

ANALISIS KESTABILAN SISTEM DINAMIK SATELIT PENGAMAT BUMI

Rumia Octavia

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: rumiaoctavia@mhs.unesa.ac.id

Yusuf Fuad

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: yusuffuad@unesa.ac.id

Abstrak

Satelit merupakan benda angkasa yang dapat memantau area yang berada diluar bumi. Satelit pengamat bumi dapat dijadikan alat untuk memberi informasi mengenai gejala-gejala alam yang akan terjadi, dapat mendukung komunikasi saat keadaan darurat, dan dapat menyelidiki tata surya dan alam semesta secara lebih bebas tanpa dipengaruhi oleh atmosfer. Pada skripsi ini, dilakukan rekonstruksi model dan analisis kestabilan sistem dinamik satelit pengamat bumi. Rekonstruksi model menghasilkan model nonlinier dari sistem dinamik satelit pengamat bumi. Linierisasi dilakukan sehingga menghasilkan model linier dan dianalisis kestabilan pada gerak deviasi kecepatan sudut dan percepatan sudut terhadap sumbu x , y , dan z . Hasil analisis kestabilan menunjukkan bahwa sistem tidak stabil. Sistem dapat stabil jika memenuhi $I_x > \frac{I_z^2}{I_y}$. Simulasi dilakukan menggunakan Matlab R2009b yang menunjukkan gerak deviasi kecepatan dan percepatan setiap sudut *roll*, *pitch*, dan *yaw*.

Kata Kunci : satelit pengamat bumi, rekonstruksi, linierisasi, analisis kestabilan.

Abstract

Satellites are celestial bodies that can monitor areas that are outside the earth. Earth observer satellites can be used as tools to inform the natural phenomena that will occur, can support communications during emergencies, and can investigate the solar system and the universe more freely without being affected by the atmosphere. In this thesis, conducted model reconstruction and stability analysis dynamics system of earth observation satellites. The model reconstruction yields a nonlinear model of the dynamic system of the Earth observer satellites. The linearisation is done so as to produce linear model and analyzed the stability of motion deviation of angular velocity and angle acceleration to x , y , and z axes. The result of stability analysis shows that unstable system. The system can be stable if it meets $I_x > \frac{I_z^2}{I_y}$. then a stable system is obtained. The simulation is done using Matlab R2009b which shows the deviation motion speed and acceleration of each corner of *roll*, *pitch*, and *yaw*.

Keywords: satellite earth observation, reconstruction, linearization, stability analysis

PENDAHULUAN

Satelit buatan banyak manfaatnya bagi kehidupan manusia di era yang semakin maju. Diantaranya dapat digunakan untuk memantau keadaan bumi dari luar angkasa yang tidak dipengaruhi atmosfer. Jenis satelit ini adalah satelit pengamat bumi. Satelit bergerak mengelilingi bumi pada lintasan tertentu, dan bersama-sama dengan bumi berputar mengelilingi matahari. Keadaan inilah yang mengakibatkan satelit dapat berpindah dari orbit yang ditentukan,

Cara kerja utama satelit terletak pada ketepatan posisi orbit yang ditentukan, sehingga perlu mengatur sedemikian rupa agar satelit tetap pada orbit yang ditentukan. Kestabilan gerak satelit sangat diperlukan

untuk menjaga satelit tetap berada pada orbitnya. Pada penelitian yang dilakukan oleh Yang, et. al (2012), yang berjudul *Concept Design, Modeling and Station-keeping Attitude Control of an Earth Observation Platform*, mengkaji desain konseptual dan model dinamik satelit pengamat bumi berupa sistem nonlinier yang kemudian dilakukan linierisasi sehingga sistem menjadi linier serta melakukan kontrol pada stasiun satelit di bumi.

Dalam penelitian ini dilakukan rekonstruksi model persamaan gerak satelit pengamat bumi dan analisis kestabilan sistem dinamik satelit pengamat bumi serta dilakukan simulasi dari gerak deviasi kecepatan dan percepatan setiap sudut terhadap sumbu x , y , dan z .

KAJIAN PUSTAKA

A. Satelit

Satelit merupakan benda langit yang beredar mengelilingi benda langit yang lebih besar (planet). Jenis satelit ada dua, yaitu satelit buatan dan satelit alami. Satelit alami merupakan satelit yang sudah ada di angkasa, sedangkan satelit buatan adalah satelit yang dibuat oleh manusia. Contohnya satelit Bulan yang merupakan satelit alami Bumi dan satelit Landsat merupakan satelit buatan Amerika Serikat. Salah satu jenis satelit buatan adalah satelit pengamat bumi, yaitu merupakan jenis satelit yang berfungsi untuk menyelidiki tata surya dan alam semesta secara lebih bebas tanpa dipengaruhi oleh atmosfer. Satelit ini berusaha mendapatkan data-data mengenai matahari dan bintang-bintang untuk mengungkap gejala maupun pergerakan alam semesta.

