  $v$  sangat tidak bersahabat di  $G$  maka  $n_2 > n_1$  ..... (1)

Selanjutnya,  $|N_{\bar{G}}(v) \cap B| = |B| - n_1 - 1$  dan  $|N_{\bar{G}}(v) \cap A| = |A| - n_2$

Berdasarkan asumsi,

$$|N_{\bar{G}}(v) \cap A| >$$

$$|N_{\bar{G}}(v) \cap B|$$

Sehingga,

$$|A| - n_2 > |B| - n_1 - 1 \dots\dots (2)$$

Dari 1 dan 2 diperoleh,  $|A| > |B|$

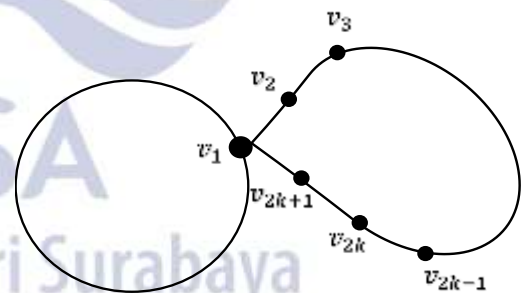
Kontradiksi. Demikian Teorema 3.4 terbukti. ■

**Teorema 3.5**

Jika  $G$  sebuah graf memiliki sebuah blok-akhir berupa sebuah siklus ganjil maka  $G$  bukan sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

**Bukti:**



Misal  $G$  sebuah graf siklus ganjil sebagai blok-akhir dan misalkan blok-akhir tersebut adalah  $C = (v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}, v_1)$  sedemikian hingga  $v_1$  adalah sebuah titik pemutus  $G$  di  $C$ .

Andaikan  $G$  sangat tidak bersahabat, maka  $G$  memiliki sebuah bipartisi  $\pi = (A, B)$  yang sangat tidak bersahabat.

Tanpa menghilangkan keumuman, misal  $v_1 \in A$

Karena  $C$  sebuah blok-akhir di  $G$  dan  $v_1$  sebuah titik pemutus di  $G$  pada  $C$  maka untuk  $\forall_{j, 2 \leq j \leq 2k+1}, d_{(v_j)} = 2$ .

Karena  $\pi = (A, B)$  sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di  $G$ , maka  $v_2 \notin A$  dengan kata lain  $v_2$  anggota di  $B$ .

Begitu juga  $\forall_{i,1 \leq i \leq k}, v_{2i} \in B$  dan  $v_{2i+1} \in A$ .

Sehingga,  $|N_{(v_{2k+1})} \cap A| = |\{v_1\}| = 1$  dan  $|N_{(v_{2k+1})} \cap B| = |\{v_{2k}\}| = 1$

Ini berarti titik  $v_{2k+1}$  bukan sangat tidak bersahabat dalam bipartisi  $\pi = (A, B)$ .

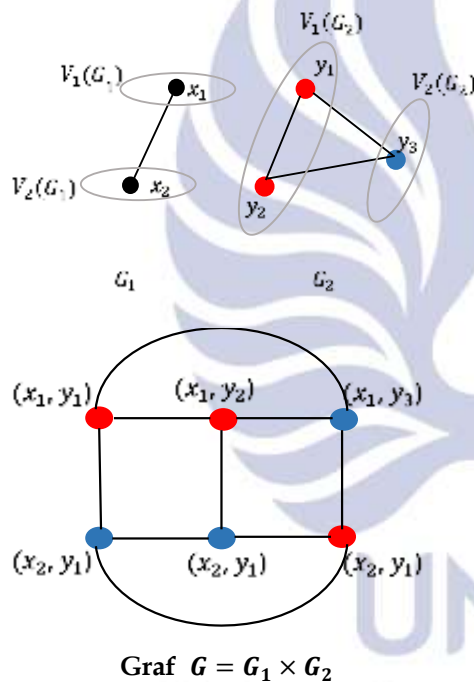
Kontradiksi. Dengan demikian Teorema 3.5 terbukti ■

**Teorema 3.6**

Jika  $G_1$  sebuah graf sangat tidak bersahabat dan  $G_2$  sebuah graf terhubung maka  $G = G_1 \times G_2$  graf sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

**Bukti:**



Karena  $G_1$  graf sangat tidak bersahabat maka ada bipartisi  $\pi_1 = (V_1(G_1), V_2(G_1))$  yang sangat tidak bersahabat di  $G_1$ . Karena  $G_2$  graf terhubung, maka berdasarkan Teorema 3.1  $G_2$  mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat  $\pi_2 = (V_1(G_2), V_2(G_2))$ .

