UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO MATETATIČKI FAKULTET

PRILOG TEORIJI UOPŠTENIH SLUČAJNIH PROCESA

(Doktorska disertacija)

ZAGORKA LOZANOV - CRVENKOVIĆ

NOVI SAD

1988.

SADRŽAJ

GLAVA IV

GLAVA V

UVOD

Tridesetih godina ovoga veka postavljene su osnove teorije slučajnih (stohastičkih) procesa, koja je danas osnovni pravac istraživanja u teoriji verovatnoće. Ova teorija je lep primer organske sinteze matematičkog i prirodno-naučnog načina mišljenja, kada matematičar uspeva da uđe u fizičku suštinu krupnog naučnog problema i za njega pronađe odgovarajući matematički model.

Ideju za teoriju slučajnih procesa dao je prvi J. H. Poincaré, a prve konture se mogu naći u radovima L. Bachellier-a, Foller-a, M. Plank-a. Međutim, konstrukcija matematički kompletnih osnova teorije slučajnih procesa povezana je sa imenima A. H. Колмогоров-a i A. Я. Хинчин-a.

Jedan od najtipičnijih i najranijih primera slučajnog procesa je proces Braunovog kretanja, gde je putanja koju opisuje Braunova čestica potopljena u tečnost slučajna funkcija vremena. Prvo objašnjenje Braunovog kretanja dao je A. Einstein 1905. godine. Konciznu, matematičku definiciju Braunovog slučajnog procesa dao je N. Wiener 1918. godine.

Međutim, postoje slučajni procesi koji se ne mogu opisati pojmovima klasične matematičke analize. Takav je primer izvod procesa Braunovog kretanja. Ovaj proces se može interpretirati kao rezultat merenja, pomoću nekog aparata, brzine kretanja Braunove čestice bez inercije. Takođe, slučajni proces sa konstantnom spektralnom gustinom, "beli šum", nije slučajni proces u klasičnom smislu, ali se često pojavljuje i koristi.

Opisivanje ovakvih fizičkih problema zahtevao je komplikovaniji i moderniji matematički aparat nego što je to klasična matematička analiza. Ovo je omogućeno stvaranjem teorije uopštenih funkcija.

Istorijski posmatrano, teorija uopštenih funkcija je i nastala u želji da se matematičkim modelima raznih procesa, koji nisu bili matematički jasno zasnovani, nađe pravilan matematički pristup i omoguće matematička rešenja koja će imati i prirodan smisao. Koncepcija funkcije i operacije sa funkcijama u klasičnoj analizi, zbog izražene uskosti, nije uvek omogućavala adekvatno nalaženje tih modela.

Nedostaci klasične analize imali su za posledicu više generalizacija koncepcije funkcije i operacija sa funkcijama. U monografiji "Théorie des distribution I, II", (1950/51) L. Schwartz je prvi objavio sistematizovanu teoriju jedne klase uopštenih funkcija - distribucija. Sigurno je da su rezultati teorije vektorsko topoloških prostora koji su se tada javili omogućili L. Schwartz-u izgradnju njegove teorije.

Naziv distribucija se koristi za elemente Schwartz-ovog prostora $\mathcal{D}'$ ili nekog podprostora od $\mathcal{D}'$, a ako se posmatraju neprekidne linearne funkcionale nad proizvoljinim prostorom osnovnih funkcija koristi se naziv uopštenih funkcija.

Teorija distribucija, i šire, teorija uopštenih funkcija predstavlja matematički aparat za razne oblasti matematičke fizike, teoriju pseudodiferencijalnih i Furijeovih operatora.

U knjigama I. M. Gel'fand-a i saradnika [4,5,6,7,8] dat je originalan i sveobuhvatan način razvijanja teorije distribucija i njihove primene.

Ubrzo posle rada L. Schwartz-a na teoriji distribucija

[39], K. Ito, [18] i I. M. Gel'fand [9] su nezavisno uveli koncept uopštenih slučajnih procesa. K. Ito ih je nazvao slučajne distribucije. Njihove definicije su zasnovane na radovima L. Schwartz-a a uopštene slučajne procese su proučavali prvenstveno sa stanovišta korelacione analize stacionarnih slučajnih procesa.

Takođe, I. M. Gel'fand je proučavao Gausove uopštene slučajne procese.

U principu, uopšteni slučajni proces se definiše kao neprekidno linearno preslikavanje vektorsko topološkog prostora test funkcija u vektorsko topološki prostor slučajnih promenljivih. Prema tome, kao što je prikazano u [48, Appendix], postoje različite klase uopštenih slučajnih procesa, zavisno od izbora prostora test funkcija i izbora prostora slučajnih promenljivih.

Problematikom uopštenih slučajnih procesa bavili su se K. Urbanik [46] i T. Hida. T. Hida [13,14] je ispitivao specijalan slučaj Gausovog uopštenog slučajnog procesa, takozvani proces Braunovog kretanja.

Međutim, nešto drugačije su definisali uopšteni slučajni proces u svojim radovima C. Chaning [1], M. Ullrich [44,45], C. H. Swartz i D. E. Myers [42], L. J. Kitchens, [21,22], O. Hanš [12]. Sledeći njihove radove, u disertaciji su proučavani uopšteni slučajni procesi na prostorima $\mathscr{A}$, Exp$\mathscr{A}$, $\mathscr{D}^{(Mp)}(\mathbb{O})$, $C[0,1]$, $L^1(\mathbb{R}^n)$.

U Glavi I su navedeni osnovni pojmovi, definicije i tvrđenja iz teorije verovatnoće i slučajnih procesa, koji se koriste u radu. Takođe, date su osnovne osobine Gausovske

[39], K. Ito, [18] i I. M. Gel'fand [9] su nezavisno uveli koncept uopštenih slučajnih procesa. K. Ito ih je nazvao slučajne distribucije. Njihove definicije su zasnovane na radovima L. Schwartz-a a uopštene slučajne procese su proučavali prvenstveno sa stanovišta korelacione analize stacionarnih slučajnih procesa.

Takođe, I. M. Gel'fand je proučavao Gausove uopštene slučajne procese.

U principu, uopšteni slučajni proces se definiše kao neprekidno linearno preslikavanje vektorsko topološkog prostora test funkcija u vektorsko topološki prostor slučajnih promenljivih. Prema tome, kao što je prikazano u [48, Appendix], postoje različite klase uopštenih slučajnih procesa, zavisno od izbora prostora test funkcija i izbora prostora slučajnih promenljivih.

Problematikom uopštenih slučajnih procesa bavili su se K. Urbanik [46] i T. Hida. T. Hida [13,14] je ispitivao specijalan slučaj Gausovog uopštenog slučajnog procesa, takozvani proces Braunovog kretanja.

Međutim, nešto drugačije su definisali uopšteni slučajni proces u svojim radovima C. Chaning [1], M. Ullrich [44,45], C. H. Swartz i D. E. Myers [42], L. J. Kitchens, [21,22], O. Hanš [12]. Sledeći njihove radove, u disertaciji su proučavani uopšteni slučajni procesi na prostorima $\mathscr{A}$, Exp$\mathscr{A}$, $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$, C[0,1], $L^1(\mathbb{R}^n)$.

U Glavi I su navedeni osnovni pojmovi, definicije i tvrđenja iz teorije verovatnoće i slučajnih procesa, koji se koriste u radu. Takođe, date su osnovne osobine Gausovske familije slučajnih promenljivih, koje se koriste u Glavi V.

U Glavi II dati su osnovni pojmovi definicije i tvrđenja iz teorije distribucija i uopštenih funkcja. Detaljno su prikazani prostori $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, Exp$\mathcal{A}$, Exp$\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$ i $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})'$, i date njihove karakterizacije.

U Glavi III data je definicija uopštenog slučajnog procesa. Date su reprezentacije uopštenog slučajnog procesa na prostorima $\mathcal{A}$, Exp$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$. Takođe, date su reprezentacije za matematičko očekivanje uopštenog slučajnog procesa. Materijal za tačke 3.2. i 3.3. uzet je iz [29]. Materijal za tačke 3.4. uzet je iz [28].

U Glavi IV ispituju se osobine niza uopštenih slučajnih procesa koji konvergira skoro sigurno, srednje kvadratno i u verovatnoći. Dati su potrebni i dovoljni uslovi za navedene konvergencije niza uopštenih slučajnih procesa. Materijal za ovu glavu uzet je iz [30,31].

U Glavi V date su reprezentacije Gausovog uopštenog slučajnog procesa na prostorima $C[0,1]$ i $L^1(\mathbb{R}^n)$. Takođe je data ekstenzija Gausovog uopštenog slučajnog procesa na Hilbertovom prostoru. Materijal iz ove glave je prvi put izložen.

Literatura korišćena u ovom radu navedena je na kraju i čini je 48 bibliografskih jedinica.

Profesorima Olgi Hadžić i Zoranu Ivkoviću zahvaljujem se na pomoći pri izradi ove teze.

Mentor ovog rada je profesor Stevan Pilipović.

Zahvaljujem se profesoru Stevanu Pilipoviću na velikoj podršci i pomoći tokom izrade ove teze.

Zahvaljujem se SIZ-u za naučni rad SAP Vojvodine koji je finansirao izradu ove teze.

U Novom Sadu,

19. 12. 1988.

GLAVA I

1.1. PROSTOR VEROVATNOĆA, SLUČAJNE PROMENLJIVE I MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Osnovni pojam teorije verovatnoće je pojam prostora verovatnoće. Kao prvo posmatra se neprazan skup $\Omega=\{\omega_i,\ i \in I\}$, I je skup indeksa. Elementi skupa Ω nazivaju se *elementarni događaji*. Dalje, posmatra se familija podskupova od Ω koja treba da je zatvorena u odnosu na operacije unije, preseka i komplementa. U vezi s tim imamo sledeću definiciju

Definicija 1.1.1. Neka je Ω neprazan skup. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω naziva se σ - *algebra* ako

1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

2) ako $A \in \mathcal{F}$, tada $A^c \in \mathcal{F}$,

3) ako $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1,2,\ldots$, tada $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.1.2. Neka je $\mathcal{F}$ σ - algebra na skupu Ω. Uređen par $(\Omega,\mathcal{F})$ naziva se *merljiv prostor*.

Na σ - algebri $\mathcal{F}$ podskupova od Ω definiše se prebrojivo-aditivna funkcija P na sledeći način.

Definicija 1.1.3. Neka je $(\Omega,\mathcal{F})$ merljiv prostor. Funkcija $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je *verovatnoća* na $\mathcal{F}$ ako je zadovoljeno

1) $P(\Omega) = 1$,

2) $P(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{F}$,

3) za svaki niz $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, za $i \neq j$ važi

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Sada možemo formulisati sistem aksioma Kolmogorova, koji leži u osnovi pojma prostora verovatnoća

Definicija 1.1.4. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je

1) Ω skup elemenata ω,

2) $\mathcal{F}$ σ - algebra podskupova od Ω,

3) P verovatnoća na $\mathcal{F}$,

naziva se verovatnosni model ili *prostor verovatnoća*. Pri tome se Ω naziva prostor elementarnih događaja, skupovi A iz $\mathcal{F}$ nazivaju se događaji, a $P(A)$ se naziva verovatnoća događaja A.

Iz date definicije se vidi da se aksiomatika teorije verovatnoće suštinski oslanja na aparat teorije skupova i teorije mere. Jasno je da je u proizvoljnom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ funkcija P u stvari mera na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ koja zadovoljava dopunski uslov, da je mera celog prostora Ω jednaka jedinici, tj. $P(\Omega)=1$ često se P naziva i verovatnosna mera. Zbog toga teorija verovatnoće često koristi terminologiju teorije mere, na primer, umesto termina "događaj" i "skoro sigurno" ponekad se koriste termini "merljiv skup" i "skoro svuda".

Definicija 1.1.5. Prostor verovetnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je *kompletan* (ili, P je kompletna verovatnosna mera na $\mathcal{F}$) ako

iz $A \in \mathcal{F}$ i $P(A) = 0$ i $B \subset A$ sledi $B \in \mathcal{F}$.

Postoji pojam, veoma važan u teoriji verovatnoće koji nema važnu ulogu u teoriji mere - to je pojam nezavisnosti događaja.

Definicija 1.1.6. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Događaji u familiji $\{B_\alpha, \ \alpha \in A\}$ su *nezavisni* ako za proizvoljan, konačan izbor indeksa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in A$ važi

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} B_{\alpha_k}) = \prod_{k=1}^{n} P(B_{\alpha_k}).$$

Definicija 1.1.7. $\{\mathcal{F}_\alpha, \ \alpha \in A\}$ je familija nezavisnih σ - algebri ako su za svaki izbor $B_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in A$ događaji u familiji $\{B_\alpha, \ \alpha \in A\}$ nezavisni.

Definicija 1.1.8. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ za koju važi $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$ $(\mathcal{C})$ naziva se realna (kompleksna) *slučajna promenljiva* na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Slučajne promenljive X i Y su ekvivalentne ako je $P\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\} = 1$. Ovo pišemo još i $X = Y$ s.i. (skoro izvesno).

Definicija 1.1.9. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$. Kažemo da je X *n-dimenzionalni* (kompleksni) slučajni vektor (ili, kraće, *slučajni vektor*) na Ω ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svako $B \in \mathcal{B}^n$ $(\mathcal{C}^n)$.

Definicija 1.1.10. Neka je X kompleksna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako je X integrabilna po meri

P, kažemo za X postoji matematičko očekivanje i veličina

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\, dP(\omega)$$

naziva se *matematičko očekivanje* slučajne promenljive X.

Definicija 1.1.11. Neka je X kompleksna slučajna promenjiva na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako je funkcija $|X|^n$ integrabilna po meri P, tada se $E(|X|^n)$ naziva *momenat n-tog reda*. Specijalno, kada X ima drugi momenat, veličina $D(X) = E(|X - E(X)|^2)$ naziva se *disperzija* od X.

Označimo sa $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor slučajnih promenljivih sa konačnim drugim momentom. $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(X, Y) = E(X\overline{Y})$, i normom $\|X\| = E(|X|^2)$.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, $\mathcal{U}$ proizvoljna σ - podalgebra i X slučajne promenljiva na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa konačnim matematičkim očekivanjem.

Definicija 1.1.12. Uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na σ - algebru $\mathcal{U}$, je slučajna promenljiva $E(X|\mathcal{U})$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koja je merljiva u odnosu na σ - algebru $\mathcal{U}$ i za proizvoljan $B \in \mathcal{U}$ važi

$$\int_B E(X|\mathcal{U})dP(\omega) = \int_B X dP(\omega), \quad B \in \mathcal{U} \tag{1.1.1}$$

Svaka druga slučajna promenljiva, Y, merljiva u odnosu na $\mathcal{U}$ za koju važi (1.1.1) je ekvivalentna sa $E(X|\mathcal{U})$.

Navešćemo neke od osobina uslovnog matematičkog očekivanja

1) Ako je $P\{\omega: X(\omega) \geq 0\} = 1$ tada je $P\{\omega: E(X|\mathcal{U})(\omega) \geq 0\} = 1$

2) Ako je X merljiva u odnosu na σ - algebru $\mathcal{U}$, tada su $E(X|\mathcal{U})$ i X ekvivalentne .

3) $E[E(X|\mathcal{U})] = E(X)$.

4) Ako su $\mathcal{F}(x)$ i $\mathcal{U}$ nezavisne σ - algebre, tada je $E(X|\mathcal{U}) = EX$.

Neka je data familija $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Označimo, za svako $\alpha \in A$, sa $\mathcal{F}(X_\alpha)$ najmanju σ - algebru u odnosu na koju je X_α merljiva funkcija.

Definicija 1.1.13. Neka je $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ familija slučajnih promenljivih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$, i neka je $\{\mathcal{F}(X_\alpha), \alpha \in A\}$ familija odgovarajućih σ - algebri. Ako je $\{\mathcal{F}(X_\alpha), \alpha \in A\}$ familija nezavisnih σ - algebri, kažemo da je $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$ familija nezavisnih slučajnih promenljivih.

1.2. RASPODELA VEROVATNOĆA

Ako je $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, realna slučajna promenljiva, definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$ možemo odrediti verovatnoću događaja da vrednost X pripadne datom intervalu realnih brojeva. Uopšte, možemo posmatrati X kao preslikavanje Ω u $\mathbb{R}$ i definisati verovatnosnu meru Φ na merljivom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B})$.

Definicija 1.2.1. Neka je X realna slučajna promenljiva na $(\Omega,\mathcal{F},P)$. *Raspodela verovatnoće* slučajne promenljive X je verovatnosna mera Φ na merljivom prostoru $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, takva da je za svako $B \in \mathcal{B}$

$$\Phi(B) = P\{X^{-1}(B)\} = P\{X \in B\}.$$

Definicija 1.2.2. *Funkcija raspodele* realne slučajne promenljive X na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je funkcija $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takva da je

$$F(x) = \Phi((-\infty, x)) = P\{X < x\}.$$

Funkcija raspodele F realne slučajne promenljive X ima sledeća svojstva

1) F je neprekidna sa leve strane,

2) F je monotono neopadajuća

3) $\lim_{x\to-\infty} F(x)=1$, $\lim_{x\to\infty} F(x)=0$.

Definicija 1.2.3. Neka realna slučajna promenljiva na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je F njena funkcija raspodele. Kažemo da je X *apsolutno neprekidna* (ili, kraće, *neprekidna*) slučajna promenljiva ako postoji Borelova funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

1) $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 1.2.4. *Karakteristična funkcija* $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, realne slučajne promenljive X na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa raspodelom verovatnoća Φ i funkcijom raspodele F je

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \Phi(dx).$$

Karakteristična funkcija realne slučajne promenljive X ima sledeća svojstva

1) $\varphi(0)=1$;

2) φ je uniformno neprekidna;

3) za proizvoljne $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j,k} \alpha_j \overline{\alpha_k}\, \varphi(t_j - t_k) \geq 0.$$

Teorema 1.2.1. (S. Bohner). Ako je $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija koja zadovoljava uslove 1) - 3), tada postoji jedinstvena verovatnosna mera Φ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ takva da je

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\Phi(dx).$$

Definicija 1.2.5. *Raspodela verovatnoća* n-dimenzionalnog slučajnog vektora $\mathcal{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je

$$\Phi(B)=P\{\mathcal{X} \in B\} = P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_i \in B_i\}), \quad \forall B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \in \mathcal{B}^n.$$

Definicija 1.2.6. *Funkcija raspodele* realnog n-dimenzionalnog slučajnog vektora $\mathcal{X}=(X_1, X_2, \ldots X_n)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je funkcija

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \ldots \times (-\infty, x_n)) =$$

$$= P(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k < x_k\}), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definicija 1.2.7. n - dimenzionalni *slučajni* vektor $\mathcal{X}=(X_1, \ldots, X_n)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa funkcijom raspodele F je *apsolutno neprekidnog* tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, koja se zove *gustina raspodele*, takva da za svaki $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ važi

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1, dx_2 \ldots dx_n$$

Definicija 1.2.8. Karakteristična funkcija $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, n-dimenzionalne slučajne promenljive $\mathscr{X}$ na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ sa raspodelom verovatnoća Φ i funkcijom raspodele F je

$$\varphi(t) = E(E^{it\mathscr{X}}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dF(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} \Phi(dx).$$

gde je $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$.

1.3. SLUČAJNI PROCESI I NJIHOVE RASPODELE

Definicija 1.3.1. Neka je T uređen skup. Familija realnih slučajnih promenljivih $\mathscr{X} = \{X(t,\omega):\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$ na $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ se naziva *slučajni proces*.

Za fiksirano $\omega \in \Omega$ imamo funkciju $X(\omega,\cdot)$ argumenta $t \in T$ koja se naziva *trajektorija* slučajnog procesa. Za fiksirano $t \in T$, $X(\cdot,t)$ je realna slučajna promenljiva.

Posmatrajući $\{ X(t,\omega):\ t \in T,\ \omega \in \Omega \}$ kao beskonačno dimenzionalni slučajni vektor, sa vrednostima u $\mathbb{R}^T$, moguće je definisati njegovu raspodelu. Podskup $\mathbb{R}^T$ oblika

$$A = \{X \in \mathbb{R}^T:\ (X_1(t_1),\ X(t_2), \dots,\ X(t_n)) \in B_n\}, \qquad (1.4.1)$$

gde je B_n Borelov skup u $\mathbb{R}^n$, naziva se *cilindrični podskup*. Za fiksirane $t_1, t_2, \dots, t_n$ klasa svih cilindričnih podskupova dobijenih kad B_n prolazi kroz $\mathscr{B}^n$, obrazuje σ - algebru, koju ćemo označiti sa $\mathscr{B}(t_1, \dots, t_n)$. Za proizvoljan skup oblika (1.4.1) definišemo

$$\Phi_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A) = P((X(t_1),\ X(t_2), \dots,\ X(t_n)) \in B_n),$$

koja je mera na merljivom prostoru $(\mathbb{R}^T,\ \mathscr{B}(t_1, \dots, t_n))$.

Menjajući izbor konačnog podskupa $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$, dobijamo klasu $\Phi = \{\Phi_{t_1, t_2, \dots, t_n}\}$ takvih mera, i ta klasa zadovoljava sledeći uslov saglasnosti: ako cilindrični podskup A iz (1.4.1) predstavimo na drugi način, na primer

$$A = \{X \in \mathbb{R}^T: (X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_n)) \in B_m\},$$

tada je zadovoljeno

$$\Phi_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A) = \Phi_{s_1, s_2, \dots, s_n}(A).$$

Označimo sa $\mathcal{U}^T$ algebru podskupova od $\mathbb{R}^T$, koja se sastoji iz svih cilindričnih skupova. Možemo zadati konačno-aditivnu meru $\tilde{\Phi}$ na $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U}^T)$, takvu da se restrikcija od $\tilde{\Phi}$ na $\mathcal{B}(t_1, \dots t_n)$ poklapa sa $\Phi_{t_1, t_2, \dots, t_n}$. Označimo sa $\mathcal{B}^T$ najmanju σ - algebru koja sadrži $\mathcal{U}^T$ i nazovimo elemente $\mathcal{B}^T$ Borelovi skupova u $\mathbb{R}^T$. Sledeća teorema poznata je kao teorema Kolmogorova o produženju mere.

Teorema 1.3.1. Gore definisana konačno aditivna mera $\tilde{\Phi}$ na $(\mathbb{R}^T, \mathcal{U}^T)$ može se jedinstveno produžiti do verovatnosne mere Φ na $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$.