Satelit yang berada di luar angkasa harus tetap berada pada orbit yang ditentukan agar gerakannya tetap stabil. Orbit adalah tempat beredarnya satelit saat mengelilingi bumi. Posisi satelit yang tidak dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti bumi disebut posisi geostasioner. Kondisi bumi yang selalu berputar pada porosnya dan berputar mengelilingi matahari, mengakibatkan satelit dapat berpindah dari posisi orbit yang ditentukan. Sehingga nampak bahwa betapa pentingnya kestabilan gerak satelit. Pengendalian satelit diatur dari stasiun yang ada di bumi. Misalkan untuk mengatur posisi satelit agar tetap berada pada orbitnya. Salah satu contoh satelit pengamat bumi adalah satelit Landsat yang dibuat oleh Amerika Serikat. Satelit Landsat merupakan jenis satelit pengamat bumi yang berada pada orbit LEO dengan ketinggian 705 km.

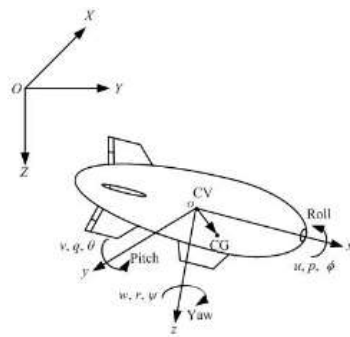


Gambar 2.2 Satelit Landsat

(sumber: <http://pgsp.big.go.id/perkembangan-landsat/> diakses pada tanggal 12 Maret 2017)

B. Persamaan Gerak Satelit

Untuk menganalisis gerakan satelit, terdapat dua macam koordinat yakni koordinat sumbu satelit B (*oxyz*) dan kordinat sumbu bumi E (*OXYZ*). Kinematika satelitcabang dalam mekanika klasik yang membahas gerak satelit dan sistem satelit tanpa mempersoalkan gaya penyebab gerakannya. Kinematika satelit berorientasi pada tiga sumbu (*x, y, z*) yang berkaitan dengan pergerakan satelit yaitu *roll*, *pitch*, dan *yaw*. *Roll* adalah gerak naik turunnya sayap kiri atau kanan dan gerak ini terjadi di sepanjang sumbu *x*. *Pitch* adalah gerak naik turunnya hidung satelit yang terjadi di sepanjang sumbu *y*. *Yaw* adalah gerak berbelok dalam bidang horizontal sepanjang sumbu *z* (Yang, et al. 2012).



Gambar 2.4 Kerangka acuan dan variabel pergerakan satelit (Yang, et al. 2012)

C. Transformasi Koordinat

Transformasi koordinat terdiri dari transformasi kecepatan linier dan transformasi kecepatan sudut yang diperlukan untuk mendeskripsikan gerak satelit dan membuat jelas transformasi diantara dua koordinat. Vektor kecepatan sudut adalah turunan pertama vektor posisi *P* terhadap kecepatan linier melalui transformasi berikut ini:

$$\dot{P} = S_1 V \tag{2.1}$$

Dimana $\dot{P} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$, dan $V = [u \ v \ w]^T$. S_1 adalah matriks transformasi yang berhubungan dengan sudut Euler yaitu *roll* ϕ , *pitch* θ , dan *yaw* ψ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Vektor sudut Euler $\omega = [p \ q \ r]^T$ disistem koordinat badan satelit dan vektor kecepatan sudut Euler $\dot{\Omega} = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ memenuhi transformasi berikut:

$$\dot{\Omega} = S_2 \omega \tag{2.2}$$

dengan S_2 adalah matriks transformasi dan diketahui sebagai berikut:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sec \theta \sin \phi & \sec \theta \cos \phi \\ 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Secara ringkas persamaan kinematika satelit dapat dituliskan sebagai berikut (Yang, et al. 2012):

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

D. Sistem Dinamik Gerak Satelit

Satelit merupakan benda tegar, dengan jarak antara satu titik dan titik yang lainnya tidak akan berubah pada saat terbang. Persamaan gerak satelit yang diturunkan dari hukum Newton yang dinotasikan dengan persamaan dua vektor dalam koordinat E adalah:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = F \quad (2.4)$$