Selanjutnya definisikan dua pewarnaan, dinamakan  $P_1$  dan  $P_2$ . Dari titik-titik graf  $G_2$ . Sebagai berikut :  $P_1$  mewarnai titik-titik  $V_1(G_2)$  dengan warna merah dan titik-titik  $V_2(G_2)$  dengan warna biru dan pewarnaan  $P_2$  adalah menukar warna-warna dari  $P_1$ .

Selanjutnya, mewarnai titik-titik dari graf  $G = G_1 \times G_2$  dengan warna merah dan biru dengan cara sebagai berikut.

Untuk setiap titik  $v \in V(G_1)$ , kita pandang  $v$  pada bipartisi  $V_1$  di  $G_1$  untuk mewarnai titik  $G_{2v}$  di  $G = G_1 \times G_2$  sebagai berikut.

Jika  $v \in V_1(G_1)$ , maka gunakan pewarnaan  $P_1$  untuk titik  $G_{2v}$ ;

Jika  $v \in V_2(G_1)$ , maka gunakan pewarnaan  $P_2$  untuk titik  $G_{2v}$ .

Misalkan  $M$  himpunan titik-titik dari  $G = G_1 \times G_2$  yang berwarna merah dan  $B$  himpunan titik-titik dari  $G = G_1 \times G_2$  yang berwarna biru.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\pi = (M, B)$  sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di graph  $G = G_1 \times G_2$ .

Setiap titik di  $M$  sangat tidak bersahabat begitu juga setiap titik di  $B$  sangat tidak bersahabat.

Pandang sebuah titik  $(x, y) \in V_{(G=G_1 \times G_2)}$ . Tanpa menghilangkan keumuman misalkan titik  $(x, y)$  berwarna merah dan  $G_{2x}$  diwarnai oleh  $P_1$ . Karena  $P_1$  adalah sebuah bipartisi Merah-biru tidak bersahabat dari  $G_{2x}$ , maka titik  $(x, y)$  mempunyai tetangga berwarna biru paling sedikit sama dengan banyaknya tetangga berwarna merah.

Selanjutnya cukup ditunjukkan banyak tetangga titik  $(x, y)$  yang berwarna biru lebih besar daripada banyak tetangganya yang berwarna merah karena titik  $(x, y)$  berwarna merah terhadap pewarnaan  $P_1$  dari  $G_{2x}$ , maka titik  $(z, y)$  berwarna merah untuk semua  $z \in V_1(G_{2y})$ . Karena  $\pi_1 = (V_1(G_{1y}), V_2(G_{1y}))$  adalah bipartisi sangat tidak bersahabat dari  $G_{1y}$ , maka titik  $(x, y)$  mempunyai banyak tetangga berwarna biru lebih besar daripada banyak tetangga berwarna merah di  $G_{1y}$ .

Akibatnya  $\pi = (M, B)$  sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari graf  $G = G_1 \times G_2$ . Dengan demikian Teorema 3.6 terbukti ■

**Teorema 3.7:** Jika  $G_1$  graf bipartisi tanpa titik terasing dan  $G_2$  graf terhubung *non-trivial*, maka  $G = G_1 \times G_2$  sangat tidak bersahabat.

(Haynes, 2015)

**Bukti:**

Karena graf  $G_1$  merupakan graf bipartisi tanpa titik terasing, berdasarkan Teorema 3.2, maka  $G_1$  merupakan graf sangat tidak bersahabat. Karena  $G_2$  graf terhubung, berdasarkan Teorema 3.6 maka  $G = G_1 \times G_2$  sangat tidak bersahabat.

Dengan demikian Teorema 3.7 terbukti. ■

**C. Graf kaktus**

Misal  $G$  adalah sebuah graf kaktus,  $B$  adalah sebuah blok dari  $G$  dan  $v$  sebuah titik pemutus  $G$  di  $B$ .

Cabang- $v$  dari  $B$  di titik  $v$ , dilambangkan dengan  $B_v$ , adalah graf bagian  $G$  terhubung maksimal sedemikian hingga  $V(B) \cap V(B_v) = \{v\}$ .

Selanjutnya, kita katakan titik  $v$  sebagai akhir dari cabang  $B_v$ .

- Sebuah cabang dikatakan **cabang cantik** jika setiap titik pada sebuah cabang merupakan titik sangat tidak bersahabat.
- Sebuah cabang dikatakan **cabang tidak cantik** jika setiap titik pada sebuah cabang merupakan titik yang tidak bersahabat.
- Titik yang menopang suatu cabang maka titik tersebut disebut **akar**.