Definicija 1.3.2. Mera Φ dobijena u Teoremi 1.4.1. naziva se *raspodela* slučajnog procesa $\{X(t, \omega),\ t \in T,\ \omega \in \Omega\}$.

Obratno, za proizvoljnu verovatnosnu meru Φ na $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T)$, postoji slučajni proces čija je raspodela Φ. Neka je $\Omega = \mathbb{R}^T$, i neka su elementi od Ω, $X = (x(t): t \in T)$. Dalje, neka je $\mathcal{F} = \mathcal{B}^T$, $P = \Phi$. Tada jednakost $X(t, x) = x(t)$, $t \in T$, $X \in \Omega$, definiše slučajni proces čija je raspodela Φ.

Definicija 1.3.3. Neka je $\mathcal{X}= \{x(\cdot,t),\ t \in T\}$ slučajni proces. Kazaćemo da je $\mathcal{X}$ *neprekidan* ako je za skoro svako $\omega \in \Omega$, $X(\omega,\cdot)$ neprekidna funkcija na T.

1.4. KONVERGENCIJE NIZA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Neka su $X, X_1, X_2 \ldots$ slučajne promenljive na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 1.4.1. Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ konvergira *u verovatnoći* ka slučajnoj promenljivoj X, (što obeležavamo sa $X_n \xrightarrow{v} X$), ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Definicija 1.4.2. Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ konvergira *skoro sigurno* ka slučajnoj promenljivoj X, ($X_n \xrightarrow{s.s} X$), ako

$$P\{\omega:\ X_n(\omega) \to X(\omega),\ n \to \infty\} = 1.$$

Definicija 1.4.3. Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ konvergira *u srednjem reda p*, $0 < p < \infty$, ka slučajnoj promenljivoj X, ($X_n \xrightarrow{p} X$), ako

$$E|X_n - X|^p \to 0, \quad n \to \infty.$$

Definicija 1.4.4. Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ konvergira u *raspodeli* ka slučajnoj promenljivoj X, ($X_n \xrightarrow{r} X$), ako za proizvoljnu ograničenu, neprekidnu funkciju f

$$Ef(X_n) \to Ef(X), \quad n \to \infty.$$

Među navedenim vrstama konvergencije niza slučajnih promenljivih važe sledeći odnosi:

a) Konvergencija skoro sigurno $\Rightarrow$ konvergencija u verovatnoći $\Rightarrow$ konvergencija u raspodeli.

b) Konvergencija u srednjem reda p $\Rightarrow$ konvergencija u srednjem reda q, ako $p > q \geq 1$ $\Rightarrow$ postoji podniz koji konvergira skoro sigurno.

c) Konvergencija u srednjem reda $p \geq 1$ $\Rightarrow$ konvergencija u verovatnoći $\Rightarrow$ konvergencija u raspodeli.

d) Konvergencija u verovatnoći $\Rightarrow$ postoji podniz koji konvergira skoro sigurno.

1.5. GAUSOVSKA FAMILIJA

1.5.1. Realna Gausovska familija

Definicija 1.5.1. Realna slučajna promenljiva X, definisana na nekom prostoru verovatnoće naziva se *Gausova*, ili ima Gausovu, odnosno *normalnu* raspodelu, što kraće pišemo $X: \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, ako njena funkcija raspodele ima oblik:

$$F(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right] dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

gde su $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, konstante. Imamo da je $m=E(X)$, $\sigma^2=D(x)$. Karakteristična funkcija za X je

$$\varphi(t) = \exp\left[imt - \frac{1}{2} t^2\sigma^2\right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poseban slučaj normalne raspodele se dobija za $\sigma^2=0$, odnosno kada je karakteristična funkcija

$$\varphi(t) = e^{itm}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

U ovom slučaju je $X=m$ skoro sigurno i kažemo da X ima *degenerisanu* normalnu raspodelu.

Definicija 1.5.2. Familija $\mathcal{X} = \{X_u : u \in U\}$, $U \neq 0$ realnih slučajnih promenljivih se naziva *realna Gausovska* familija ako za proizvoljne $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2, \dots u_n \in U$, $n \in \mathbb{N}$, slučajna promenljiva

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_k X_{u_k}$$

ima Gausovu raspodelu.

U ovom paragrafu razmatraćemo osobine samo realne Gausovske familije.

Proizvoljna podfamilija Gausovske familije je opet Gausovska familija. Specijalno, svaka konačna podfamilija $\{X_j,\ 1 \le j \le n\}$, Gausovske familije $\mathcal{X}$ ima n-dimenzionalnu Gausovu raspodelu sa funkcijom gustine

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \, |V|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)V^{-1}(x-m)'\right], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $m = (m_1, m_2, \dots m_n)$, $m_j = E(X_j)$, $1 \le j \le n$, $V = [V_{j,k}]$ pozitivno definitna matrica čiji su elementi $V_{j,k} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)]$, $1 \le j,\ k \le n$, a $|V|$ i V^{-1} su determinanta i inverzna matrica za matricu V respektivno, $(x-m)'$ označava vektor kolonu transponovan vektoru vrsti $(x-m)$.

Karakteristična funkcija n-dimenzionalne Gausove raspodele ima oblik

$$\varphi(t) = \exp\left[i(m,t) - \frac{1}{2}(Vt,t)\right], \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $(\cdot,\cdot)$ skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$.

Neka je $\mathscr{X}=\{X_u: u \in U\}$ Gausovska familija. Za tu familiju imamo

a) vektor očekivanja $m_u= E(X_u)$, $u \in U$,

b) kovariacionu matricu $V_{u,v}= E\,[(X_u-m_u)(X_v-m_v)]$, $u,v \in U$.

Kovariaciona matrica je pozitivno definitna, to jest, za sve $n \geq 1$, i za proizvoljne kompleksne brojeve $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ i parametre $u_1,u_2,\ldots,u_n \in U$ imamo.

$$\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha}_k V_{u_j,u_k} \geq 0.$$

Teorema 1.5.1. Za zadate $(m_u,\ u \in U)$ i realnu, pozitivno definitnu $V=(V_{u,v}: u,v \in U)$ uvek postoji Gausovska familija $\mathscr{X}=\{X_u: u \in U\}$, čiji se vektor očekivanja i kovariaciona matrica poklapa sa (m_u) i $V=(V_{u,v})$ respektivno. Ako postoji druga familija $\mathscr{X}'$, koja ima ta svojstva, tada $\mathscr{X}$ i $\mathscr{X}'$ imaju istu raspodelu.

Dokaz je dat u [13].

Neka je U konačan skup, na primer, $U=\{1,2,\ldots,n\}$. Ako su Gausovske slučajne promenljive X_j, $1 \leq j \leq n$, nezavisne, tada je familija $\mathscr{X}=\{X_j: 1 \leq j \leq n\}$, očigledno Gausovska. Specijalno, ako $m_j=0$, $1 \leq j \leq n$, i $V_{j,k}=\delta_{j,k}$, $1 \leq j$, $k \leq n$, tada će raspodela familije $\mathscr{X}$ biti $\mathscr{N}(0,E)$, gde je E jedinična matrica, i ta raspodela se naziva n-dimenzionalna Gausova raspodela.

Realna Gausovska familija $\mathscr{X}=\{X_u: u \in U\}$ ima mnogo važnih svojstava, i ovde ćemo navesti neka od njih, koja će nam biti potrebna u daljem radu.

Dokazi sledećih tvrđenja mogu se naći na primer u [13,43].

Teorema 1.5.2. Neka je $\mathcal{X}=\{X_u: u \in U\}$ Gausovska familija. Tada

a) da bi X_u, $u \in U$ bili nezavisni, potrebno i dovoljno je da za sve $u \neq v$

$$V_{u,v}=0;$$

b) da bi element X_{u_0} te familije bio nezavisan od $\{X_u: u \in U, u \neq u_0\}$, potrebno je i dovoljno da za svako $u \neq u_0$

$$V_{u,u_0}=0.$$

Teorema 1.5.3. Za Gausovsku familiju $\mathcal{X} = \{X_n: n \geq 1\}$, konvergencija u verovatnoći niza $\{X_n\}$ je ekvivalentna srednje kvadratnoj konvergenciji. Granica X_∞ niza $\{X_n\}$ u tom slučaju je takođe Gausovska slučajna promenljiva.

Dokaz. Uopšte, iz srednje kvadratne konvergencije sledi konvergencija u verovatnoći, pa je potrebno dokazati samo obratno tvrđenje. Stavimo $E(X_j-X_k)=m_{j,k}$, $V(X_j-X_k)=\sigma^2_{j,k}$. Potreban i dovoljan uslov za konvergenciju u srednje kvadratnom je da

$$E[(X_j-X_k)^2] = \sigma^2_{j,k} + m^2_{j,k} \longrightarrow 0, \quad \text{kad } j,k \to \infty,$$

i odatle, ako $\{X_n\}$ ne konvergira srednje kvadratno, tada

$$\lim_{j,k\to\infty} \sup (\sigma^2_{j,k} + m^2_{j,k}) > 0. \tag{1.5.1}$$

Dalje

$$P\{|X_j-X_k| > \varepsilon\} = (2\pi\sigma^2_{j,k})^{-1/2} \int_{|x|>\varepsilon} \exp\left[-\frac{(x-m_{j,k})^2}{2\sigma^2_{j,k}}\right]dx.$$

Kako iz (1.5.1) sledi da $\sigma^2_{j,k}$ i $m_{j,k}$ ne teže ka nuli istovremeno, za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ imamo

$$\lim_{j,k\to\infty} \sup P\{|X_j-X_k| > \varepsilon\} \geq \frac{1}{2}.$$

Ovo znači da $\{X_n\}$ ne konvergira u verovatnoći, što je kontradikcija. □

Konvergencija u srednje kvadratnom niza $\{X_n\}$ je, u stvari, jaka konvergencija u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pa se granica X_∞ može posmatrati kao element prostora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skalarni proizvod $E(X_n) = m_n$, promenljivih X_n i 1, kao i kvadrat norme $V(X_n) = \sigma_n^2$, promenljive $X_n - m_n$, konvergiraju ka granicama m i σ^2 respektivno. Odatle sledi da niz karakterističnih funkcija za X_n konvergira ka karakterističnoj funkciji normalne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodele. Odatle sledi da granica X_∞ ima $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu. Time je dokazan drugi deo tvrđenja. □

Kako iz konvergencije skoro sigurno sledi konvergencija u verovatnoći imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.5.4. Neka je $\mathcal{X} = \{X_n : n \geq 1\}$ Gausovska familija. Iz konvergencije skoro sigurno niza $\{X_n\}$ sledi njegova konvergencija srednje kvadratno.

Ako je data Gausovska familija $\mathcal{X}$, tada iz definicije sledi da je unija $\mathcal{X}$ sa proizvoljnom linearnom kombinacijom njenih elemenata ponovo Gausovska familija. Više od toga, važi sledeća teorema.

Teorema 1.5.5. Neka je $\mathcal{X}$ Gausovska familija. Tada je zatvoreni linearni potprostor $\overline{\mathcal{X}}$ prostora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, generisan sa $\mathcal{X}$, takođe Gausovska familija.

Ovo znači da $\{X_n\}$ ne konvergira u verovatnoći, što je kontradikcija. □

Konvergencija u srednje kvadratnom niza $\{X_n\}$ je, u stvari, jaka konvergencija u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pa se granica X_∞ može posmatrati kao element prostora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skalarni proizvod $E(X_n) = m_n$, promenljivih X_n i 1, kao i kvadrat norme $V(X_n) = \sigma_n^2$, promenljive $X_n - m_n$, konvergiraju ka granicama m i σ^2 respektivno. Odatle sledi da niz karakterističnih funkcija za X_n konvergira ka karakterističnoj funkciji normalne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodele. Odatle sledi da granica X_∞ ima $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu. Time je dokazan drugi deo tvrđenja. □

Kako iz konvergencije skoro sigurno sledi konvergencija u verovatnoći imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.5.4. Neka je $\mathcal{X} = \{X_n : n \geq 1\}$ Gausovska familija. Iz konvergencije skoro sigurno niza $\{X_n\}$ sledi njegova konvergencija srednje kvadratno.

Ako je data Gausovska familija $\mathcal{X}$, tada iz definicije sledi da je unija $\mathcal{X}$ sa proizvoljnom linearnom kombinacijom njenih elemenata ponovo Gausovska familija. Više od toga, važi sledeća teorema.

Teorema 1.5.5. Neka je $\mathcal{X}$ Gausovska familija. Tada je zatvoreni linearni potprostor $\overline{\mathcal{X}}$ prostora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, generisan sa $\mathcal{X}$, takođe Gausovska familija.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da data Gausovska familija $\mathcal{X}$ obrazuje vektorski potprostor, a u suprotnom to se može obezbediti dodavanjem svih potrebnih konačnih linearnih kombinacija. Na taj način proširena, familija $\mathcal{X}$ ostaje Gausovska. Elementi $X_j \in \overline{\mathcal{X}}$, $1 \le j \le n$, se mogu predstaviti kao granice nizova koji konvergiraju srednje kvadratno.

$$\lim_{n\to\infty} X_j^{(n)} = X_j, \quad X_j^{(n)} \in \mathcal{X}.$$

Proizvoljna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^{m} a_j X_j$, $a_1, a_2, \dots a_m \in \mathbb{R}$ se može predstaviti kao granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} a_j X_j, \quad \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} \in \mathcal{X},$$

i saglasno sa drugim delom tvrđenja Teoreme 1.5.4. ta granica je takođe Gausovska slučajna veličina. Odatle sledi da je $\overline{\mathcal{X}}$ Gausovska familija. □

1.5.2. Kompleksna Gausovska familija

Neka je Z kompleksna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je $m=E(Z)$, $m \in \mathbb{C}$, X realni deo od Z a Y imaginarni deo od Z. Imamo

$$Z(\omega) = m + X(\omega) + i\, Y(\omega), \quad \omega \in \Omega. \qquad (1.5.2)$$

Definicija 1.5.3. Ako su slučajne promenljive X i Y u (1.5.2) nezavisne i imaju istu Gausovu raspodelu sa očekivanjem jednakim nuli, tada se Z naziva kompleksna *Gausova slučajna promenljiva.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da data Gausovska familija $\mathcal{X}$ obrazuje vektorski potprostor, a u suprotnom to se može obezbediti dodavanjem svih potrebnih konačnih linearnih kombinacija. Na taj način proširena, familija $\mathcal{X}$ ostaje Gausovska. Elementi $X_j \in \overline{\mathcal{X}}$, $1 \le j \le n$, se mogu predstaviti kao granice nizova koji konvergiraju srednje kvadratno.

$$\lim_{n\to\infty} X_j^{(n)} = X_j, \quad X_j^{(n)} \in \mathcal{X}.$$

Proizvoljna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^{m} a_j X_j$, $a_1, a_2, \ldots a_m \in \mathbb{R}$ se može predstaviti kao granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} a_j X_j, \quad \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} \in \mathcal{X},$$

i saglasno sa drugim delom tvrđenja Teoreme 1.5.4. ta granica je takođe Gausovska slučajna veličina. Odatle sledi da je $\overline{\mathcal{X}}$ Gausovska familija. □

1.5.2. Kompleksna Gausovska familija

Neka je Z kompleksna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je $m=E(Z)$, $m \in \mathbb{C}$, X realni deo od Z a Y imaginarni deo od Z. Imamo

$$Z(\omega) = m + X(\omega) + i\, Y(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.5.2}$$

Definicija 1.5.3. Ako su slučajne promenljive X i Y u (1.5.2) nezavisne i imaju istu Gausovu raspodelu sa očekivanjem jednakim nuli, tada se Z naziva kompleksna *Gausova slučajna promenljiva*.

Dokaz. Možemo pretpostaviti da data Gausovska familija $\mathcal{X}$ obrazuje vektorski potprostor, a u suprotnom to se može obezbediti dodavanjem svih potrebnih konačnih linearnih kombinacija. Na taj način proširena, familija $\mathcal{X}$ ostaje Gausovska. Elementi $X_j \in \overline{\mathcal{X}}$, $1 \le j \le n$, se mogu predstaviti kao granice nizova koji konvergiraju srednje kvadratno.

$$\lim_{n\to\infty} X_j^{(n)} = X_j, \quad X_j^{(n)} \in \mathcal{X}.$$

Proizvoljna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^{m} a_j X_j$, $a_1, a_2, \dots a_m \in \mathbb{R}$ se može predstaviti kao granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} a_j X_j, \quad \sum_{j=1}^{m} a_j X_j^{(n)} \in \mathcal{X},$$

i saglasno sa drugim delom tvrđenja Teoreme 1.5.4. ta granica je takođe Gausovska slučajna veličina. Odatle sledi da je $\overline{\mathcal{X}}$ Gausovska familija. □

1.5.2. Kompleksna Gausovska familija

Neka je Z kompleksna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Neka je $m=E(Z)$, $m \in \mathbb{C}$, X realni deo od Z a Y imaginarni deo od Z. Imamo

$$Z(\omega) = m + X(\omega) + i\, Y(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.5.2}$$

Definicija 1.5.3. Ako su slučajne promenljive X i Y u (1.5.2) nezavisne i imaju istu Gausovu raspodelu sa očekivanjem jednakim nuli, tada se Z naziva kompleksna *Gausova slučajna promenljiva.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da data Gaussovska familija $\mathcal{H}$ obrazuje vektorski potprostor, a u suprotnom to se može obezbediti dodavanjem svih postojećih konačnih linearnih kombinacija. Na taj način proširena, familija $\mathcal{H}$ ostaje Gaussovska. Elementi $\bar{X}_j \in \bar{\mathcal{H}}$, $1 \le j \le n$, se mogu predstaviti kao granice nizova koji konvergiraju srednje kvadratno.

$$\lim_{r\to\infty} X_j^{(r)} = \bar{X}_j, \quad X_j^{(r)} \in \mathcal{H}.$$

Proizvoljna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{X}_j$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ se može predstaviti kao granica

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j X_j^{(r)} = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{X}_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j X_j^{(r)} \in \mathcal{H}.$$

I saglasno sa drugim delom tvrđenja Teorema 1.5.4. ta granica je takođe Gaussovska slučajna veličina. Odatle sledi da je $\bar{\mathcal{H}}$ Gaussovska familija. □

1.5.2. Kompleksna Gaussovska familija

Neka je Z kompleksna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Neka je $m=E(Z)$, $m \in \mathbb{C}$, X realni deo od Z a Y imaginarni deo od Z. Imamo

$$Z(\omega) = m + X(\omega) + i\,Y(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.5.2}$$

Definicija 1.5.5. Ako su slučajne promenljive X i Y u (1.5.2) nezavisne i imaju istu Gaussovu raspodelu sa očekivanjem jednakim nuli, tada se Z naziva kompleksna Gaussova slučajna promenljiva.

Iz definicije sledi da je raspodela kompleksne slučajne promenljive Z definisana samo njenim očekivanjem m i disperzijom $E(|Z-m|^2)$.

Definicija 1.5.4. Neka je $\mathbb{Z}=\{Z_u: u \in U\}$ familija kompleksnih slučajnih promenljivih. Ako je proizvoljna konačna linearna kombinacija $\sum_{j=1}^{n} c_j Z_{u_j}$, $c_j \in \mathbb{C}$, $u_j \in U$, $1 \leq j \leq n$, kompleksna Gausova slučajna promenljiva, tada se $\mathbb{Z}$ naziva *kompleksna Gausovska familija.*

Ako je familija $\mathbb{Z}$ Gausovska, tada je proizvoljna pod familija $\mathbb{Z}' \subset \mathbb{Z}$ ponovo Gausovska familija. Takođe, familija $\mathbb{Z}' = \{\bar{Z}_u: u \in U\}$, gde je $\bar{Z}$ slučajna promenljiva kompleksno konjugovana za Z, je isto Gausovska.

Teorema 1.5.6. Neka je $\mathbb{Z} = \{Z_u, u \in U\}$ kompleksna Gausovska familija gde su elementi oblika $Z_u=m_u + X_u + i\, Y_u$, $u \in U$. Tada su familija $\mathbb{X} = \{X_u: u \in U\}$ i $\mathbb{Y} = \{Y_u: u \in U\}$ realne Gausovske familije. Unija $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ je takođe realna Gausovska familija .

Teorema 1.5.7. Neka je $\mathbb{Z} = \{Z_u: u \in U\}$ familija nezavisnih kompleksnih slučajnih promenljivih. Ako je svaka Z_u, $u \in U$ kompleksna Gausova slučajna promenljiva tada je $\mathbb{Z}$ kompleksna Gausovska familija.

Teorema 1.5.8. Neka je $\mathbb{Z} = \{Z_u: u \in U\}$ kompleksna Gausovska familija. Potreban i dovoljan uslov da su Z_{u_1}, Z_{u_2}, $\in \mathbb{Z}$, $u_1 \neq u_2$ nezavisni, je da je njihova kovarijacija

$$E[(Z_{u_1}-m_{u_1})(Z_{u_2}-m_{u_2})] = 0, \quad \text{gde je} \quad m_{u_j}=E(Z_{u_j}).$$

Označimo sa $(m_u: u \in U)$ vektor matematičkih očekivanja i sa $(V_{u,v}: u,v \in U)$ kovarijacionu matricu kompleksne Gausovske familije $\mathbb{Z}=\{Z_u: u \in U\}$.

Teorema 1.5.9. Kovarijaciona matrica $(V_{u,v}:u,v \in U\}$ kompleksne Gausovske familije $\mathbb{Z}=\{Z_u: u \in U\}$ zadovoljava sledeće uslove:

a) V je pozitivno definitna,

b) ako je $Z_u = m_u + X_u + i\, Y_u$, $u \in U$, tada

$$E(X_uX_v) = E(Y_uY_v) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (V_{u,v})$$

$$-E(X_uY_v) = E(Y_uX_v) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} (V_{u,v}), \quad u,v \in U.$$

(Re i Im označavaju realni i imaginarni deo respektivno).

Teorema 1.5.10. Za proizvoljni vektor $(m_u: u \in U)$ i pozitivno definitnu matricu $(V_{u,v}:u,v \in U)$, postoji kompleksna Gausovska familija $\mathbb{Z}=\{Z_u: u \in U\}$ čiji se vektor matematičkih očekivanja i kovarijaciona matrica poklapa sa datim vektorom i matricom. Raspodela te familije je jednoznačno određena.

U daljem radu pretpostavićemo da je $E(z)=0$, što ne umanjuje opštost.