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \tau \quad (2.5)$$

Perhitungan dari menambahkan massa, inersia, momentum linier, dan momentum anguler satelit, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (m\mathbf{J}_{3 \times 3} + \mathbf{M}_a)\mathbf{V}_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_G \\ &= (\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_a)\mathbf{V}_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_G \\ &= \mathbf{M}\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_G \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_a)\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{z}_G \times \mathbf{V}_T \\ &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{z}_G \times (m\mathbf{V}_T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dengan mentransformasikan ke koordinat B didapat persamaan gerak rotasi:

$$\mathbf{M}\mathbf{V}_T + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}\mathbf{V}_T) + m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{z}_G + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_G) = \mathbf{F} \quad (2.8)$$

dan persamaan gerak anguler sebagai berikut:

$$[\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})] + m[\mathbf{z}_G \times \mathbf{V}_T + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{z}_G \times \mathbf{V}_T)] = \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

Dengan demikian diperoleh persamaan dinamis satelit yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -m\mathbf{z}_G^x \\ m\mathbf{z}_G^x & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_T \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}\mathbf{V}_T) + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_G) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{z}_G \times \mathbf{V}_T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

(Yang, et al. 2012).

E. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang memuat derivatif (turunan) satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui (Boyce and Di Prima, 2001). Misalkan t dan u adalah variabel bebas sedangkan y adalah variabel terikat, dengan t, u dan $y \in \mathbb{R}$, berikut contoh persamaan diferensial:

$$1. \frac{d^2y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} = e^{-2t} \quad (2.17)$$

$$2. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 3 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0 \quad (2.19)$$

F. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial adalah sistem yang memuat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui yang

bergantung pada dua atau lebih variable bebas (Boyce and Di Prima, 2001:19). Berikut adalah bentuk umum dari sistem persamaan diferensial orde satu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

dengan $x_i \in \mathbb{R}; i = 1, 2, \dots, n$ dan t menyatakan waktu, sehingga $x_1 \equiv x_1(t), x_2 \equiv x_2(t), \dots, x_n \equiv x_n(t)$ dengan $\frac{dx_i}{dt}$ merupakan derivatif pertama dari x_i terhadap t dan $g_i; i = 1, 2, \dots, n$ adalah fungsi yang bergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t . (Neuhauser, 2004).

G. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah matriks berordo $n \times n$. Vektor tak nol x dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ dari vektor x maka berlaku:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax &= \lambda Ix \\ (A - \lambda I)x &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Persamaan terakhir memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika λ memenuhi persamaan sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.13)$$

Nilai λ memenuhi persamaan (2.12) disebut nilai eigen matriks A , dan solusi tak nol dari persamaan (2.13) diperoleh dengan menggunakan nilai λ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen (Boyce dan Di Prima, 2001).

H. Linierisasi

Model matematika umumnya berbentuk persamaan diferensial non linier. Dalam mengkaji perilaku solusi model non linier diperlukan linierisasi pada sistem non linier agar mendapatkan sistem linier. Linierisasi dilakukan agar sistem linier dapat dianalisis, dengan hasil analisisnya lebih baik dari sistem nonlinier. Linierisasi adalah suatu proses merubah sistem nonlinier menjadi sistem linier (Olsder, 2003).

I. Kestabilan Titik Ekuilibrium Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Diberikan sistem $\dot{x} = f(x)$, titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari sistem tersebut jika $f(\bar{x}) = 0$ (Olsder, 2003).

Kestabilan Titik Ekuilibrium

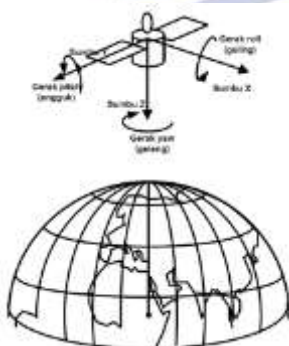
Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan A merupakan suatu matriks 6×6 yang memiliki nilai eigen berbeda, yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_6$ (Olsder, 2003:66).

1. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re \lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, 6$.
2. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil jika dan hanya jika $\Re \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, 6$ dan jika setiap nilai eigen λ_i kompleks dengan $\Re \lambda_i = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
3. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu $\Re \lambda_i > 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, 6$

PEMBAHASAN

A. Rekonstruksi Model

Ketika menganalisa gerakan satelit, terdapat dua macam koordinat yakni koordinat sumbu satelit B (oxyz) dan kordinat sumbu bumi E (OXYZ). Koordinat sumbu satelit mempresentasikan kecepatan dan percepatan satelit yang bertepatan dengan pusat gravitasi sedangkan koordinat sumbu bumi mempresentasikan posisi dan perubahan sudut satelit.



