

## PERANAN REPRESENTASI DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA DI SEKOLAH

Oleh

**Darta**

Program Pendidikan Matematika Universitas Pasundan Bandung

### Abstrak

Representasi matematis menjadi perhatian khusus sebagai standar proses setelah ditambahkan oleh NCTM dalam *Principles and Standards for School Mathematics* tahun 2000. Goldin (2002) menuliskan dua jenis sistem representasi, yaitu sistem representasi internal dan eksternal. Representasi meliputi komponen konkret, verbal, numerik, grafik, kontekstual, gambar, atau simbol yang melukiskan konsep matematika. Representasi visual meliputi organisasi diagram atau tabel, model konkret, grafik, gambaran dinamis atau bergerak, dan gambaran kata. Representasi memegang peranan penting dalam pembelajaran matematika (Kalathil dan Sherin 2000, dalam Kartini, 2009); Kilpatrick, Swafford, & Findell, (2001, dalam Salkind, 2007); Lowrie (2001); Pape dan Tchosanov (2001); Garderen (2003); Gagatsis dan Elia (2004), Verhoef dan Broekman (2005); Tall (2008); Patsiomitou (2008); Hwang (2007; 2009); Babazit dan Aksoy (2011); Guler dan Ciltas (2011). Guru dapat menguji representasi internal tentang konsep dan miskonsepsi siswa dari ide matematika yang sudah diajarkan, melalui representasi eksternal siswa. Semua jenis representasi harus digunakan secara paralel untuk memfasilitasi pembelajaran matematika. Tema yang selalu hangat adalah bahwa pembelajaran matematika harus membetuk koneksi antara berbagai jenis representasi: konkret, gambar dan simbolik; verbal dan visual; dan internal dan eksternal.

Kata kunci: *representasi matematis, visual, pembelajaran, matematika.*

### Pendahuluan

Representasi matematis sejak ditambahkan oleh *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dalam *Principles and Standards for School Mathematics* tahun 2000, sebagai salah satu standar proses dalam pembelajaran matematika semakin

mendapat perhatian khusus. NCTM (2000) menyatakan, "*The ways in which mathematical ideas are represented is fundamental to how people can understand and use those ideas*" (NCTM, 2000, h. 67). Representasi merupakan cara menyajikan suatu ide matematika

agar konsep matematika dapat dipahami oleh siswa. Penyajian dan cara guru merepresentasikan matematika dalam pembelajaran dapat mempengaruhi pemahaman dan representasi matematis siswa (Salkind, 2007). Setiap siswa memiliki cara yang berbeda untuk mengkonstruksi pemahaman matematis mereka. Representasi matematis menurut NCTM (2000) diajarkan agar memungkinkan siswa untuk: 1) mengkreasi dan menggunakan representasi untuk mengorganisasi, mencatat, dan mengkomunikasikan ide matematika; 2) menyeleksi, mengaplikasikan, dan menafsirkan di antara representasi matematis untuk menyelesaikan masalah, dan 3) menggunakan representasi untuk model dan menginterpretasikan fisika, sosial, dan fenomena matematika. Mengembangkan kognitif representasi adalah tema utama dari tiga teori klasik dalam bagaimana siswa belajar suatu konsep baru. Teori klasik tersebut adalah teori Piaget, Bruner, dan Vygotsky (Tomic dan Kingma, 1996).

Oleh karena itu, memahami tentang apa, mengapa dan bagaimana representasi matematis itu peranannya dalam pembelajaran matematika, sangat diperlukan baik oleh siswa ataupun oleh guru.

Berdasarkan paparan di atas, maka tujuan penulisan makalah ini adalah untuk menjawab pertanyaan sebagai berikut:

1. Apakah representasi matematis itu?
2. Bagaimana representasi matematis dapat mempengaruhi berpikir dan belajar matematika?

3. Bagaimana sebaiknya guru memahami representasi?
4. Representasi apa yang harus digunakan guru dalam pembelajaran?
5. Bagaimana sebaiknya guru menggunakan representasi dalam pembelajaran matematika?

