STRUKTUR ALJABAR PADA PEWARISAN GENETIK

Fatma Riskiyah Kurniawati
S1 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
fatmariskiyahkurniawati@yahoo.com

Dr. Agung Lukito, M.S.
S1 Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
gung_lukito@yahoo.co.id

Abstrak

Pewarisan genetik adalah aspek pertama yang dipelajari dalam genetika. Aljabar pada pewarisan genetik ini merupakan aljabar atas suatu lapangan. Secara umum, aljabar dengan realisasi genetik bersifat komutatif tetapi bersifat non-assosiatif. Jika individu P kawin dengan Q dan hasilnya dikawinkan dengan R, hasil perkawinannya tidak akan sama dengan individu P dikawinkan dengan hasil perkawinan individu Q dengan R, atau dengan kata lain $(P \times Q) \times R \neq P \times (Q \times R)$ (non-assosiatif). Sedangkan jika individu P dikawinkan dengan individu Q hasilnya akan sama dengan indivdu Q dikawinkan dengan individu P atau $P \times Q = Q \times P$ (komutatif). Dalam skripsi ini dibahas tentang aljabar pada pewarisan genetik. Aljabar pada pewarisan genetik merupakan aljabar atas lapangan real. $\mathcal{A}$ merupakan aljabar dengan realisasi genetik jika $\mathcal{A}$ memuat suatu pemisah gamet. Aljabar dengan realisasi genetik merupakan aljabar barik jika memuat suatu homomorfisma non-trivial.

Kata kunci : Aljabar gamet, Matriks Stokastik, Aljabar dengan Realisasi Genetik, Aljabar barik.

Abstract

Genetic inheritance is the first aspect which is learnt in genetics. Algebra in genetic inheritance is algebra over real field. Generally, algebra in genetic inheritance is commutative but non-assosiative. If population P mates with Q and then the result mates with population R, the result is not the same as the population resulting from P mating with the population from mating Q and R, or $(P \times Q) \times R \neq P \times (Q \times R)$ (non-assosiative). If population P mates with Q, the result will be equal to population Q mating with P or $P \times Q = Q \times P$ (commutative). In this essay we will discuss algebra in genetic inheritance. Algebra in genetic inheritance is an algebra over real field. $\mathcal{A}$ is an algebra with genetic realization if it admits gametic segregation. And algebra with genetic realization is called baric algebra if $\mathcal{A}$ admits a non-trivial homomorphism.

Key words : Gametic Algebra, Stochastic Matrix, Algebra with Genetic Realization, Baric Algebra.

PENDAHULUAN

Pewarisan genetik adalah aspek pertama yang dipelajari orang dalam genetik karena berkaitan langsung dengan fenotip. Sebagai contoh, Gregor Johann Mendel mempelajari pewarisan tujuh sifat pada tanaman kacang kapri, atau Karl Pearson (salah satu pelopor genetika kuantitatif) mempelajari pewarisan ukuran tubuh orang tua dan anaknya. Terjadinya pewarisan sifat dapat disebabkan karena adanya perkawinan antara dua individu yang sejenis. Perkawinan dua individu sejenis yang memiliki sifat berbeda disebut persilangan. Persilangan dapat dilakukan secara sengaja oleh manusia dengan maksud untuk memperoleh individu baru yang memiliki sifat-sifat unggul.

Tulisan ini membahas tentang struktur aljabar yang berkaitan dengan pewarisan genetik dan beberapa teorema yang juga berkaitan dengan aljabar genetik. Dalam tulisan ini penulis juga membahas beberapa aplikasi aljabar genetik tanpa komputasi.

Dalam membahas struktur aljabar pada pewarisan genetik, diperlukan pengetahuan dasar tentang ruang vektor, grup, ring, lapangan, dan beberapa definisi maupun teorema lain yang mendukung.

