

**ANALISIS KESTABILAN MODEL ROBOT *BIPEDAL* MENGGUNAKAN METODE KESEIMBANGAN HARMONIS**

**Ely Sudarsono**

(S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

[elysudarsono@mhs.unesa.ac.id](mailto:elysudarsono@mhs.unesa.ac.id)

**Abadi**

(Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya)

[abadi@unesa.ac.id](mailto:abadi@unesa.ac.id)

**Abstrak**

Penerapan matematika dalam bidang teknologi telah banyak dikembangkan. Contohnya robot bipedal yang merupakan robot berkaki dua. Teknologi ini dapat melakukan tugas - tugas manusia dan memiliki kemampuan seperti manusia serta beberapa keuntungan bila dibandingkan model robot yang lain. Robot bipedal merupakan rangkaian rumit karena menggunakan sistem dinamik non linier. Banyaknya jumlah degrees of freedom atau derajat kebebasan yang digunakan pada permodelan juga dapat mempengaruhi hasil dari simulasi. Studi tentang robot bipedal telah menarik minat karena masalah seperti stabilitas buruk yang melekat dan kerjasama dengan tingkat kebebasan yang besar. Berdasarkan teknologi maju terkini, termasuk perangkat keras dan perangkat lunak, memungkinkan masalah ini ditangani dengan cepat. Sehingga kemampuan sistem ini untuk berjalan benar – benar mandiri di medan yang tidak rata dan berbagai cara yang kuat yaitu di kehidupan sehari-hari, masih harus dibuktikan. Model robot bipedal yang akan dipelajari terbentuk oleh kumpulan rangkaian osilator Rayleigh. Tujuan dari penelitian ini agar dapat merekonstruksi, menganalisis kestabilan dan melakukan simulasi tentang model robot bipedal menggunakan metode keseimbangan harmonis. Hal ini bermanfaat untuk mengetahui kestabilan dari model robot bipedal. Dengan demikian, hasilnya dapat dijadikan suatu pertimbangan untuk pembuatan robot bipedal yang lebih baik lagi. Rekonstruksi model robot bipedal menggunakan tiga derajat kebebasan saja, yaitu : sudut lutut kiri, sudut pinggul, dan sudut lutut kanan. Dari analisis kestabilan menggunakan metode keseimbangan harmonis diperoleh bahwa dari persamaan (4.7) - (4.9) akan berupa solusi periodik jika nilai parameter sesuai persamaan (4.33) – (4.38) dengan parameter yang ada. Selain itu, dari hasil simulasi diperoleh bahwa sistem persamaan model robot bipedal stabil di tiga solusi periodik yaitu kurva berwarna biru adalah sudut lutut kanan, kurva berwarna merah adalah sudut pinggul, dan kurva berwarna hijau adalah sudut lutut kiri.

**Kata kunci:** Robot *Bipedal*, Osilator Rayleigh, Metode Keseimbangan Harmonis

**Abstract**

The application of mathematics in the field of technology has been widely developed. For example a bipedal robot that is a two-legged robot. This technology can perform human tasks and have human-like capabilities as well as some advantages when compared to other robot models. Bipedal robot is a complicated circuit because it uses non linear dynamic system. The number of degrees of freedom that used in modeling can also affect the result of the simulation. The study of bipedal robots has attracted interest due to problems such as inherent bad stability and cooperation with a great degree of freedom. Based on the latest advanced technology, including hardware and software, enables this issue to be handled quickly. So the ability of this system to run completely self-sufficient in uneven terrain and powerful ways that is in everyday life, remains to be proven. The bipedal robot model to be studied is formed by a collection of Rayleigh oscillator circuits. The purpose of this research is to reconstruct, analyze stability and simulate the model of bipedal robot using harmonic balance method. It is useful to know the stability of the bipedal robot model. Thus, the results can be a consideration for making better bipedal robots. The reconstruction of the bipedal robot model uses three degrees of freedom only, namely: angle of left knee, angle of the hip, and angle of right knee. From stability analysis using harmonic balance method is found that from equation (4.7) - (4.9) will be a periodic solution if parameter value according to equation (4.33) – (4.38) with available parameters. In addition, from the simulation results obtained that the system of equations of bipedal robot model is stable in three periodic solutions that are blue curves is right knee angle, red curves is hip angle, and green curves is left knee angle.

**Keywords:** *Bipedal Robot*, Rayleigh Oscillator, Harmonic Balance Method

## PENDAHULUAN

Matematika terapan merupakan cabang matematika yang terkait dengan teknik matematika yang digunakan dalam aplikasi ilmu matematika dengan bidang yang lain. Salah satu cara untuk menentukan model dari penerapan matematika tersebut dapat menggunakan bentuk sistem persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial adalah sistem yang memuat  $n$  buah persamaan diferensial dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  $n$  adalah bilangan asli dan  $n \geq 2$  (Finizio dan Ladas, 1982 : 174). Sehingga dengan sistem tersebut model dari suatu penerapan matematika dapat terpecahkan.

Alat pemodelan yang telah menerima perhatian khusus dalam beberapa dekade terakhir adalah osilator nonlinear. Model ini menarik karena kemampuannya untuk melakukan sinkronisasi dengan osilator lain. Namun, kemampuan ini terbatas dan tidak selalu mudah untuk menentukan model dengan benar untuk memastikan sinkronisasi yang benar dengan sinyal penggerak eksternal. Menurut Ludovic *et al.* (2009) osilator memang terbatas bergantung pada beberapa parameter seperti kekuatan rangkaiannya dan perbedaan frekuensi antara osilator dan sinyal penggerak. Perilaku osilator ini dapat digambarkan dengan persamaan diferensial yang solusinya menyajikan perilaku siklus. Dengan demikian, osilator nonlinier dapat disesuaikan dengan persamaan diferensial nonlinier.