### Jenis-jenis Representasi

Secara umum representasi adalah suatu konfigurasi yang dapat menyatakan sesuatu ke dalam bentuk yang lain (Goldin, 2002). Goldin menuliskan dua jenis sistem representasi, yaitu sistem representasi internal dan eksternal. Sistem representasi eksternal yang meliputi representasi konvensional yang biasa disebut simbol, dan representasi internal yang dikreasi di dalam pikiran orang dan digunakan untuk memaknai matematika. Sistem numerasi, persamaan matematika, ekspresi aljabar, grafik, gambar geometri, dan garis bilangan adalah contoh representasi eksternal. Representasi internal meliputi sistem notasi personal, bahasa asli, bayangan visual, dan strategi pemecahan masalah.

Bruner (dalam Salkin, 2007) menemukan tiga cara yang berbeda seseorang merepresentasikan sesuatu, yaitu: (a) melalui kegiatan (*action*), (b) melalui gambaran visual, dan (c) melalui kata-kata atau bahasa. Dia menyebutkan ketiga jenis tersebut berturut-turut sebagai enaktif, ikonik, dan simbolik (Ruseffendi, 1991). Clark dan Paivio (dalam Salkin, 2007) membedakannya menjadi dua jenis, yaitu verbal dan visual.

Lesh, Landau, dan Hamilton (dalam Salkind, 2007) menemukan 5 jenis representasi matematika, yaitu: (a) pengalaman nyata, (b) manipulasi model, (c) gambar atau diagram, (d) menyatakan dengan kata-kata, (e) menuliskan dengan simbol. Kelima jenis representasi tersebut merupakan perluasan dari representasi yang dikemukakan Bruner. Kilpatrick, dkk (dalam Salkin, 2007) mengatakan bahwa matematika memerlukan representasi. Faktanya karena abstrak merupakan sifat matematika, orang akan memiliki akses terhadap matematika hanya melalui representasi dari ide matematika tersebut.

Untuk memahami kelima klasifikasi tersebut, perhatikan ilustrasi berikut. Seorang guru mendiskusikan tentang lingkaran di kelasnya. Mungkin guru tersebut memiliki siswa yang: 1) menggunakan permukaan gelas plastik sebagai bentuk konkret dari lingkaran, 2) menggunakan kata-kata, lingkaran tidak memiliki sisi yang lurus, 3) menggunakan notasi  $O$  atau  $C$ , dengan  $C$  titik pusat lingkaran; 4) menggambar lingkaran di buku catatannya, dan 5) menuliskan persamaan lingkaran. Mereka menuju kepada abstraksi dan kemampuan menghubungkan objek lingkaran dengan bentuk fisik yang sudah dikenal.

Secara esensial, menurut Tripathi (2008) representasi matematis adalah konstruksi mental atau fisik yang menjelaskan beberapa aspek dari struktur konsep dan hubungan antara konsep dan ide. Representasi meliputi

komponen konkret, verbal, numerik, grafik, kontekstual, gambar, atau simbol yang melukiskan konsep matematika. Dengan kata lain, kita harus memikirkan representasi sebagai suatu bentuk dari suatu ide yang memungkinkan kita menginterpretasikan, mengkomunikasikan, dan mendiskusikan gagasan ke dalam bentuk lain.

Sebagai ilustrasi bagaimana seorang guru mendiskusikan konsep garis lurus kepada siswa sebagai berikut. Guru mungkin menjelaskan dengan kata-kata bahwa garis lurus adalah himpunan titik-titik yang berderet diperpanjang tanpa batas pada kedua sisi (sebagai representasi verbal), menggambar garis lurus di papan tulis (sebagai representasi grafik atau gambar), meminta siswa berderet saling menyamping (representasi kongkrit), atau menggambar persamaan (sebagai representasi aljabar). Masing-masing representasi tersebut mengkomunikasikan garis, sementara mengabaikan representasi lainnya.

Terkait dengan 5 jenis representasi yang dikemukakan oleh Lesh, Landau, dan Hamilton di atas, Tripathi (2008) mengemukakan bahwa cakupan semikongkrit atau gambar diperluas dan diklasifikasi ulang sebagai representasi visual. Selanjutnya, Tripathi (2008) mengatakan bahwa representasi visual meliputi organisasi diagram atau tabel, model konkret, grafik, metapor, gambaran dinamis atau bergerak, dan gambaran kata

(deskripsi dalam kata-kata dari apa yang dicobakan untuk diselesaikan).

