УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
Природно-математички факултет

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ мр БРАНКЕ БУДИМИРОВИЋ ПОД НАЗИВОМ
Мрежно вредносни идентитети и неке класе мрежно вредносних подалгебри

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао комисију

Одлуку о именовању комисије донело је Научно-наставно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду на XIX седници одржаној 21.априла 2011. године

2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:
   1. др Бранимир Шешеља, редовни професор ПМФ у Новом Саду, математика, 27.3.1992 – председник
   2. др Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.12.2003 – ментор
   3. др Мирослав Ћирић, редовни професор ПМФ у Нишу, математика, 1.9.2000 – члан
   4. др Ивица Бошњак, ванредни професор ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.2.2010– члан.

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме:

Бранка, Владан, Будимировић

2. Датум рођења, општина, република:

07.11.1952, Ваљево, Ваљево, Србија

3. Датум одбране, место и назив магистарске тезе:

17.07.2001., Нови Сад, О једној класи п-полупрстена

4. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: Математика

III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Мрежно вредносни идентитети и неке класе мрежно вредносних подалгебри

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Навести кратак садржај са назнаком броја страна поглавља, слика, шема, графикона и сл.

Докторска дисертација има 146 страна, 114 цитата, једну табелу и 8 слика. Рад се састоји из Увода и пет глава од којих прва два садрже приказ познатих појмова и резултата, а последње три садрже оригинални научни допринос.

Дисертација се састоји следећих делова:

Увод
Глава 1 Алгебарске структуре
1. 1 Мреже
1.2 Универзалне алгебре
Глава 2. Расплинуте структуре
2.1 Основни појмови и особине
2.2 Расплинуте функције
2.3. Директни производи расплинутих скупова, подалгебре и конгруенције
2.4. Расплинуте подалгебре на резидуалној мрежи
2.5. Расплинути идентитети
2. 6. Специјалне расплинуте структуре
2.7. Расплинуте еквиваленције и расплинуте једнакости
2.8. Апстрактна расплинута логика
2.9. Алгебре са расплинутом једнакошћу
2.10. Подалгебре, конгруенције, хомоморфизми и директни производи L-алгебри
2.11. Расплинута једнакосна логика
Глава 3. Расплинуте ε-подгрупе
3.1. Увод
3.2. Расплинута подгрупа обичне полугрупе
3.3. Расплинута подгрупа расплинуте подполугрупе
Глава 4. Компатибилне расплинуте једнакости и расплинути идентитети

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

У првом поглављу дати су потребни појмови из теорије мрежа и универзалне алгебре на којима се базирају ново-уведени појмови и резултати. Избор познатих резултата је дат у складу са појмовима који ће бити коришћени у раду. У другом делу овог поглавља дати су основни појмови универзалне алгебре, као и неке теореме потребне у овом раду. У овом делу је углавном нагласак на појмове и резултате који се даље уопштавају у оквиру теорије расплинутих структура.

У другом поглављу су прво дати основни појмови и резултати из мрежно вредносних структура. Дефинисан је расплинути подскуп прво на обичној мрежи са нулом и јединицом, а затим и на резидуалној мрежи. Такође су дефинисани и други основни појмови. Тако је дефинисан појам скупа нивоа p, где је p произвољан елемент мреже која се користи као кодомен расплинутог подскупа. Затим је дефинисана расплинута релација и њене важније особине као сто су расплинута рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност. Посебно су истакнуте расплинуте релације еквиваленције, које у овом раду имају једну од централних улога, нарочито њихов специјалан случај расплинута једнакост. Следи увођење појма расплинутог пресликавања и расплинуте операције на датом расплинутом подскупу као пресликавања посебног облика. Поред расплинутог пресликавања које је дефинисано као класично пресликавање расплинутог скупа у расплинути скуп које задовољава дате услове, у овом поглављу је расплинуто пресликавање дефинисано и као расплинута бинарна релација која задовољава одређене услове. Изложени су и основни принципи оваквог приступа који је развио M. Demirci. Мрежно вредносна подалгебра дате алгебре је дефинисана, како у случају када је кодомен комплетна мрежа са нулом и јединицом, тако и у случају када је кодомен резидуална мрежа. Посебно су истакнуте расплинуте конгруенције и расплинуте компатибилне једнакости на датој алгебри. Следе дефиниције подалгебре дате расплинуте подалгебре, расплинутог хомоморфизма расплинуте подалгебре у расплинуту подалгебру и директног производа расплинутих подалгебри. Поред расплинуте еквиваленције и расплинуте једнакости, слабљењем особине рефлексивности, уведени су и појмови слабе расплинуте еквиваленције и слабе расплинуте једнакости. У даљим разматрањима коришћена мрежа скоро увек је комплетна. Дата је веза између мрежно вредносне слабе једнакости на скупу, односно подалгебри неке алгебре и ниво скупова те релације. Уведен је и појам мрежно вредносног идентитета и појам његовог задовољења, односно тачности на некој расплинутој подалгебри дате алгебре. У овом поглављу се даје приказ и тзв. L-алгебре које је увео R. Belohlavek са сарадницима, као обичне алгебре којима је придружена расплинута једнакост која је компатибилна са функцијама ове алгебре. За кодомен је узета резидуална мрежа. У овом поглављу су такође наведени примери расплинутих структура у случају групоида, полугрупе, групе и полупрстена.