Sebelum membahas matematika genetik, ada beberapa istilah yang perlu diketahui. Dalam suatu populasi, perkawinan acak dari makhluk hidup yang bersifat diploid dan berbeda secara genetik dapat terjadi kapan saja. Jika terjadi suatu pembuahan (bergabungnya sel sperma/ gamet jantan dengan sel telur/ gamet betina) maka akan terbentuk zigot yaitu gabungan gamet-gamet dan merupakan sel diploid. Didalam satu gamet terdapat satu set kromosom sehingga gamet disebut sebagai sel haploid. Kromosom merupakan struktur yang berisi DNA, RNA, dan protein serta termasuk gen yang ada didalamnya. Sedangkan gen merupakan bagian dari kromosom yang berfungsi sebagai pembawa sifat. Dan suatu alternatif gen yang menjelaskan adanya variasi pada pewarisan suatu sifat disebut dengan alel.

PEMBAHASAN

Aljabar Gamet

Dalam suatu populasi, perkawinan acak dari makhluk hidup yang bersifat diploid dan berbeda secara genetik dapat terjadi kapan saja. misalkan $a_1, \dots, a_n$ merupakan gamet yang dimiliki dari suatu populasi. Gabungan gamet a_i dan a_j akan menghasilkan sebuah zygot $a_i a_j$ atau $a_j a_i$ (karena $a_i a_j = a_j a_i$), yang dapat menghasilkan gamet baru yaitu a_k. Kemungkinan zygot $a_i a_j$ menjadi gamet baru yaitu $a_i a_j = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$. Pemisah gamet γ_{ijk} merupakan besarnya kemungkinan zygot $a_i a_j$ menghasilkan gamet a_k, dengan kata lain, pemisah gamet γ_{ijk} merupakan peluang dari zygot $a_i a_j$ menghasilkan gamet a_k. Sehingga, dapat kita tulis:

$0 \le \gamma_{ijk} \le 1$ dengan $i, j, k = 1, \dots, n$. (1)

$\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$ dengan $i, j = 1, \dots, n$. (2)

$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k \qquad i, j = 1, \dots, n$. (3)

Catatan: $a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k$ dimana $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k$ merupakan gabungan dari n-gamet beserta peluangnya.

Aljabar dengan pemisah gamet γ_{ijk} dan memenuhi persamaan (1), (2), dan (3) merupakan aljabar gamet dan dinotasikan dengan $\mathcal{G}$.

Matriks Stokastik

Matriks stokastik atau juga disebut matriks probabilitas merupakan matriks persegi yang setiap elemen-elemennya merupakan bilangan real antara 0 sampai 1 dan penjumlahan dalam setiap barisnya adalah 1.

Teorema 3.1

Matriks stokastik A memiliki invers jika $a_{ii} > \sum_{i \ne j} a_{ij}$ untuk $i = 1, \dots, n$.

Bukti:

Misalkan $D = diag(a_{ii}, \dots, a_{nn})$, atau dapat kita tuliskan sebagai berikut,

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

maka D merupakan matriks diagonal yang memiliki invers. $D^{-1}A$ merupakan matriks yang semua entri pada diagonal utamanya 1, matriks $B = [b_{ij}] = I - D^{-1}A$ merupakan matriks yang semua entri pada diagonal utamanya 0 dan $b_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$ jika $i \ne j$. Perhatikan norm jumlah baris maksimum $\|\cdot\|_\infty$ menunjukkan bahwa $\|B\|_\infty < 1$. Jadi $I - B = D^{-1}A$ memiliki invers berdasarkan Teorema 2.5.8, sehingga mengakibatkan matriks A memiliki invers.