Sebagai ilustrasi perhatikan permasalahan berikut (Tripathi, 2008). Seorang petani memiliki 19 binatang di kebunnya, yang terdiri dari beberapa ayam dan sapi. Dia juga mengetahui bahwa seluruh kaki dari binatang tersebut adalah 62. Berapa banyak masing-masing jenis binatang yang dimiliki petani tersebut? Ketika menyelesaikan persoalan tersebut dengan hanya menggunakan aljabar, maka kita akan menggunakan dua persamaan linear:  $x + y = 19$  dan  $2x + 4y = 62$ , lalu diselesaikan. Tetapi jika menggunakan representasi visual, maka kemungkinannya: 1) menyelesaikan dengan tabel, yaitu mendata banyaknya binatang, masing-masing kaki dari binatang tersebut dan menjumlahkan total kakinya, ketika menemukan jumlah 62 kaki maka akan diperoleh 7 ayam dan 12 sapi; 2) membuat model binatang dengan memberikan masing-masing 2 kaki, lalu menambahkan 2 kaki lagi sehingga ada beberapa binatang yang berkaki 4, demikian seterusnya sampai mencapai 62 kaki, maka akan diperoleh 7 ayam dan 12 sapi; 3) menggambar grafik dari persamaan linear  $x + y = 19$  dan  $2x + 4y = 62$ , lalu menemukan titik potong kedua grafik tersebut, maka koordinat titik potongnya adalah (7, 12). Jadi ada 7 ekor ayam dan 12 ekor sapi.

Gagatsis dan Elia (dalam Kartini, 2009) menyatakan bahwa untuk siswa kelas 1, 2, dan 3 Sekolah Dasar di Cyprus, representasi dapat digolongkan

menjadi empat jenis, yaitu: representasi verbal, gambar *informational*, gambar dekoratif, dan garis bilangan. Perbedaan antara gambar *informational* dan gambar dekoratif adalah pada gambar dekoratif, gambar yang diberikan dalam soal tidak menyediakan setiap informasi pada siswa untuk menemukan solusi masalah, tetapi hanya sebagai penunjang atau tidak ada hubungan langsung kepada konteks masalah. Gambar *informational* menyediakan informasi penting untuk penyelesaian masalah atau masalah itu didasarkan pada gambar.

Dari beberapa klasifikasi representasi matematis tersebut dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa pada intinya representasi dapat diklasifikasikan menjadi: 1) representasi visual (gambar, diagram grafik, atau tabel); 2) representasi simbolik (pernyataan matematik/notasi matematik, numerik/symbol aljabar); dan 3) representasi verbal (teks tertulis/kata-kata). Penggunaan semua jenis representasi tersebut dapat dibuat secara lengkap dan terpadu dalam pengujian suatu masalah yang sama atau dengan kata lain representasi matematik dapat dibuat secara beragam (multipel representasi). Sedangkan kemampuan representasi matematis adalah kemampuan mengungkapkan ide-ide matematika (masalah, pernyataan, solusi, definisi, dan lain-lain) kedalam salah satu bentuk: 1) gambar, diagram grafik, atau tabel; 2) notasi matematik, numerik/symbol aljabar; dan 3) teks

tertulis/kata-kata, sebagai interpretasi dari pikirannya.

### **Peranan Representasi dalam Pembelajaran Matematika**

Penggunaan berbagai cara merepresentasikan matematika akan memperkaya pengalaman belajar siswa, karena siswa dibawa pada berbagai situasi yang mungkin cocok dengan gaya belajarnya. Hal ini dinyatakan oleh McCoy (dalam Kartini, 2009) bahwa dalam pembelajaran matematika di kelas, representasi tidak harus terikat pada perubahan satu bentuk ke bentuk lainnya dalam satu cara, tetapi bisa dua cara atau bahkan dalam multi cara. Misalnya disajikan representasi berupa grafik, guru dapat meminta siswa membuat representasi lainnya seperti menyajikannya dalam tabel, persamaan/ model matematika atau menuliskannya dengan kata-kata. Jadi guru dapat memberikan persoalan dalam bentuk verbal, lalu meminta siswa untuk membuat representasi yang lain atau juga bisa sebaliknya, memberikan berbagai representasi lalu meminta siswa membuat secara verbalnya.