Teorema 1.5.11. Potreban i dovoljan uslov da niz $\{Z_n\}$ kompleksnih slučajnih promenljivih, gde je $Z_n = X_n + i\, Y_n$, $n \geq 1$, konvergira srednje kvadratno je da nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju srednje kvadratno.

$$E[(Z_{u_1}-m_{u_1})(Z_{u_2}-m_{u_2})] = 0, \quad \text{gde je } m_u = E(Z_u)$$

Označimo sa $(m_u: u \in U)$ vektor matematičkih očekivanja i sa $(V_{u,v}: u,v \in U)$ kovarijacionu matricu kompleksne Gaussovske familije $Z=\{Z_u: u \in U\}$.

Teorema 1.5.9. Kovarijaciona matrica $(V_{u,v}: u,v \in U)$ kompleksne Gaussovske familije $Z=\{Z_u: u \in U\}$ zadovoljava sledeće uslove.

a) V je pozitivno definitna.

b) ako je $Z_u = m_u + X_u + i\,Y_u$, $u \in U$, tada

$$E(X_u X_v) = E(Y_u Y_v) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(V_{u,v})$$

$$-E(X_u Y_v) = E(Y_u X_v) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(V_{u,v}), \quad u,v \in U.$$

(Re i Im označavaju realni i imaginarni deo respektivno)

Teorema 1.5.10. Za proizvoljni vektor $(m_u: u \in U)$ i pozitivno definitnu matricu $(V_{u,v}: u,v \in U)$, postoji kompleksna Gaussovska familija $Z=\{Z_u: u \in U\}$ čiji su vektor matematičkih očekivanja i kovarijaciona matrica potpuno određeni vektorom i matricom. Raspodela te familije je jednoznačno određena.

U daljem radu pretpostavljamo da je $E(Z)=0$, što ne umanjuje opštost.

Teorema 1.5.11. Potreban i dovoljan uslov da niz $\{Z_n\}$ kompleksnih slučajnih promenljivih, gde je $Z_n = X_n + i\,Y_n$, $n \geq 1$, konvergira srednje kvadratno je da nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju srednje kvadratno.

Dokaz. Neka je $Z_n = X_n + iY_n$ i neka je granica niza $\{Z_n\}$ slučajna promenljiva $Z = X + iY$. Imamo da je

$$E[\,|Z_n-Z|^2] = E[\,|X_n+iY_n-X-iY|^2] = E[\,(X_n-X)^2+(Y_n-Y)^2] =$$
$$= E[\,(X_n-X)^2] + E[\,(Y_n-Y)^2].\ \square$$

Teorema 1.5.12. Potreban i dovoljan uslov da niz $\{Z_n\}$ kompleksnih slučajnih promenljivih, gde je $Z_n = X_n + iY_n$, konvergira u verovatnoći je da nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju u verovatnoći.

Dokaz. Neka $Z_n \xrightarrow{v} Z$, gde je $Z_n = X_n + iY_n$, $Z = X + iY$. Tada je

$$P\{|Z_n-Z| \geq \varepsilon\} = P\{|X_n+iY_n-X-iY| \geq \varepsilon\} \leq$$
$$\leq P\{|X_n-X| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} + P\{|Y_n-Y| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\},$$

odakle sledi da ako nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju u verovatnoći, konvergira i niz $\{Z_n\}$.

Obratno, imamo da je

$$P\{|X_n-X| \geq \varepsilon\} \leq P\{|Z_n-Z| \geq \varepsilon\} \text{ i}$$
$$P\{|Y_n-Y| \geq \varepsilon\} \leq P\{|Z_n-Z| \geq \varepsilon\},$$

odakle sledi da $Z_n \xrightarrow{v} Z$ implicira $X_n \xrightarrow{v} X$, i $Y_n \xrightarrow{v} Y$. $\square$

Teorema 1.5.13. Potreban i dovoljan uslov da $Z_n \xrightarrow{s.s.} Z$, gde je $Z_n = X_n+iY_n$, a $Z = X+iY$ je da $X_n \xrightarrow{s.s.} X$, $Y_n \xrightarrow{s.s.} Y$.

Dokaz. Direktno sledi iz definicije skoro sigurne konvergencije. $\square$

Dokaz. Neka je $Z_n = X_n + iY_n$ i neka je granica niza $\{Z_n\}$ slučajna promenljiva $Z = X + iY$. Imamo da je

$$E(|Z_n - Z|^2) = E(|X_n + iY_n - X - iY|^2) = E[(X_n - X)^2 + (Y_n - Y)^2] =$$
$$= E[(X_n - X)^2] + E[(Y_n - Y)^2]. \square$$

Teorema 1.5.12. Potreban i dovoljan uslov da niz $\{Z_n\}$ kompleksnih slučajnih promenljivih, gde je $Z_n = X_n + iY_n$, konvergira u verovatnoći je da nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju u verovatnoći.

Dokaz. Neka $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y$, gde je $Z_n = X_n + iY_n$, $Z = X + iY$. Tada je

$$P(|Z_n - Z| \ge \varepsilon) = P(|X_n + iY_n - X - iY| \ge \varepsilon) \le$$
$$\le P(|X_n - X| \ge \tfrac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \ge \tfrac{\varepsilon}{2}),$$

odakle sledi da ako nizovi $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ konvergiraju u verovatnoći, konvergira i niz $\{Z_n\}$.

Obratno, imamo da je

$$P(|X_n - X| \ge \varepsilon) \le P(|Z_n - Z| \ge \varepsilon),$$
$$P(|Y_n - Y| \ge \varepsilon) \le P(|Z_n - Z| \ge \varepsilon),$$

odakle sledi da $Z_n \xrightarrow{P} Z$ implicira $X_n \xrightarrow{P} X$, i $Y_n \xrightarrow{P} Y$. $\square$

Teorema 1.5.13. Potreban i dovoljan uslov da $Z_n \xrightarrow{s.s.} Z$, gde je $Z_n = X_n + iY_n$, a $Z = X + iY$ je da $X_n \xrightarrow{s.s.} X$, $Y_n \xrightarrow{s.s.} Y$.

Dokaz. Direktno sledi iz definicije skoro sigurne konvergencije. $\square$

Teorema 1.5.14. Neka je $\{Z_n = X_n + iY_n,\ n \geq 1\}$ niz kompleksnih Gausovih slučajnih promenljivih koji konvergira srednje kvadratno ka kompleksnoj slučajnoj promenljivoj $Z = X+iY$. Tada je Z kompleksna Gausova slučajna promenljiva.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.5.11. i Teoreme 1.5.3. iz $Z_n \xrightarrow{s.k.} X$ i $Z_n \xrightarrow{s.k.} Z$ sledi $X_n \xrightarrow{s.k.} X$ i $Y_n \xrightarrow{s.k.} Y$. Kako X_n i Y_n, $n \geq 1$, imaju istu, Gausovu raspodelu, sledi da X i Y imaju istu Gausovu raspodelu. Takođe, iz činjenice da su X_n, Y_n nezavisne za svako $n \geq 1$ sledi da su i X i Y nezavisne slučajne promenljive. □

Na osnovu ovih tvrđenja i Teorema 1.5.3. i 1.5.4. direktno slede sledeće teoreme.

Teorema 1.5.15. Konvergencija u verovatnoći niza kompleksnih Gausovih slučajnih promenljivih implicira njegovu srednje kvadratnu konvergenciju.

Teorema 1.5.16. Konvergencija skoro sigurno niza kompleksnih Gausovih slučajnih promenljivih implicira njegovu srednje kvadratnu konvergenciju.

GLAVA II

U ovoj glavi daćemo neke osnovne pojmove teorije uopštenih funkcija i definisati prostore na kojima ćemo kasnije posmatrati uopštene slučajne procese. Za detaljnija objašnjenja videti [25,24,39,34,47].

2.1. OSNOVNI POJMOVI I PROSTOR DISTRIBUCIJA

1. Funkcije i prostori funkcija

Neka je (L,τ) vektorsko topološki prostor i $\sigma=\{B_\alpha\colon \alpha\in A\}$ familija ograničenih podskupova od L. Kažemo da je σ *totalna familija* ograničenih skupova ako je linearno proširenje od $\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$ prostor L. Neka je (E,τ_1) vektorsko topološki prostor a (F,τ_2) lokalno konveksni prostor. Sa $\mathcal{L}(E,F)$ označimo skup neprekidnih linearnih preslikavanja iz (E,τ_1) u (F,τ_2). Neka je σ totalna familija ograničenih skupova u E, S proizvoljan elemenat iz σ i V proizvoljna okolina nule u (F,τ_2). Podskupovi od $\mathcal{L}(E,F)$ oblika $M(S,V)=\{f\colon f(S)\subset V\}$ čine bazu okolina nule u vektorskom prostoru $\mathcal{L}(E,F)$, u odnosu na koju je $\mathcal{L}(E,F)$ lokalno konveksni prostor.

Ako je σ familija svih konačnih podskupova od E tada se odgovarajuća topologija u $\mathcal{L}(E,F)$ naziva *slaba* topologija i obeležava se sa τ_s.

Ako je σ familija svih kompaktnih podskupova od E tada se odgovarajuća topologija u $\mathcal{L}(E,F)$ naziva topologija *kompaktne konvergencije*, i označava se sa τ_k.

Ako je σ familija svih ograničenih podskupova od E, tada

se odgovarajuća topologija u $\mathcal{L}(E,F)$ naziva *jaka* topologija i označava se sa τ_b.

Između ovih topologija u $\mathcal{L}(E,F)$ postoji sledeći odnos:

$$\tau_s \le \tau_k \le \tau_b,$$

gde je simbolom $\tau_1 \le \tau_2$ označeno da je topologija τ_2 finija od topologije τ_1.

Neka je V vektorsko topološki prostor. Skup linearnih i neprekidnih funkcionala na V naziva se dualni prostor za V i obeležava sa V'.

supp f - nosač funkcije f, odnosno zatvorenje skupa tačaka u kojima f nije nula

ess sup $|f(x)|$ - esencijalni supremum funkcije f

G - otvoren skup u $\mathbb{R}^n$

C^m (G) - prostor m puta diferencijabilnih kompleksnih funkcija na G, $m \in \mathbb{N}_0$ ili $m=+\infty$

C_c^∞ (G) - prostor C^∞ kompleksnih funkcija koje imaju kompaktan nosač. Elementi $C_c^\infty(G)$ se često nazivaju osnovne (test) funkcije

C_c^∞ (K) - prostor C^∞ kompleksnih funkcija na $\mathbb{R}^n$ koje nestaju identički van kompaktnog skupa K

S ⊂⊂ G - S je relativno kompaktan u G (zatvorenje od S u G je kompaktan skup u G)

Montelov prostor - lokalno konveksan, bačvast Hauzdorfov prostor u kojem je svaki zatvoren i ograničen skup kompaktan. Strogi dual Montelovog prostora je takođe Montelov prostor.

Topologija u C^{∞}

Neka je K kompaktan podskup od G, $m \in \mathbb{N}_0$. Za $\varphi \in C^{\infty}(G)$ označimo

$$p_{m,K}(\varphi) = \underset{x \in K}{\mathrm{Max}} \sum_{|\alpha| \le m} |\partial^{\alpha} \varphi(x)|.$$

Tada, menjajući K i m , $p_{m,K}$ formira bazu neprekidnih seminormi u $C^{\infty}(G)$. U stvari, dovoljno je posmatrati samo slučaj kada K prolazi "iscrpljujući" niz kompaktnih podskupova od G, $\{K_{\nu}: \nu \in \mathbb{N}_0\}$ - što znači da je $K_{\nu} \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ ($\mathring{K}$ je unutrašnjost skupa K) i, da je svaki kompaktan podskup od G sadržan u nekom K_{ν}, $\nu \in \mathbb{N}_0$. Označimo $p_m = p_{m,K_m}$. Seminorme p_m definišu topologiju u $C^{\infty}(G)$. Baza okolina u $C^{\infty}(G)$ je

$$V_{m,\varepsilon}(\varphi_0)=\{\varphi \in C^{\infty}(G):\ p_m(\varphi-\varphi_0) < \varepsilon\},$$

za odgovarajući izbor $m \in N_0$, i $\varepsilon > 0$. Niz funkcija iz $C^{\infty}(G)$ $\{\varphi_n: n \in \mathbb{N}\}$ konvergira ka φ_0 iz $C^{\infty}(G)$ ako i samo ako, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^{\alpha}\varphi_j$ konvergira ka $\partial^{\alpha}\varphi$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu od G.

Topologija u $C^{\infty}(G)$ se može definisati pomoću metrike:

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \inf(1,\ p_m(\varphi-\psi)).$$

Sve takve metrike su ekvivalentne, i sa takvom topologijom $C^{\infty}(G)$ je kompletan metrički prostor. Snabdeven sa prirodnom (t.j. C^{∞}) topologijom, $C^{\infty}(G)$ je Frechet-ov prostor, to jest lokalno konveksan vektorsko topološki prostor koji je metrizabilan i kompletan. U C^{∞} topologiji svaki ograničen i zatvoren skup je kompaktan. To znači da je $C^{\infty}(G)$ sa navedenom topologijom Montelov prostor. Podskup u $C^{\infty}(G)$ je ograničen ako

Topologija u C^∞

Neka je K kompaktan podskup od Ω, $m \in \mathbb{N}_0$. Za $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ označimo

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{x \in K,\, |\alpha| \le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Tada, varijajući K i m, $p_{m,K}$ formira bazu neprekidnih seminormi u $C^\infty(\Omega)$. U stvari, dovoljno je posmatrati samo slučaj kada K prolazi "iscrpljujući" niz kompaktnih podskupova od Ω, $\{K_\nu;\ \nu \in \mathbb{N}_0\}$. Ovo znači da je $K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1}$ ($\mathring{K}$ je unutrašnjost skupa K) i da je svaki kompaktan podskup od Ω sadržan u nekom K_ν, $\nu \in \mathbb{N}_0$. Označimo $p_m = p_{m,K_m}$. Seminorme p_m definišu topologiju u $C^\infty(\Omega)$. Baza okolina u $C^\infty(\Omega)$ je

$$V_{m,\varepsilon}(\varphi_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega);\ p_m(\varphi - \varphi_0) < \varepsilon\},$$

za odgovarajući izbor $m \in \mathbb{N}_0$, i $\varepsilon > 0$. Niz funkcija iz $C^\infty(\Omega)$ $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ konvergira ka φ_0 u $C^\infty(\Omega)$ ako i samo ako, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha \varphi_n$ konvergira ka $\partial^\alpha \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom podskupu od Ω.

Topologija u $C^\infty(\Omega)$ se može definisati pomoću metrike:

$$d(\varphi,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \inf(1,\ p_m(\varphi - \psi)).$$

Sve takve metrike su ekvivalentne, i sa takvom topologijom $C^\infty(\Omega)$ je kompletan metrički prostor. Snabdeven sa pomenutom (t.j. C^∞) topologijom, $C^\infty(\Omega)$ je Frechet-ov prostor, to jest lokalno konveksan vektorski topološki prostor koji je metrizabilan i kompletan. U C^∞ topologiji svaki ograničen i zatvoren skup je kompaktan. To znači da je $C^\infty(\Omega)$ sa navedenom topologijom Montel-ov prostor. Podskup u $C^\infty(\Omega)$ je ograničen ako je svaka seminorma $p_{m,K}$ ograničena na njemu.

Prirodna topologija prostora $C_c^\infty(G)$

Za bilo koji kompaktan podskup K od G, $C_c^\infty(G)$ je zatvoren, linearan, potprostor od $C^\infty(G)$ i snabdeven je indukovanom topologijom. U skupovnom smislu je

$$C_c^\infty(G) = \bigcup_{K\subset\subset G} C_c^\infty(K).$$

Važe sledeće osobine

(1) Niz konvergira u $C_c^\infty(G)$ ako i samo ako je sadržan u $C_c^\infty(K)$ za neki kompaktan podskup K od G i konvergira u $C_c^\infty(K)$.

(2) Podskup B od $C_c^\infty(G)$ je ograničen ako i samo ako je sadržan i ograničen u nekom $C_c^\infty(K)$.

(3) Linearno preslikavanje $C_c^\infty(G)$ u proizvoljan lokalno konveksan prostor E je neprekidno ako i samo ako je njegova restrikcija na svaki podprostor $C_c^\infty(K)$, $K \subset\subset G$, neprekidna. (t.j. slika konvergentnog niža je konvergentan niz).

(4) $C_c^\infty(G)$ je Montelov prostor.

2. Diferencijalni operatori na G

Neka je

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = D^\alpha.$$

Linearni parcijalni diferencijalni operatori na G su polinomi od D = $(D_1, \dots, D_2)$ sa koeficijentima iz $C^{\infty}(\Omega)$, tako da je

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} c_{\alpha}(x)D^{\alpha}.$$

Ako, za neko α, sa $|\alpha|=m$, c_{α} ne nestaje identički na G, m se naziva *red* od P(x,D). Kada su koeficijenti konstante, pišemo P(D).

Operator ${}^{t}P(x,D)$ *transponovan* za P(x,D), definisan je sa

$${}^{t}P(x,D)\ u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\ [\,c_{\alpha}(x)\ u(x)]$$

Operator $P(x,D)^{*}$, *adjungovani* za P(x,D) je definisan sa

$$P(x,D)^{*} = \overline{{}^{t}P(x,d)}.$$

Crta označava da su koeficijenti zamenjeni sa svojim konjugovano kompleksnim vrednostima.

3. Topologija Schwartzovog prostora $\mathcal{S}$

Schwartzov prostor funkcija na $\mathbb{R}^n$ brzoopadajućih u beskonačnosti je prostor

$$\mathcal{S}=\{\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n): q_{m,M}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} [\,(1+|x|^{M}) \sum_{|\alpha|\le m} |\partial^{\alpha}\varphi(x)|\,] < \infty,\ m,M \in \mathbb{N}_0\}.$$

Topologija u $\mathcal{S}$ je definisana familijom seminormi $q_{m,M}$, $m,M \in \mathbb{N}_0$. $\mathcal{S}$ je Frechetov prostor. Svaki ograničen i zatvoren skup u $\mathcal{S}$ je kompaktan. (Skup je ograničen u $\mathcal{S}$ ako su seminorme ograničene na njemu).

Sledeća potapanja su sva neprekidna i slika im je gust skup

(1) $C_c^\infty(G) \hookrightarrow L^p(G) \hookrightarrow L^p_{loc}(G)$, $C_c^\infty(G) \hookrightarrow C^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(G)$, $(1 \le p < +\infty)$

(2) $C_c^\infty \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow L^p$, $(1 \le p < +\infty)$.

4. Distribucije i prostori distribucija

$\mathcal{D}'(G)$ – prostor distribucija na G, odnosno prostor linearnih i neprekidnih preslikavanja iz $C_c^\infty(G)$ u $\mathbb{C}$, odnosno dual od $C_c^\infty(G)$, odnosno $\mathcal{L}(C_c^\infty(G), \mathbb{C})$

supp T – nosač distribucije T, odnosno presek svih zatvorenih podskupova u čijem komplementu T identički nestaje

$\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi) = (T, \overline{\varphi}) = \int T(x)\varphi(x)dx$ uparivanje između test funkcije φ i distribucije T. Tako, $T \in \mathcal{D}'(G), \varphi \in C_c^\infty(G)$ ili $T \in \mathcal{E}'(G)$, $\varphi \in C^\infty(G)$

$\mathcal{E}'(G)$ – prostor distribucija sa kompaktnim nosačem u G, po definiciji dual od $C^\infty(G)$.

Konvergencija distribucija

Konvergencija distribucija je uniformna konvergencija na ograničenom podskupu od $C_c^\infty(G)$. Za nizove je ista kao i slaba konvergencija: $T_j \to T_0$, $j \to \infty$, ako i samo ako $\langle T_j, \varphi\rangle \to \langle T_0, \varphi\rangle$, $j \to \infty$, za svaku osnovnu funkciju φ.

Ograničeni skupovi distribucija

Skup B distribucija je ograničen ako i samo ako je za svako $\varphi \in C_c^\infty(G)$

$$\sup_{T\in B} |\langle T,\varphi\rangle| < +\infty.$$

Skupovi koji su ograničeni i zatvoreni u $\mathcal{D}'(G)$ (ili $\mathcal{E}'(G)$) su kompaktni.

Primena diferencijalnog operatora na distribuciju

Ako je $P(x,D)$ diferencijalni operator ne G, njegovo dejstvo na $T \in \mathcal{D}'(G)$ je definisano pomoću formule parcijalne integracije

$$\langle P(x,D),\ \varphi\rangle = \langle T,\ {}^{t}P(x,D)\varphi\rangle, \quad \varphi \in C_c^{\infty}(G).$$

Jasno je da $P(x,D)$ definiše linearno neprekidno preslikavanje od $\mathcal{D}'(G)$ (odnosno $\mathcal{E}'(G)$) u sebe. Specijalan slučaj je kada je red operatora nula, odnosno u tom slučaju imamo množenje sa C^{∞} funkcijom ψ:

$$\langle \psi T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\psi\rangle,$$

koje definiše neprekidni endomorfizam od $\mathcal{D}'(G)$, ($\mathcal{E}'(G)$).

Primetimo da je $\operatorname{supp} P(x,D)T \subset \operatorname{supp} T$, odnosno diferencijalni operator smanjuje nosač.

Lokalna svojstva distribucije

Ako je data $T \subset \mathcal{D}'(G)$ i $G' \subset\subset G$, postoji konačan skup neprekidnih funkcija f_j i diferencijalnih operatora P_j na G, $j=1,2,\dots,s$, tako da je na G'

$$T = \sum_{j=1}^{s} P_j f_j,$$

odnosno,

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{j=1}^{m} \int f_j(x)\, {}^tP_j\,\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in C_c^{\infty}(G).$$

Ako T ima kompaktan nosač, može se uzeti da ova reprezentacija preko konačnog zbira važi na celom G, a neprekidne funkcije f_j se mogu uzeti tako da se anuliraju van neke okoline od supp T.

Distribucije koje su funkcije

Kažemo da je distribucija T na Ω funkcija ako postoji funkcija f iz $L^1_{loc}(G)$ tako da je

$$\langle T,\varphi\rangle = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in C_c^{\infty}(G).$$

Označimo takvu distribuciju T sa T_f. Tada je $f \to T_f$ linearna injekcija od $L^1_{loc}(G)$ u $\mathcal{D}'(G)$. Ovo preslikavanje definiše neprekidne injekcije u $\mathcal{D}'(G)$ prostora

$$C^m(G),\ (0 \le m \le +\infty);\ C_c^{\infty}(G);\ L^p_{loc}(G),\ (1 \le p \le +\infty).$$

Takođe, imamo neprekidnu injekciju u $\mathcal{E}'(G)$ prostora

$$C_c^m,\ (0 \le m \le +\infty);\ L_c^p(G),\ (1 \le p \le +\infty).$$

Sve ove injekcije imaju guste slike.