**Teorema 3.8:** Sebuah kaktus  $G$  sangat tidak bersahabat jika dan hanya jika setiap blok sikel ganjil  $C$  dari  $G$  menopang dua cabang cantik  $C_u$  dan  $C_v$  dimana  $u$  dan  $v$  titik yang berhubungan langsung di  $C$ .

**Bukti :**

- Jika sebuah kaktus  $G$  sangat tidak bersahabat maka setiap blok sikel ganjil  $C$  dari  $G$  menopang dua cabang cantik  $C_u$  dan  $C_v$  dimana  $u$  dan  $v$  titik yang berhubungan langsung di  $C$ .

Jika setiap sikel di graf  $G$  merupakan panjang sikel genap maka  $G$  merupakan graf bipartisi berdasarkan Teorema 3.7, maka  $G$  sangat tidak bersahabat.

Andaikan graf  $G$  memiliki sebuah sikel ganjil katakan  $C$ . Sedemikian hingga ada dua titik  $u$  dan  $v$  di  $C$  dan cabang yang berakar pada titik  $u$  dinamakan  $C_u$ , selanjutnya untuk cabang yang berakar pada titik  $v$  dinamakan  $C_v$ . Salah satu dari cabang  $C_u$  dan  $C_v$  merupakan cabang tak cantik.

Karena graf  $G$  sangat tidak bersahabat maka ada sebuah bipartisi  $\pi = (M, B)$  sangat tidak bersahabat di  $G$ .

Karena  $C$  adalah sebuah sikel ganjil, sehingga untuk  $\pi$  paling sedikit dua titik berhubungan langsung, katakan titik  $(u, v)$  di  $C$  memiliki warna yang sama, yaitu warna merah.

Asumsikan bahwa titik-titik  $(u, v)$  adalah akar-akar dari cabang-cabang  $C_u$  dan  $C_v$  secara berturut-turut, dan salah satu dari  $C_u$  dan  $C_v$  merupakan cabang tidak cantik. Tanpa menghilangkan keumuman misalkan  $C_u$  adalah cabang tidak cantik, sehingga  $C_u$  bukan sangat tidak bersahabat.

Karena  $\pi$  adalah sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di  $G$ , maka semua titik-titik  $C_u$  kecuali  $u$ , adalah sangat tidak bersahabat atas  $\pi$  di  $C_u$ . Oleh karena itu  $u$  bukan sangat tidak bersahabat atas  $\pi$  di  $C_u$ .

Ini berarti banyaknya tetangga  $u$  yang berwarna merah paling sedikit sama dengan banyaknya tetangga  $u$  berwarna biru di  $C_u$ . Karena  $u$  sangat tidak bersahabat atas  $\pi$  pada  $G$ , artinya banyak tetangga  $u$  berwarna biru lebih besar daripada banyaknya tetangga  $u$  berwarna merah di  $G$ .

Ini berakibat bahwa dua tetangga di  $u$  di  $C$  berwarna biru khususnya  $v \in B$ . Kontradiksi bahwa  $v \in M$ .

Dengan demikian dapat diasumsikan paling sedikit salah satu dari  $u$  dan  $v$ , katakanlah  $u$  bukan akar dari sebuah cabang tetapi karena  $u$  dan  $v$  berwarna merah atas  $\pi$  mengakibatkan  $d_G(u) = 2$ , maka  $u$  bukan sangat tidak bersahabat di  $G$  atas  $\pi$ , kontradiksi.

Selanjutnya akan dibuktikan konversinya.

Misalkan  $G$  sebuah graf kaktus dan setiap sikel ganjil  $C$  di  $G$  menopang dua cabang cantik  $C_u$  dan  $C_v$  dimana  $(u, v)$  berhubungan langsung di  $C$ .

Untuk membuktikan  $G$  sangat tidak bersahabat digunakan induksi matematika pada banyaknya sikel ganjil di  $G$ , misalkan  $t$ . Jika  $t = 0$  maka tidak ada sikel ganjil pada  $G$ .

Ini berarti, setiap sikel di  $G$  adalah sikel genap. Akibatnya,  $G$  merupakan graf bipartisi. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2,  $G$  sangat tidak bersahabat.

Jika  $t = 1$ , maka  $G$  memiliki tepat satu sikel ganjil, misalkan sikel ganjil tersebut adalah  $C$ . Misalkan  $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$  sedemikian hingga  $v_1$  dan  $v_k$  merupakan dua titik yang berhubungan langsung di  $C$  dan menopang cabang-cabang cantik  $C_{v_1}$  dan  $C_{v_k}$ .