Pentingnya representasi dalam pembelajaran matematika telah banyak diteliti seperti penelitian: Kalathil dan Sherin (2000, dalam Kartini, 2009); Kilpatrick, Swafford, & Findell, (2001, dalam Salkin, 2007); Lowrie (2001); Reeuwijk (2001); Pape dan Tchosanov (2001); Garderen (2003); Gagatsis dan Elia (2004), Verhoef dan Broekman (2005); Tall (2008); Patsiomitou (2008); Hwang (2009); Babazit dan

Aksoy (2011); Guler dan Ciltas (2011); dan lain-lain.

Kathil dan Sherin (2000, dalam Kartini, 2009) dalam studinya melaporkan bahwa ada tiga fungsi representasi eksternal yang dihasilkan siswa dalam belajar matematika, yaitu: 1) representasi digunakan untuk memberikan informasi kepada guru mengenai bagaimana siswa berpikir mengenai suatu konteks atau ide matematika; 2) representasi digunakan untuk memberikan informasi tentang pola dan kecenderungan (*trend*) diantara siswa; dan 3) representasi digunakan oleh guru dan siswa sebagai alat bantu dalam proses pembelajaran.

Kilpatrick, Swafford, & Findell, (dalam Salkin, 2007) mengemukakan bahwa representasi matematis berguna sebagai alat untuk mendukung pemahaman matematis, memungkinkan komunikasi matematis, dan memudahkan untuk berpikir matematis. Selanjutnya Lowrie (2001) mengemukakan penelitiannya tentang pengaruh representasi visual dalam *problem solving* dan numerasi, terhadap siswa kelas VI SD di Australia yang menunjukkan bahwa siswa yang efektif dalam menyelesaikan masalah lebih suka menggunakan visual daripada non-visual. Lowrie (2001) menyarankan guru hendaknya memberikan kesempatan kepada siswa untuk membangun kemampuan representasi visual ketika dihadapkan pada pemecahan masalah, khususnya ketika tugas tersebut baru dan kompleks.

Penelitian Pape dan Tchosanov (2001) tentang peranan representasi dalam mengembangkan pemahaman matematis menyimpulkan empat hal: 1) siswa harus diberikan kesempatan untuk berlatih representasi dan menginternalisasikan ide matematika melalui aktivitas sosial meliputi representasi eksternal yang bervariasi; 2) representasi merupakan aktivitas sosial yang inheren. Siswa harus memahami baik proses dan hasil representasi melalui aktivitas sosial; dan 3) supaya siswa kompeten dalam matematika, maka pembelajaran harus menggunakan berbagai teknik (misalnya dengan analitis dan geometris), dan 4) representasi harus diajarkan sebagai alat untuk berpikir, menjelaskan, dan menjustifikasi. Jadi, guru dan siswa harus mengembangkan norma-norma kelas yang memfasilitasi terjadinya penjelasan dan justifikasi serta menggunakan representasi untuk memberikan layanan yang mendukung argumen-argumen. Walaupun ini merupakan tantangan, tetapi ide ini akan memfasilitasi dan mengubah praktik pembelajaran yang mengarah kepada pemahaman matematika yang bermakna.