Teknologi inipun telah banyak dikembangkan untuk melakukan tugas - tugas manusia dan memiliki kemampuan seperti manusia serta beberapa keuntungan bila dibandingkan model robot yang lain. Antara lain keuntungan tersebut adalah bagian tubuh pada robot *bipedal* dapat berbelok di daerah yang sempit, berat yang ringan, dan lebih efisien bila dilihat dari jumlah aktuator (motor yang bertanggung jawab untuk gerakan robot) yang digunakan. Studi tentang robot *bipedal* telah menarik minat karena masalah seperti stabilitas buruk yang melekat dan kerjasama dengan tingkat kebebasan yang besar. Sehingga kemampuan sistem ini untuk berjalan benar – benar mandiri di medan yang tidak rata dan berbagai cara yang kuat yaitu di kehidupan sehari-hari, masih harus dibuktikan.

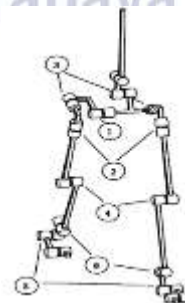
Ada beberapa karya dari peneliti mengenai robot *bipedal* dengan menggunakan osilator nonlinier, salah satunya “*Modelling of Bipedal Robots Using Coupled Nonlinear Oscillators*” oleh Filho *et al.* (2006). Didalamnya membahas mengenai perbandingan dua macam osilator nonlinier yang digunakan untuk memodelkan robot *bipedal*, yaitu osilator Van Der Pol

dan osilator Rayleigh. Dari hasil penelitian tersebut disimpulkan bahwa permodelan robot *bipedal* yang terbentuk dari rangkaian osilator Rayleigh dapat menyajikan cara terbaik yang dapat digunakan karena memungkinkan penerapannya untuk pengendalian umpan balik dari robot *bipedal* serta model ini mampu mengkarakterisasi tiga dari enam faktor penentu gaya berjalan manusia yang paling penting. Metode yang digunakan dalam penelitian tersebut menggunakan *harmonic method balance* atau metode keseimbangan harmonis. Selain penelitian tersebut, ada pula penelitian oleh Stephen Wagner (2005) yang berjudul “*Small-Signal Device and Circuit Simulation*”. Berdasarkan penelitian ini, metode keseimbangan harmonis merupakan teknik analisis yang sangat akurat dan juga berbasis pada domain frekuensi. Sehingga, kinerjanya akan lebih cepat diperoleh daripada menggunakan analisis transtensi yang lebih mahal secara komputasi.

## ROBOT BIPEDAL

Robot *bipedal* adalah robot yang menggunakan dua kaki atau berkaki dua. Pemodelan pergerakan bipedal alami dapat dibuat lebih mudah dengan mengurangi jumlah derajat kebebasan, karena ada banyak derajat kebebasan yang terlibat dalam gerakan kaki. Menurut Saunders *et al.* (1953), enam faktor penentu dari gaya berjalan adalah:

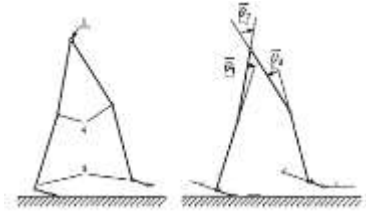
1. Gaya berjalan kompas yaitu gaya berjalan yang terdiri dua link dan yang bisa turun ke bidang miring dengan mudah.
2. Rotasi panggul terhadap sumbu vertikal.
3. Kemiringan panggul dan pengaruhnya pada sisi yang tidak berbobot.
4. Fleksi lutut pada saat kaki menapak.
5. Fleksi plantar pada saat telapak kaki menapak.
6. Perpindahan lateral panggul.



Gambar 1. Model 3D dengan 6 Faktor Penentu

Untuk memudahkan penelitian ini, maka digunakan model 2D Sehingga dapat disusun asumsi sebagai berikut: (1)Penghubung yang menyusun

mekanisme robot *bipedal* mempunyai tubuh yang kaku secara posisi dan bentuk; (2) Tubuh yang kaku pada robot *bipedal* dihubungkan bersama pada persendian tanpa ada jarak diantaranya; (3) Ujung kaki robot *bipedal* tidak dapat meluncur (tidak memiliki roda)



Gambar 2. Model 2D dengan 3 Faktor Penentu Gaya

Tiga faktor penentu gaya berjalan pada robot *bipedal* yaitu :

- 1 : Gaya berjalan kompas yaitu gaya berjalan yang terdiri dua link dan yang bisa turun ke bidang miring dengan mudah .
- 4 : Fleksi lutut yaitu gerakan kaki saat kaki menapak dan dibatasi oleh bertemunya tungkai bawah bagian belakang dengan paha.
- 5 : Fleksi plantar yaitu gerakan kaki saat kaki ke arah telapak kaki

Adapun periode berjalan dibagi menjadi dua interval, yaitu:

a. *Single Support Phase (SSP)*

Selama SSP, salah satu kaki melakukan gerakan keseimbangan sementara yang lain sebagai pendukung.

b. *Double Support Phase (DSP)*

DSP adalah fase dimana transisi kaki terjadi yaitu saat kaki yang melakukan gerakan keseimbangan menjadi kaki pendukung dan yang lain bersiap memulai gerakan keseimbangan. Selain itu derajat kebebasan yang digunakan adalah :  $\theta_1$ = sudut lutut kiri;  $\theta_2$ = sudut pinggul;  $\theta_3$ = sudut lutut kanan.