Aljabar dengan Realisasi Genetik

Dalam struktur aljabar pada pewarisan genetika, suatu aljabar didefinisikan sebagai aljabar dengan realisasi genetik jika memuat suatu pemisah gamet dengan sifat-sifat tertentu

Definisi 3.1

Diberikan $\mathcal{A}$ aljabar atas $\mathbb{R}$. Misalkan $\mathcal{A}$ dengan basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ dan pemisah gamet γ_{ijk} sehingga $a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k \;\; , i, j = 1, \dots, n$. Aljabar $\mathcal{A}$ disebut aljabar dengan realisasi genetik jika skalar γ_{ijk} memenuhi:

(i). $0 \le \gamma_{ijk} \le 1$

(ii). $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$

Dalam aljabar $\mathcal{A}$ dengan realisasi genetik atas $\mathbb{R}$, $x \in \mathcal{A}$ dapat dituliskan dalam kombinasi linier dengan basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ sebagai berikut:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$$

dengan ξ_i merupakan peluang gen a_i ada dalam suatu populasi dengan $0 \le \xi_i \le 1, i = 1, \dots, n$ dan $\sum_{i=1}^{n} \xi_i = 1$.

Teorema 3.2

Jika $\{a_1, \dots, a_n\}$ basis untuk $\mathcal{A}$, maka $\{b_1, \dots, b_n\}$ juga merupakan basis untuk $\mathcal{A}$ dengan $b_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} a_k$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} = 1$ dan $\beta_{ii} > \sum_{i \ne j} \beta_{ij}$.

Bukti:

Karena $\mathcal{A}$ aljabar dengan realisasi genetik dan merupakan aljabar berdimensi-n dengan basis $\{a_1, \dots, a_n\}$, maka untuk membuktikan bahwa $\{b_1, \dots, b_n\}$ juga merupakan basis untuk $\mathcal{A}$ cukup membuktikan $\{b_1, \dots, b_n\}$ merentang $\mathcal{A}$ atau bebas linier di $\mathcal{A}$.

Dengan $\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} = 1$ dan $\beta_{ii} > \sum_{i \ne j} \beta_{ij}$ dalam matriks B, terlihat bahwa matriks B merupakan matriks stokastik kolom. Berdasarkan Teorema 3.1, matriks B adalah matriks yang memiliki invers. Karena matriks B adalah matriks yang memiliki invers, maka:

$$B\,\alpha = \bar{0}$$

$$\alpha = B^{-1}\bar{0}$$

$$\alpha = \bar{0}$$

Sehingga $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, dan terbukti bahwa $\{b_1, \dots, b_n\}$ bebas linier di $\mathcal{A}$. Karena $\{b_1, \dots, b_n\}$ bebas linier di $\mathcal{A}$, maka $\{b_1, \dots, b_n\}$ juga merupakan basis untuk $\mathcal{A}$.

Teorema 3.3

Jika $\mathcal{A}$ aljabar dengan realisasi genetik yang memiliki basis $\{a_1, \dots, a_n\}$ dimana $a_i a_j = \frac{1}{2}(a_i + a_j)$ untuk $i, j = 1, \dots, n$, dan $\{b_1, \dots, b_n\}$ dengan $b_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} = 1$, maka $b_i b_j = \frac{1}{2}(b_i + b_j)$ untuk $i, j = 1, \dots, n$.

Bukti:

Misalkan $b_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} a_k$ dan $b_j = \sum_{l=1}^{n} \beta_{li} a_l$

$$b_i b_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ki} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \beta_{li} a_l\right)$$
$$b_i b_j = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{ki} a_k \, \beta_{li} a_l$$
$$b_i b_j = \sum_{k,l=1}^{n} \beta_{ki} \, \beta_{li} (a_k a_l)$$
$$b_i b_j = \sum_{k,l} \beta_{ki} \, \beta_{li} \, \frac{1}{2}(a_k + a_l)$$
$$b_i b_j = \frac{1}{2}\sum_{k} \beta_{ki} a_k \left(\sum_{l} \beta_{li}\right) + \frac{1}{2}\sum_{l} \beta_{li} a_l \left(\sum_{k} \beta_{ki}\right)$$
$$b_i b_j = \frac{1}{2}\sum_{k} \beta_{ki} a_k \cdot 1 + \frac{1}{2}\sum_{l} \beta_{li} a_l \cdot 1$$
$$b_i b_j = \frac{1}{2}\sum_{k} \beta_{ki} a_k + \frac{1}{2}\sum_{l} \beta_{li} a_l$$
$$b_i b_j = \frac{1}{2} b_i + \frac{1}{2} b_j$$
$$b_i b_j = \frac{1}{2}(b_i + b_j) \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Aljabar Barik

Aljabar $\mathcal{A}$ atas lapangan $\mathbb{R}$ disebut aljabar barik jika memuat homomorfisma non-trivial $\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Homomorfisma ω ini kemudian disebut sebagai fungsi bobot (fungsi barik).