Gambar 4.1. Posisi sumbu-sumbu satelit terhadap bumi (Widodo, 2004)

Satelit bergerak terhadap sistem sumbu badan satelit, sehingga dilakukan rotasi dari sistem sumbu bumi (X, Y, Z) ke sistem sumbu badan satelit (x, y, z). Posisi satelit digambarkan oleh koordinat origin sumbu badan satelit pada kerangka inersia (X, Y, Z) yang orientasinya diwakili oleh sudut Euler (roll, pitch, dan yaw)

Kecepatan sudut menjadi:

$$\omega = \dot{\phi}i_2 + \dot{\theta}j_1 + \dot{\psi}k_0$$

Oleh karena itu kecepatan sudut tubuh satelit pada sumbu x, y, dan z sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Atau dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \sec \theta (r \cos \phi + q \sin \phi) \\ \dot{\phi} &= p + (r \cos \phi + q \sin \phi) \tan \theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

Karena satelit berotasi tidak sama dengan rotasi sumbu bumi, maka perlu dilakukan transformasi ke sistem sumbu badan satelit. Notasi persamaan momen pada sumbu ox, sumbu oy, dan sumbu oz masing-masing dengan L, M, dan N. diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= Lc_3 + Nc_4 + c_1qr + c_2pq \\ \dot{q} &= Mc_7 - c_6(p^2 - r^2) + c_5pr \\ \dot{r} &= Nc_9 + Lc_4 c_8pq + c_2qr \end{aligned} \quad (3.16)$$

Karena gerak rotasi dipengaruhi gaya gravitasi dan gaya gravitasi dipengaruhi oleh momen inersia, maka persamaan (3.16) menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= (c_1r + c_2p)q + c_3(L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_4N \\ \dot{q} &= c_5pr - c_6(p^2 - r^2) + c_7(M - z_G G \sin \theta) \\ \dot{r} &= (c_8p + c_2r)q + c_4(L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_9N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dari persamaan (3.15) dan (3.17) diperoleh persamaan gerak satelit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \sec \theta (r \cos \phi + q \sin \phi) \\ \dot{\phi} &= p + (r \cos \phi + q \sin \phi) \tan \theta \\ \dot{p} &= (c_1r + c_2p)q + c_3(L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_4N \\ \dot{q} &= c_5pr - c_6(p^2 - r^2) + c_7(M - z_G G \sin \theta) \\ \dot{r} &= (c_8p + c_2r)q + c_4(L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_9N \end{aligned} \quad (4.9)$$

Karena sistem gerak satelit tersebut dalam bentuk persamaan nonlinier maka dilakukan linierisasi agar sistem menjadi linier.

Didefinisikan (Nelson, 1989:105)

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta p & q &= q_0 + \Delta q & r &= r_0 + \Delta r \\ L &= L_0 + \Delta L & M &= M_0 + \Delta M & N &= N_0 + \Delta N \\ \theta &= \theta_0 + \Delta \theta & \phi &= \phi_0 + \Delta \phi & \psi &= \psi_0 + \Delta \psi \end{aligned}$$

Saat satelit terbang memantau bumi, satelit terbang jelajah dalam kondisi tunak yang memiliki kecepatan konstan. Dengan kata lain

$$p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0$$

Karena $p_0 = q_0 = r_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0$ dan ketika deviasi signifikan kecil, maka digunakan asumsi berikut (Caughey, 2011:51):

- i. Perkalian antar deviasi dapat dianggap nol
- ii. $\sin \Delta \theta \approx \Delta \theta$ dan $\sin \Delta \phi \approx \Delta \phi$
- iii. $\cos \Delta \theta \approx 1$ dan $\cos \Delta \phi \approx 1$

Dan karena $L_0 = M_0 = N_0 = \theta_0 = 0$, maka diperoleh sistem gerak satelit:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \Delta q \\ \Delta\psi &= \Delta r \\ \Delta\phi &= \Delta p \\ \Delta\dot{p} &= c_3(\Delta L - z_G G \Delta\phi) + c_4 \Delta N \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{q} &= c_7(\Delta M - z_G G \Delta\theta) \\ \Delta\dot{r} &= c_4(\Delta L - z_G G \Delta\phi) + c_9 \Delta N \end{aligned}$$

Jika persamaan (3.18) diubah dalam bentuk matriks diperoleh:

$$\dot{x}(t) = Px(t) + Q\eta(t) \quad (3.19)$$

Dimana

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\psi \\ \Delta\phi \\ \Delta\dot{p} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{r} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_3L + c_4N \\ c_7M \\ c_4L + c_9N \end{bmatrix} \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} \Delta L \\ \Delta M \\ \Delta N \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3z_GG & 0 & 0 & 0 \\ -c_7z_GG & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_4z_GG & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalam menganalisis kestabilan sistem tersebut, menggunakan nilai parameter yang diperoleh dari data penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Yang, et al. (2012).