**OSILATOR RAYLEIGH**

Studi tentang osilator nonlinear dilakukan di abad ke-19, terutama dalam hubungannya dengan model alat musik. Pada masa ini, Matematika dan Fisikawan Inggris Lord Rayleigh memperkenalkan persamaan dalam bentuk:

$$mx'' + kx = ax' - b(x')^3 \tag{1}$$

(Strutt, 1842-1919)

Persamaan Rayleigh, yang akan digunakan dalam analisis yang terkandung dalam penelitian ini, adalah dalam bentuk:

$$\ddot{x} - \delta(1 - q\dot{x}^2)\dot{x} + \Omega^2(x - x_0) = 0 \quad \delta, q > 0 \tag{2}$$

di mana :

- $\delta$  = laju perubahan osilator
- $q$  = besar muatan osilator
- $\Omega$  = hambatan osilator
- $x$  = nilai koordinat ujung pegas / benda yang dikaitkan pada ujung pegas
- $x_0$  = nilai koordinat jika pegas tidak diregangkan dari posisi kesetimbangan

Sehubungan dengan  $y = \dot{x}$ , kita memiliki sistem otonom berikut:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \delta(1 - qy^2)y - \Omega^2(x - x_0) \end{cases} \tag{3}, (4)$$

**METODE KESEIMBANGAN HARMONIS**

Diberikan suatu sistem :

$$\ddot{u} + f(u) = 0 \tag{5}$$

dimana  $f$  merupakan fungsi nonlinear. Sehingga akan lebih mudah untuk menggeser titik kritis ke titik pusat,  $u = u_0$ , maka misalkan :

$$\begin{aligned} z &= u - u_0 \\ u &= z + u_0 \end{aligned} \tag{6}$$

substitusikan persamaan (6) ke dalam persamaan (5) akan menjadi :

$$\ddot{z} + f(z + u_0) = 0 \tag{7}$$

Asumsikan  $f$  dapat diekspansikan ke dalam polinomial orde- $n$ , maka (5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\ddot{z} + \sum_{n=1}^N \alpha_n z^n = 0 \tag{8}$$

dimana  $\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(u_0)$  dan  $f^{(n)}$  adalah derivatif ke- $n$

Idena adalah untuk mengekspresikan solusi periodik (8) kedalam bentuk:  $z = \sum_{m=0}^M A_m \cos(m\omega t + m\beta_0)$  (9)

Kemudian substitusikan (9) ke (8) dan menyamakan koefisien dari masing – masing  $M + 1$  harmonis ke nol. Didapatkan sistem persamaan aljabar  $M + 1$  yang berhubungan dengan  $\omega$  dan  $A$ . Biasanya persamaan ini diselesaikan untuk  $A_0, A_2, A_3, \dots, A_m$  dan  $\omega$  dengan kondisi  $A_1$ . Keakuratan dari solusi periodik yang dihasilkan bergantung pada nilai  $A_1$  dan jumlah harmonik yang diasumsikan sebagai solusi.

Sebagai contoh, akan disubstitusikan untuk satu perluasan ke dalam persamaan (9), sehingga diperoleh:

$$z = \sum_{m=0}^1 A_m \cos(m\omega t + m\beta_0) = A_1 \cos(\omega t + \beta_0) + A_0 = A_1 \cos \phi + A_0 \tag{10}$$

dari (8) dengan  $N = 3$  dan (10) , akan diperoleh:



$$\alpha_1 A_0 + \alpha_2 A_0^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 A_1^2 + \alpha_3 A_0^3 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_0 A_1^2 + \left[ -(\omega^2 - \alpha_1) A_1 + 2\alpha_2 A_0 A_1 + 3\alpha_3 A_0^2 A_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^3 \right] \cos \phi + \left[ \frac{1}{2} \alpha_2 A_1^2 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_0 A_1^2 \right] \cos 2\phi + \frac{1}{4} \alpha_3 A_1^3 \cos 3\phi = 0 \quad (11)$$

dengan menyamakan  $A_1$  dan koefisien  $\cos \phi$  ke 0, diperoleh:

$$\alpha_1 A_0 + \alpha_2 A_0^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 A_1^2 + \alpha_3 A_0^3 + \frac{3}{2} \alpha_3 A_0 A_1^2 = 0$$

$$-(\omega^2 - \alpha_1) A_1 + 2\alpha_2 A_0 A_1 + 3\alpha_3 A_0^2 A_1 + \frac{3}{4} \alpha_3 A_1^3 = 0 \quad (12), (13)$$

saat  $A_1$  kecil, solusi dari (12) adalah:

$$A_0 = -\frac{1}{2} \alpha_2 \alpha_1^{-1} A_1^2 + O(A_1^2)$$

$$\omega^2 = \alpha_1 + \left( \frac{3}{4} \alpha_3 - \alpha_2^2 \alpha_1^{-1} \right) A_1^2 \quad (14)$$

Sehingga (14) menjadi:

$$\omega = \sqrt{\alpha_1 \left[ \frac{1 + \frac{3}{4} \alpha_3 \alpha_1 - \alpha_2^2 \alpha_1^{-1}}{8\alpha_1^{-1}} A_1^2 \right]} \quad (15)$$

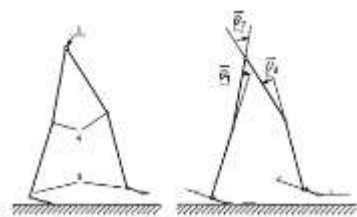
Jadi, solusi periodik bergantung pada  $A_1$  dan (15) merupakan solusi dari (8) untuk satu perluasan ( $m = 1$  dan  $N = 3$ ).