Reeuwijk (2001) meneliti tentang progresif formalisasi terhadap siswa yang berusia sekitar 11 tahun, usia transisi antara berpikir informal dan formal. Kesimpulan penelitian tersebut, bahwa walaupun dalam penelitiannya tidak begitu jelas bagaimana siswa menggunakan berbagai strategi strategi dalam pembelajaran matematika tentang persamaan, tetapi jelas bahwa

pelan-pelan terjadi proses dimulainya metode pemecahan masalah dengan cara informal melalui strategi preformal menuju persamaan formal, membantu siswa untuk mengembangkan pemahaman secara konseptual tentang persamaan. Formalisasi secara bertahap yang dilakukan guru dan materi pembelajaran yang membimbing, berkontribusi terhadap pemahaman matematika siswa. Pengembangan kurikulum ke depan harus dimulai sejak dini dengan aktivitas aljabar-secara intuitif, konkret, dan informal-untuk membantu meletakkan fondasi memahami lebih lanjut tentang aljabar yang lebih abstrak di tahun-tahun berikutnya. Jadi, kita harus mendorong memulai sejak dini dengan aktivitas aljabar yang masuk akal.

Garderen (2003) menginvestigasi siswa kelas enam Sekolah Dasar dan Menengah di Florida Utara, dalam menggunakan bayangan visual dalam pemecahan masalah. Siswa dikelompokkan menjadi tiga kelompok: kurang mampu, rata-rata, dan cerdas. Hasil penelitiannya menunjukkan bahwa siswa yang cerdas menggunakan lebih banyak representasi visual spatial dibandingkan dengan kedua kelompok. Selanjutnya terdapat korelasi positif antara kemampuan pemecahan masalah dengan representasi visual-spatial. Siswa yang sukses dalam penyelesaian masalah lebih banyak menggunakan representasi yang berupa skema, sedangkan yang menggunakan lebih banyak gambar kurang sukses dalam menyelesaikan

masalah. Hal ini dapat dipahami, karena penggunaan skema memerlukan kemampuan kognitif yang lebih tinggi yaitu sudah menuju abstrak, maka siswa yang mampu menyelesaikan masalah dimungkinkan jika mereka sudah berpikir lebih abstrak.

Penelitian Gagatsis dan Elia (2004) terhadap 1447 siswa kelas 1, 2, dan 3 Sekolah Dasar di Cyprus melaporkan bahwa empat representasi, yaitu representasi verbal, gambar informasional, gambar dekoratif, dan garis bilangan memberikan pengaruh yang signifikan pada kemampuan pemecahan masalah matematika siswa. Gagatsis & Elia (2004) melaporkan juga bahwa model pembelajaran yang menggunakan keempat representasi dan faktor kemampuan umum siswa dalam memecahkan masalah lebih baik dari pada model belajar yang hanya menggunakan salah satu kemampuan representasi dalam memecahkan masalah. Hal ini senada dengan penelitian Pape dan Tchosanov (2001), yang menyarankan mengembangkan norma-norma kelas yang memfasilitasi terjadinya penjelasan dan justifikasi dan menggunakan representasi untuk memberikan layanan yang mendukung argumen-argumen.

Tall (2008) melaporkan tentang transisi berpikir formal antara matematika sekolah dengan pembuktian pada matematika murni di Universitas. Matematika sekolah dianggap sebagai kombinasi representasi visual, menyangkut geometri dan grafik, digabung dengan perhitungan

simbolik dan manipulasinya. Matematika murni di Universitas berubah menjadi pola berpikir formal dengan sistem aksiomatik dan pembuktian matematis. Transisi berpikir diformulasikan ke dalam suatu pola pikir 'tiga dunia matematika': dunia 'perwujudan konsep', yang berdasarkan persepsi, aksi dan eksperimen berpikir; dunia 'simbolik proseptual', perhitungan dan proses manipulasi aljabar secara ringkas; dan dunia 'formal aksiomatik', dari seperangkat definisi konsep secara teoritis dan pembuktian matematis, yang mungkin digabungkan sehingga membentuk berbagai cara berpikir matematis. Hal ini membuktikan adanya pemikiran matematika sebagai suatu gabungan struktur pengetahuan yang berbeda, misalnya bilangan real dinyatakan dalam garis bilangan yang padat, simbol bilangan desimal dan teori formal membentuk lapangan (*field*) yang urutannya lengkap.