Untuk menganalisis kestabilan, perlu ditentukan nilai eigen dari matriks P . Misalkan $\lambda \in \mathbb{C}$ merupakan nilai eigen dari matriks P . Untuk mendapatkan nilai eigen matriks P , maka $\det(\lambda I - P) = 0$ harus terpenuhi. Sehingga:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0133 & \lambda & 0 & 0 \\ 2.7119 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 3.6783 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan mengalikan 10^{12} ke setiap nilai eigen dari matriks P , diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.7347 \times 10^{-6} + 1.1519 \times 10^{11}i \\ \lambda_2 &= -1.7347 \times 10^{-6} - 1.1519 \times 10^{11}i \\ \lambda_3 &= 4.3368 \times 10^{-7} + 5.2093 \times 10^9i \\ \lambda_4 &= 4.3368 \times 10^{-7} - 5.2093 \times 10^9i \\ \lambda_5 &= -4.0658 \times 10^{-7} + 1.9195 \times 10^9i \\ \lambda_6 &= -4.0658 \times 10^{-7} - 1.9195 \times 10^9i \end{aligned}$$

Dari hasil tersebut, dapat diketahui bahwa $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0$, $Re(\lambda_3) = Re(\lambda_4) > 0$, dan $Re(\lambda_5) = Re(\lambda_6) < 0$ dengan demikian dapat dikatakan bahwa sistem linier dari satelit pengamat bumi tidak stabil.

Untuk menjadikan sistem stabil, maka perlu dilakukan pengecekan hal-hal yang mengakibatkan

sistem menjadi stabil. Diantaranya dengan mengganti nilai parameter yang sudah ada pada jurnal acuan.

Dari matriks P yang diperoleh, dapat dicari nilai eigen dengan tanpa memasukkan nilai parameter. Untuk mendapatkan nilai eigen matriks P , maka $\det(\lambda I - P) = 0$ harus terpenuhi. Sehingga:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3z_GG & \lambda & 0 \\ c_7z_GG & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & c_4z_GG & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (-c_7z_GG)^{1/2} \\ \lambda_2 &= (-c_4z_GG)^{1/2} \\ \lambda_3 &= (-c_3z_GG)^{1/2} \\ \lambda_4 &= -(-c_7z_GG)^{1/2} \\ \lambda_5 &= -(-c_4z_GG)^{1/2} \\ \lambda_6 &= -(-c_3z_GG)^{1/2} \end{aligned}$$

Sehingga

$\sqrt{-c_7z_GG}$, karena c_7, z_G , dan $G > 0$ maka nilai $\sqrt{-c_7z_GG}$ berbentuk imajiner dengan $Re = 0$
 $\sqrt{-c_4z_GG}$, karena z_G dan $G > 0$ maka nilai $c_4 > 0$ atau $c_4 < 0$,

Jika $c_4 > 0$ maka nilai $\sqrt{-c_4z_GG}$ berbentuk imajiner dengan $Re = 0$

Jika $c_4 < 0$ maka nilai $\sqrt{-c_4z_GG}$ berbentuk $Re > 0$
 $\sqrt{-c_3z_GG}$, karena z_G dan $G > 0$ maka nilai $c_3 > 0$ atau $c_3 < 0$,

Jika $c_3 > 0$ maka nilai $\sqrt{-c_3z_GG}$ berbentuk imajiner dengan $Re = 0$

Jika $c_3 < 0$ maka nilai $\sqrt{-c_3z_GG}$ berbentuk $Re > 0$

Diperoleh agar sistem stabil, maka

$$c_3 = \frac{-I_z}{I_{xz}^2 - I_x I_z} > 0 \quad \text{dan} \quad c_4 = \frac{-I_{xz}}{I_{xz}^2 - I_x I_z} > 0$$

Diperoleh:

$$I_x > \frac{I_{xz}^2}{I_z}$$

dan berdasarkan nilai parameter di jurnal referensi diketahui bahwa:

$$I_{xz} = 1.6 \times 10^6 \quad \text{dan} \quad I_z = 5.8 \times 10^9$$

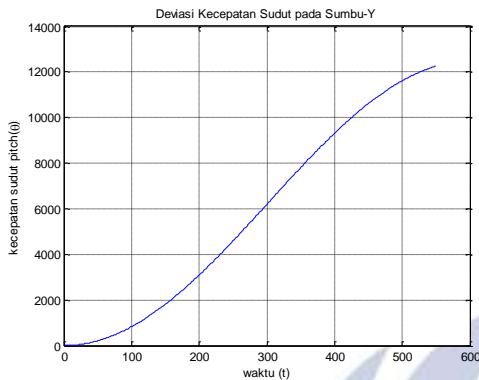
Maka diperoleh batasan nilai I_x agar sistem linier tersebut stabil, yakni:

$$\begin{aligned} I_x &> \frac{I_{xz}^2}{I_z} \\ I_x &> \frac{(1.6 \times 10^6)^2}{5.8 \times 10^9} \\ I_x &> 4.41 \times 10^2 \end{aligned}$$