Untuk membuktikan bahwa  $G$  itu sangat tidak bersahabat akan ditunjukkan ada bipartisi  $\pi = (M, B)$  sangat tidak bersahabat di  $G$ .

Misalkan  $v_i \in M$  jika  $i$  ganjil dan  $v_i \in B$  jika  $i$  genap maka  $v_1$  dan  $v_k$  berwarna merah dan masing-masing mempunyai tepat satu tetangga berwarna biru di  $C$ .

Misalkan  $\pi' = (V_1, V_2)$  sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat dari  $C_{v_1}$ . Jika  $v_1 \in V_1$ , maka di  $C_{v_1}$  mewarnai titik-titik  $V_1$  dengan warna merah dan titik-titik  $V_2$  dengan warna biru, maka  $v_1$  sangat tidak bersahabat di  $C_{v_1}$ . Akibatnya,

$$|N_G(v_1) \cap M| = |N_{C_{v_1}}(v_1) \cap M| + 1 < |N_{C_{v_1}}(v_1) \cap B| + 1 = |N_G(v_1) \cap B|. \text{ Ini berarti, titik } v_1 \text{ sangat tidak bersahabat di } G.$$

Dengan argumen serupa dapat ditunjukkan bahwa  $v_k$  sangat tidak bersahabat di  $G$  atas  $\pi$ .

$\forall i, 2 \leq i \leq k - 1$ , jika  $d_G(v_i) = 2$  maka  $v_i$  sangat tidak bersahabat.

Andaikan ada  $i, 2 \leq i \leq k-1, d_G(v_i) \geq 3$  dan misalkan  $C_{v_i}$  cabang yang akarnya di  $v_i$  dari  $C$ .

Karena  $C$  satu-satunya siklus di  $G$  yang panjangnya ganjil, maka jika ada siklus di  $C_{v_i}$  maka siklus tersebut panjangnya genap. Akibatnya,  $C_{v_i}$  merupakan graf bipartisi. Sehingga, berdasarkan Teorema 3.2,  $C_{v_i}$  sangat tidak bersahabat.

Misalkan  $V' = (V_1, V_2)$  sebuah bipartisi sangat tidak bersahabat di  $C_{v_i}$ . Misalkan  $v_i \in v_1$  dari  $C_{v_i}$ . Jika  $i$  ganjil, maka warnai titik-titik  $V_1$  dengan warna merah dan warnai titik-titik  $V_2$  dengan warna biru. Jika  $i$  genap maka warnai titik-titik  $V_1$  dengan warna biru dan warnai titik-titik  $V_2$  dengan warna merah.

Dengan demikian di  $G$ , titik-titik di  $C_{v_i}$  adalah titik-titik yang sangat tidak bersahabat atas bipartisi  $\pi = (M, B)$ . Ini berarti  $G$  sangat tidak bersahabat untuk kasus  $t = 1$ .

Asumsikan bahwa setiap graf kaktus yang memiliki blok siklus ganjil sebanyak kurang dari  $t$  dan setiap blok siklus ganjil menopang dua cabang cantik dimana dua titik berhubungan langsung yang merupakan akar-akar dari cabang cantik, maka  $G$  merupakan graf sangat tidak bersahabat.

Misalkan  $G$  sebuah kaktus yang memiliki  $t$  siklus ganjil,  $t > 2$  dan untuk setiap siklus ganjil terdapat dua titik yang berhubungan langsung yang menopang dua cabang cantik.

Dimulai dengan sebuah siklus ganjil  $C$  di  $G$ . Jika setiap cabang yang ditopang oleh  $C$  adalah sangat tidak bersahabat maka menggunakan argument serupa dengan kasus  $t = 1$ , diperoleh  $G$  sangat tidak bersahabat. Sehingga dapat diasumsikan bahwa  $G$  memiliki sebuah siklus ganjil yang menopang sebuah cabang tidak cantik.

Diantara semua siklus-siklus ganjil yang memiliki cabang tidak cantik, dapat dipilih siklus  $C$  sedemikian hingga banyaknya titik di cabang tidak cantik yang didukung oleh  $C$  adalah cabang yang paling minimum.

Misalkan  $C = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$  sedemikian hingga  $v_1$  dan  $v_k$  dua titik yang berhubungan langsung di  $C$ . Sehingga,  $C_{v_1}$  dan  $C_{v_k}$  dua cabang cantik.

Misalkan  $C_{v_i}$  sebuah cabang tidak cantik di  $C$  yang mempunyai banyak titik minimum diantara cabang-cabang tidak cantik dari  $C$ . Jelas bahwa  $i \neq 1$  dan  $i \neq k$ .