Selanjutnya Tall (2008) menyatakan bahwa konstruksi teori diperkenalkan untuk menjelaskan bagaimana himpunan struktur genetik terbentuk sebelum berpikir matematis, dan bagaimana pengalaman-pengalaman yang dimiliki secara individual dipadukan sebelum mempengaruhi pertumbuhan personalnya. Konsep-konsep ini digunakan untuk menentukan bagaimana para siswa mengalami transisi dari sekolah sebelumnya ke matematika Universitas sebagai perwujudan dan simbolisasi yang digabung dengan

formalisasi. Pada level yang lebih tinggi, struktur teorema dibuktikan dengan aksioma saling berkaitan yang lebih rumit membentuk perwujudan dan simbolisasi, karena ada hubungan erat antara ketiga dunia matematika di atas.

Patsiomitou (2008) meneliti tentang representasi visual aktif dan model berpikir geometri van Hiele, terhadap siswa sekolah menengah di Mesir dengan menggunakan Geometer's Sketchpad. Penelitian ini menjelaskan tentang korelasi antara lima fase proses berpikir geometri yang dikemukakan oleh van Hiele dan pengembangan teori pada *Linking Visual Active Representation (LVAR)*. Penelitian tersebut menyimpulkan bahwa transformasi melalui LVAR mengarahkan siswa kepada struktur transformasi mental yang relatif terhadap pengembangan level berpikir yang dikemukakan van Hiele. Sifat-sifat matematis dapat dijelaskan melalui bentuk-bentuk transformasi yang dapat direpresentasikan melalui berbagai jenis aktivitas yang dimanipulasi. Dalam kasus proses pemodelan dari suatu masalah dalam geometri dinamis, proses tersebut dapat diperoleh melalui teknik interaksi pada software selama proses pemecahan masalah berlangsung. Proses pembuktian dibangun dengan menggunakan formulasi verbal dan hubungan geometris yang cocok dengan konsep dalam proses pembuktian. Siswa menggunakan formulasi verbal untuk mengubah pemaknaan ide yang mereka

transformasikan dalam objek mental mereka ke dalam bahasa pemetaan, yang berkaitan dengan transformasi yang tampak di halaman *software*.

Hwang (2007) meneliti tentang pengaruh kemampuan multipel representasi dan kreativitas terhadap pemecahan masalah matematika dengan menggunakan sistem multimedia whiteboard. Dari studi Hwang, diperoleh hasil bahwa skor siswa yang menggunakan representasi rumus lebih baik dari siswa yang menggunakan representasi verbal dan gambar (grafik atau simbol). Kemampuan elaborasi (kemampuan memecahkan masalah menggunakan berbagai ilustrasi dan penjelasan) adalah faktor paling penting yang mempengaruhi keterampilan multi representasi dalam pemecahan masalah matematis. Selanjutnya penelitian Hwang (2009) terhadap siswa kelas 6 Sekolah Dasar selama 1,5 bulan yang pembelajaran geometrinya menggunakan *Virtuil Manipulative dan Whiteboard (VMW)* dengan tiga Dimensi (3D) melaporkan bahwa sistem pembelajaran yang diusulkan sangat berguna, dan membantu siswa memahami proses pemecahan masalah dalam geometri, seperti menggunakan berbagai strategi pemecahan, juga mengungkap miskonsepsi geometris. Kedua penelitian Hwang tersebut sejalan dalam membantu menyelesaikan permasalahan matematika khususnya dalam geometri.

Selanjutnya Babazit dan Aksoy (2011) melaporkan tentang keterkaitan antara representasi dan ide matematis dengan GeoGebra. Babazit dan Aksoy dalam artikelnya menyatakan bahwa representasi memberikan fasilitasi ide dan bantuan untuk pembelajar dalam pikiran mereka. Suatu pemahaman yang bermakna tentang konsep matematika dapat diperoleh ketika variasi representasi dikembangkan dan difungsikannya hubungan antar mereka. Pembelajaran tradisional didominasi oleh kapur dan papan tulis yang mengakibatkan kurang produktif membantu siswa menghubungkan antar representasi. Di lain pihak, ketersediaan pembelajaran yang menggunakan teknologi memungkinkan guru untuk memperjelas interelasi antara representasi konsep matematika sehingga para siswa dapat mengembangkan lebih banyak memahami ide matematika. Penelitian tersebut, memungkinkan guru dalam pembelajaran geometri menggunakan teknologi supaya dapat menyatakan konsep matematika dengan berbagai representasi.