У трећем поглављу је на расплинутој подполугрупи дефинисана расплинута подгрупа и разматране су партиције расплинуте подполугрупе. Овде (као и у четвртом и петом поглављу) су представљени оригинални резултати кандидата. У овом делу, неки појмови и резултати који су познати у класичном контексту, уведени су у контексту расплинутих скупова, и испитани коришћењем делимично "cut-worthy" приступа. Два нова концепта су дефинисана и истражена: расплинута (G, ε)-подгрупа полугрупе и расплинута (G, ε)-подгрупа расплинуте полугрупе. Као главни резултат у овом делу, доказано је да расплинута полугрупа може бити приказана као партиција (коришћењем специјалних типова расплинутих партиција) фамилије расплинутих (G, ε)-подгрупа ако и само ако је она комплетно регуларна расплинута полугрупа. Овако добијене партиције су 1-ε-партиције. Отуда се добија карактеризација расплинутих комплетно регуларних полугрупа преко фамилије расплинутих ε-подгрупа. Предности увођења нове дефиниције ε-подгрупе расплинуте полугрупе је што омогућава представљање расплинуте комплетно регуларне полугрупе преко расплинуте партиције фамилије таквих расплинутих структура (ε-подгрупа). Репрезентација није могућа ако користимо само класичне расплинуте подгрупе. Други појам који омогућава ово истраживање је концепт 1-ε -партиција. Као кодомен су, уместо реалног интервала [0,1], коришћене комплетне мреже зато што је такав приступ општији, а и даље важи и сагласност са нивоима. Поред тога, у неким деловима рада захтева се да мрежа буде комплетно дистрибутивна, а у неким деловима да буде линеарно уређена.

У четвртом поглављу су разматране расплинуте конгруенције на расплинутим подалгебрама обичне (crisp) алгебре. Расплинуте једнакости су специјалне расплинуте конгруенције и оне су уведене уместо обичних једнакости. Скуп вредности је комплетна резидуална мрежа, која у неким случајевима има и додатна својства. После уводног разматрања су уведене расплинуте конгруенције као расплинуте релације на расплинутим подалгебрама обичне алгебре. Расплинуте конгруенције су повезане са расплинутим подалгебрама преко прикладне дефиниције рефлексивности. Доказано је да је колекција свих расплинутих конгруенција на расплинутој подалгебри неке алгебре комплетна мрежа у којој расплинуте једнакости формирају комплетну i-полумрежу. Даље је дефинисан расплинути идентитет као формула у којој су терми повезани преко расплинуте једнакости уместо обичне. Расплинути идентитет може бити задовољен на расплинутој подалгебри (у односу на неку расплинуту једнакост), док обична носач алгебра не мора задовољавати одговарајући обичан идентитет. Доказано је да, ако расплинута подалгебра алгебре задовољава расплинути идентитет у односу на неку расплинуту једнакост, онда постоји најмања расплинута једнакост таква да одговарајући расплинути идентитет важи на истој расплинутој подалгебри. Главни резултат у овом делу је да обична алгебра задовољава обичан идентитет ако и само ако одговарајућа расплинута подалгебра задовољава одговарајући идентитет за све одговарајуће расплинуте једнакости. Затим су проучаване специјалне расплинуте конгруенције на обичној алгебри, које су назване слабе расплинуте конгруенције. Доказано је да је, под одређеним условима, свака слаба расплинута конгруенција на алгебри такође је и расплинута конгруенција на расплинутој подалгебри. Обрнуто, свака расплинута конгруенција на расплинутој подалгебри неке алгебре је слаба расплинута конгруенција на некој обичној (crisp) алгебри. Овај приступ је оригиналан и разликује се од приступа у свим ранијим радовима других аутора где нису коришћене расплинуте конгруенције и расплинуте једнакости на расплинутим подалгебрама. Све ово било је дефинисано са фиксираном дијагоналом (са 1 на дијагонали) и отуда је било повезано са алгебром носачем, а не са њеном расплинутом подалгебром као што је случај у резултатима у овом раду. У оквиру овог дела једато више примера који илуструју примену резултата на класичне алгебарске структуре.