Teorema 3.4

Jika $\mathcal{A}$ aljabar berdimensi-n dengan realisasi genetik, maka $\mathcal{A}$ merupakan aljabar barik.

Bukti:

Karena $\mathcal{A}$ aljabar berdimensi-n dengan realisasi genetik, $\mathcal{A}$ memuat pemisah gamet γ_{ijk} dengan $a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} a_k$, $i, j = 1, \dots, n$ dengan $\{a_1, \dots, a_n\}$ basis untuk $\mathcal{A}$ dan $0 \le \gamma_{ijk} \le 1$, serta $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$.

Didefinisikan $\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dengan $\omega(a_i) = 1$ untuk $i = 1, \dots, n$.

Jika $x \in \mathcal{A}$, $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ maka $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega(a_i)$.

Sehingga $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ merupakan homomorfisma.

Misal $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ dan $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_j$, maka:

(i). Akan dibuktikan $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$.
Terbukti bahwa $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$.

(ii). Akan dibuktikan $\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y)$.
Terbukti bahwa $\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y)$.

(iii). Akan dibuktikan $\omega(\alpha x) = \alpha . \omega(x), \alpha \in \mathbb{R}$.
Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ dan $\omega(\alpha x) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega(a_i)$, terbukti bahwa $\omega(\alpha x) = \alpha \cdot \omega(x)$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ merupakan homomorfisma dan $\mathcal{A}$ merupakan aljabar barik.

Teorema 3.5

Misalkan $\mathcal{A}$ merupakan aljabar barik dengan fungsi bobot ω. Jika $N = Ker\,\omega = \{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) = 0'\}$ nilpoten (semua elemen N merupakan nilpoten), maka ω tunggal.

Bukti:

Andaikan fungsi bobot pada $\mathcal{A}$ tidak tunggal.

Misalkan ada φ yang juga merupakan fungsi bobot pada $\mathcal{A}$.

φ merupakan hohomorfisma non-trivial.

Karena diketahui bahwa setiap elemen pada N merupakan nilpotent, maka:

$\forall x \in N, \exists\ suatu\ bilangan\ bulat\ r, \ni x^r = 0$.

Sehingga, $\varphi(x^r) = \varphi(0) = 0'$.

Karena $\varphi: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, maka untuk $x \in \mathcal{A}, \varphi(x) \in \mathbb{R}$ sehingga $\varphi(x) = 0'$.

Ambil sebarang $y \in \mathcal{A}/N$, maka $\omega(y) \neq 0'$, karena jika $y \in \mathcal{A}$ atau $y \in N$, maka $\omega(y) = 0'$.

Misalkan terdapat $\frac{y^2}{\omega(y)} - y \in \mathcal{A}$, sedemikian sehingga $\omega\left(\frac{y^2}{\omega(y)} - y\right) = 0'$, maka $\frac{y^2}{\omega(y)} - y \in N$.

Karena $N = Ker\,\omega = \{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) = 0'\}$ nilpoten, maka:

$$\varphi\left(\frac{y^2}{\omega(y)} - y\right) = 0'$$
$$\varphi\left(\frac{y^2}{\omega(y)}\right) - \varphi(y) = 0'$$
$$\frac{\varphi(y)\varphi(y)}{\omega(y)} - \varphi(y) = 0'$$
$$\varphi(y)\left(\frac{\varphi(y)}{\omega(y)} - 1\right) = 0'$$

Sehingga, $\varphi(y) = 0'$ atau $\varphi(y) = \omega(y)$.