(Nayfeh dan Mook, 1979:59)

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### A. Rekonstruksi Model Robot *Bipedal*

Pada model robot *bipedal* ini tersusun atas rangkaian osilator Rayleigh. Sesuai dengan asumsi dan batasan masalah yang diberikan, bahwa bentuk tubuh robot *bipedal* yang kaku dan pergerakan sejajar bidang sagital. Oleh karena itu, hanya dipilih tiga faktor penentu gaya berjalan sebagai acuan untuk memodelkan robot *bipedal* seperti pada gambar 2.



Gambar 3. Model 2D dengan 3 Faktor Penentu Gaya

Tiga faktor penentu gaya berjalan pada robot *bipedal* yaitu :

1 : Gaya berjalan kompas yaitu gaya berjalan yang terdiri dua link dan yang bisa turun ke bidang miring dengan mudah.

4 : Fleksi lutut yaitu gerakan kaki saat kaki menapak dan dibatasi oleh bertemunya tungkai bawah bagian belakang dengan paha.

5 : Fleksi plantar yaitu gerakan kaki saat kaki ke arah telapak kaki

Sedemikian hingga derajat kebebasan robot yang digunakan untuk mengkaji lebih lanjut model robot *bipedal* ini adalah :

$\theta_1$  : sudut lutut kanan

$\theta_2$  : sudut pinggul

$\theta_3$  : sudut lutut kiri

Secara umum persamaan yang digunakan adalah persamaan osilator Rayleigh yaitu:

$$m\ddot{x} + kx = a\dot{x}' - b(x')^3 \quad (16)$$

dimana :

$x$  = perpindahan massa

$k$  = konstanta gaya pegas

$a, b$  = peredam gaya pegas

atau persamaan (4.1) dapat ditulis dengan:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{a}{m}\dot{x} - \frac{b}{m}(\dot{x})^3 \quad (17)$$

Berdasarkan hukum hooke  $F_x = -k\Delta x = -k(x - x_0)$ , persamaan (17) menjadi :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_0) - \frac{a}{m}\dot{x} - \frac{b}{m}(\dot{x})^3 \quad (18)$$

substitusikan  $b = -\delta qm$ ,  $a = -\delta m$ , dan  $k = -\Omega^2 m$  ke persamaan (18), diperoleh :

$$\ddot{x} + \Omega^2(x - x_0) - \delta\dot{x} - \delta q(\dot{x})^3 \quad (19)$$

atau persamaan (19) dapat ditulis:

$$\ddot{x} - \delta(1 - q\dot{x}^2)\dot{x} + \Omega^2(x - x_0) = 0 \quad (20)$$

di mana :

$\delta$  = laju perubahan osilator

$q$  = besar muatan osilator

$\Omega$  = hambatan osilator

$x$  = nilai koordinat ujung pegas / benda yang dikaitkan pada ujung pegas

$x_0$  = nilai koordinat jika pegas tidak diregangkan dari posisi kesetimbangan

substitusikan  $x = \theta$  dan menambahkan konstanta antar osilator ( $w$ ). Sehingga akan diperoleh:

$$\ddot{\theta} - \delta(1 - q\dot{\theta}^2)\dot{\theta} + \Omega^2(\theta - \theta_0) - w = 0 \quad (21)$$

dimana:

$\theta$  = sudut - sudut yang akan digunakan pada model robot *bipedal*

$\theta_0$  = nilai awal  $\theta$

$\delta$  = laju perubahan osilator

$q$  = besar muatan osilator

$\Omega$  = hambatan osilator

$w$  = interaksi antar osilator pada model robot *bipedal*.

Selain itu,  $c_{k,i}[\dot{\theta}_i(\theta_i - \theta_{i_0})]$  dimana  $k \in \{1,2,3\}$  dan  $i \in \{1,2,3\}$  mewakili besar konstanta dari rangkaian osilator yang memiliki frekuensi berbeda dan  $c_{i,j}(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j)$  dimana  $i \in \{1,2,3\}$  dan  $j \in \{1,2,3\}$  mewakili besar konstanta dari rangkaian osilator yang memiliki frekuensi sama.

Adapun susunan rangkaian osilator Rayleigh adalah sebagai berikut:

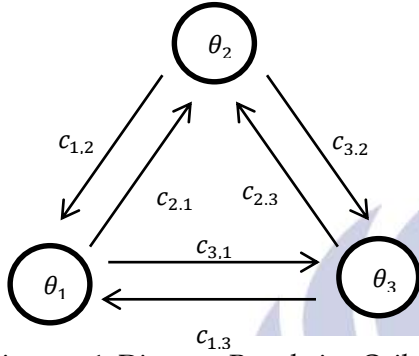


Diagram 1. Diagram Rangkaian Osilator Rayleigh

Diagram 1 menunjukkan struktur dari rangkaian antar osilator Rayleigh yang satu dengan yang lain. Dimana  $c$  merupakan konstanta dari rangkaian antar osilator Rayleigh, 1 merupakan lutut kanan, 2 merupakan pinggul, dan 3 merupakan lutut kiri.