Ako je $\mathcal{O}$ otvoren podskup od G, kažemo da je T (lokalno L^1) funkcija na $\mathcal{O}$, ako je to tačno za restrikciju od T na $\mathcal{O}$ (odnosno na $C_c^{\infty}(\mathcal{O})$). Na isti način može se kazati da je T funkcija neke druge vrste, na primer C^{∞} funkcija.

Radonova mera je linearni neprekidni funkcional na prostoru C^0 neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}^n$. C^0 je snabdeven topologijom uniformne konvergencije na kompaktnim podskupovima

od $\mathbb{R}^n$.

$\delta=\delta(x)$ - Dirakova mera u koordinatnom početku od $\mathbb{R}^n$. To je distribucija koja preslikava $\varphi \to \varphi(0)$, $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

$\delta_{x_0}=\delta(x-x_0)$ - Dirakova mera u tački x_0

$\delta^{(\alpha)}=\partial_x^{\alpha}\delta$ - α -ti izvod Dirakove mere δ

Ove distribucije nisu funkcije, za $\alpha\neq0$, nisu čak ni Radonove mere.

2.2. PROSTORI $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$

U ovom delu ćemo detaljno opisati prostore $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, na kojima ćemo u narednoj glavi definisati uopštene slučajne procese.

U [47] Zemanian je uveo prostore $\mathcal{A}$ test funkcija, i njegov dual $\mathcal{A}'$. Sledeći njegove ideje konstruisaćemo skalu prostora $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, čiji se elementi mogu prikazati u obliku beskonačnog zbira. Koristićemo notaciju iz [47].

Neka je I otvoren interval u skupu realnih brojeva i $L^2(I)$ prostor klasa ekvivalencije kvadratnih integrabilnih funkcija na I sa vrednostima u $\mathbb{C}$. Obeležimo normu u $L^2(I)$ sa

$$\|\varphi\|_0 = \Big(\int_I |\varphi(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Neka je $C^{\infty}(I)$ skup beskonačno diferencijabilnih (glatkih) funkcija na I.

Neka je $\mathcal{R}$ linearan diferencijalan samo-adjungovani operator oblika

$$\mathcal{R} = \Theta_0 D^{n_1}\Theta_1 \dots D^{n_\nu}\Theta_\nu ,$$

takav da je

$$\mathcal{R} = \overline{\Theta}_\nu (-D)^{n_\nu} \dots (-D)^{n_2} \overline{\Theta}_1 (-D)^{n_1} \overline{\Theta}_0$$

$$\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}(\mathcal{R}^k), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\mathcal{R}^0 = J,$$

gde je J identički operator, $D = d/dx$, $n_k \in \mathbb{N}_0$, $k=1,\dots,\nu$, a Θ_k, $k=0,1\dots,\nu$, glatke funkcije bez nula na I. Pretpostavimo da postoje: niz realnih brojeva $\{\lambda_n:\ n \in \mathbb{N}_0\}$ i niz glatkih funkcija u $L^2(I)$, $\{\psi_n:\ n \in \mathbb{N}_0\}$ takvih da $|\lambda_n| \to \infty$, $n \to \infty$, i

$$\mathcal{R}\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dalje, pretpostavimo da $\{\psi_n:\ n \in \mathbb{N}_0\}$ čini ortonormiran sistem u $L^2(I)$. Možemo prenumerisati λ_n i ψ_n tako da je $|\lambda_0| \le |\lambda_1| \le \le |\lambda_2| \le \dots$.

Obeležimo

$$\tilde{\lambda}_n = \begin{cases} \lambda_n, & \lambda_n \neq 0 \\ 1, & \lambda_n = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$\{\tilde{\lambda}_n:\ n \in \mathbb{N}_0\}$ je niz takav da je $|\tilde{\lambda}_n| \to \infty$, $n \to \infty$.

Definišimo

$$\mathcal{A}_k = \{\varphi \in L^2(I):\ \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m,\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2\ \tilde{\lambda}_m^{2k} < \infty\},\ k \in \mathbb{N}_0 .$$

Prostor $\mathcal{A}_k$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom definisan na sledeći način

$$(\varphi,\psi)_k = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\overline{b}_m\ \tilde{\lambda}_m^{2k}, \quad \varphi,\psi \in \mathcal{A}_k, \quad \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m, \quad \psi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m.$$

Norma u $\mathcal{A}_k$ je

$$\|\varphi\|_k = (\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2\ \tilde{\lambda}_m^{2k})^{1/2}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_k.$$

Primetimo da je ortonormirani sistem u $\mathcal{A}_k$, $\tilde{\psi}_j = \psi_j\tilde{\lambda}_j^{-k}$,

$j \in \mathbb{N}_0$. Očigledno je da je $\mathscr{A}_0=L^2(I)$.

Neka su, za $k \in \mathbb{N}_0$

$$S=\{\varphi_s \in \mathscr{A}_k:\ \varphi_s = \sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m,\ s \in \mathbb{N}_0,\ a_m \in \mathbb{C},\ m \geq 0\}.$$

$$S_r=\{\varphi_s \in \mathscr{A}_k:\ \varphi_s = \sum_{m=0}^{s} (a_m+ib_m)\psi_m,\ s \in \mathbb{N}_0,\ a_m,b_m \in \mathbb{Q}\},$$

gde je $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva. Skup S je gust, a skup S_r prebrojiv gust u $\mathscr{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. ($S_r \subset S$).

Operator $\mathscr{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ je definisan na skupu S. Iz činjenice da je preslikavanje $\mathscr{R}^n$: $S \longrightarrow L^2(I)$, $n \in \mathbb{N}_0$, linearno i neprekidno, sledi da se $\mathscr{R}^n$, $n \leq k$, može linearno i neprekidno proširiti na prostor $\mathscr{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Obeležimo to proširenje sa $\tilde{\mathscr{R}}^n$, $n \leq k$. Neka je $\varphi_s = \sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m \in S$ i $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathscr{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Imamo da $\varphi_s \to \varphi$, $s \to \infty$ u $\mathscr{A}_k$, pa je

$$\tilde{\mathscr{R}}^n\varphi = \tilde{\mathscr{R}}^n\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m\Big) = \lim_{s\to\infty} \Big(\mathscr{R}^n\Big(\sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m\Big)\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\lambda_m^n\psi_m.$$

Neka je $\varphi \in \mathscr{A}_k \cap C^{\infty}(I)$, $k \in \mathbb{N}_0$ i $(\tilde{\mathscr{R}}^n\varphi,\ \psi_m)=(\varphi,\tilde{\mathscr{R}}^n\psi_m)$, $n \leq k$, $m \in \mathbb{N}_0$. Tada je $\tilde{\mathscr{R}}^n\varphi=\mathscr{R}^n\varphi$, $n \leq k$. Dalje ćemo $\tilde{\mathscr{R}}$ obeležavati sa $\mathscr{R}$.

Definišimo prostore $\mathscr{A}_{-k}$, $k \in N_0$ na sledeći formalan način

$$\mathscr{A}_{-k}=\{f:\ f= \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m,\ \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2\ \tilde{\lambda}_m^{-2k} < \infty,\ b_m \in \mathbb{C}\},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor $\mathscr{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ je vektorski prostor, sa operacijama definisanim na uobičajeni način. Na $\mathscr{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ možemo definisati skalarni proizvod i normu na sledeći način.

Neka je $f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m$, $g = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\psi_m \in \mathscr{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(f,g)_{-k}= \sum_{m=0}^{\infty} b_m\bar{c}_m\ \tilde{\lambda}_m^{-2k},\quad k \in \mathbb{N}_0$$

$j \in \mathbb{N}_0$. Očigledno je da je $\mathcal{A}_0 = L^2(I)$.

Neka su, za $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{S}_k = \{\varphi_k \in \mathcal{A}_k;\ \varphi_k = \sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m,\ s \in \mathbb{N}_0,\ a_m \in \mathbb{C},\ m \le s\},$$

$$\mathcal{R}_k = \{\varphi_k \in \mathcal{A}_k;\ \varphi_k = \sum_{m=0}^{s} (a_m + ib_m)\psi_m,\ s \in \mathbb{N}_0,\ a_m, b_m \in \mathbb{Q}\},$$

gde je $\mathbb{Q}$ skup racionalnih brojeva. Skup S je gust, a skup $\mathcal{R}_k$ prebrojiv gust u $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ ($\mathcal{R}_k = \mathcal{R}$).

Operator $\mathcal{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ je definisan na skupu S. Iz činjenice da je preslikavanje $\mathcal{R}^n: S \to L^2(I)$, $n \in \mathbb{N}_0$, linearno i neprekidno, sledi da se $\mathcal{R}^n$, $n \le k$, može linearno i neprekidno proširiti na prostor $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Označimo to proširenje sa $\tilde{\mathcal{R}}^n$, $n \le k$. Neka je $\varphi_s = \sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m \in S$ i $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Lako je da $\varphi_s \to \varphi$, $s \to \infty$ u $\mathcal{A}_k$, pa je

$$\tilde{\mathcal{R}}^n\varphi = \tilde{\mathcal{R}}^n\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m\Big) = \lim_{s\to\infty}\Big(\mathcal{R}^n\Big(\sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m\Big)\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\lambda_m^n\psi_m.$$

Neka je $\varphi \in \mathcal{A}_k \cap C^{2k}(I)$, $m \in \mathbb{N}_0$ i $(\tilde{\mathcal{R}}^n\varphi, \psi_m) = (\varphi, \mathcal{R}^n\psi_m)$, $n \le k$, $m \in \mathbb{N}_0$. Tada je $\tilde{\mathcal{R}}^n\varphi = \mathcal{R}^n\varphi$, $n \le k$. Dalje ćemo $\tilde{\mathcal{R}}$ obeležavati sa $\mathcal{R}$.

Definišimo prostore $\mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ na sledeći formalni način

$$\mathcal{A}_{-k} = \{f;\ f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m,\ \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2\lambda_m^{-2k} < \infty,\ b_m \in \mathbb{C}\},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor $\mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ je vektorski prostor, sa operacijama definisanim na uobičajeni način. Na $\mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ možemo definisati skalarni proizvod i normu na sledeći način.

Neka je $f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m$, $g = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\psi_m \in \mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada je

$$(f,g)_{-k} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\bar{c}_m\lambda_m^{-2k},\quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\|f\|_{-k} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \; \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Očigledno, $\mathcal{A}_{-k}$ je Hilbertov prostor , $k \in \mathbb{N}_0$.

Neka je $\mathcal{A}_k'$, $k \in \mathbb{N}_0$, dualni prostor za $\mathcal{A}_k$. Važi sledeća teorema.

Teorema 2.2.1. Prostori $\mathcal{A}_k'$ i $\mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ su izometrični.

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{A}_k'$, $k \in \mathbb{N}_0$. Obeležimo $b_m=(f,\psi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, i neka je $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Kako je f linearno i neprekidno sledi da je

$$(f,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m b_m.$$

Iz [25] sledi da je

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \; \tilde{\lambda}_m^{-2k} < \infty.$$

Prema tome, postoji elemenat $g \in \mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ tako da je

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m.$$

Suprotno, ako je $g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m \in \mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, tako da je za

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathcal{A}_k,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m b_m \le \infty,$$

tada preslikavanje $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m b_m$, $\varphi \in \mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ definiše elemenat iz $\mathcal{A}_k'$. Obeležimo taj elemenat sa f. Očigledno je da $b_m=(f,\psi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Prema tome, postoji obostrano jednoznačno preslikavanje iz $\mathcal{A}_k'$ u $\mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\|f\|_{-k} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \lambda_n^{-2k} \Big)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Očigledno, $\mathcal{H}_{-k}$ je Hilbertov prostor, $k \in \mathbb{N}_0$.

Neka je $\mathcal{H}_k'$, $k \in \mathbb{N}_0$, dualni prostor za $\mathcal{H}_k$. Važi sledeća teorema.

Teorema 2.2.1. Prostori $\mathcal{H}_k'$ i $\mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ su izometrični.

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{H}_k'$, $k \in \mathbb{N}_0$. Označimo $b_n = \langle f, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$, i neka je $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Kako je f linearna i neprekidna sledi da je

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n b_n$$

je $\langle f, \varphi\rangle$ sledi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \lambda_n^{-2k} < \infty.$$

Prema tome, postoji element $g \in \mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n$.

Obratno, ako je $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n \in \mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, tada za je za $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{H}_k$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n b_n < \infty,$$

tada preslikavanje $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \to \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n b_n$, $\varphi \in \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ definiše element iz $\mathcal{H}_k'$. Označimo taj element sa f. Očigledno je da $b_n = \langle f, e_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Prema tome, postoji obostrano jednoznačno preslikavanje iz $\mathcal{H}_k'$ u $\mathcal{H}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$$f \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} b_m \psi_m,$$

gde je $b_m = (f, \psi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Očigledno je da je preslikavanje linearno. Pokazaćemo da je $|f|_k^{'} = \|f\|_{-k}$ gde je $|f|_k^{'}$ dualna norma u $\mathscr{A}_k^{'}$.

Imamo da je

$$|(f,\varphi)| = |\sum_{m=0}^{\infty} b_m \bar{a}_m| \le [\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}]^{1/2} [\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{2k}]^{1/2}$$

$$|(f,\varphi)| \le \|f\|_{-k} \|\varphi\|_k$$

$$|f|_k^{'} \le \|f\|_{-k}.$$

Dalje, neka je $\varphi_s = \sum_{m=0}^{s} b_m \tilde{\lambda}_m^{-2k} \psi_m \in \mathscr{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Imamo da je

$$\|\varphi_s\|_k = [\sum_{m=0}^{s} |b_m|^2 |\tilde{\lambda}_m^{-2k}|^2 \tilde{\lambda}_m^{2k}]^{1/2} = [\sum_{m=0}^{s} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}]^{1/2},$$

pa je

$$|f|_k^{'} = \frac{(f,\varphi_s)}{\|\varphi_s\|_k} = \frac{\sum_{m=0}^{s} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}}{[\sum_{m=0}^{s} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}]^{1/2}} =$$

$$\left[\sum_{m=0}^{s} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\right]^{1/2} \xrightarrow[s\to\infty]{} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\right]^{1/2} = \|f\|_{-k}.$$

Sledi $|f|_k^{'} = \|f\|_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. □

Neka $X \hookrightarrow Y$ označava da se vektorsko topološki prostor X može linearno i neprekidno potopiti u vektorsko topološki prostor Y.

Lako se može pokazati da je

$$\ldots \mathscr{A}_{k+1} \hookrightarrow \mathscr{A}_k \hookrightarrow \ldots \mathscr{A}_1 \hookrightarrow \mathscr{A}_0 = L^2(I) \hookrightarrow \mathscr{A}_{-1} \hookrightarrow \ldots \mathscr{A}_{-k} \hookrightarrow \mathscr{A}_{-(k+1)} \quad \ldots$$

Neka su

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \chi_n ,$$

gdje je $f_n = (f, \chi_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Očigledno je Φ je preslikavanje linearno. Pokazat ćemo da je $\|\Phi(f)\|'_k = \|f\|_{-k}$, gdje je $\|F\|'_k$ dualna norma u A'_χ.

Imamo da je

$$|\langle F, \varphi\rangle| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n \bar{\varphi}_n\right| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n|^2 \lambda_n^{2k}\right)^{1/2}$$

$$|\langle F, \varphi\rangle| \le \|f\|_{-k} \|\varphi\|_k$$

$$\|F\|'_k \le \|f\|_{-k} .$$

Dalje, neka je $\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} f_n \lambda_n^{-2k} \chi_n \in A_\chi$, $N \in \mathbb{N}_0$. Imamo da je

$$|\langle F, \varphi_N\rangle| = \left|\sum_{n=0}^{N} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right| = \left(\sum_{n=0}^{N} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right)^{2/2},$$

pa je

$$\|F\|'_k \ge \frac{|\langle F, \varphi_N\rangle|}{\|\varphi_N\|_k} = \frac{\sum_{n=0}^{N} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}}{\left(\sum_{n=0}^{N} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right)^{1/2}} =$$

$$\left[\sum_{n=0}^{N} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right]^{1/2} \xrightarrow[N\to\infty]{} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \lambda_n^{-2k}\right]^{1/2} = \|f\|_{-k} .$$

Stoga $\|F\|'_k = \|f\|_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. □

Neka $\mathcal{T}_\chi$ [illegible] topologija [illegible] prostor X [illegible] linearno i neprekidno preslikava [illegible] topološki prostor X.

Lako se može pokazati da je

$$A'_\chi = [illegible]$$

Dakle su

$$\mathcal{A} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k = \{\varphi \in L^2(I):\ \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2\ \tilde{\lambda}_m^{2k} < \infty\};$$

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_{-k} = \{f:\ f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m,\ \exists k \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2\ \tilde{\lambda}_m^{-2k} < \infty\}.$$

Kako je $S \subseteq \mathcal{A}$, sledi da je $\mathcal{A}$ gust u svakom $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Sledi da je $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, kompletiranje od $\mathcal{A}$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_k$. Tako iz Teoreme 2.2.1. sledi da je $\mathcal{A}'$ dual od $\mathcal{A}$, videti takođe [25].

Iz Leme 9.3.3. [47, p.316] sledi da su prostori $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ identični sa prostorima Zemaniana $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$, definisanim u [47; ch 9.3. i 9.6.].

Kako je $\mathcal{R}^n$: $\mathcal{A}_k \longrightarrow L^2(I)$, $n \le k$, $k \in \mathbb{N}_0$ možemo definisati

$$(\mathcal{R}^n)':\ L^2(I) \longrightarrow \mathcal{A}_{-k},\quad n \le k,$$

na sledeći način

$$((\mathcal{R}^n)'f,\varphi) = (f,\mathcal{R}^n\varphi),\quad n \le k,\ \varphi \in \mathcal{A}_k,\ f \in L^2(I).$$

Ako je $f \in L^2(I)$ oblika

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m,\qquad \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 < \infty,$$

imamo da je

$$(\mathcal{R}^n)'f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\lambda_m^n\psi_m,\quad n \le k,\quad f \in \mathcal{A}_{-k},\quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Očigledno je da se $(\mathcal{R}^n)'$ može definisati i na $\mathcal{A}_{-p}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \le p$, na sledeći način:

$$((\mathcal{R}^n)'f,\varphi)=(f,\mathcal{R}^n,\varphi),\ \varphi \in \mathcal{A}_k,\ f \in \mathcal{A}_{-p},\ n \le \min\{k,p\},\ k,p \in \mathbb{N}_0,$$

i imamo da

$$(\mathcal{R}^n)':\ \mathcal{A}_{-p} \longrightarrow \mathcal{A}_{-p-n}.$$

Kako je formalno

$$(\mathcal{R}^n)'f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\lambda_m^n\psi_m,\quad f \in \mathcal{A}_{-k},\quad n \le k,$$

obeležavaćemo $(\mathcal{R}^n)'$ sa $\mathcal{R}^n$.

Neka je $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}_0 :\ \lambda_n = 0\}$, $\Lambda^c = \mathbb{N}_0 \setminus \Lambda$. Važi sledeća reprezentaciona teorema.

Teorema 2.2.2. Neka je $f \in \mathcal{A}_{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, oblika $f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \psi_m$, i neka je $F = \sum_{m \in \Lambda^c} b_m \lambda_m^{-k} \psi_m$. Tada je $F \in L^2(I)$ i

$$f = \mathcal{R}^k F + \sum_{m \in \Lambda} b_m \psi_m .$$

Dokaz je dat u [47, Teorema 9.6.2.].

U [47, Lemma 9.3.1.] pokazana je sledeća teorema

Teorema 2.2.3. Prostor $\mathcal{A}$ je kompletan, Frešeov prostor .

Daćemo nekoliko primera operatora $\mathcal{R}$ i odgovarajućih nizova $\{\psi_n :\ n \in \mathbb{N}_0\}$ i $\{\lambda_n :\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

1. Furieovi polinomi

1.a. Prvi oblik

$I = (-\pi, \pi)$

$\mathcal{R} = -iD = i^{-1/2}\, D i^{-1/2}$

$$\psi_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$\lambda_n = n.$

1.b. Drugi oblik

$I = (0, \pi)$,

$\mathcal{R} = D^2$,

$$\psi_0(x) = \pi^{-1/2}, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \quad n=1,2,3,\ldots$$

$\lambda_n = -n^2$, $n=0,1,2\ldots$

1.c. Treći oblik

$I = (0,\pi)$,

$\mathcal{R} = D^2$,

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad n=1,2,\ldots$

$\lambda_n = -n^2, \quad n=1,2,3,\ldots$

2. Lagerovi polinomi

$I = (0,\infty)$,

$\mathcal{R} = x^{-\alpha/2} e^{x/2} D x^{\alpha+1} e^{-x} D x^{-\alpha/2} e^{x/2} = xD^2 + D - \frac{x}{4} - \frac{\alpha}{4x} + \frac{\alpha+1}{2}$,

$\alpha > -1$,

$\psi_n(x) = \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right]^{1/2} x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^{\alpha}(x), \quad n=0,1,2\ldots$

$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-x)^m}{m!}$

$\lambda_n = -n, \quad n=0,1,2,\ldots$

3. Ermitovi polinomi

$I = (-\infty,\infty)$

$\mathcal{R} = e^{x^2/2} D e^{-x^2} D e^{x^2/2} = D^2 - x^2 + 1$

$\psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{[2^n n! \sqrt{\pi}\,]^{1/2}}, \quad n=0,1,2,\ldots$

$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!}$

$\lambda_n = -2n$.

4. Ležandrovi polinomi

$I = (-1,1)$

$\mathcal{R} = D(x^2-1)D$,

$\psi(x) = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\; P(x), \quad n=0,1,2,\ldots$

$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}$

$\lambda_n = n\,(n+1)$.

5. Polinomi Čebiševa

$I = (-1,1)$

$\mathcal{R} = (1-x^2)^{1/4}\, D(1-x)^{1/2}\, D(1-x)^{1/4}$,

$\psi_0(x) = \pi^{-1/2}\,(1-x^2)^{-1/4}$,

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1-x^2)^{-1/4}\, T_n(x),\quad n=1,2,\ldots$

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!}{m!\,(n-2m)!}\,(2x)^{n-2m},$$

$\lambda_n = -n^2,\quad n=0,1,2,\ldots$

Još primera se može naći u [47,3].