Penelitian Guler dan Ciltas (2011) terhadap guru dan siswa SD menemukan bahwa terdapat hubungan yang positif antara banyaknya guru menggunakan representasi visual dengan pemecahan masalah siswa. Selain itu, paralel dengan kesimpulan di atas bahwa siswa yang gurunya lebih sering menggunakan representasi visual lebih sukses dalam pemecahan masalah dan mereka (guru) memiliki keyakinan yang positif tentang

penggunaan representasi visual dalam menyelesaikan masalah matematika verbal. Guru yang lebih suka menggunakan representasi visual dalam pemecahan masalah, kesuksesan siswa menyelesaikan pemecahan masalahnya meningkat. Karena representasi visual telah menyebabkan siswa bersikap positif, maka guru harus lebih banyak memberikan representasi visual kepada siswa SD. Tetapi representasi visual belum memberikan kesuksesan yang sangat tinggi, karena adanya fakta bahwa representasi visual bukan syarat cukup dalam pemecahan masalah, tetapi hanya syarat perlu. Diperlukan pengujian bagaimana seorang guru dapat menggunakan representasi visual secara efektif dalam pemecahan masalah dan kualifikasi pendidikan apakah untuk mengkreasi representasi yang berupa skema, serta harus ditemukan jenis representasi yang lebih disukai siswa.

Dari paparan teori dan beberapa hasil penelitian di atas, muncul pertanyaan jenis representasi manakah yang berguna untuk matematika sekolah? Bruner (dalam Ruseffendi, 1991) percaya bahwa perbedaan tahap perkembangan seseorang menentukan perbedaan sistem representasi. Anak-anak belajar melalui manipulasi dan aksi (*enactive representation*), anak yang lebih tua belajar melalui organisasi perseptual dan imagery (*iconic representation*), dan orang dewasa belajar dengan menggunakan bahasa

dan berpikir simbolik (*symbolic representation*). Ide tersebut menjadi tahapan pokok pembelajaran matematika di sekolah dengan pengetahuan guru bahwa siswa harus belajar mulai dari ekspresi konkret (*enactive*), dibawa ke representasi piktorial (*iconic*), dan terakhir menuju ke pemahaman abstrak (*symbolic*). Tetapi penelitian akhir-akhir ini, Clements (dalam Salkin, 2007) telah memberikan saran bahwa semua jenis representasi harus digunakan secara paralel untuk memfasilitasi pembelajaran matematika di kelas. Ketika siswa membuat hubungan antara representasi konkret, piktorial, dan simbol, hasil pembelajaran mereka lebih tinggi dan berkembang. Ide tersebut sejalan dengan pendapat Goldin (2002) yang harus mengkoneksikan antara representasi internal dan eksternal. Dengan cara seperti itu, guru dapat menguji konsep dan miskonsepsi siswa dari ide matematika yang sudah diajarkan.

## Penutup

Terdapat sejumlah penelitian mengenai jenis-jenis representasi dan penggunaannya. Banyak penelitian yang setuju bahwa representasi matematika berguna, walaupun tidak cukup, dalam pembelajaran matematika. Representasi matematika sebagai alat bantu untuk mengkomunikasikan gagasan matematika dan pemecahan masalah. Tema yang selalu hangat adalah bahwa pembelajaran matematika harus membetuk koneksi antara berbagai jenis representasi: konkret, gambar, dan simbolik; verbal dan

visual; dan internal dan eksternal. Representasi yang digunakan guru dan cara mana yang dipilih guru dalam pembelajaran matematika, merupakan faktor yang penting dalam pembelajaran. Pengetahuan guru tentang konsep matematika memberikan dampak terhadap kemampuannya untuk menggunakan representasi matematika secara efektif. Representasi sangat berperan dalam membantu peningkatan pemahaman siswa terhadap konsep matematika. Kemudian representasi juga dapat meningkatkan kemampuan komunikasi, dan pemecahan masalah matematis siswa. Secara umum representasi sangat berperan dalam peningkatan kompetensi matematika siswa. Selain itu representasi siswa dapat memberikan informasi kepada guru mengenai bagaimana siswa berpikir mengenai suatu konteks atau ide matematika, tentang pola dan kecenderungan siswa dalam memahami suatu konsep. Oleh karena itu guru perlu memformulasikan cara yang tepat untuk dapat menghadirkan representasi siswa dalam pembelajaran matematika, agar dapat meningkatkan hasil belajar siswa lebih meningkat lagi.