Berdasarkan persamaan (21) dan  $w$  maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\ddot{\theta}_1 - \delta_1(1 - q_1\dot{\theta}_1^2)\dot{\theta}_1 + \Omega_1^2(\theta_1 - \theta_{1_0}) - c_{1,2}[\dot{\theta}_2(\theta_2 - \theta_{2_0})] - c_{1,3}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) = 0 \quad (22)$$

$$\ddot{\theta}_2 - \delta_2(1 - q_2\dot{\theta}_2^2)\dot{\theta}_2 + \Omega_2^2(\theta_2 - \theta_{2_0}) - c_{2,1}[\dot{\theta}_1(\theta_1 - \theta_{1_0})] - c_{2,3}[\dot{\theta}_3(\theta_3 - \theta_{3_0})] = 0 \quad (23)$$

$$\ddot{\theta}_3 - \delta_3(1 - q_3\dot{\theta}_3^2)\dot{\theta}_3 + \Omega_3^2(\theta_3 - \theta_{3_0}) - c_{3,2}[\dot{\theta}_2(\theta_2 - \theta_{2_0})] - c_{3,1}(\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1) = 0 \quad (24)$$

dimana:

$\theta_1$  = sudut lutut kanan

$\theta_2$  = sudut pinggul

$\theta_3$  = sudut lutut kiri

$\theta_{i_0}$  = nilai awal  $\theta_i$ , dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$\Omega_i$  = hambatan osilator, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$\delta_i$  = laju perubahan osilator, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$q_i$  = besar muatan osilator, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$c_{1,2}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_1$  ke  $\theta_2$

$c_{2,1}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_2$  ke  $\theta_1$

$c_{2,3}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_2$  ke  $\theta_3$

$c_{3,2}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_3$  ke  $\theta_2$

$c_{1,3}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_1$  ke  $\theta_3$

$c_{3,1}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_3$  ke  $\theta_1$

## B. Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui analisis kestabilan dari model robot *bipedal* dengan menggunakan metode kesimbangan harmonis dari ketiga persamaan yang telah diperoleh, yaitu: persamaan (22) - (24).

Jika model nonlinier ditentukan untuk parameter yang kecil, solusi periodik dapat dilakukan pendekatan menggunakan fungsi harmonis adalah sebagai berikut :

$$\theta_1 = \theta_{1_0} + A_1 \cos(2\omega t + \alpha_1) \quad (25)$$

$$\theta_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (26)$$

$$\theta_3 = \theta_{3_0} + A_3 \cos(2\omega t + \alpha_3) \quad (27)$$

dimana  $\omega$  adalah frekuensi gaya berjalan robot *bipedal* dan  $\alpha$  adalah nilai fase.

Misalkan  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , karena tidak ada pergeseran sudut fase, maka :

$$\theta_1 = \theta_{1_0} + A_1 \cos(2\omega t) \quad (28)$$

$$\theta_2 = A_2 \cos(\omega t) \quad (29)$$

$$\theta_3 = \theta_{3_0} + A_3 \cos(2\omega t) \quad (30)$$

hasil turunan pertama dan kedua dari persamaan (28) - (30) diperoleh sebagai  $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ , berikut ini:

$$\dot{\theta}_1 = -2\omega A_1 \sin(2\omega t) \quad (31)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\omega A_2 \sin(\omega t) \quad (32)$$

$$\dot{\theta}_3 = 2\omega A_3 \sin(2\omega t) \quad (33)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -4\omega^2 A_1 \cos(2\omega t) \quad (34)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\omega^2 A_2 \cos(\omega t) \quad (35)$$

$$\ddot{\theta}_3 = -4\omega^2 A_3 \cos(2\omega t) \quad (36)$$

substitusikan persamaan (31) - (36) ke dalam persamaan (22) - (24) akan diperoleh :

$$\begin{aligned} & -4\omega^2 A_1 \cos(2\omega t) - \delta_1(1 - q_1(-2\omega A_1 \sin(2\omega t))^2) - 2\omega A_1 \sin(2\omega t) + \\ & \Omega_1^2(\theta_{1_0} + A_1 \cos(2\omega t) - \theta_{1_0}) - \\ & c_{1,2}[-\omega A_2 \sin(\omega t)(A_2 \cos(\omega t) - \theta_{2_0})] - \\ & c_{1,3}(-2\omega A_1 \sin(2\omega t) - (-2\omega A_3 \sin(2\omega t))) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A_2 \cos(\omega t) - \delta_2(1 - q_2(-\omega A_2 \sin(\omega t))^2) - \\ & \omega A_2 \sin(\omega t) + \Omega_2^2(A_2 \cos(\omega t) - \theta_{2_0}) - \\ & c_{2,1}[-2\omega A_1 \sin(2\omega t)(\theta_{1_0} + A_1 \cos(2\omega t) - \theta_{1_0})] - \\ & c_{2,3}[-2\omega A_3 \sin(2\omega t)(\theta_{3_0} + A_3 \cos(2\omega t) - \theta_{3_0})] = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & -4\omega^2 A_3 \cos(2\omega t) - \delta_3(1 - \\ & q_3(-2\omega A_3 \sin(2\omega t))^2) - 2\omega A_3 \sin(2\omega t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Omega_3^2(\theta_{3_0} + A_3 \cos(2\omega t) - \theta_{3_0}) - \\ & c_{3,2}[-\omega A_2 \sin(\omega t) (A_2 \cos(\omega t) - \theta_{2_0})] - \\ & c_{3,1}(-2\omega A_3 \sin(2\omega t) - (-2\omega A_1 \sin(2\omega t))) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Penyederhanaan dari persamaan (37) – (39), adalah:

$$\begin{aligned} & -4\omega^2 A_1 \cos(2\omega t) - \delta_1 \left(1 - 2q_1 \omega^2 A_1^2 (1 - \right. \\ & \left. \cos(2\omega t))\right) - 2\omega A_1 \sin(2\omega t) + \Omega_1^2 (A_1 \cos(2\omega t)) + \\ & c_{1,2} \left[ \frac{1}{2} \omega A_2^2 \sin(2\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t) \theta_{2_0} \right] + \\ & 2c_{1,3} \omega (A_1 - A_3) \sin(2\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 A_2 \cos(\omega t) - \delta_2 \left(1 - \frac{1}{2} q_2 \omega^2 A_2^2 (1 - \right. \\ & \left. \cos(\omega t))\right) - \omega A_2 \sin(\omega t) + \Omega_2^2 (A_2 \cos(\omega t) - \theta_{2_0}) + \\ & 2c_{2,1} \omega [A_1^2 \sin(2\omega t) \cos(2\omega t)] + \\ & 2c_{2,3} \omega [A_3^2 \sin(2\omega t) \cos(2\omega t)] = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & -4\omega^2 A_3 \cos(2\omega t) - \delta_3 \left(1 - 2q_3 \omega^2 A_3^2 (1 - \right. \\ & \left. \cos(2\omega t))\right) - 2\omega A_3 \sin(2\omega t) + \Omega_3^2 (A_3 \cos(2\omega t)) + \\ & c_{3,2} \left[ \frac{1}{2} \omega A_2^2 \sin(2\omega t) - A_2 \cos(\omega t) \theta_{2_0} \right] + \\ & 2c_{3,1} \omega (A_3 - A_1) \sin(2\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Dari persamaan (40) dengan menyamakan koefisien  $\sin(2\omega t)$  dan  $\cos(2\omega t)$  ke nol agar dapat ditentukan parameter  $q_1$  dan  $\Omega_1$ , maka diperoleh:

$$2\delta_1 \omega A_1 - \delta_1 q_1 \omega^3 A_1^3 + \frac{1}{2} c_{1,2} \omega A_2^2 + 2c_{1,3} \omega (A_1 - A_3) = 0 \quad (43)$$

$$-4\omega^2 A_1 + \Omega_1^2 A_1 = 0 \quad (44)$$

Dari persamaan (41) dengan menyamakan koefisien  $\sin(\omega t)$  dan  $\cos(\omega t)$  ke nol agar dapat ditentukan parameter  $q_2$  dan  $\Omega_2$ , maka diperoleh:

$$\delta_2 \omega A_2 - \delta_2 q_2 \omega^3 A_2^3 = 0 \quad (45)$$

$$-\omega^2 A_2 + \Omega_2^2 A_2 = 0 \quad (46)$$

Dari persamaan (42) dengan menyamakan koefisien  $\sin(2\omega t)$  dan  $\cos(2\omega t)$  ke nol agar dapat ditentukan parameter  $q_3$  dan  $\Omega_3$ , maka diperoleh:

$$2\delta_3 \omega A_3 - \delta_3 q_3 \omega^3 A_3^3 + \frac{1}{2} c_{3,2} \omega A_2^2 + 2c_{3,1} \omega (A_3 - A_1) = 0 \quad (47)$$

$$-4\omega^2 A_3 + \Omega_3^2 A_3 = 0 \quad (48)$$

Sehingga dari persamaan (43) – (48) dapat diperoleh  $q_i$  dan  $\Omega_i$  dimana  $i \in \{1,2,3\}$ , yaitu :

$$q_1 = \frac{4c_{1,3}(A_1 - A_3) + 4\delta_1 A_1 + c_{1,2} A_2^2}{8\delta_1 \omega^2 A_1^3} \quad (49)$$

$$\Omega_1 = 2\omega \quad (50)$$

$$q_2 = \frac{2}{\omega^2 A_2^2} \quad (51)$$

$$\Omega_2 = \omega \quad (52)$$

$$q_3 = \frac{4c_{3,1}(A_3 - A_1) + 4\delta_3 A_3 + c_{3,2} A_2^2}{8\delta_3 \omega^2 A_3^3} \quad (53)$$

$$\Omega_3 = 2\omega \quad (54)$$

dengan nilai parameter sebagai berikut:  
dipilih  $\omega = 1$

Tabel 1. Tabel Parameter Osilator Rayleigh

$c_{1,2}$	$c_{2,1}$	$c_{1,3}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{2,3}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
0,00	0,00	0,	0,	0,00	0,00	0,0	0,	0,0
1	1	1	1	1	1	2	1	1

Tabel 2. Tabel Parameter Nilai Awal

Cycle	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\theta_{1_0}$	$\theta_{2_0}$	$\theta_{3_0}$
$0 < \omega t \leq \pi$	-33	50	33	32	0	-32

Berdasarkan parameter  $\omega$ , Tabel 1, dan Tabel 2 dari *paper* berjudul *Modeling of a Bipedal Robot Using Mutually Coupled Rayleigh Oscillator* oleh Filho (2004), kecuali  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  dan  $\delta_3$  untuk parameter osilator Rayleigh dan disesuaikan untuk parameter nilai awalnya.

ke persamaan (4.28) – (4.33), sehingga diperoleh:

$$q_1 = -0,0144$$

$$\Omega_1 = 2$$

$$q_2 = -0,0022$$

$$\Omega_2 = 1$$

$$q_3 = -0,0144$$

$$\Omega_3 = 2$$

Jadi, dari persamaan (22) - (24) akan berupa solusi periodik jika nilai parameter  $q_1, \Omega_1, q_2, \Omega_2, q_3, \Omega_3$  sesuai persamaan (49) – (54) dengan  $\omega = 1$ ,  $c_{1,2} = c_{2,1} = c_{3,2} = c_{2,3} = 0,001$ ,  $c_{1,3} = c_{3,1} = 0,1$ ,  $\delta_1 = 0,5$ ,  $\delta_2 = 0,1$ ,  $\delta_3 = 0,0$ ,  $A_1 = -20$ ,  $A_2 = 50$ ,  $A_3 = 10$ .