2.3. PROSTORI $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ I $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$

Prostori $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$ dati su u [24].

Neka je $\mathcal{O}$ otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ i K regularan kompaktan skup u $\mathcal{O}$ u smislu Whitney-a. Ovo znači da je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ sa sledećom osobinom: postoji $c > 0$ tako da su bilo koje dve tačke x,y bilo koje povezane komponente $L \subset K$ povezane lukom u L čija je dužina manja ili jednaka od $c|x-y|$. Dalje ćemo sa K uvek obeležavati regularan kompaktan skup. Neka je $\{M_p:\ p \in \mathbb{N}\}$ niz pozitivnih brojeva tako da je

(M.1) $M_p^2 \le M_{p-1}\, M_{p+1},\quad p \in \mathbb{N}$;

(M.2)' $M_p \le AH^p M_{p-1}$, za neko $A > 0,\ H > 0,\ p \in \mathbb{N}_0$.

(M.3)' $\sum_{p=1}^{\infty} M_{p-1}/M_p < \infty$.

Neka je C(K) skup neprekidnih funkcija na K snabdeven

normom

$$\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K}|f(x)|.$$

Neka je $h > 0$. Obeležimo sa X_h prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija φ sa supp $\varphi \subset K$ tako da je

$$\|\varphi\|_{X_h} = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\left\{\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{C(K)}}{M_{|\alpha|}}\right\} < \infty,$$

i

$$\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{C(K)}}{M_{|\alpha|}} \longrightarrow 0, \quad |\alpha| \longrightarrow \infty.$$

Prostor X_h je Banahov. Prostori $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ i $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$ se definišu na sledeći način [24, pp. 44, 77].

$$\mathcal{D}_K^{(Mp)} = \underset{j\to\infty}{\underleftarrow{\lim}}\, X_j\,,$$

$$\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O}) = \underset{K\subset\subset\mathcal{O}}{\underrightarrow{\lim}}\, \mathcal{D}_K^{(Mp)}\,,$$

gde su $\underrightarrow{\lim}$ i $\underleftarrow{\lim}$ induktivna, odnosno projektivna topološka granica.

$K \subset\subset \mathcal{O}$ znači da K pripada familiji regularnih podskupova od $\mathcal{O}$ čija je unija $\mathcal{O}$. Ovi prostori imaju mnoge "lepe" osobine, videti [24]. Na primer, ovi prostori su separabilni i kompletni.

Strogi dual od $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$, prostor $(\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O}))'$ je prostor Beurling-ovih ultradistribucija.

Obeležimo sa Y prostor nizova $(\psi_\alpha) = \{\psi_\alpha\colon \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ iz $C(K)$ za koje je

$$\|(\psi_\alpha)\|_Y = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\psi_\alpha\|_{C(K)} < \infty$$

i

normom

$$\|f\|_{C(K)} = \sup_{x\in K}|f(x)|.$$

Neka je $h > 0$. Obeležimo sa X_h prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija φ sa supp $\varphi \subset K$ tako da je

$$\|\varphi\|_{X_h} = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\left\{\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{C(K)}}{M_{|\alpha|}}\right\} < \infty,$$

i

$$\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{C(K)}}{M_{|\alpha|}} \longrightarrow 0, \quad |\alpha| \longrightarrow \infty.$$

Prostor X_h je Banahov. Prostori $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ i $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$ se definišu na sledeći način [24, pp. 44, 77].

$$\mathcal{D}_K^{(Mp)} = \underset{j\to\infty}{\underleftarrow{\lim}}\, X_j,$$

$$\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O}) = \underset{K\subset\subset\mathcal{O}}{\underrightarrow{\lim}}\, \mathcal{D}_K^{(Mp)},$$

gde su $\underrightarrow{\lim}$ i $\underleftarrow{\lim}$ induktivna, odnosno projektivna topološka granica.

$K \subset\subset \mathcal{O}$ znači da K pripada familiji regularnih podskupova od $\mathcal{O}$ čija je unija $\mathcal{O}$. Ovi prostori imaju mnoge "lepe" osobine, videti [24]. Na primer, ovi prostori su separabilni i kompletni.

Strogi dual od $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$, prostor $(\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O}))'$ je prostor Beurling-ovih ultradistribucija.

Obeležimo sa Y prostor nizova $(\psi_\alpha) = \{\psi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ iz $C(K)$ za koje je

$$\|(\psi_\alpha)\|_Y = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\|\psi_\alpha\|_{C(K)} < \infty$$

i

normom

$$\|f\|_{K,h} = \sup_{x\in K}|f(x)|$$

Neka je $h > 0$. Obeležimo sa $\mathcal{E}_h$ prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija φ sa supp $\varphi \subset K$ takvih da je

$$\|\varphi\|_{h} = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\left\{\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{K}}{M_{|\alpha|}}\right\} < \infty$$

i

$$\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_K}{M_{|\alpha|}} \to 0, \quad |\alpha|\to\infty.$$

Prostor $\mathcal{E}_h$ je Banahov. Prostori $\mathcal{D}_K^{(M_p)}$ i $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ se definišu na sledeći način ([26], pp. 44, 77):

$$\mathcal{D}_K^{(M_p)} = \varprojlim_{h\to\infty} \mathcal{E}_h,$$

$$\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}_K^{(M_p)}$$

gde su lim i lim (_ispod_: ← i →) redom projektivna i induktivna granica.

$K \subset\subset \Omega$ znači da K pripada familiji kompaktnih podskupova od Ω čija je unija Ω. Ovi prostori imaju mnoge "lepe" osobine, videti [26]. Na primer, ovi prostori su separabilni i kompletni.

Strogi dual od $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$, prostor $(\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega))'$ je prostor Beurling-ovih ultradistribucija.

Obeležimo sa Y prostor nizova $(\varphi_\alpha) = (\varphi_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ iz $C(K)$ za koje je

$$\|(\varphi_\alpha)\|_h = \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|\varphi_\alpha\|_{K} < \infty$$

i

$$\lim_{|\alpha|\to\infty} \|\psi_\alpha\|_{C(K)} = 0.$$

Prostor Y je separabilan Banahov prostor. Neka je d_h, $h > 0$, preslikavanje iz X_h u Y definisano sa

$$d_h(\varphi) = \left(\frac{h^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi}{M_{|\alpha|}}\right), \quad \varphi \in X_h.$$

Obeležimo $\bar{X}_h = d_h(X_h) \subset Y$.

Propozicija 2.3.1. Važi da je

$$\mathcal{D}_K^{(Mp)} \xrightarrow{i_1} X_h \xrightarrow{d_h} \tilde{X}_h \xrightarrow{i_2} Y,$$

gde su i_1 i i_2 neprekidna potapanja a d_h je izometrija.

Dokaz. Neka je $\varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}$, i $l > k$.

Tada je

$$\frac{h^{|\alpha|}\|D^\alpha\varphi\|_{C(K)}}{M_{|\alpha|}} \le \left(\frac{h}{l}\right)^{|\alpha|}\|\varphi\|_{X_l} \to 0, \quad |\alpha| \to \infty,$$

što implicira da je i_1 neprekidno potapanje.

Druga dva tvrđenja lako slede.

2.4. PROSTORI Exp$\mathcal{A}$ i Exp$\mathcal{A}$'

Neka je $\{\alpha_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ niz kompleksnih brojeva različitih od nule. Označimo sa $S(\alpha_n)$ i $S^\times(\alpha_n)$ prostor nizova [25] definisanih sa:

$$\{a_m\} = \{a_m: m \in \mathbb{N}_0\} \in S(\alpha_n)$$

ako i samo ako je za svako $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 |\alpha_m|^{2k} < \infty;$$

$$\{b_m\} = \{b_m\colon m \in \mathbb{N}_0\} \in S^{\times}(\alpha_n)$$

ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 |\alpha_m|^{-2k} < \infty.$$

Neka su I, $\mathcal{R}$, $\{\psi_m\colon m \in \mathbb{N}_0\}$, $\{\lambda_m\colon m \in \mathbb{N}_0\}$ kao u delu 2.2. ove glave, i neka je

$$\tilde{\lambda}_m = \begin{cases} |\lambda_m|, & \lambda_m \neq 0 \\ 1, & \lambda_m = 0 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Označićemo sa $\exp_p \mathcal{A}$, $p \in \mathbb{N}$, potprostor od $L^2(I)$ definisan na sledeći način (videti [34]).

$$\exp_p \mathcal{A} = \left\{\varphi \in L^2(I)\colon \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m,\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \exp_p \tilde{\lambda}_m^{2k} < \infty\right\},\ p \in \mathbb{N}$$

gde je

$$\exp_p \tilde{\lambda}_m = \underbrace{\exp(\exp\ldots(\exp}_{p} \tilde{\lambda}_m)),\quad p \in \mathbb{N}.$$

Dual prstora $\exp_p \mathcal{A}$, označićemo sa $\exp_p \mathcal{A}'$. U [34] je dokazano da ako $f \in \exp_p \mathcal{A}'$, tada je

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m, \tag{2.4.1}$$

gde red konvergira slabo u $\exp_p \mathcal{A}'$ i gde je

$b_m = (f, \psi_m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

$\{b_m\} \in S^{\times}(\exp_p \tilde{\lambda}_n)$;

Obrnuto, ako $\{b_m\} \in S^{\times}(\exp_p \tilde{\lambda}_n)$, tada je redom u (2.4.1) jedinstveno definisan elemenat iz $\exp_p \mathcal{A}'$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |\lambda_n|^{2k} < \infty;$$

$$\{b_n\} = \{b_n;\ n \in N_0\} \in S'(\alpha_n)$$

ako i samo ako postoji $k \in N_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 |\alpha_n|^{-2k} < \infty.$$

Neka su I, $\mathcal{A}$, $\{\alpha_n,\ n \in N_0\}$, $\{\psi_n,\ n \in N_0\}$ kao u delu 2.2. ove glave, i neka je

$$\tilde{\lambda}_n = \begin{cases} |\lambda_n|, & \lambda_n \neq 0 \\ 1, & \lambda_n = 0 \end{cases} \quad n \in N_0$$

Označimo sa $\exp_p \mathcal{A}$, $p \in N$, potprostor od $L^2(I)$ definisan na sledeći način (videti [31]):

$$\exp_p \mathcal{A} = \left\{ \varphi \in L^2(I):\ \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \exp_p \tilde{\lambda}_n^{2k} < \infty \right\},\ p \in N,$$

gde je

$$\exp_p \tilde{\lambda}_n = \underbrace{\exp(\exp \dots (\exp}_{p} \tilde{\lambda}_n)),\quad p \in N.$$

Dual prostora $\exp_p \mathcal{A}$, označićemo sa $\exp_p \mathcal{A}'$. U [33] je dokazano da ako $f \in \exp_p \mathcal{A}'$, tada je

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n, \qquad \text{(II.4.1)}$$

gde red konvergira slabo u $\exp_p \mathcal{A}'$ i gde je

$$b_n = (f, \psi_n),\quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\{b_n\} \in S'(\exp_p \tilde{\lambda}_n).$$

Obratno, ako $\{b_n\} \in S'(\exp_p \tilde{\lambda}_n)$, tada je redom u (II.4.1) jedinstveno definisan element iz $\exp_p \mathcal{A}'$.

Označimo sa $\exp_{p,k}\mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$, potprostor od $L^2(I)$ definisan sa,

$$\exp_{p,k}\mathscr{A}=\Big\{\varphi \in L^2(I): \varphi=\sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m,\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \exp 2k(\underbrace{\exp\ldots(\exp}_{p-1}\tilde{\lambda}_m)) < \infty\Big\},$$

(za $p=1$, $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \exp(2k\tilde{\lambda}_m) < \infty$).

U skupovnom smislu je

$$\exp_p\mathscr{A} = \varprojlim_{k\to\infty} \exp_{p,k}\mathscr{A}.$$

Propozicija 2.4.1.

(1) Prostori $\exp_{p,k}\mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}_0$ su Banahovi prostori.

(2) Potapanja

$$i_k: \exp_{p,k+1}\mathscr{A} \longrightarrow \exp_{p,k}\mathscr{A}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

su kompaktna.

Dokaz. Prvi deo tvrđenja se može dokazati na standardan način a drugi sledi iz teoreme Kolmogorova koja daje potrebne i dovoljne uslove za kompaktnost u prostorima nizova. □

Skup E, gde je

$$E = \Big\{\varphi \in \exp_{p,k}\mathscr{A}:\ \varphi_s = \sum_{m=0}^{s} a_m\psi_m,\ s \in \mathbb{N}_0,\ a_m \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}_0\Big\}.$$

je gust u svakom prostoru $\exp_{p,k}\mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Projektivan niz

$$\{\exp_{p,k}\mathscr{A}:\ k \in \mathbb{N}_0\}$$

je redukovan [24,p.33.]. Tako, Propozicija 2.4.1. implicira da je

$$\exp_p\mathscr{A}' = (\varprojlim_{k\to\infty} \exp_{p,k}\mathscr{A})' = \varinjlim_{k\to\infty} \exp_{p,k}\mathscr{A}',$$

u smislu jake topologije, gde su

$$\exp_{p,k}\mathscr{A}' = \left\{ f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m : \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \exp(-2k(\underbrace{\exp\ldots(\exp}_{p-1} \tilde{\lambda}_m)) < \infty \right\}, k \in \mathbb{N}_0$$

Propozicija 2.4.2.

(1) Niz $\{\exp_p \mathscr{A}: p \in \mathbb{N}\}$ je projektivan i redukovan u odnosu na potapanja

$$i_p: \exp_{p+1}\mathscr{A} \longrightarrow \exp_p\mathscr{A}$$

koja su kompaktna;

(2) $\mathrm{Exp}\mathscr{A} = \varprojlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A}$ je Freše-Švacov prostor;

(3) $\mathrm{Exp}\mathscr{A}' = (\varprojlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A})' = \varinjlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A}'$ u smislu jake topologije;

(4) ako je $\{b_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ niz kompleksnih brojeva tako da za neko $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|^2 \exp(-2k(\underbrace{\exp\ldots(\exp}_{p-1} \tilde{\lambda}_m)) < \infty, \qquad (2.4.2.)$$

tada $\sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m$ konvergira slabo u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ nekom elementu f.

Obratno, ako $f \in \mathrm{Exp}\mathscr{A}'$, postoje $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$ tako da za kompleksne brojeve $b_n=(f,\psi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, (2.4.2) važi i

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m$$

u smislu slabe konvergencije u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$.

Dokaz. (1) Prostor E je gust potprostor u $\exp_p\mathscr{A}$, $p \in \mathbb{N}$. Slično kao u Propoziciji 2.4.1. može se pokazati da je i_p, $p \in \mathbb{N}$ kompaktno

(2) sledi iz [47, p.103, 1.8],

(3) sledi iz (1);

u smislu jake topologije, gde se

$$\exp_{p,k}\mathscr{A}' = \Big\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n;\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \exp[-2k\underbrace{(\exp\cdots(\exp}_{p-1}\lambda_n)\cdots)] < \infty \Big\},\ k \in \mathbb{N}_0$$

Propozicija 2.4.2.

(1) Niz $\{\exp_p\mathscr{A};\ p \in \mathbb{N}\}$ je projektivan i redukovan u odnosu na preslikavanja

$i_p: \exp_{p+1}\mathscr{A} \to \exp_p\mathscr{A}$

koja su kompaktna;

(2) $\mathrm{Exp}\mathscr{A} = \varprojlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A}$ je Fréchet-Švarcov prostor;

(3) $\mathrm{Exp}\mathscr{A}' = (\varprojlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A})' = \varinjlim_{p\to\infty} \exp_p\mathscr{A}'$ (u smislu jake topologije);

(4) ako je $\{b_n;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ niz kompleksnih brojeva takav da je za neko $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \exp[-2k\underbrace{(\exp\cdots(\exp}_{p-1}\lambda_n)\cdots)] < \infty, \qquad (2.4.5.)$$

tada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n$ konvergira slabo u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ nekom elementu f. Obratno, ako $f \in \mathrm{Exp}\mathscr{A}'$, postoje $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$ takvi da za koeficijente brojeve f, $a_n = (f, \psi_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, (2.4.5) važi i

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n$$

u smislu slabe konvergencije u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$.

Dokaz. (1) Prostor E je gust potprostor u $\exp_p\mathscr{A}$, $p \in \mathbb{N}$. Slično kao u Propoziciji 2.4.1. može se pokazati da je i_p, $p \in \mathbb{N}$ kompaktno

(2) sledi iz [4], p.100, 1.8.

(3) sledi iz (1);

(4) sledi iz (3). □

Iz Propozicije 2.4.2. direktno sledi:

Propozicija 2.4.3.

(1) $\mathrm{Exp}\mathscr{A} = \varprojlim_{p\to\infty} \mathrm{exp}_{p,p}\mathscr{A}$ i potapanja

$$i_p:\ \mathrm{exp}_{(p+1),(p+1)}\mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{exp}_{p,p}\mathscr{A},\quad p \in \mathbb{N},$$

su kompaktna,

(2) $\mathrm{Exp}\mathscr{A}' = \varinjlim_{p\to\infty} \mathrm{exp}_{p,p}\mathscr{A}'$ u smislu jake topologije.

Iz Propozicije 2.4.3. sledi da je $\mathrm{Exp}\mathscr{A}$ Montelov prostor što opet implicira da je $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ Montelov prostor. Tako, Propozicija 2.4.3. direktno implicira :

Propozicija 2.4.4.

(1) Slaba i stroga sekvencijalna konvergencija u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ su ekvivalentne;

(2) $\mathrm{Exp}\mathscr{A}$ i $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ su refleksivni.

Uvek ćemo pretpostaviti da je topologija u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ jaka dualna topologija.

Iz Propozicije 2.4.3. sledi

Propozicija 2.4.5. Niz $\{f_n\}$ u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ konvergira ka $f \in \mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ ako i samo ako za neko $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$, $f_n \in \mathrm{exp}_{p,k}\mathscr{A}'$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{exp}_{p,k}\mathscr{A}'$ i $f_n \to f$ u $\mathrm{exp}_{p,k}\mathscr{A}'$.

Propozicija 2.4.5. Linearan operator $L\colon \mathrm{Exp}\mathscr{A}' \longrightarrow \mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ je neprekidan ako i samo ako za svaki niz $\{f_n\}$ iz $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$ i $f \in \mathrm{Exp}\mathscr{A}'$, takve da $f_n \longrightarrow f$ u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$, važi da $Lf_n \longrightarrow Lf$ u $\mathrm{Exp}\mathscr{A}'$.

(4) sledi iz (3). □

Iz Propozicije 2.4.1. direktno sledi:

Propozicija 2.4.2.

(1) $Exp\mathscr{A} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ p\to\infty}} exp_{p}\mathscr{A}$ i preslikavanja

$$i_p : exp_{p,sl,(sr)}\mathscr{A} \to exp_{p+1}\mathscr{A}, \quad p \in \mathbb{N},$$

su kompaktna.

(2) $Exp'\mathscr{A} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ p\to\infty}} exp'_{p}\mathscr{A}$ u smislu jake topologije.

Iz Propozicije 2.4.2. sledi da je $Exp\mathscr{A}$ Montelov prostor. Kako je refleksivan, sledi da je $Exp\mathscr{A}'$ Montelov prostor. Takođe Propozicija 2.4.2. direktno implicira

Propozicija 2.4.4.

(1) Slaba i stroga sekvencijalna konvergencija u $Exp\mathscr{A}'$ su ekvivalentne;

(2) $Exp\mathscr{A}$ i $Exp\mathscr{A}'$ su refleksivni.

Uvek ćemo pretpostaviti da je topologija u $Exp\mathscr{A}'$ jaka dualna topologija.

Iz Propozicije 2.4.2. sledi

Propozicija 2.4.5. Niz $\{f_j\}$ u $Exp\mathscr{A}'$ konvergira ka $f \in Exp\mathscr{A}'$ ako i samo ako za neko $p \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}_0$, $f_j \in exp'_{p,k}\mathscr{A}'$, $j \in \mathbb{N}$, $f \in exp'_{p,k}\mathscr{A}'$ i $f_j \to f$ u $exp'_{p,k}\mathscr{A}'$.

Propozicija 2.4.6. Linearni operator $L: Exp\mathscr{A}' \to Exp\mathscr{A}'$ je neprekidan ako i samo ako za svaki niz $\{f_j\}$ iz $Exp\mathscr{A}'$ i $f \in Exp\mathscr{A}'$, iz toga da $f_j \to f$, u $Exp\mathscr{A}'$, sledi da $Lf_j \to Lf$ u $Exp\mathscr{A}'$.

GLAVA III

3.1. UOPŠTENI SLUČAJNI PROCESI

U ovoj glavi daćemo definiciju uopštenog slučajnog procesa kao i različite reprezentacije uopštenih slučajnih procesa na prostoru Zemaniana $\mathscr{A}$, prostoru $\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathbb{C})$ i Exp$\mathscr{A}$.

Neka je $(\Omega,\mathcal{F},P)$ prostor verovatnoća i neka je P kompletna mera. U daljem radu smatraćemo da je $(\Omega,\mathcal{F},P)$ fiksiran.

Neka je V vektorsko-topološki prostor test funkcija i V' njegov dualni prostor.

Definicija 3.1.1. Uopšteni slučajni proces na $\Omega \times V$ je preslikavanje ξ: $\Omega \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ tako da je

(i) $\forall\varphi \in V$, $\xi(\cdot,\varphi)$ kompleksna slučajna promenljiva,

(ii) $\forall\omega \in \Omega$, $\xi(\omega,\cdot)$ je elemenat iz V'.

Uopšteni slučajni proces ξ na $\Omega \times V$ ćemo kraće zapisati u.s.p. ξ na $\Omega \times V$. Dalje, posmatraćemo samo kompleksne slučajne promenljive, pa ćemo u daljem tekstu izostavljati reč "kompleksan" sem ako je to neophodno. "Klasičan" slučajni proces na $\Omega \times \mathbb{R}$ ili $\Omega \times \mathbb{R}^n$ ćemo nazivati slučajan proces.

Raspodela uopštenog slučajnog procesa je verovatnosna mera na prostoru uopštenih funkcija i strogo govoreći, taj je potrebno izabrati specijalno za svaki pojedinačni proces.

Neka je I konačni ili beskonačni interval u skupu $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) i neka je $H=L^2(I)$. Posmatrajmo trojku $V \subseteq H \subseteq V'$ gde su oba

potapanja neprekidna, gde je V prebrojivo normiran Hilbertov nuklearni prostor i V' njegov dual. Dualni prostor V' je osnovni prostor na kome će biti lokalizovana raspodela uopštenog slučajnog procesa.