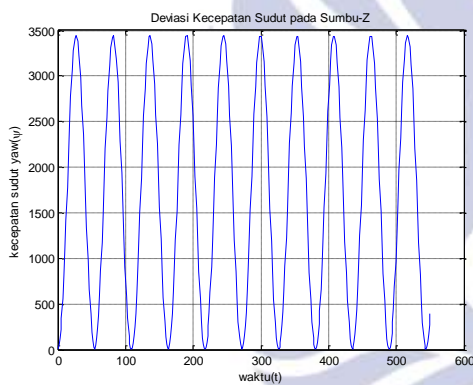
B. Simulasi

Dengan nilai awal $\theta = 0.1$, $\psi = 0.1$, $\phi = 0.1$, $\dot{p} = 0.0015$, $\dot{q} = 0.002$, dan $\dot{r} = 0.001$, diperoleh simulasi sebagai berikut:

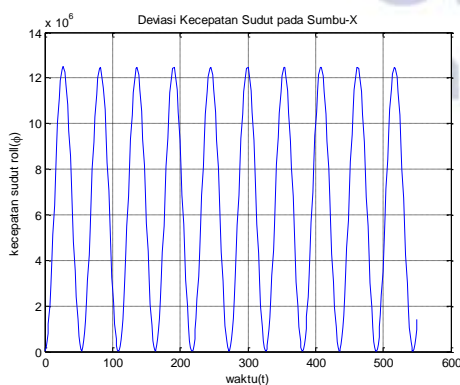
- Parameter yang digunakan dengan $I_x < 4.41 \times 10^2$



Gambar 4.6 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Y
 Pada gambar 4.6, deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Y menunjukkan bahwa sistem tidak stabil.

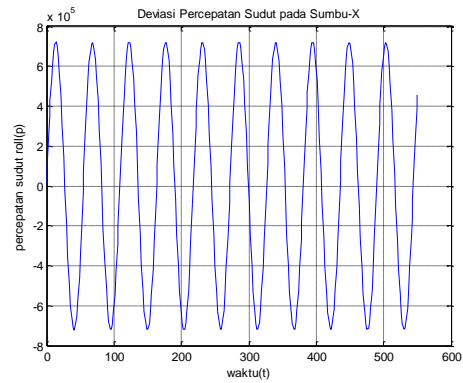


Gambar 4.7 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Z
 Pada gambar 4.7, deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Z menunjukkan bahwa sistem stabil hingga 550 sec dan kecepatan sudutnya mencapai 3500 rad/sec

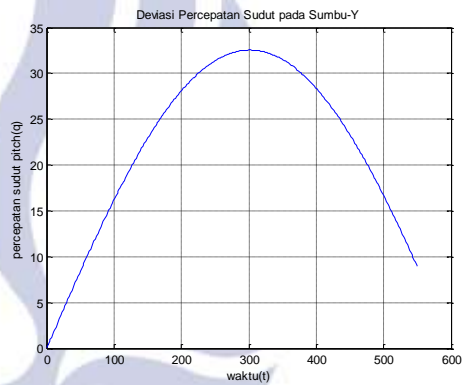


Gambar 4.8 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-X
 Pada gambar 4.8, deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-X menunjukkan bahwa sistem stabil hingga

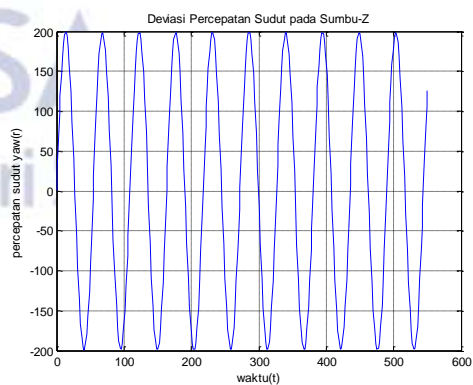
550 sec dan kecepatan sudutnya mencapai $12.5 \times 10^6 \text{ rad/sec}$.



Gambar 4.9 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-X
 Pada gambar 4.9, deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-X menunjukkan bahwa sistem stabil hingga 550 sec dan kecepatan sudutnya mencapai $7 \times 10^5 \text{ rad/sec}$.