Karena  $C_{v_i}$  sebuah cabang tidak cantik, maka  $C_{v_i}$  mempunyai paling sedikit sebuah siklus ganjil. Maka  $C_{v_i}$  memiliki paling sedikit satu siklus ganjil. Selanjutnya, karena  $C$  bukan sebuah siklus di  $C_{v_i}$ , maka  $C_{v_i}$  memiliki kurang dari  $t$  siklus ganjil. Jika  $C_{v_i}$

memenuhi premis asumsi maka  $C_{v_i}$  merupakan graf sangat tidak bersahabat, sehingga  $C_{v_i}$  adalah cabang cantik. Kontradiksi dengan asumsi bahwa  $C_{v_i}$  merupakan cabang tidak cantik.

Jika  $C_{v_i}$  tidak memenuhi premis asumsi maka  $v_i$  adalah sebuah titik pada sebuah siklus ganjil yang disebut  $C'$ , pada  $C_{v_i}$  dan  $C'_{v_i}$  sebuah cabang cantik yg ditopang oleh  $C'$ .

Karena  $G$  memenuhi premis maka terdapat sebuah tetangga  $v_i$  yang disebut  $x$  pada  $C'$  sedemikian hingga  $C'_x$  adalah sebuah cabang cantik.

Warnai  $x$  dengan warna yang sama dengan  $v_i$  dan lanjutkan seperti pada kasus  $t = 1$  akan diperoleh semua titik-titik  $C'$  sangat tidak bersahabat. Jika setiap cabang yang ditopang oleh  $C'$  sangat tidak bersahabat, maka menggunakan argument serupa dengan kasus  $t = 1$ , dapat ditunjukkan bahwa  $G$  sangat tidak bersahabat.

Dengan demikian, dapat diasumsikan bahwa ada titik  $y$  di  $C'$  sedemikian hingga cabang  $C'_y$  adalah cabang tidak cantik. Tetapi, karena  $C'_y$  adalah graf bagian sejati dari  $C_{v_i}$  ini berarti  $C'_y$  mempunyai banyak titik lebih sedikit dari banyak titik  $C_{v_i}$ , maka hal ini bertentangan dengan pemilihan  $C$ . Kontradiksi bahwa  $C_{v_i}$  cabang tidak cantik di  $C$  yang mempunyai banyak titik paling minimum.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa  $G$  sangat tidak bersahabat. ■

## PENUTUP

### A. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dibahas pada skripsi dengan judul "Beberapa Syarat Graf Tidak Bersahabat" maka diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Berdasarkan definisi graf  $G$  dikatakan tidak bersahabat jika  $G$  memiliki bipartisi tidak bersahabat. Dengan demikian syarat bagi sebuah graf agar graf tersebut tidak bersahabat yaitu, jika  $G$  graf terhubung dengan  $n$  titik dan  $n \geq 2$  maka  $G$  mempunyai sebuah bipartisi tidak bersahabat. Hal tersebut berdasarkan Teorema 3.1.
2. Berdasarkan definisi graf  $G$  dikatakan sangat tidak bersahabat jika  $G$  memiliki bipartisi sangat tidak bersahabat. Dengan demikian syarat bagi sebuah graf agar graf tersebut sangat tidak bersahabat, yaitu graf  $G$  bipartisi tanpa titik terasing atau  $G$  sebuah graf memiliki sebuah blok-akhir berupa sebuah siklus ganjil. Hal tersebut berdasarkan Teorema 3.2 dan Teorema 3.5.

## B. Saran

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai Beberapa Syarat Graf Tidak Bersahabat. Penulis menyarankan kepada pembaca yang memiliki minat akademis yang sama dapat lebih mendalami dan mengembangkan mengenai teori karakterisasi graf-graf yang sangat tidak bersahabat yang belum dibahas dalam skripsi ini. Apabila ada kritik atau saran untuk skripsi ini bisa disampaikan melalui email penulis yuliantina.salwa@yahoo.co.id.

## DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unipress.

B.Paten, M.Diekhans, D. Earl,J.St John,J. Ma,B. Suh, D. Haussler. (2011:469-481). *Cactus graphs for genome comparisons*. J. Comput. Biol. 18(3).

Chartrand & Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. University of California.

Permatasari Reni. (2016:7). *Penentuan Banyaknya Graf Tak Terhubung Berlabel Titik Berorde Maksimal Empat*. Bandar Lampung: Universitas Lampung.

S. Sivakumar, N. D. Soner, A. Alwardi.2012. *Connected Equitable Domination in Graphs*,1: 123-130.

T.W.Haynes, et al. (2015:155-160). *Cost effective bipartitions in graphs*. USA: East Tennessee University,Clemson University.