У петом поглављу се настављају истраживања из претходног поглавља увођењем нових појмова и уопштавањем постојећих резултата. Овде је као кодомен расплинутих структура поново узета комплетна мрежа У овом делу рада се дефинише расплинута алгебра као расплинута подалгебра универзалне алгебре на којој је дата компатибилна расплинута једнакост. Значи расплинута подалгебра има улогу алгебре, а једнакост је замењена са расплинутом једнакошћу на тој подалгебри. Затим је дефинисана расплинута једнакосна класа тако уведених расплинутих алгебри. На примеру расплинутог подгрупоида је илустрована примена расплинутих компатибилних једнакости. Расплинута подполугрупа је дефинисана на расплинутом подгрупоиду (не на полугрупи) у односу на компатибилну расплинуту једнакост дату на том расплинутом подгрупоиду. Добијени резултати су уопштења познатих резултата из класичне алгебре. Даље су дефинисане подалгебре расплинуте подалгебре и доказано да, ако расплинута алгебра припада некој једнакосној класи, онда и њена подалгебра припада тој једнакосној класи. Такође је дефинисан расплинут хомоморфизам једне расплинуте алгебре у другу, хомоморфна слика расплинуте алгебре и доказано да, ако расплинута алгебра припада некој једнакосној класи, онда и њена хомоморфна слика припада тој једнакосној класи. Затим је дефинисан директан производ расплинутих алгебри и доказано да, ако колекција расплинутих алгебри припада некој једнакосној класи, онда и њихов директан производ припада тој једнакосној класи. Као последица претходних теорема се добија теорема, која одговара једном правцу теореме Birkhoff-a у класичној алгебри, као и једном правцу одговарајуће теореме, када је расплинута једнакост дефинисана на обичној алгебри. На крају је дат контрапример који илуструје да други смер уопштења ове познате теореме овде није задовољен.

VI Списак научних и стручних радова који су објављени или прихваћени за објављивање на основу резултата истраживања у оквиру рада на докторској дисертацији

уз напомену:

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

1. B. Budimirović, V. Budimirović, A. Tepavčević, *Fuzzy ε-subgroups*, Information Sciences, 180 (2010), 4006-4014 **M21**
2. B. Budimirović, V. Budimirović, A. Tepavčević, *Fuzzy completely regular semigroups and fuzzy ε – subgroups*, FSTA 2010, Tenth International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, Slovak Republic, Abstracts, 40 **M34**
3. B. Budimirović, V. Budimirović, A. Tepavčević, *Lattice valued c-subgroups, The 3rd Novi Sad Algebraic Conference* NSAC09, Abstracts **M34**
4. B. Budimirović, V. Budimirović, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Compatible fuzzy equalities and fuzzy identities*, Fuzzy Sets and Systems (podnesen M34).

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

У овом раду је развијена нова теорија расплинутих идентитета и расплинутих алгебри по аналогији са класичним случајем. Наиме, у раду је коришћена расплинута једнакост уместо обичне са циљем да се уведе нови појам расплинутих идентитета, који важе на расплинутим подалгебрама, а не важе обавезно на целој алгебри. У овом раду су проучавани такви идентитети.