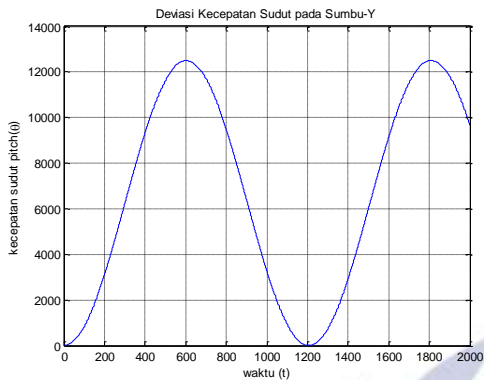


Gambar 4.10 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Y
 Pada gambar 4.10, deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Y menunjukkan bahwa sistem tidak stabil.

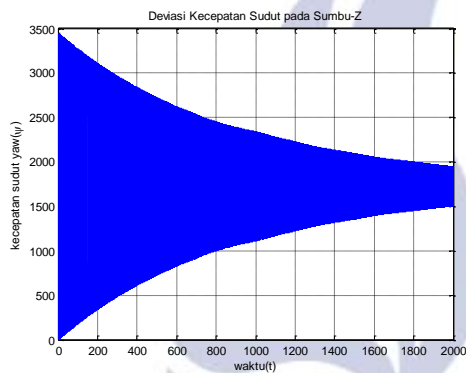


Gambar 4.11 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Z
 Pada gambar 4.11, deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Z menunjukkan bahwa sistem stabil hingga 550 sec dan percepatan sudutnya mencapai 200 rad/sec.

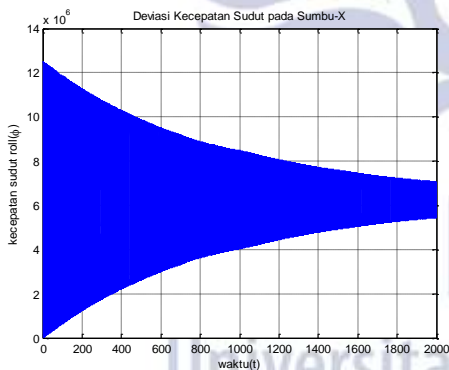
2. Parameter yang digunakan dengan $I_x > 4.41 \times 10^2$
 Dengan memilih nilai $I_x = 5.2 \times 10^2$, didapat simulasi berikut:



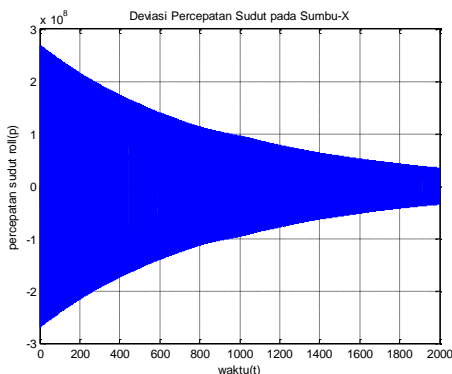
Gambar 4.12 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Y



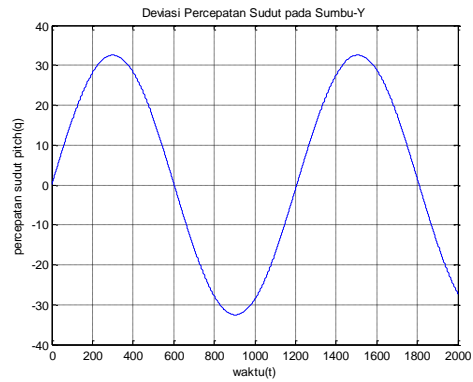
Gambar 4.13 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-Z



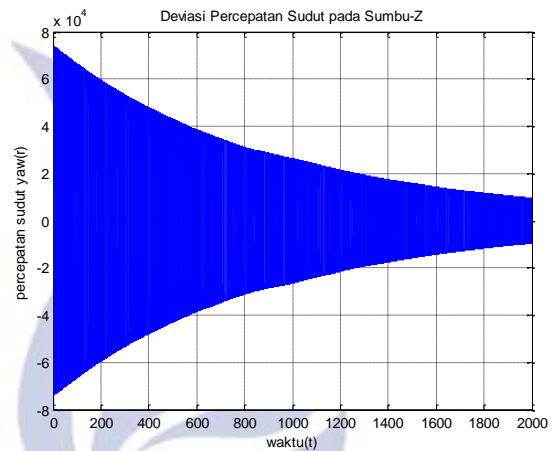
Gambar 4.14 Deviasi kecepatan sudut terhadap sumbu-X