## Daftar Pustaka

- Bayazit, I. dan Askoy, Y. (2011). *Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra*. Tersedia: <http://www.ggijro.wordpress.com/2011/07/article-8.pdf>. (20 Mei 2013).

- Gagatsis, A. dan Elia, I. (2004). The Effect of Different Modes of Representation on Mathematical Problem Solving. Dalam *Proceeding of 28th Conference International Group for Psychology of Mathematics Education*. Vol 2, halaman 447-454.
- Garderen, van D. (2003). Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities. Dalam *Learning Disabilities Research and Practice*. Vol 18(4), halaman 246-254.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D.English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Guler, G. dan Ciltas, A. (2011). The Visual Representation Usage Level of Mathematics Teachers and Students in Solving Problems. Dalam *International Journal Humanities and Social Science*. Vol 1 No 11 [Special Isyu-Agustus 2011], halaman 145-154.
- Hwang, et al. (2007). *Multiple Representation Skills and Creativity Effects on Mathematical Problem Solving using a Multimedia Whiteboard System*. Educational Technology & Society, Vol 10 No 2, halaman. 191-212.
- Hwang, et.al. (2009). A Study of Multi-Representation of Geometry Problem Solving with Virtual Manipulatives and Whitboard System. Dalam *International Forum of Educational Tecnology and Society (IFETS)*. ISSN 1436-4522. Vol 12 No 3, halaman 229-147.
- Kartini (2009). "Peranan Representasi dalam Pembelajaran Matematika." Dalam *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY (5 Desember 2009). ISBN: 978-979-16353-3-2, halaman 361-371.
- Lowrie, T. (2001). The Influence of Visual Representation on Mathematical Problem Solving and Numeracy Performance. Dalam *24th Annual Conference*, Sydney, July 2001. Charles Sturt University. Email: tlowrie@csu.edu.au . Halaman 354-361.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Pape, S.J. dan Tchoshanov, M.A. (2001). The Role of Representation (s) in Developing Mathematical Understanding. Dalam *Theory into Practice*. Vol 40, No 2, Realzing Reform in Scholl Mathematics (Spring, 2001), halaman 118-127.

- Patsiomitou, S. (2008). *Linking Visual Active Representation and the van Hele model of Geometry Thinking*. Departemen of Primary Education, University of Ioannina, Mesir. Tersedia: [http://www.atcm.mathantech.org/EP2008/papers\\_full/2412008.14997.pdf](http://www.atcm.mathantech.org/EP2008/papers_full/2412008.14997.pdf). (Diakses 10 Mei 2013).
- Reuwijk, van M. (2001). *From informal to Formal, Progressive Formalization an Example on "Solving System Equations"*. Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands. Tersedia: <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4465.pdf>. (10 Mei 2013)
- Ruseffendi, E.T. (1991). *Pengantar kepada membantu guru mengembangkan kompetensinya dalam pengajaran matematika untuk meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Salkind, G.M. (2007). *Mathematical Representation*. EDCI 857 Preparation and Professional Development of Mathematics Teachers. George Mason University: Spring 2007.
- Tall, D.O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. Dalam *Mathematics Education Research Journal*. Email: [david.tall@warwicck.ac.uk](mailto:david.tall@warwicck.ac.uk). Vol 20 No 2, halaman 5-24.
- Tomic, W. dan Kingma, J. (1996). Three Theory of Cognitive Reperesentation and Criteria for Evaluating Training Effects. Dalam *Educational Practice and Theory*. Vol. 18, No. 1, halaman 15-35.
- Tripathi, P.N. (2008). Developing Mathematical Understanding through Multiple Representaions. Dalam *Mathematical Teaching in Midle School*. Vol. 13, No. 8, April 2008, halaman 438-445.