Kanonička bilinearna forma koja povezuje V i V' se obeležava sa

$$\langle f, \varphi \rangle, \quad f \in V', \quad \varphi \in V.$$

Specijalno, ako je $f \in H$, tada se $\langle f, \varphi \rangle$ poklapa sa skalarnim proizvodom u H.

Neka su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \in V$. Zajednička raspodela slučajnog vektora $(\xi(\omega, \varphi_1), \xi(\omega, \varphi_2), \ldots \xi(\omega, \varphi_n))$ je jednoznačno određena karakterističnom funkcijom

$$\int_{\Omega} \exp\left[i \sum_{j=o}^{n} t_j \ \xi(\omega, \varphi_j)\right] dP(\omega), \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}.$$

Kako je ξ linearno po φ, ova karakteristična funkcija je u stvari karakteristična funkcija slučajne promenljive $\xi(\circ, \sum_{j=o}^{n} t_j \varphi_j)$. Takođe, imamo da $\sum_{j=o}^{n} t_j \varphi_j \in V$, pa odatle sledi da je raspodela posmatranog uopštenog slučajnog procesa ξ potpuno određena funkcionalom

$$C_\xi(\varphi) = \int_{\Omega} \exp\left[i \ \xi(\omega, \varphi)\right] dP(\omega).$$

Funkcional $C_\xi(\varphi)$, $\varphi \in V$, naziva se *karakteristični funkcional* uopštenog slučajnog procesa ξ i ima sledeće osobine:

(1) $C_\xi(\varphi)$ je neprekidan po $\varphi \in V$;

(2) $C_\xi(\varphi)$ je pozitivno definitan, t.j. za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, proizvoljne $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ i $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \in V$ je

potapanja neprekidna, gde je V prebrojivo normiran Hilbertov nuklearni prostor i V' njegov dual. Dualni prostor V' je osnovni prostor na kome će biti lokalizovana raspodela uopštenog slučajnog procesa.

Kanonička bilinearna forma koja povezuje V i V' se obeležava sa

$$\langle f,\varphi\rangle, \quad f \in V', \quad \varphi \in V.$$

Specijalno, ako je $f \in H$, tada se $\langle f,\varphi\rangle$ poklapa sa skalarnim proizvodom u H.

Neka su $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n \in V$. Zajednička raspodela slučajnog vektora $(\xi(\omega,\varphi_1), \xi(\omega,\varphi_2), \dots, \xi(\omega,\varphi_n))$ je jednoznačno određena karakterističnom funkcijom

$$\int_\Omega \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} t_j \langle\xi(\omega),\varphi_j\rangle \right\} dP(\omega), \quad t_1,\dots,t_n \in \mathbb{R}$$

Kako je ξ linearno po φ, ova karakteristična funkcija je u stvari karakteristična funkcija slučajne promenljive $\xi(\cdot, \sum_{j=1}^{n} t_j\varphi_j)$. Takođe, imamo da $\sum_{j=1}^{n} t_j\varphi_j \in V$, pa odatle sledi da je raspodela posmatranog uopštenog slučajnog procesa ξ potpuno određena funkcionalom

$$C_\xi(\varphi) = \int_\Omega \exp\,[i\,\langle\xi(\omega),\varphi\rangle]\, dP(\omega)$$

Funkcional $C_\xi(\varphi)$, $\varphi \in V$, naziva se *karakteristični funkcional uopštenog slučajnog procesa* ξ i ima sledeće osobine:

(1) $C_\xi(\varphi)$ je neprekidan po $\varphi \in V$;

(2) $C_\xi(\varphi)$ je pozitivno definitan, t.j. za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, proizvoljne $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ i $\varphi_1,\varphi_2,\dots\varphi_n \in V$ je

ispunjeno

$$\sum_{j,k} \alpha_j \bar{\alpha}_k C_\xi(\varphi_j - \varphi_k) \geq 0;$$

(3) $C_\xi(0)=1$.

Ovi uslovi su isti kao i u konačno dimenzionalnom slučaju (Definicija 1.2.4.), pa je, slično kao u Teoremi 1.2.1. potrebno naći verovatnosnu meru μ, tako da je

$$C_\xi(\varphi) = \int_{V'} e^{i\langle f, \varphi\rangle} d\mu(f),$$

gde je C_ξ zadati funkcional koji zadovoljava (1)-(3).

Međutim, mere na beskonačno dimenzionalnim prostorima se razlikuju od mera na konačno dimenzionalnim prostorima. Teoremu Bohnera (Teorema 1.2.1.) koja daje uzajamno jednoznačnu korespondenciju između raspodela i karakterističnih funkcija potrebno je modifikovati. Ovde ćemo samo navesti teoremu, a detaljan dokaz dat je u [13].

Neka je B Borelov podskup u $\mathbb{R}^n$. Podskup od V' oblika

$$A_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n,B} = \{f \in V': (\langle f,\varphi_1\rangle,\ldots,\langle f,\varphi_n\rangle) \in B\} \qquad (3.1.1)$$

naziva se *cilindrični skup*. Ako su svi φ_i, $i=1,2,\ldots,n$ u (3.1.1) izabrani iz konačno dimenzionalnog potprostora F prostora V, kažemo da cilindrični skup ima bazu u F. Familija svih cilindričnih skupova koji imaju bazu u jednom, fiksiranom F obrazuje σ-algebru $\mathcal{U}_F$. Unija

$$\mathcal{U} = \bigcup_{F\subset V} \mathcal{U}_F$$

gde F prolazi po svim konačno dimenzionalnim podprostorima F je algebra podskupova u V'. Neka je $\mathcal{V}$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{U}$.

ispunjeno

$$\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j C_\mu(\varphi_i - \varphi_j) \geq 0;$$

(3) $C_\mu(0)=1$.

Ovo važi su kao i u konačno dimenzionalnom slučaju (Definicija 1.2.4.), pa je, slično kao u Teoremi 1.2.1, potrebno naći nenegativnu meru μ, takvu da je

$$C_\mu(\varphi) = \int_{V'} e^{i\langle F,\varphi\rangle} \, d\mu(F),$$

gde je C_μ zadata funkcija koji zadovoljava (1)-(3).

Međutim, kako mere na beskonačno dimenzionalnim prostorima se razlikuju od mera na konačno dimenzionalnim prostorima, Teoremu Bochnera (Teorema 1.2.1) koja daje izuzetnu jednoznačnu korespondenciju između mera i karakterističnih funkcija potrebno je modifikovati. Ovde ćemo samo navesti rezultate, a detaljan dokaz dat je u [18].

Neka je A Borelov podskup u $\mathbb{R}^n$. Podskup od V' oblika

$$A_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n} = \{F \in V' : (\langle F,\varphi_1\rangle,\ldots,\langle F,\varphi_n\rangle) \in A\} \quad (3.1.12)$$

naziva se cilindrični skup. Ako su svi φ_i, $i=1,2,\ldots,n$ u (3.1.12) izabrani iz konačno dimenzionalnog potprostora F prostora V, kažemo da cilindrični skup ima bazu u F. Familija svih cilindričnih skupova koji imaju bazu u jednom, fiksiranom F obrazuje σ-algebru $\mathcal{R}_F$. Unija

$$\mathcal{R} = \bigcup_{F \subset V} \mathcal{R}_F,$$

gde F prolazi po svim konačno dimenzionalnim podprostorima F je algebra podskupova u V'. Neka je $\mathcal{W}$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{R}$.

Teorema 3.1.1. Neka je $C(\varphi)$ karakteristični funkcional na V, t.j. funkcional koji zadovoljava uslove (1),(2),(3). Tada postoji jedinstvena verovatnosna mera μ na $(V', \mathcal{V})$ takva da je

$$C(\varphi) = \int_{V'} e^{i\langle f, \varphi\rangle} d\mu(f).$$

U daljem radu ćemo često koristiti probabilističku Hahn-Banach -ovu teoremu, pa ćemo je ovde navesti. Ovu teoremu je dokazao Hanš u [12]. Nešto drugačiju formu, koju ćemo ovde navesti dao je Ullrich u [45].

Teorema 3.1.2. Neka je V separabilan Banahov prostor i neka je $W \subset V$ proizvoljna mnogostrukost u V. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times W$, za koji postoji slučajna promenljiva S takva da za svako $\omega \in \Omega$, $v \in W$,

$$|\xi(\omega, v)| \le S(\omega) \; \|v\|.$$

Tada postoji u.s.p. ξ^* definisan na $\Omega \times V$ tako da je za svako $\omega \in \Omega$, $v \in W$

$$\xi^*(\omega, v) = \xi(\omega, v),$$

a za svako $\omega \in \Omega$, $v \in V$,

$$|\xi^*(\omega, v)| \le S(\omega) \; \|v\|.$$

3.2. REPREZENTACIJE UOPŠTENOG SLUČAJNOG PROCESA NA $\Omega \times \mathcal{A}$

Teorema 3.2.1. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, postoji skup $B \in \mathcal{F}$, takav da je $P(B) \ge 1-\varepsilon$, i niz slučajnih promenljivih $\{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

Teorema 3.1.1. Neka je $C(u)$ karakteristični funkcional na V, t.j. funkcional koji zadovoljava uslove (1),(2),(3). Tada postoji jedinstvena verovatnosna mera μ na $(V^*, \mathcal{V})$ tako da je

$$C(u) = \int_{V^*} e^{i(f,u)}\, d\mu(f).$$

U daljem radu ćemo često koristiti probabilističku Hahn-Banach-ovu teoremu, pa ćemo je ovde navesti. Ovu teoremu je dokazao Hanš u [12]. Nešto drugačiju formu, koju ćemo ovde navesti dao je Ullrich u [47].

Teorema 3.1.2. Neka je V separabilan Banach-ov prostor i neka je $W \subset V$ proizvoljan potprostor u V. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times W$, za koji postoji slučajna promenljiva Q takva da za svako $\omega \in \Omega$, $v \in W$,

$$|\xi(\omega,v)| \le Q(\omega)\, \|v\|.$$

Tada postoji u.s.p. ξ^* definisan na $\Omega \times V$ tako da je za svako $\omega \in \Omega$, $v \in W$

$$\xi^*(\omega,v) = \xi(\omega,v),$$

a za svako $\omega \in \Omega$, $v \in V$,

$$|\xi^*(\omega,v)| \le Q(\omega)\, \|v\|.$$

3.2. REPREZENTACIJE UOPŠTENOG SLUČAJNOG PROCESA NA $\Omega \times \mathcal{V}$

Teorema 3.2.1. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{V}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, postoji skup $B \in \mathcal{F}$, takav da je $P(B) \ge 1-\varepsilon$, i niz slučajnih promenljivih $\{\xi_\alpha;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k\}$ tako da je

$$(1) \quad \xi(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\,(\varphi_n,\varphi), \quad \omega \in B, \quad \varphi \in \mathcal{A},$$

$$(2) \quad \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_n^{-2k} \right]^{1/2} < k, \quad \omega \in B.$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Leme 4. i Teoreme 1. u [45]. Videti takođe [1,42,29].

Za svako $\omega_0 \in \Omega$ imamo da je $\xi(\omega_0,\cdot) \in \mathcal{A}'$. Tada sledi da postoji $C(\omega_0)$ i $k(\omega_0)$ tako da je

$$|\xi(\omega_0,\varphi) \le C(\omega_0)\,\|\varphi\|_{k(\omega_0)}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}'.$$

Neka je

$$A_N(\varphi) = \{\omega \in \Omega: |\xi(\omega,\varphi)| \le N\|\varphi\|_N, \quad N \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi \in \mathcal{A}\},$$

$$A_N = \bigcap_{\varphi\in\mathcal{A}} A_N(\varphi), \quad N \in \mathbb{N}_0.$$

Tada je

$$A_N = \bigcap_{\varphi\in S_r} A_N(\varphi), \quad N \in \mathbb{N}_0$$

gde je S_r prebrojiv gust skup u $\mathcal{A}$. (Videti tačku 2.2. Glave II.) Kako je S_r prebrojiv, sledi da je A_N merljiv skup. Dalje, imamo da je

$$A_N \subset A_{N+1}, \quad i \quad \Omega = \bigcup_{N=0}^{\infty} A_N.$$

Dakle, za dato $\varepsilon > 0$, postoji $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, tako da je $P(A_k) \ge 1-\varepsilon$. Ako obeležimo $A_k = B$, dobijamo da je

$$|\xi(\omega,\varphi)| \le k\,\|\varphi\|_k, \quad \varphi \in \mathcal{A}, \quad \omega \in B.$$

Za $\varphi \in \mathcal{A}$, definišimo

$$\xi_1(\omega,\varphi) = \begin{cases} \xi(\omega,\varphi), & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Neka je, za $\omega \in \Omega$

$$S(\omega) = \sup \{|\xi_1(\omega,\varphi)|,\ \varphi \in \mathcal{A},\ \|\varphi\|_k \leq 1\} =$$

$$= \sup \{|\xi_1(\omega,\varphi)|,\ \varphi \in S_r,\ \|\varphi\|_k \leq 1\}.$$

Imamo da je $S(\cdot)$ merljiva funkcija, $S(\cdot) \leq k$ i

$$|\xi_1(\omega,\varphi)| \leq S(\omega)\ \|\varphi\|_k,\quad \varphi \in \mathcal{A},\quad \omega \in B.$$

Prema probabilističkoj Hahn-Banach -ovoj teoremi, ξ_1 se može proširiti na $\mathcal{A}_k$, tako da norma ostaje očuvana. Obeležimo ovo proširenje sa $\tilde{\xi}_1$. Imamo da je

$$|\tilde{\xi}_1(\omega,\varphi)| \leq S(\omega)\ \|\varphi\|_k,\quad \varphi \in \mathcal{A}_k,\ \omega \in \Omega.$$

Neka je $l^2 = \{\{a_m,\ m \in \mathbb{N}_0\}:\ a_m \in \mathbb{C},\ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 < \infty\}$

Preslikavanje iz $\Omega \times \mathcal{A}_k$ u $\Omega \times l^2$ definisano na sledeći način,

$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m \in \mathcal{A}_k$

$$i:\ (\omega,\varphi) \longrightarrow (\omega,\ \{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}),$$

je izometrija prostora $\Omega \times \mathcal{A}_k$ i $\Theta = i(\Omega \times \mathcal{A}_k) \subset \Omega \times l^2$.

Možemo definisati u.s.p. ξ_2 na Θ na sledeći način

$$\xi_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}) = \tilde{\xi}_1(\omega,\varphi),\quad \varphi \in \mathcal{A}_k,\quad \omega \in \Omega,$$

gde je $(\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}) = i(\omega,\varphi)$. Tada je

$$|\xi_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\})| \leq S(\omega) \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_n|^2\ \tilde{\lambda}_m^{2k} \right]^{1/2},\ \omega \in \Omega.$$

Prema probabilističkoj Hahn-Banach -ovoj teoremi ξ_2 se može proširiti na $\Omega \times l^2$. Obeležimo ovo proširenje sa $\tilde{\xi}_2$. Imamo da je

$$\tilde{\xi}_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}) = \xi_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}),\qquad (\omega,\{\tilde{\lambda}_m^k\ a_m\}) \in \Theta,\quad \omega \in \Omega,$$

Neka je, za $\omega \in \Omega$

$$K(\omega) = \sup\{|\xi_1(\omega,\varphi)|,\ \varphi \in \mathcal{H}_1,\ \|\varphi\|_1 \le 1\}$$

$$= \sup\{|\tilde{\xi}_1(\omega,\varphi)|,\ \varphi \in \mathcal{D}_1,\ \|\varphi\|_1 \le 1\}.$$

Tada je $K(\cdot)$ mjerljiva funkcija, $K(\cdot) \ge 0$ i

$$|\xi_1(\omega,\varphi)| \le K(\omega)\,\|\varphi\|_1,\quad \varphi \in \mathcal{H}_1,\quad \omega \in \Omega$$

Prema probabilističkoj Hahn-Banach -ovoj teoremi ξ_1 se može produžiti na $\mathcal{H}_2$. Neka je $\hat{\xi}_2$ jedno takvo produženje. Označimo ovo produženje sa $\tilde{\xi}_2$. Tada je

$$|\tilde{\xi}_2(\omega,\varphi)| \le K(\omega)\,\|\varphi\|_2,\quad \varphi \in \mathcal{H}_2,\quad \omega \in \Omega.$$

Neka je $l^2 = \{(a_n,\ n \in N_0):\ a_n \in C,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$.

Preslikavanje iz $\Omega \times \mathcal{H}_1$ u $\Omega \times l^2$ definisano na sljedeći način, $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{H}_1$

$$i:\ (\omega,\varphi) \to (\omega,\ (\sqrt{\lambda_n}\, a_n)),$$

je izometrija prostora $\Omega \times \mathcal{H}_1$ i $\mathcal{G} = i(\Omega \times \mathcal{H}_1) \subset \Omega \times l^2$. Možemo definisati u.s.p. ξ_3 na $\mathcal{G}$ na sljedeći način

$$\xi_3(\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n)) = \tilde{\xi}_1(\omega,\varphi),\quad \varphi \in \mathcal{H}_1,\quad \omega \in \Omega,$$

gdje je $(\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n)) = i(\omega,\varphi)$. Tada je

$$|\xi_3(\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n))| \le K(\omega)\left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \lambda_n\right]^{1/2},\quad \omega \in \Omega.$$

Prema probabilističkoj Hahn-Banach -ovoj teoremi ξ_3 se može produžiti na $\Omega \times l^2$. Označimo ovo produženje sa $\tilde{\xi}_3$. Tada je

$$\tilde{\xi}_3(\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n)) = \xi_3(\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n)),\quad (\omega,(\sqrt{\lambda_n}\, a_n)) \in \mathcal{G},\quad \omega \in \Omega.$$

i

$$|\tilde{\xi}_2(\omega,\{b_n\})| \le S(\omega)\ \|\{b_m\}\|_{l^2}, \quad \{b_m\} \in l^2, \quad \omega \in \Omega.$$

Za svako $\omega \in \Omega$, $\tilde{\xi}_2(\omega,\cdot)$ je neprekidan i linearan funkcional na l^2. Prema tome, postoji niz $\{\tilde{c}_m(\omega)\colon m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je $\sum_{m=0}^{\infty} |\tilde{c}_m(\omega)|^2 < \infty$, $\omega \in \Omega$, i

$$\tilde{\xi}_2(\omega,\{b_m\}) = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m(\omega)\ \bar{b}_m, \quad \{b_m\} \in l^2, \quad \omega \in \Omega.$$

Na analogan način možemo definisati u.s.p. na $\Omega \times L^2(I)$, koji ćemo obeležiti na isti način,

$$\tilde{\xi}_2\colon\ \Omega \times L^2(I) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\tilde{\xi}_2(\omega,\varphi) = \tilde{\xi}_2(\omega,\ \{b_m\}), \qquad \varphi = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\psi_m \in L^2(I),\ \{b_m\} \in l^2$$

Kako je $\tilde{\xi}_2(\cdot,\varphi)$ slučajna promenljiva za svako $\varphi \in L^2(I)$, sledi, za $\varphi = \psi_m$, da su $\tilde{c}_m(\cdot) = \tilde{\xi}_2(\cdot,\psi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$ slučajne promenljive. Štaviše, dualna norma

$$|\tilde{\xi}_2(\omega,\cdot)|'_{L^2(I)} = \left[\ \sum_{m=0}^{\infty} |\tilde{c}_m(\omega)|^2\right]^{1/2} = R(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

Imamo, za $\omega \in B$, $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathcal{A}$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \xi_1(\omega,\varphi) = \tilde{\xi}_1(\omega,\varphi) = \xi_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m\ a_m\}) = \tilde{\xi}_2(\omega,\{\tilde{\lambda}_m\ a_m\}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_m\ \bar{a}_m = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_m^k\ (\psi_m,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\ (\psi_m,\varphi),$$

gde je $c_m(\omega) = \tilde{c}_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_m^k$, $m \in \mathbb{N}_0$. □

Reprezentaciju u.s.p. ξ možemo proširiti na skup $\Omega \setminus A$, gde je $P(A) = 0$, ako pretpostavimo da važi još jedan dodatni uslov.

Teorema 3.2.2. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Pretpostavimo da postoji slučajna promenljiva R, skup $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$ tako da je $|\xi(\omega,\varphi)| \le R(\omega)\, \|\varphi\|_k$, za $\omega \in \Omega \setminus A$. Tada postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

$$(1) \qquad \xi(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\, (\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega \setminus A, \quad \varphi \in \mathcal{A},$$

$$(2) \qquad \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\right]^{1/2} < R(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A.$$

Dokaz. Dokaz je isti kao dokaz Teoreme 3.2.1. ako stavimo da je u (3.2.1)

$$\xi_1(\omega,\varphi) = \begin{cases} \xi(\omega,\varphi), & \omega \in \Omega \setminus A \\ 0 \;, & \omega \notin \Omega \setminus A \end{cases} . \quad \square$$

Neka je $\mathcal{R}$ operator definisan u paragrafu 2.2. druge glave.

Na skupu uopštenih slučajnih procesa može se definisati diferencijalni operator $\tilde{\mathcal{R}}^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, na sledeći način

$$\tilde{\mathcal{R}}^k\, \xi(\omega,\varphi) = \xi(\omega, \mathcal{R}^k\varphi), \quad \omega \in \Omega, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^{k+1} = \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\mathcal{R}}^k), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{\mathcal{R}}^0 = J.$$

Dalje ćemo $\tilde{\mathcal{R}}$ obeležavati isto sa $\mathcal{R}$.

Sledeća teorema je analogna Teoremi 2.2.2. odnosno Teoremi 9.6.2. [47,ch.9.6]. Kao i ranije, neka je $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}_0 : \lambda_n = 0\}$, $\Lambda^c = \mathbb{N}_0 \setminus \Lambda$.