### C. Simulasi

Simulasi model robot *bipedal* ini berdasarkan persamaan (4.7) – (4.9). Kemudian dari persamaan (4.7) – (4.9) yang merupakan persamaan diferensial orde dua diubah menjadi sistem, sehingga diperoleh :

Misalkan :

$$\theta_1 = \dot{\theta} \quad \theta_1 = \ddot{\theta}$$

$$y_1 = \dot{\theta}_1$$

Berdasarkan persamaan (22), diperoleh :

$$\ddot{\theta} = \delta_1 (1 - q_1 y_1^2) y_1 - \Omega_1^2 (\theta_1 - \theta_{1_0}) + c_{1,2} [y_2 (\theta_2 - \theta_{2_0})] + c_{1,3} (y_1 - y_3)$$

sehingga:

$$\dot{\theta}_1 = y_1$$

$$\dot{y}_1 = \delta_1 (1 - q_1 y_1^2) y_1 - \Omega_1^2 (\theta_1 - \theta_{1_0}) +$$

$$c_{1,2} [y_2 (\theta_2 - \theta_{2_0})] + c_{1,3} (y_1 - y_3)$$

Misalkan :

$$\theta_2 = \theta \quad \theta_2 = \dot{\theta}$$

$$y_1 = \theta_2$$

Berdasarkan persamaan (23), diperoleh :

$$\ddot{\theta} = \delta_2(1 - q_2 y_2^2) y_2 - \Omega_2^2(\theta_2 - \theta_{2_0}) + c_{2,1}[y_1(\theta_1 - \theta_{1_0})] + c_{2,3}[y_3(\theta_3 - \theta_{3_0})]$$

sehingga :

$$\dot{\theta}_2 = y_2$$

$$y_2 = \delta_2(1 - q_2 y_2^2) y_2 - \Omega_2^2(\theta_2 - \theta_{2_0}) + c_{2,1}[y_1(\theta_1 - \theta_{1_0})] + c_{2,3}[y_3(\theta_3 - \theta_{3_0})]$$

Misalkan :

$$\theta_3 = \theta \quad \theta_3 = \dot{\theta}$$

$$y_3 = \theta_3$$

Berdasarkan persamaan (24), diperoleh :

$$\ddot{\theta} = \delta_3(1 - q_3 y_3^2) y_3 - \Omega_3^2(\theta_3 - \theta_{3_0}) + c_{3,2}[y_2(\theta_2 - \theta_{2_0})] + c_{3,1}(y_3 - y_1)$$

sehingga :

$$\dot{\theta}_3 = y_3$$

$$y_3 = \delta_3(1 - q_3 y_3^2) y_3 - \Omega_3^2(\theta_3 - \theta_{3_0}) + c_{3,2}[y_2(\theta_2 - \theta_{2_0})] + c_{3,1}(y_3 - y_1)$$

Untuk melakukan simulasi, diperlukan nilai – nilai parameter yang ada pada persamaan (22) – (24), yaitu sebagai berikut :

$\omega$  = frekuensi

$\theta_{i_0}$  = nilai awal  $\theta_i$ , dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$A_i$  = amplitudo, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$\Omega_i$  = hambatan, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$\delta_i$  = laju perubahan osilator, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$q_i$  = besar muatan osilator, dimana  $i \in \{1,2,3\}$

$c_{1,2}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_1$  ke  $\theta_2$

$c_{2,1}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_2$  ke  $\theta_1$

$c_{2,3}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_2$  ke  $\theta_3$

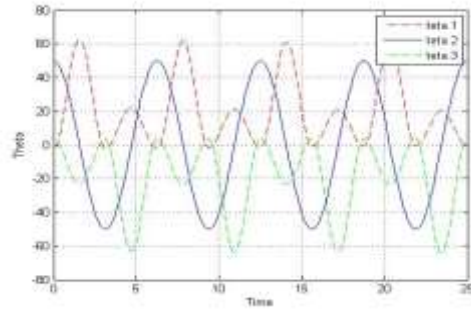
$c_{3,2}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_3$  ke  $\theta_2$

$c_{1,3}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_1$  ke  $\theta_3$

$c_{3,1}$  = besar kapasitor dari rangkaian osilator  $\theta_3$  ke  $\theta_1$

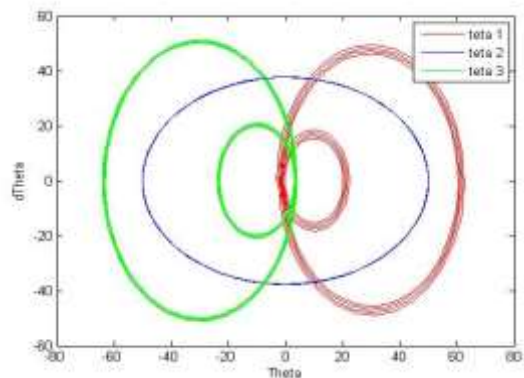
dengan nilai parameter sebagai berikut :

dipilih  $\omega = 1$ , dari Tabel 1, dan Tabel 2, diperoleh :



Gambar 3. Kurva Perilaku Persamaan (4.7) – (4.9) Terhadap Waktu (t)

Gambar 3 merupakan gambar perilaku model robot *bipedal* dari persamaan (4.7) – (4.9) terhadap waktu, dapat diketahui bahwa persamaan tersebut merupakan stabil di tiga solusi periodik yaitu  $\theta_1$  (kurva berwarna merah) = sudut lutut kanan,  $\theta_2$  (kurva berwarna biru) = sudut pinggul, dan  $\theta_3$  (kurva berwarna hijau) = sudut lutut kiri. Sehingga perilaku  $\theta_1$  yaitu saat kaki kanan akan melangkah dari titik awal akan menuju kurva merah yang besar dan akan kembali ke titik awal dan saat kaki kiri yang melangkah dari titik awal akan menuju kurva merah yang kecil dan akan kembali ke titik awal kembali, perilaku  $\theta_2$  akan membesar dan mengecil seiring melangkahnya kaki kanan atau kaki kiri, dan perilaku  $\theta_3$  yaitu saat kaki kanan akan melangkah dari titik awal akan menuju kurva biru yang kecil dan akan kembali ke titik awal dan saat kaki kiri yang melangkah dari titik awal akan menuju kurva biru yang besar dan akan kembali ke titik awal kembali.