Jika $\varphi(y) = 0'$ hal ini kontradiksi dengan pengandaian bahwa φ merupakan homomorfisma non-trivial. Sehingga $\varphi(y) = \omega(y)\ \ \forall y \in \mathcal{A}/N$ dan $\varphi(x) = 0', \forall x \in N$.

Maka terbukti bahwa $\varphi = \omega$ dan fungsi bobot pada aljabar barik adalah tunggal.

Idempoten

Sebuah elemen tak nol e pada aljabar dengan $e^2 = e$ disebut sebagai idempoten. Jika suatu populasi P memenuhi $P^2 = P$ hal itu berarti populasi P^2 memiliki gen yang sama dengan populasi P. Misalkan $\mathcal{A}$ merupakan aljabar barik dengan fungsi bobot ω. Jika $\mathcal{A}$ memuat elemen idempoten e, maka $\omega(e) = \omega(e^2) = \omega(e)\omega(e)$ dengan $\omega(e) = 0$ atau $\omega(e) = 1$.

Teorema 3.6

Misalkan $\mathcal{A}$ aljabar barik dengan fungsi bobot ω dan $N = Ker\,\omega = \{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) = 0\}$. Andaikan $\mathcal{A}$ memuat elemen idempoten e dengan $\omega(e) = 1$. Maka, $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus N$, dimana $\mathbb{R}e = \{ae \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Bukti:

$\mathcal{A}$ aljabar barik dengan fungsi bobot ω.

$N = Ker\,\omega = \{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) = 0\}$, N ideal dari $\mathcal{A}$, maka bedasarkan Teorema Homomorfisma Pertama, $\mathcal{A}/N \cong \mathbb{R}$.

$\mathcal{A}$ memuat elemen idempoten e dengan $\omega(e) = 1$, sehingga $\mathbb{R}e \cap N = 0$.

Ambil sebarang elemen $\mathcal{A}$, misal x. Maka, $x - \omega(x)e \in N$ karena $\omega(e) = 1$.
Dan $x = \omega(x)e + (x - \omega(x)e)$.
Sehingga terbukti bahwa $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus N$.

Hukum Mendel dalam Pewarisan Genetik

Hukum Mendel merupakan hukum pemisahan alel dan penggabungan secara bebas yang disertai terbentuknya gamet. Hukum Mendel ini menyatakan bahwa pada waktu pembentukan gamet, terjadi pemisahan alel- alel secara bebas, dari zygot menjadi gamet. Sebagai contoh, saat genotip (penyusun genetik) Aa membentuk gamet dengan membawa alel A dan alel a. Pemisahan alel yang terjadi pada zygot dan membentuk gamet dapat dilihat pada Tabel 1 sedangkan perkalian aljabar gamet dari hukum Mendel dapat dilihat pada Tabel 2.

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	aa

Tabel 1. Pemisahan alel, dari zygot menjadi gamet.

	A	a
A	A	$\frac{1}{2}(A + a)$
a	$\frac{1}{2}(a + A)$	a

Tabel 2. Tabel perkalian aljabar gamet hukum Mendel.

Perkalian pada Tabel 2. diatas merupakan aturan aljabar gamet pada hukum Mendel dan dapat di definisikan sebagai aljabar atas $\mathbb{R}$ dengan basis $\{A,a\}$.

Pada manusia saat seorang laki- laki memproduksi sperma dan seorang perempuan memproduksi sel telur, maka tiap-tiap sperma atau sel telur yang ada hanya membawa satu set alel untuk diwariskan. Sebagai contoh pada hukum Mendel, untuk dua alel A dan a, zygot yang dihasilkan memiliki genotip dengan tiga kemungkinan, yaitu zygot dengan genotip AA, Aa atau aa. Pada zygot dengan genotip Aa atau aA, proses meiosis menyebabkan alel A dan a diwariskan dengan kemungkinan yang sama besar yaitu $\frac{1}{2}A$ dan $\frac{1}{2}a$ atau $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a$. Sehingga, jika gamet dengan genotip Aa menyatu dengan gamet yang memiliki genotip aA (dimana Aa = aA) maka menghasilkan zygot dengan kemungkinan alel yang diwariskan adalah:

$$\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a\right) \times \left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$$

Tabel 3 berikut ini merupakan aturan perkalian aljabar zygot pada hukum Mendel dan didefinisikan sebagai aljabar atas $\mathbb{R}$ dengan basis $\{AA, Aa, aa\}$.