Teorema 3.2.3. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, broj $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, i za svako $k \geq k_0$ u.s.p. ξ_k na $\Omega \times L^2(I)$ i slučajne promenljive c_m, $m \in \Lambda$, tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \mathcal{R}^k \xi_k(\omega,\varphi) + \sum_{n\in\Lambda} c_n(\omega)\,(\psi_n,\varphi), \quad \omega \in B, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Iz Teoreme 3.2.1. sledi da postoji $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$ i $k_0 = k_0(\varepsilon)$, i niz slučajnih promenljivih $\{c_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\,(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in B, \quad \varphi \in \mathcal{A},$$

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_0}\right]^{1/2} \leq k_0, \quad \omega \in B.$$

Neka je, za $k \geq k_0$,

$$b_n(\omega) = \begin{cases} c_m(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-k}, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}.$$

Imamo da je

$$\xi_k(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega\in\Omega, \ \varphi\in\mathcal{A} \text{ u.s.p. na } \Omega \times L^2(I).$$

Dalje je,

$$\mathcal{R}^k \xi_k(\omega,\varphi) = \xi_k(\omega,\mathcal{R}^k\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\omega)\lambda_m^k(\psi_m,\varphi) = \sum_{n\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi),$$

pa sledi

$$\xi(\omega,\varphi) = \mathcal{R}^k \xi_k(\omega,\varphi) + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)\, (\psi_m,\varphi). \quad \square$$

Napomenimo samo da se može pokazati, (vidi dokaz Teoreme 3.2.6.) da je $\xi_k = \int_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt$, gde je X_k funkcija definisana sa:

$$X_k(\omega,t) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\omega)\psi_m(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in I.$$

pa je gornja reprezentacija u stvari oblika:

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega, \quad \varphi \in \mathcal{A}. \tag{3.2.2}$$

Slično kao u Teoremi 3.2.2., dodavanjem još jednog uslova možemo proširiti reprezentaciju (3.2.2) na skup mere jedan.

Teorema 3.2.4. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Pretpostavimo da postoji slučajna promenljiva R tako da je $E(R) < \infty$, skup $A \in \mathcal{F}$, sa $P(A) = 0$, broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$, tako da je $|\xi(\omega,\varphi)| \le R(\omega)\|\varphi\|_{k_0}$, $\omega \in \Omega \setminus A$, $\varphi \in \mathcal{A}$. Tada za svako $k \ge k_0$, postoji funkcija $X_k\colon \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$, i za $m \in \Lambda$ slučajne promenljive c_m, nezavisne od k tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega\setminus A, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

U sledećim teoremama daćemo reprezentaciju preko neprekidnog slučajnog procesa X_k.

Da bismo dobili reprezentaciju preko neprekidnog

slučajnog procesa, potrebno je staviti neke uslove na nizove $\{\lambda_m: m \in \mathbb{N}_0\}$ i $\{\psi_m: m \in \mathbb{N}_0\}$.

Pretpostavimo da nizovi $\{\lambda_m: m \in \mathbb{N}_0\}$ i $\{\psi_m: m \in \mathbb{N}_0\}$ zadovoljavaju sledeće uslove:

(*) postoji $s_0 \in \mathbb{N}_0$ i konstanta K tako da je za $s \ge s_0$

$$\sup\{|\psi_m(t)\ \tilde{\lambda}_m^{-s}|: m \in \mathbb{N}_0,\ t \in I\} < K;$$

(**) postoji $p_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da je za $p \ge p_0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2p} < \infty.$$

Uslovi (*) i (**) nisu suviše restriktivni. Na primer Ermitov, Lagerov, Furieov ortonormiran sistem zadovoljava ove uslove. U [47, ch.9.8] i [3, ch.10.18], mogu su naći i drugi ortonormirani sistemi koji zadovoljavaju ove uslove.

Reprezentacija u.s.p. preko neprekidnog slučajnog procesa može se dati, kao i ranije, na skupu proizvoljno velike verovatnoće, i na skupu verovatnoće jedan. Dokazi su slični dokazima Teorema 3.2.3. i 3.2.4., pa ćemo prvu teoremu navesti a dokaz dati za drugu.

Teorema 3.2.5. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, broj $k_0=k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, a za svako $k \ge k_0$ postoji neprekidan slučajni proces $X_k: \Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$, i slučajne promenljive c_m, $m \in \Lambda$, tako da

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi),\ \omega \in B,\ \varphi \in \mathcal{A},$$

gde je $s \ge s_0$, s_0 iz (*), $p \ge p_0$, p_0 iz (**).

slučajnog procesa, potrebno je staviti neke uslove na nizove $\{\lambda_n,\ n\in N_0\}$ i $\{\varphi_n,\ n\in N_0\}$.

Pretpostavimo da nizovi $\{\lambda_n,\ n\in N_0\}$ i $\{\varphi_n,\ n\in N_0\}$ zadovoljavaju sledeće uslove

(*) postoji $s_0\in N_0$ i konstanta K tako da je za $s\ge s_0$

$$\sup\{|\varphi_n(t)\,\lambda_n^{-s}| : n\in N_0,\ t\in I\} < K,$$

(**) postoji $p_0\in N_0$ tako da je za $p\ge p_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{-p} < \infty.$$

Uslovi (*) i (**) nisu suviše restriktivni. Na primer Hermitov, Laguerre-ov, Fourier-ov ortonormirani sistem zadovoljava ove uslove. U [47], str. [illegible], mogu se naći i drugi ortonormirani sistemi koji zadovoljavaju ove uslove.

Reprezentacija u.n.p. preko uopštenog slučajnog procesa može se dati, kao i ranije, na skupu [illegible] verovatnoće i na skupu verovatnoće jedan. Dokazi su slični dokazima Teorema 3.2.3. i 3.2.4. i pa ćemo samo teoremu navesti a dokaz dati u [illegible].

Teorema 3.2.5. Neka je Y u.n.p. na $\Omega\times H$. Za svako $s>0$ postoji skup $N\in\mathcal{F}$, $P(N)=1$ i niz $\{r_s(\omega)\}\in N_0$, a za svako $k\ge k_0$ postoji separabilan slučajan proces $X_k:\Omega\times I\to C$ i slučajne promenljive c_n, $n\in N$, tako da

$$\langle Y(\omega),\varphi\rangle = [illegible]\int_I X_k(\omega,t)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt + \sum_{n=0}^{k} c_n(\omega)\,[illegible],\quad \omega\in N,\ \varphi\in H,$$

gde je $s\ge s_0$, s_0 iz (*), $p\ge p_0$, p_0 iz (**).

Teorema 3.2.6. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Perpostavimo da postoji slučajna promenljiva R za koju je $E(R) < \infty$, skup $A \in \mathscr{F}$, sa $P(A) = 0$, broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$, tako da je $|\xi(\omega,\varphi)| \le R(\omega)\|\varphi\|_{k_0}$, $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathscr{A}$. Tada, za svako $k \ge k_0$ postoji neprekidan slučajan proces X_k: $\Omega \times I \longrightarrow \mathbb{C}$, i slučajne promenljive c_m, $m \in \Lambda$, nezavisne od k tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_I X_k(\omega,t)\mathscr{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega\setminus A, \ \varphi \in \mathscr{A},$$

gde je $s \ge s_0$, s_0 iz (*), a $p \ge p_0$, p_0 iz (**).

Dokaz. Iz Teoreme 3.2.2. sledi da postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_m,\ m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega \setminus A, \ \varphi \in \mathscr{A},$$

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)^2 \ \tilde{\lambda}_m^{-2k_0}\right]^{1/2} \le R(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A.$$

Neka je $k \ge k_0$ fiksirano. Definišimo, za $s \ge s_0$, $p \ge p_0$,

$$X_k(\omega,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_n^{-(k+p+s)}\ \psi_m(t), \quad \omega \in \Omega, \ t \in I.$$

Imamo, da je za $\omega \in \Omega \setminus A$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_m^{-(k+p+s)}\ \psi_m(t)| \le K \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)\ \tilde{\lambda}_m^{-k}\ \tilde{\lambda}_m^{-p}| \le$$

$$\le K \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2\ \tilde{\lambda}_m^{-2k}\right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2p}\right]^{1/2} < \infty.$$

Sledi da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ $X_k(\omega,\cdot)$ neprekidna funkcija. Kako je $X_k(\cdot,t)$, $t \in I$ merljiva, sledi da je X_k merljiva kao

Teorema 2.2.6. Neka je ζ s.s.p. na $\Omega \times \Phi$. Pretpostavimo da postoji slučajna promenljiva K za koju je $P(K) < \infty$, skup $A \in \mathcal{F}$, za $P(A) = 0$, brojevi $N_0 \le N_1$, takvi da je $|\zeta(\omega,\varphi)| \le K(\omega)\|\varphi\|_{N_0}$, $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \Phi$. Tada, za svako $k \ge k_0$ postoji neprekidan slučajan proces $X_t : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, i slučajna promenljiva K_ω, $\omega \in A$, nezavisna od t tako da je

$$\zeta(\omega,\varphi) = \int_I X_t(\omega,t) D^{k+p+1}\varphi(t)\,dt - \sum_{m \le k} c_m(\omega)(\varphi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega\setminus A,\ \varphi \in \Phi,$$

gde je $k = 2N_0$, N_p je (30), a $p \ge N_1$, N_1 je (48).

Dokaz. Iz Teoreme 2.2.5. sledi da postoji niz slučajnih promenljivih $(c_m,\ m \in N_0)$ takav da je

$$\zeta(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)(\varphi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega \setminus A,\ \varphi \in \Phi,$$

i

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \lambda_m^{-2N_0}\right]^{1/2} \le K(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A.$$

Neka je $k = 2N_0$ fiksirano. Definišimo, za $t \ge N_1$, $n \ge N_0$,

$$X_t(\omega,t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\lambda_m^{-(k+p+1)}\varphi_m(t), \quad \omega \in \Omega,\ t \in I.$$

Imamo, da je za $\omega \in \Omega \setminus A$

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)\lambda_m^{-(k+p+1)}\varphi_m(t)| \le K \sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)\lambda_m^{-k}\lambda_m^{-p}| \le$$

$$\le K\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \lambda_m^{-2k}\right]^{1/2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{-2p}\right]^{1/2} < \infty.$$

Sledi da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ $X_t(\omega,\cdot)$ neprekidna funkcija. Kako je $X_t(\cdot,t)$, $t \in I$ merljiva, sledi da je X_t merljiva kao funkcija na $\Omega \times I$. Za $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m \in \mathcal{A}$ imamo

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2(k+p+s)} \right]^{1/2} = C < \infty.$$

Takođe,

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2(k+p+s)} \right]^{1/2} \leq R(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A.$$

Dakle,

$$\int_{\Omega \setminus A} \int_I |X_k(\omega,t)\, \mathcal{R}^{k+p+s} \varphi(t)|dt\, dP(\omega) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega \setminus A} \left[\left(\int_I |X_k(\omega,t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_I |\mathcal{R}^{k+p+s} \varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right] dP(\omega) \leq$$

$$\leq \int_{\Omega \setminus A} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2(k+p+s)} \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{2(k+p+s)} \right)^{1/2} dP(\omega) \leq\right.$$

$$\leq C \int_{\Omega \setminus A} |R(\omega)| dP(\omega) < \infty.$$

Prema Fubinijevoj teoremi [37], sledi da $X_k(\cdot,\cdot)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(\cdot) \in L^1(\Omega \setminus A \times I)$, i po istoj teoremi, da je

$$\xi_k(\cdot,\varphi) = \int_I X_k(\cdot,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt,$$

slučajna promenljiva za svako $\varphi \in \mathcal{A}$. Sledi da je ξ_k u.s.p. na $\Omega \times L^2(I)$. Očigledno je da je

$$\xi_k(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-(k+p+s)} (\psi_m, \mathcal{R}^{k+p+s}\varphi) + \sum_{m\in\Lambda^c} c_m(\omega)\, (\psi_m,\varphi),$$

pa je

$$\xi(\omega,\varphi) = \xi_k(\omega,\varphi) + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)\, (\psi_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega \setminus A,\ \varphi \in \mathcal{A}. \ \square$$

funkcija na $\Omega \times I$. Za $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{K}$ imamo

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \Gamma_m(\ldots)\right]^{1/2} = c < \infty .$$

Takođe,

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \Gamma_m(\ldots)\right]^{1/2} \le R(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A .$$

Dakle,

$$\int_{\Omega\setminus A} \int_I |X_1(\omega,t)\, R^{\ldots}\varphi(t)|\, dt\, dP(\omega) \le$$

$$\le \int_{\Omega\setminus A} \left[\left(\int_I |X_1(\omega,t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_I |R^{\ldots}\varphi(t)|^2 dt\right)^{1/2}\right] dP(\omega) \le$$

$$\le \int_{\Omega\setminus A} \left[\left(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \Gamma_m(\ldots)\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \Gamma_m(\ldots)\right)^{1/2}\right] dP(\omega) \le$$

$$\le c \int_{\Omega\setminus A} |R(\omega)|\, dP(\omega) < \infty .$$

Prema Fubinijevoj teoremi [97], sledi da $X_1(\cdot,\cdot)R^{\ldots}\varphi(\cdot) \in L^1(\Omega\setminus A \times I)$, i po istoj teoremi, da je

$$\xi_1(\cdot,\varphi) = \int_I X_1(\cdot,t)\, R^{\ldots}\varphi(t)\, dt,$$

slučajna promenljiva za svako $\varphi \in \mathcal{K}$. Sledi da je ξ_1 u.s.p. na $\Omega \times L^2(I)$. Očigledno je da je

$$\xi_1(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)\, \Gamma_m(\ldots)\, (h_m, R^{\ldots}\varphi) = \sum_{m=k+1}^{\infty} c_m(\omega)\, (h_m,\varphi).$$

Pa je

$$\xi(\omega,\varphi) = \xi_1(\omega,\varphi) + \sum_{m=0}^{k} c_m(\omega)\,(h_m,\varphi), \quad \omega \in \Omega\setminus A,\ \varphi \in \mathcal{K}. \ \square$$

3.3. USLOVNO MATEMATIČKO OČEKIVANJE UOPŠTENOG SLUČANOG PROCESA

3.3.1. MATEMATIČKO OČEKIVANJE UOPŠTENOG SLUČAJNOG PROCESA NA $\Omega \times \mathcal{A}$

Neka je V vektorsko topološki prostor a V' njegov dualni prostor.

Definicija 3.3.1. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times V$, ako je

(i) $\forall\varphi \in V \quad E\xi(\cdot,\varphi) < \infty$,

(ii) preslikavanje $V \ni \varphi \to E\xi(\cdot,\varphi) \in \mathbb{C}$ je linearno i neprekidno

tada se funkcija $E[\xi] \in V'$ definisana na sledeći način

$$E[\xi](\varphi) = \int_{\Omega} \xi(\omega,\varphi)dP(\omega), \quad \varphi \in V$$

naziva *matematičko očekivanje* uopštenog slučajnog procesa ξ.

Teorema 3.3.1. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$ i neka su zadovoljeni uslovi Teoreme 3.2.2.. Ako je $E(R) < \infty$, tada postoji $E(c_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, postoji $E[\xi]$ i dato je sa

$$E[\xi](\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} E(c_m)(\psi_m,\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{A},$$

takođe postoji $p \in \mathbb{N}_0$ tako da je

$$\sum_{m=0}^{\infty} |E(c_m)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2p} < \infty.$$

Dokaz. Kako je u Teoremi 3.2.2.

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} = S(\omega) < \infty, \quad \omega \in \Omega \setminus A$$

sledi da je

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} \le R(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus A,$$

pa je, za svako $m \in \mathbb{N}_0$, $|c_m(\omega)| \le |\tilde{\lambda}_m|^k R(\omega)$, $\omega \in \Omega \setminus A$.

Sledi da je

$$|E(c_m)| = |\int_\Omega c_m(\omega)dP(\omega)| \le |\tilde{\lambda}_m|^k \int_\Omega R(\omega)dP(\omega) < \infty.$$

Dalje, za $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m \in \mathcal{A}$, $\omega \in \Omega$,

$$|E\xi(\omega,\varphi)| = |\int_\Omega \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi) \right] dP(\omega)| \le$$

$$\le \int_{\Omega\setminus A} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)\, \bar{a}_m| \right] dP(\omega) \le$$

$$\le \int_{\Omega\setminus A} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2 \tilde{\lambda}_m^{2k} \right]^{1/2} dP(\omega) \le$$

$$\le C \int_{\Omega\setminus A} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_m(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} dP(\omega) < \infty.$$

Prema Fubinijevoj teoremi je, za $\varphi \in \mathcal{A}$, $\omega \in \Omega$,

$$E[\xi](\varphi) = \int_\Omega \xi(\omega,\varphi)dP(\omega) =$$

$$= \int_{\Omega\setminus A} \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi) \right] dP(\omega) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\int_{\Omega\setminus A} c_m(\omega)dP(\omega) \right] (\psi_m,\varphi) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} E(c_m)(\psi_m,\varphi).$$

Iz činjenice da je $\sum_{m=0}^{\infty} E(c_m)(\psi_m,\varphi)$ konačno za svako $\varphi \in \mathcal{A}$

i iz [25 ch.30], sledi da postoji $p \in \mathbb{N}_0$ tako da je

$$\sum_{m=0}^{\infty} |E(c_m)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2p} < \infty. \quad \square$$

Primetimo da je za matematičko očekivanje u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$ dovoljno tražiti samo da je $E[\xi]$ funkcional na V. Očigledno, $E[\xi]$ je linearno, a neprekidnost se lako može pokazati. Zaista, neka $\varphi_n \to \varphi$ u $\mathcal{A}$ i neka je $\varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n \psi_m$, $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m$.

Tada je

$$|E[\xi](\varphi_m) - E[\xi](\varphi)| \le \sum_{m=0}^{\infty} |E(c_m)(\psi_m, \varphi_m - \varphi)| \le$$

$$\le \left[\sum_{m=0}^{\infty} |E(c_m)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2p} \right]^{1/2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_m^n - a_m| \, \tilde{\lambda}_m^{2p} \right]^{1/2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Teorema 3.3.2. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Neka su ispunjeni uslovi Teoreme 3.2.6.. Ako postoji $E[X_k(\cdot,t)]$ za svako $k \ge k_0$, $E[\xi]$ postoji i dato je sa

$$E[\xi](\varphi) = \int_I EX_k(\cdot,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} E(c_m)(\psi_m,\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

Dokaz. Iz Teoreme 3.3.1. sledi da $E(c_m)$ postoji za svako $m \in \mathbb{N}_0$, pa i za $m \in \Lambda$.

Primenjujući Fubinijevu teoremu, imamo za svako $\varphi \in \mathcal{A}$,

$$E[\xi](\varphi) = \int_\Omega \xi(\omega,\varphi)dP(\omega) = \int_{\Omega\setminus A} \xi(\omega,\varphi)dP(\omega) =$$

$$\int_{\Omega\setminus A} \left[\int_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi)\right] dP(\omega) =$$

$$\int_I \left[\int_{\Omega \setminus A} X_k(\omega,t)dP(\omega) \right] \mathcal{R}^{k+p+s} \varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} \int_{\Omega\setminus A} c_m(\omega)dP(\omega)(\psi_m,\varphi)=$$

$$\int_I E[X_k(\cdot,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} E(c_m)(\psi_m,\varphi). \quad \square$$

3.3.2. USLOVNO MATEMATIČKO OČEKIVANJE

Daćemo reprezentacionu teoremu za uslovno matematičko očekivanje u.s.p na $\Omega \times \mathcal{A}$, u odnosu na σ - podalgebru $\mathcal{U}$ od $\mathcal{F}$. Ova teorema je slična Teoremi 5. u [21]. Prvo ćemo dokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.3.3. Neka je $X(\omega,t)$: $\Omega \times I \to \mathbb{C}$ neprekidan slučajni proces. Neka postoji slučajna promenljiva R, sa $E(R) < \infty$, tako da je za svako $t \in I$, $|X(\cdot,t)| \le c(t)R(\cdot)$, skoro sigurno na Ω, gde je $c(t)$ funkcija ograničena na I. Tada za proizvoljnu σ - podalgebru $\mathcal{U}$ od $\mathcal{F}$, funkcija $g(\omega,t) = E(X(\omega,t)|\mathcal{U})$ je $\mathcal{U} \times \mathcal{B}(I)$ merljiva, gde je $\mathcal{B}(I)$ σ - algebra generisana Borelovim skupovima u I.