Gambar 4.15 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-X



Gambar 4.16 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Y



Gambar 4.17 Deviasi percepatan sudut terhadap sumbu-Z

Dari keenam gambar yaitu gambar 4.12 sampai 4.17 menunjukkan bahwa sistem gerak satelit pengamat bumi stabil

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil rekonstruksi model dinamik satelit pengamat bumi adalah sebagai berikut:

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta (r \cos \phi + q \sin \phi)$$

$$\dot{\phi} = p + (r \cos \phi + q \sin \phi) \tan \theta$$

$$\dot{p} = (c_1 r + c_2 p)q + c_3 (L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_4 N$$

$$\dot{q} = c_5 p r - c_6 (p^2 - r^2) + c_7 (M - z_G G \sin \theta)$$

$$\dot{r} = (c_8 p + c_2 r)q + c_4 (L - z_G G \cos \theta \sin \phi) + c_9 N$$

2. Hasil linierisasi model dinamik satelit pengamat bumi adalah sebagai berikut:

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta q$$

$$\Delta \dot{\psi} = \Delta r$$

$$\Delta \dot{\phi} = \Delta p$$

$$\Delta \dot{p} = c_3(\Delta L - z_G G \Delta \phi) + c_4 \Delta N$$

$$\Delta \dot{q} = c_7(\Delta M - z_G G \Delta \theta)$$

$$\Delta \dot{r} = c_4(\Delta L - z_G G \Delta \phi) + c_9 \Delta N$$

3. Berdasarkan nilai eigen pada sistem linier dapat disimpulkan bahwa sistem tidak stabil atau tidak stabil asimtotik.
4. Sistem dapat stabil jika memilih nilai I_x yang memenuhi $I_x > \frac{I_{xz}^2}{I_z}$.

B. Saran

Peneliti menyarankan dalam penelitian selanjutnya agar diterapkan sistem kontrol untuk mengetahui letak kestabilan sistem gerak satelit pengamat bumi.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. 1987. *Elementary Linier Algebra*. Drexel University
- Boyce, William E. dan Di Prima, Richard C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition. United State of America: John Wiley and Sons, Inc.
- Bronson, R. dan Costa, G. B. 2006. *Differential Equations Third Edition*. USA
- Caughey, A. David. 2011. *Introduction to Aircraft Stability and Control Course Notes for M&AE 5070*. New York: Cornell University.
- Finizio, N. dan Ladas, G. 1982. *Penerapan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga
- Ives, N.E. 1962. *Principles of Attitude Control of Artificial Sattelites*. London: Communicated by The Deputy Controller Aircraft (Research and Development), Ministry of Aviation.
- Kaplan, Marshall H. 1976. *Modern Spacecraft Dynamics and Control*. New York: John Willey and Sons.
- Kusuma, Miati. 5 Agustus 2016. Perkembangan Landsat., (Online), (<http://pgsp.big.go.id/perkembangan-landsat/>, diunduh 12 Maret 2017)
- Kreuzig, Erwin. 2011. *Advanced Engineering Mathematics*. Tenth Edition. United States of America: John Wiley & Sons, Inc.
- McLean, Donald. 1990. *Automatic Flight Control System* UK: Prentice Hall International.
- Nelson, C. Robert. 1989. *Flight Stability and Automatic Control*. Amerika Serikat: McGraw-Hill.
- Neuhauser, Claudia. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education
- Nurachmadani, Setya. 2009. *Fisika 2 Untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Pusat Pembukuan, Departemen Pendidikan Nasional.
- Ogata, Katsuhiko. 2010. *Modern Control Engineering*. Edisi ke-5. UK: Prentice Hall
- Olsder, G.J. 2003. *Mathematical System Theory*. Delft: Delft University Press
- Saputra, M. Agus. 2015. *Solusi Sistem Kontrol Nonlinier Librasi Keseimbangan Bumi-Satelit*. Skripsi tidak diterbitkan. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya
- Setiawan, samhis. 22 Juni 2016. Pengertian, Fungsi Dan Macam-Macam Satelit Beserta Contohnya Terlengkap, (Online), (<http://www.gurupendidikan.com/pengertian-fungsi-dan-macam-macam-satelit-beserta-contohnya-terlengkap/>, diunduh 12 Maret 2017)
- Siregar, Suryadi. 2007. *Dasar-dasar Lintasan Satelit*. Bandung: Ebook Penerbit ITB
- Widodo, Slamet. 2012. "Prinsip Pengendalian Attitude Satelit LAPAN-TUBSAT"
- Yang, Y. Wu, Jie. dan Zheng, Wei. Concept Design, Modeling and Station-keeping Attitude Control of an Earth Observation Platform. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Issue 16 May 2012. Download 28 Agustus 2016.