	AA	Aa	aa
AA	AA	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	Aa
Aa	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$	$\frac{1}{2}(AA + aa)$
aa	Aa	$\frac{1}{2}(Aa + aa)$	aa

Tabel 3. Tabel perkalian aljabar zygot pada hukum Mendel

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa suatu aljabar didefinisikan sebagai aljabar dengan realisasi genetika jika memuat suatu pemisah gamet γ_{ijk} dengan $a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, a_k$ untuk $i, j = 1, \ldots, n$ dan γ_{ijk} memenuhi $\gamma_{ijk} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1$, serta $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1$. Jika $\mathcal{A}$ merupakan aljabar dengan realisasi genetika, $\mathcal{A}$ memiliki basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ serta $b_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk}\, a_k$ $i, j = 1, \ldots, n$, maka $\{b_1, \ldots, b_n\}$ juga merupakan basis pada $\mathcal{A}$ dan $b_i b_j = \frac{1}{2}(b_i + b_j)$.

Aljabar dengan realisasi genetika disebut aljabar barik jika memuat homomorfisma non-trivial $\omega: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ yang selanjutnya ω disebut sebagai fungsi bobot. Dan suatu aljabar barik memiliki fungsi bobot tunggal.

Sebuah elemen tak nol e pada aljabar dengan $e^2 = e$ disebut sebagai idempoten. Jika $\mathcal{A}$ aljabar barik dengan fungsi bobot ω dan memuat elemen idempoten e dengan $\omega(e) = 1$, $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus N$ dengan $N = Ker\ \omega = \{x \in \mathcal{A} \mid \omega(x) = 0\}$.

Aljabar atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{A, a\}$ ditunjukkan oleh aljabar gamet pada hukum mendel yang ditunjukkan oleh tabel berikut:

	A	a
A	A	$\frac{1}{2}(A + a)$
a	$\frac{1}{2}(a + A)$	a

Sedangkan aljabar atas lapangan $\mathbb{R}$ dengan basis $\{a_1, a_2, a_3\}$ dimana $a_1 = AA$, $a_2 = Aa$, $a_3 = aa$ ditunjukkan oleh tabel berikut yang disebut tabel perkalian aljabar zygot pada hukum mendel, yaitu:

	AA	Aa	aa
AA	AA	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	Aa
Aa	$\frac{1}{2}(AA + Aa)$	$\frac{1}{4}AA + \frac{1}{2}Aa + \frac{1}{4}aa$	$\frac{1}{2}(AA + aa)$
aa	Aa	$\frac{1}{2}(Aa + aa)$	aa

Saran

Sebaiknya dilakukan studi literatur terbaru dan lebih banyak lagi bagi yang tertarik pada bidang aljabar genetik ini. Selain itu, diusahakan untuk mengkajinya dengan penerapan menggunakan program komputasi.

DAFTAR PUSTAKA

Mary lynn reed. (1997), *Algebraic structure of genetic inheritance*, Bulletin (new series) of the American mathematical society.,(2), 34:107-130.

I.M.H. Etherington. *Genetic algebras*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 59:242-258, 1939.

Aryulina, Diah., Muslim, Choirul., Manaf, Syalfina., Winarni, Endang Widi.,. 2004. *Biologi 3*. Jakarta: Erlangga.

Gallian, Joseph. 1990. *Contemporary Abstract Algebra*. Toronto: D. C. Heath and Company.

Leon, S.J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta:Erlangga.

Horn, R.A., Johnson, C.A. 1985. *Matrix Analysis*. United States of America.

Anton, Howard., Chris Rorres. 2009. *Elementary Linier Algebra with Application*.