У досадашњим радовима R. Belohlavek-а и V. Vychodil-а о расплинутим једнакостима су вршена слична истраживања и код њих је расплинута једнакост дефинисана на обичној алгебри. Приступ у овој докторској дисертацији је општији у следећем смислу. Овде је расплинута једнакост дефинисана на расплинутој подалгебри, уместо на класичној алгебри. Поменути аутори не разматрају расплинуте подалгебре дате алгебре, већ уводе појам L-алгебре, при чему L-алгебру дефинишу као обичну подалгебру са расплинутом једнакошћу која је рестрикција расплинуте једнакости на целој алгебри.

У радовима поменутих аутора су разматрана питања која доводе до уопштења познате Birkhoff-ове теореме у класичној алгебри. Они су разматрали класичну алгебру на којој је дефинисана компатибилна расплинута једнакост. Поменута једнакост је дефинисана на носачу алгебре и њена једина веза са операцијама алгебре је компатибилност. У тим истраживањима се не користи појам расплинуте подалгебре.

У овом раду се, за добијање сличних резултата, користи претходно дефинисана компатибилна расплинута једнакост на расплинутој подалгебри, а не на обичној (crisp) алгебри, као што је до сада био случај. Дакле, обједињени су концепти расплинутих подалгебри и компатибилних расплинутих једнакости. На овај начин претходне резултате других аутора можемо схватити као специјалан случај резултата у овом раду узимајући да је расплинута подалгебра карактеристична функција.

Најважнији резултат треће главе је карактеризација расплинутих комплетно регуларних полугрупа преко фамилије расплинутих ε-подгрупа. Доказано је да расплинута полугрупа може бити приказана као партиција (коришћењем специјалних типова расплинутих партиција) фамилије расплинутих (G, ε)-подгрупа ако и само ако је она комплетно регуларна расплинута полугрупа.

Најважнији резултати четврте главе су у вези са расплинутим идентитетима у односу на расплинуту једнакост. Доказано је да ако расплинута подалгебра алгебре задовољава расплинути идентитет у односу на неку расплинуту једнакост, онда постоји најмања расплинута једнакост таква да одговарајући расплинути идентитет важи на истој расплинутој подалгебри. Такође је доказано да обична алгебра задовољава обичан идентитет ако и само ако одговарајућа расплинута подалгебра задовољава одговарајући идентитет за све одговарајуће расплинуте једнакости.

У петој глави су уопштени појмови и резултати из универзалне алгебре. Најважнији резултат је доказ теореме аналогне једном правцу познате теореме Биркофа: Показано је да је једнакосна класа расплинутих алгебри и расплинути варијетет. Такође је дат и контрапример који илуструје да обрат не важи: не мора сваки расплинути варијетет бити и расплинута једнакосна класа у овом контексту.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА **НАПОМЕНА:** Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.	
Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачење резултата истраживања у овој докторској дисертацији. Резултати су приказани јасно, стандардним методама (лема, тврђење, теорема), сви оригинални резултати су и доказани. Дат је и већи број примера који илуструју резултате. Резултати су упоређени са претходним резултатима других аутора и стављени су у контекст савремених истраживања из ове области. На крају је дат део Закључак у коме су дата још нека тумачења и предложени и правци даљег истраживања.	
IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ: **НАПОМЕНА:** Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање.	
1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме **Дисертација је написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме.**	
2. Да ли дисертација садржи све битне елементе **Дисертација садржи све битне елементе.**	
3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци **Дисертација представља оригинални допринос науци по томе што представља оригинални наставак истраживања у области која је актуелна у свету. У дисертацији се уводи више нових појмова који уопштавају познате појмове и резултате. Доказано је неколико нових и значајних тврђења и теорема и илустрована примена на класичним структурама.**	
4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања **Дисертација нема недостатака.**	
X ПРЕДЛОГ:	
На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:	
да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана.	

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

B. Šešelja

др Бранимир Шешеља, редовни професор ПМФ у Новом Саду – председник

др Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ у Новом Саду – ментор

др Мирослав Ћирић, редовни професор ПМФ у Нишу – члан

др Ивица Бошњак, ванредни професор ПМФ у Новом Саду – члан.

Нови Сад, 6.мај 2011.

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извештај.