Gambar 4. Trayektori Persamaan (4.7)

Gambar 4 merupakan trayektori persamaan (4.7) yang merupakan tiga solusi periodik untuk  $\theta_1$  = kurva berwarna merah,  $\theta_2$  = kurva berwarna biru, dan  $\theta_3$  = kurva berwarna hijau. Untuk  $\theta_1$ , solusi dari suatu titik awal akan menuju ke arah stabil solusi periodik  $\theta_1$ . Untuk  $\theta_2$ , maka solusi dari suatu titik awal akan menuju



ke arah stabil akan menuju solusi periodik  $\theta_2$ . Untuk  $\theta_3$ , maka solusi dari suatu titik awal akan menuju ke arah stabil akan menuju solusi periodik  $\theta_3$ . Sehingga dapat diamati, jika terjadi benturan atau sudut  $\theta_1, \theta_2$ , dan  $\theta_3$  tidak benar maka akan menuju ke lintasan yang diinginkan sesuai solusi periodik yang diperoleh.

## PENUTUP

### A. Simpulan

Rekonstruksi model robot bipedal menggunakan tiga derajat kebebasan saja, yaitu : sudut lutut kiri, sudut pinggul, dan sudut lutut kanan. Dari analisis kestabilan menggunakan metode keseimbangan harmonis diperoleh bahwa dari persamaan (4.7) - (4.9) akan berupa solusi periodik jika nilai parameter sesuai persamaan (4.33) – (4.38). Selain itu, dari hasil simulasi diperoleh bahwa sistem persamaan model robot bipedal stabil di tiga solusi periodik yaitu kurva berwarna biru adalah sudut lutut kanan, kurva berwarna merah adalah sudut pinggul, dan kurva berwarna hijau adalah sudut lutut kiri.

### B. Saran

Untuk simulasi analisis kestabilan model robot bipedal yang ada diharapkan lebih memperhatikan parameter – parameter yang digunakan agar perilaku yang diharapkan dapat lebih menunjukkan perilaku dari sistem yang ada, terutama bagi pembaca yang akan mengkaji ulang model robot bipedal.

## DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. Dan Rorres, C. 2004. Aljabar Linier Elementer: *Versi Aplikasi*. Edisi 8. Jilid 1. Terjemahan Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Jakarta: Erlangga.

Filho, Armando C. de Pina, Dutra, Max S., dan Raptopoulos, Luciano S.C. 2004. "Modelling of a Bipedal Robot Using Coupled Rayleigh Oscillators". Brazil : Springer

Filho, Armando C. de Pina dan Dutra, Max S. 2007. "Modeling The Central Pattern Generator of Human Locomotion Using Nonlinear Oscillators". *19th International Congress of Mechanical Engineering*, DF. Brazil

Filho, Armando C. de Pina dan Dutra, Max S. 2011. *Dynamical Analysis of a Biped Locomotion CPG Modelled by Means of Oscillators, Biped Robots, Prof. Armando Carlos Pina Filho (Ed.)*, InTech,

(Online) , (<https://www.intechopen.com/books/biped-robots/dynamical-analysis-of-a-biped-locomotion-cpg-modelled-by-means-of-oscillators>, diakses 24 Mei 2017)

Filho, Armando C. de Pina dan Dutra, Max S. 2013. "Modelling of the Human Ankle by means of a Nonlinear Oscillators System". Disajikan dalam *IV International Symposium on Solid Mechanics*. Brazil, 18-19 April

Finizio, N dan Ladas, G. 1982. *An Introduction to Differential Equations, with Difference Equations, Fourier Analysis, and Partial Differential Equations*. United States of America: Wadsworth, Inc.

Hardesty, Larry. 2010. *Explained: Linear and nonlinear systems : Much scientific research across a range of disciplines tries to find linear approximations of nonlinear behaviors. But what does that mean?*, (Online), (<http://news.mit.edu/2010/explained-linear-0226>, diakses 17 April 2017).

Nayfeh, A.H. dan Mook, D.T. 1979. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley : 59–61

Neuhauser, Claudia. 2011. *Calculus for Biology and Medicine*. Third Edition. United States of America: Prentice Hall.

Parc, Sam dan Briain, Dara O. 2014. *50 Visions Of Mathematics*. Oxford, UK : Oxford University Press : 47

Righetti, Ludovic, Buchli, Jonas, dan Ijspeert, Auke Jan. 2009. "Adaptive Frequency Oscillators and Applications". *The Open Cybernetics and Systemics Journal*, Vol 3, pp 64-69

Saunders, J.B., Inman, V, dan Eberhart, H.D. 1953. "The Major Determinants Normal And Pathological Gait". *J Bone Joint Surg* 35A : 543–558

Strutt, J.W. 1943, *Scientific Papers*. London: Macmillan and Co

Wagner, Stephan. 2005. *Small-Signal Device and Circuit Simulation*. Wien

Wisnu Jatmiko dkk, 2012. "Robotika : Teori dan Aplikasi". Perpustakaan Nasional : Katalog Dalam Terbitan. Fakultas Ilmu Komputer : Universitas Indonesia. Cetakan 1