Dokaz. Za svako $t \in I$ imamo da je $g(\cdot,t)$ $\mathcal{U}$ - merljiva funkcija. Pokazaćemo da je za skoro svako $\omega \in \Omega$, $g(\omega,\cdot)$ neprekidna na I. Neka je $\{t_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ niz u I takav da $t_n \to t_0$, i za svako $\omega \in \Omega$ stavimo $Y_n(\omega) = X(\omega,t_n)$. Kako je $X(\omega,\cdot)$ neprekidno za skoro svako $\omega \in \Omega$ sledi da

$$Y_n(\cdot) \xrightarrow{s.s.} Y_0(\cdot) = X(\cdot,t_0), \quad n\to\infty.$$

Dalje, kako je za $t \in I$, $|X(\cdot,t)| \le c(t)R(\cdot)$ skoro

sigurno na Ω, prema Fatou-Lebesgue teoremi o konvergenciji [26, ch. 25.1] i kako je R integrabilno, imamo da je

$$E(Y_n|\mathcal{U}) \xrightarrow{a.s.} E(Y_o|\mathcal{U}).$$

Dakle, za skoro svako $\omega \in \Omega$, $g(\omega,t_n) = E(X(\omega,t_n)|\mathcal{U}) = E(Y_n|\mathcal{U})$ konvergira ka $g(\omega,t_o) = E(Y_o|\mathcal{U})$, pa je $g(\omega,\cdot)$ neprekidno za skoro svako $\omega \in \Omega$. Sledi da je $g(\cdot,\cdot)$ $\mathcal{U} \times \mathcal{B}(I)$ merljiva funkcija. Takođe, kako je $X(\omega,\cdot)$ neprekidna, sledi da je X $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(I)$ merljiva funkcija. □

Neka je $P_{\mathcal{U}}$ restrikcija od P na $\mathcal{U}$ definisana sa

$$P_{\mathcal{U}}(B) = P(B), \quad B \in \mathcal{U}.$$

Definicija 3.3.2. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{U}$ σ - podalgebra od $\mathcal{F}$. *Uslovno matematičko očekivanje* (uslovno očekivanje) od ξ u odnosu na $\mathcal{U}$, obeležavamo ga sa $E[\xi|\mathcal{U}](\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}$, je za svako $\varphi \in \mathcal{A}$, $\mathcal{U}$ - merljiva funkcija definisana do na $P_{\mathcal{U}}$ ekvivalenciju na sledeći način

$$\int_B E[\xi|\mathcal{U}](\varphi)dP_{\mathcal{U}}(\omega) = \int_B \xi(\omega,\varphi)dP(\omega), \quad B \in \mathcal{U}, \ \varphi \in \mathcal{A}.$$

Teorema 3.3.4. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Pretpostavimo da postoji slučajna promenljiva R, takva da je $E(R) < \infty$, skup $A \in \mathcal{F}$, takav da je $P(A)=0$, i broj $k_o \in \mathbb{N}_o$ tako da je $|\xi(\omega,\varphi)| \le R(\omega)\|\varphi\|_{k_o}$, $\omega \in \Omega \setminus A$, $\varphi \in \mathcal{A}$. Tada za $k \ge k_o$, postoji neprekidan slučajni proces $X_k(\omega,t)$ na $\Omega \times I$ i slučajne promenljive c_m, $m \in \Lambda$, tako da za $\omega \in \Omega \setminus A$, i $\varphi \in \mathcal{A}$, sigurno na Ω, prema Fatou-Lebesgue teoremi o konvergenciji [88, st.II.1] i kako je ξ integrabilno, imamo da je

$$E(Y_n|\mathcal{G}) \xrightarrow{s.s.} E(Y_0|\mathcal{G})$$

Dalje, za skoro svako $\omega \in \Omega$, $g(\omega,t_n) = E(K(\omega,t_n)|\mathcal{G}) = E(Y_n|\mathcal{G})$ konvergira ka $g(\omega,t_0) = E(Y_0|\mathcal{G})$, pa je $g(\omega,\cdot)$ neprekidno za skoro svako $\omega \in \Omega$. Sledi da je $g(\cdot,\cdot)$ $\mathcal{G} \times B(I)$ merljiva funkcija. Takođe, kako je $K(\omega,\cdot)$ neprekidna, sledi da je K $\mathcal{F} \times B(I)$ merljiva funkcija. □

Neka je $P_{\mathcal{G}}$ restrikcija od P na $\mathcal{G}$ definisana sa

$$P_{\mathcal{G}}(B) = P(B), \quad B \in \mathcal{G}.$$

Definicija 2.2.2. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$ i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Uslovno matematičko očekivanje (uslovno očekivanje) od ξ u odnosu na $\mathcal{G}$, obeležavamo ga sa $E[\xi|\mathcal{G}](\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}$, je za svako $\varphi \in \mathcal{A}$, $\mathcal{G}$-merljiva funkcija definisana na $P_{\mathcal{G}}$ skoro svuda na sledeći način

$$\int_B E[\xi|\mathcal{G}](\omega)\,dP_{\mathcal{G}}(\omega) = \int_B \xi(\omega,\varphi)\,dP(\omega), \quad B \in \mathcal{G}, \ \varphi \in \mathcal{A}.$$

Teorema 2.2.4. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Pretpostavimo da postoji slučajna promenljiva X, takva da je $E(X) < \infty$, skup $A \in \mathcal{F}$, takav da je $P(A)=0$, i broj $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tako da je $|\xi(\omega,\varphi)| \le X(\omega)\|\varphi\|_{r_0}$, $\omega \in \Omega \setminus A$, $\varphi \in \mathcal{A}$. Tada za $r \ge r_0$ postoji neprekidan slučajni proces $X_\xi(\omega,t)$ na $\Omega \times I$ i slučajne promenljive c_φ, $\varphi \in \mathcal{A}$, tako da za $\omega \in \Omega \setminus A$, i $\varphi \in \mathcal{A}$,

(1) $\xi(\omega,\varphi) = \int\limits_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi)$,

gde je $s \geq s_0$ iz (*) a $p \geq p_0$ iz (**). Dalje,

(2) $E[\xi|\mathcal{U}](\varphi) = \int\limits_I E(X_k(\omega,t)|\mathcal{U})\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda} E(c_m(\omega)|\mathcal{U})(\psi_m,\varphi)$.

Dokaz. Neka je $k \geq k_0$, fiksirano. Tada (1) sledi iz Teoreme 3.3.6.. Prema Teoremi 3.3.3. $E(X_k(\cdot,\cdot)|\mathcal{U})$, je merljiva funkcija na $\mathcal{U} \times \mathcal{B}(I)$, a X_k je $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(I)$ merljiva. Prema Teoremi 3.3.1., $E(c_m) < \infty$, $m \in \Lambda$. Na isti način kao u Teoremi 3.2.6. može se pokazati da je

$$\left|\int\limits_B\left[\int\limits_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt\right]dP(\omega)\right| \leq K\int\limits_B|R(\omega)|dP(\omega) < \infty.$$

Iz teoreme Fubinija sledi da je, za $\varphi \in \mathcal{A}$,

$$\int\limits_B E[\xi|\mathcal{U}](\varphi)dP_{\mathcal{U}}(\omega) = \int\limits_B \xi(\omega,\varphi)dP(\omega) =$$

$$= \int\limits_B\left[\int\limits_I X_k(\omega,t)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda} c_m(\omega)(\psi_m,\varphi)\right]dP(\omega) =$$

$$= \int\limits_I\left[\int\limits_B X_k(\omega,t)dP(\omega)\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda}\left[\int\limits_B c_m(\omega)dP(\omega)\right](\psi_m,\varphi) =\right.$$

$$= \int\limits_I\left[\int\limits_B E(X_k(\omega,t)|\mathcal{U})dP_{\mathcal{U}}(\omega)\right]\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt +$$

$$+ \sum\limits_{m\in\Lambda}\left[\int\limits_B E(c_m(\omega)|\mathcal{U})dP_{\mathcal{U}}(\omega)\right](\psi_m,\varphi) =$$

$$= \int\limits_B\left[\int\limits_I\left[E(X_k(\omega,t)|\mathcal{U})\right]\mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda} E(c_m(\omega)|\mathcal{U})(\psi_m,\varphi)\right]dP_{\mathcal{U}}(\omega). \square$$

3.4. REPREZENTACIJA UOPŠTENOG SLUČAJNOG PROCESA NA $\Omega \times \mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$ I $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$

3.4.1. REPREZENTACIJA U.S.P. NA $\Omega \times \mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$

U sledećoj teoremi koristićemo ideje dokaza Teoreme 8.1. [24] i Teoreme 6.1. [1].

Teorema 3.4.1. Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O})$. Za svaki regularan, relativno kompaktan otvoren podskup G od $\mathcal{O}$ i za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B \in \mathcal{F}$ i konačna slučajna Radonova mera $\nu_\alpha(\omega, dx)$ na C(G), $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, tako da

(1) $P(B) \geq 1-\varepsilon$;

(2) za svako $\omega \in B$ postoji $L > 0$ i $c > 0$ tako da

$$\|\nu_\alpha(\omega, dx)\|_{C'(G)} < cL^{|\alpha|}/M_{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n;$$

(3) za svako $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathcal{D}^{(Mp)}(G)$

$$\xi(\omega, \varphi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \langle D^\alpha \nu_\alpha(\omega, dx), \varphi(x) \rangle \qquad (3.4.1)$$

Štaviše, za svako $\omega \in B$ red u (3.4.1) konvergira ka $\xi(\omega, \cdot)$ u smislu jake topologije u $(\mathcal{D}^{(Mp)}(\mathcal{O}))'$.

Dokaz. Kako je G regularan, relativno kompaktan otvoren podskup od $\mathcal{O}$, njegovo zatvorenje, $\overline{G}$, je regularan kompaktan podskup od $\mathcal{O}$. Obeležimo $\overline{G}$ sa K. Neka je ξ_1 restrikcija od ξ na $\Omega \times \mathcal{D}_K^{(Mp)}$. ξ_1 je u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{D}_K^{(Mp)}$.

Pokazaćemo da se ξ_1 može prikazati u obliku (3.4.1) u

jakoj topologiji prostora $(\mathcal{D}_K^{(Mp)})'$. Kako je inkluzija $\mathcal{D}^{(Mp)}(G) \to \mathcal{D}_K^{(Mp)}$ neprekidna, pa preslikava ograničene skupove u ograničene, sledi da (3.4.1) važi i u jakoj topologiji prostora $(\mathcal{D}^{(Mp)}(G))'$.

Iz definicije i topološke strukture prostora $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ sledi da za svako $\omega \in \Omega$ postoji $c(\omega) > 0$ i $j(\omega) \in \mathbb{N}$ tako da

$$|\xi_1(\omega,\varphi)| \le c(\omega)\|\varphi\|_{X_{j(\omega)}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}.$$

Neka je

$$A_N(\varphi) = \{\omega \in \Omega : |\xi_1(\omega,\varphi)| < N\|\varphi\|_{X_N}\}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}, \quad N \in \mathbb{N},$$

i

$$A_N = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}} A_N(\varphi), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Kako je $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ separabilan, imamo da

$$A_N = \bigcap_{\varphi \in R} A_N(\varphi) \in \mathcal{F},$$

gde je R gust, prebrojiv skup u $\mathcal{D}_K^{(Mp)}$.

Tako iz

$$\Omega = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N, \quad A_N \subset A_{N+1}, \quad N \in \mathbb{N},$$

dobijamo da za dato $\varepsilon > 0$ postoji $r \in \mathbb{N}$ tako da je $P(A_r) \ge 1-\varepsilon$. Ako obeležimo $B = A_r$, imamo da je za $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}$,

$$|\xi_1(\omega,\varphi)| < r\|\varphi\|_{X_r}.$$

Definišimo na $\Omega \times \mathcal{D}_K^{(Mp)}$

$$\tilde{\xi}_1(\omega,\varphi) = \begin{cases} \xi_1(\omega,\varphi), & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}.$$

Neka je

$$S(\omega) = \sup \{|\tilde{\xi}_1(\omega,\varphi)|: \varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)},\ \|\varphi\|_{X_r} \le 1\} =$$
$$= \sup \{|\tilde{\xi}_1(\omega,\varphi)|: \varphi \in R,\ \|\varphi\|_{X_r} \le 1\},\quad \omega \in \Omega.$$

pa je $S(\cdot)$ merljiva funkcija, i $S(\cdot) \le r$.

$\mathcal{D}_K^{(Mp)}$ je potprostor od X_r. Po probabilističkoj Hahn-Banach-ovoj teoremi $\tilde{\xi}_1$ se može proširiti na $\Omega \times X_r$. Obeležimo ovo proširenje sa ξ_2. Tada je

$$|\xi_2(\omega,\varphi)| \le S(\omega)\|\varphi\|_{X_r},\quad \varphi \in X_r,\quad \omega \in \Omega.$$

Kako je d_r izometrija "na" prostora X_r i $\tilde{X}_r$ (paragraf 2.3. Glava II), preslikavanje $F: \Omega \times \tilde{X}_r \to \mathbb{C}$ definisano sa

$$F(\omega,(\tilde{\varphi}_\alpha)) = \xi_2(\omega,\varphi),\quad \text{gde je}\quad \varphi = d_r^{-1}((\tilde{\varphi}_\alpha)),$$

je u.s.p. na $\Omega \times \tilde{X}_r$.

Po probabilističkoj Hahn-Banach-ovoj teoremi F se može proširiti na $\Omega \times Y$. Obeležimo ovo proširenje sa $\tilde{F}$. $\tilde{F}$ je u.s.p. na $\Omega \times Y$ tako da je

$$|\tilde{F}(\omega,(\psi_\alpha))| \le S(\omega)\|(\psi_\alpha)\|_Y,\quad \omega \in \Omega,\quad (\psi_\alpha) \in Y.$$

Za svako $\omega \in \Omega$, $\tilde{F}(\omega,\cdot)$ je linearna i neprekidna funkcionela na Y pa je $\tilde{F}$ oblika

$$\tilde{F}(\omega,\cdot) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} F_\alpha(\omega,\cdot),$$

i

$$\|\tilde{F}(\omega,\cdot)\|_{Y'} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \|F_\alpha(\omega,\cdot)\|_{C'(K)} = S(\omega),$$

gde su $F_\alpha(\omega,\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, neprekidne i linearne funkcionele na potprostorima $Y_\alpha \subset Y$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, i gde je

$$Y_\alpha = \{(\psi_\beta,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n): \psi_\beta \in C(K),\ \psi_\beta \equiv 0\ \text{ za }\ \beta \in \mathbb{N}_0^n \setminus \{\alpha\}\}.$$

Za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ prostor Y_α je izometričan sa C(K). Obeležićemo $[\varphi]_\alpha$ element iz Y_α koji odgovara $\varphi \in C(K)$. Kako je $\tilde{F}(\omega,\cdot)|Y_\alpha = F_\alpha(\omega,\cdot)$, $\omega \in \Omega$, sledi da su F_α u.s.p. na $\Omega \times Y_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, odnosno na $\Omega \times C(\mathbb{K})$.

Dalje, Lemma 5.2. [1] implicira da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoji jedna i samo jedna slučajna Radonova mera $\nu_\alpha(\omega,dx)$ tako da je

$$F_\alpha(\omega,[\psi]_\alpha) = \int_K \psi(x)\,\nu_\alpha(\omega,dx), \quad \omega \in \Omega, \quad \psi \in C(K).$$

Tako, za $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathcal{D}_K^{(Mp)}$,

$$\xi_1(\omega,\varphi) = \tilde{\xi}_1(\omega,\varphi) = \xi_2(\omega,\varphi) =$$

$$= \tilde{F}(\omega,(\frac{r^{|\alpha|}(-1)^\alpha D^\alpha\varphi}{M_{|\alpha|}}))$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \int_K \frac{r^{|\alpha|}(-1)^\alpha}{M_{|\alpha|}} D^\alpha \varphi(x)\,\nu_\alpha(\omega,dx)$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \langle \frac{r^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} D^\alpha \nu_\alpha(\omega,dx), \varphi(x)\rangle$$

$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \langle D^\alpha \tilde{\nu}_\alpha(\omega,dx), \varphi(x)\rangle,$$

gde je

$$\tilde{\nu}_\alpha(\omega,dx) = \frac{r^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}} \nu_\alpha(\omega,dx),$$

i

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \left\| \frac{M_{|\alpha|}}{r^{|\alpha|}} \tilde{\nu}_\alpha(\omega,dx) \right\|_{C'(K)} < \infty.$$

što implicira (2). □

3.4.2. REPREZENTACIJA U.S.P. NA $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$

Na sličan način kao i u Teoremi 3.4.1. i Teoremi 3.2.1. možemo pokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.4.2. Ako je ξ u.s.p. na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$ tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k=k(\varepsilon)$, i niz slučajnih promenljivih $\{b_m:\ m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da za svako $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A}$

$$(1)\qquad \xi(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\omega)(\psi_m,\varphi);$$

$$(2)\qquad \left[\sum_{m=0}^{\infty} |b_m(\omega)|^2 (\exp_k|\tilde{\lambda}_n|)^{-k}\right]^{1/2} < \infty.$$

Štaviše, za svako $\omega \in B$ niz u (1) konvergira ka $\xi(\omega,\cdot)$ u smislu jake topologije prostora $(\mathrm{Exp}\mathcal{A})'$.

Dalje ćemo navesti neke primene reprezentacije u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$ dobijene u Teoremi 3.4.2., na rešavanje stohastičkih evolucionih jednačina.

Neka je $\xi(\cdot,\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(\cdot)(\psi_m,\cdot)$ u.s.p. na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$, i neka je T polinom takav da važi sledeći uslov.

Ako je neko $\omega \in \Omega$ i $m \in \mathbb{N}_0$ $b_m(\omega) \neq 0$, tada je $T(\lambda_m) \neq 0$.

Tada stohastička diferencijalna jednačina

$$T(\mathcal{R})u(\omega,\varphi) = \xi(\omega,\varphi), \quad \omega \in \Omega, \quad \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

gde je $T(\mathcal{R})u(\omega,\varphi) = u(\omega,T(\mathcal{R})\varphi)$, $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A}$, ima rešenje

3.4.2. REPREZENTACIJA U.S.F. NA $\Omega \times Exp\Phi$

Na sličan način kao i u Teoremi 3.4.1. i Teoremi 3.3.1. možemo pokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.4.2. Ako je f u.s.p. na $\Omega \times Exp\Phi'$ tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B \in \mathcal{F}$, za $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k=k(\varepsilon)$, i niz slučajnih promenljivih $\{b_n,\ n \in N_0\}$ tako da za svako $\omega \in B$ i $\varphi \in Exp\Phi$

$$(1)\quad f(\omega,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\omega)(\varphi_n,\varphi),$$

$$(2)\quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} |b_n(\omega)|^2 (\exp_k|\varphi_n|)^{-1}\right]^{1/2} < \infty.$$

Štaviše, za svako $\omega \in B$ niz u (1) konvergira ka $f(\omega,\cdot)$ u smislu jake topologije prostora $(Exp\Phi)'$.

Dalje ćemo navesti neke primene reprezentacije u.s.p. f na $\Omega \times Exp\Phi$ dobijene u Teoremi 3.4.2. na rešavanje stohastičkih evolucionih jednačina.

Neka je $f(\cdot,\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\cdot)(\varphi_n,\cdot)$ u.s.p. na $\Omega \times Exp\Phi$. I neka je T polinom takav da važi sledeći uslov:

Ako je neko $\omega \in \Omega$ i $n \in N_0$ $b_n(\omega) \neq 0$, tada je $T(\lambda_n) \neq 0$.

Tada stohastička diferencijalna jednačina

$$T(R)u(\omega,\varphi) = f(\omega,\varphi),\quad \omega \in \Omega,\quad \varphi \in Exp\Phi,$$

gde je $T(R)u(\omega,\varphi) = u(\omega, T(R)\varphi)$, $\omega \in \Omega$, $\varphi \in Exp\Phi$, ima rešenje

$$u(\omega,\varphi) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m(\omega)}{T(\lambda_m)} \psi_m, \varphi \Big).$$

Ako je za neko $\omega \in \Omega$ $b_m(\omega)=0$ i $T(\lambda_m)=0$ stavljamo da je $b_m(\omega)/T(\lambda_m)=0$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje u je u.s.p. za koji Teorema 3.4.2. implicira:

Za svako $\varepsilon > 0$ postoji $B \in \mathcal{F}$ i $k=k(\varepsilon)$

(i) tako da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, i $\sum_{m=0}^{\infty} |u_m(\omega)|^2 (\exp_k |\tilde{\lambda}_m|)^{-2k} < \infty$,

gde je $u_m(\omega) = b_m(\omega)/T(\lambda_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in \Omega$.

Obeležimo sa E_1^k diferencijalni operator beskonačnog reda oblika

$$E_1^k \ (e^{\mathcal{R}})^k = e^{k\mathcal{R}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m \ \mathcal{R}^m}{m!}$$

a sa E_p^k operator

$$E_p^k = \exp k(\underbrace{\exp\ldots\exp}_{p}\mathcal{R})$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{k^{m_1}}{m_1!} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{m_1^{m_2}}{m_2!} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} \frac{m_{p-1}^{m_p}}{m_p!} \mathcal{R}^{m_p}.$$

Na sličan način možemo posmatrati i rešiti stohastičku diferencijalnu jednačinu beskonačnog reda

$$T_0(\mathcal{R})u + T_1(E_1)u + \ldots + T_s(E_s)u = Hu = \xi.$$

Tačnije, ova jednačina je oblika

$$Hu(\omega,\varphi) \equiv u(\omega,H\varphi) = \xi(\omega,\varphi), \ \omega \in \Omega, \ \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

gde je ξ dati u.s.p. na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$, a $T_0, T_1, \ldots T_s$ proizvoljni polinomi [33].

Dalje, posmatrajmo stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$\text{(ii)} \quad \frac{\partial u(\omega,t,\varphi)}{\partial t} = T(\mathcal{R})\, u(\omega,t,\varphi), \quad \omega \in \Omega,\ t \in [0,\infty),\ \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

$$u(\omega,\varphi) = \xi(\omega,\varphi), \quad \omega \in \Omega,\ \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

gde je ξ dati u.s.p. na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$.

Pretpostavimo da je $u(\omega,\cdot,\varphi)$ glatka funkcija na $[0,\infty)$ za svako $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A}$, i za svako $\omega \in \Omega$, $t \in [0,\infty)$, $\varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A}$:

$$T(\mathcal{R})u(\omega,t,\varphi) = u(\omega,t,T(\mathcal{R})\varphi).$$

Koristeći rezultate u [33] dobijamo da je

$$u(\omega,t,\varphi) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} (\exp(T(\lambda_m)t))b_m(\omega)\psi_m, \varphi\Big),$$

$$b_m(\omega) = \xi(\omega,\psi_m), \quad m \in \mathbb{N}_0,\ \omega \in \Omega,$$

rešenje jednačine u (ii). Za koeficijente $u_m(\omega,t) = (\exp(T(\lambda_m)t))b_m(\omega)$, $m \in \mathbb{N}_0$, važi (i) ako t pripada ograničenom skupu u $[0,\infty)$. U ovom slučaju B i k ne zavise od tog ograničenog skupa.

Na sličan način možemo rešiti stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{\partial u(\omega,t\varphi)}{\partial t} = (T_0(\mathcal{R}) + T_1(E_1) + \ldots + T_s(E_s))u(\omega,t,\varphi),$$

$$\omega \in \Omega,\ t \in [0,\infty),\ \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

$$u(\omega,t,\varphi) = \xi(\omega,\varphi),\ \omega \in \Omega,\ \varphi \in \mathrm{Exp}\mathcal{A},$$

gde je ξ dati u.s.p. na $\Omega \times \mathrm{Exp}\mathcal{A}$.

GLAVA IV

4.1. KONVERGENCIJE NIZA U.S.P. NA $\Omega \times \mathscr{A}$

U svom radu [22], L.J. Kitchens je dao definicije konvergencije u verovatnoći, srednje kvadratno i skoro sigurno, niza $\{\xi_n, n \geq 1\}$ uopštenih slučajnih procesa na $\Omega \times \mathcal{K}\{M_p\}$. U [22] su takođe dobijene karakterizacije niza u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{K}\{M_p\}$ koji konvergira na neki od navedenih načina.

Sledeći njegova istraživanja, u ovoj glavi daćemo karakterizacije niza $\{\xi_n, n \geq 1\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$, koji konvergira u verovatnoći, skoro sigurno i srednje kvadratno. Niz u.s.p. ćemo kraće zapisivati $\{\xi_n\}$.

4.1.1. OSNOVNE DEFINICIJE

Definicija 4.1.1. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ u verovatnoći $(\mathscr{A}')$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}_0$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega: \sup_{\|\varphi\|_k \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi) - \xi(\omega,\varphi)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{v} \xi$, $(\mathscr{A}')$.

Definicija 4.1.2. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ srednjem $(\mathscr{A}')$ ako postoji $k \in \mathbb{N}_0$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sup_{\|\varphi\|_k \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi) - \xi(\omega,\varphi)| dP(\omega) = 0.$$

GLAVA IV

4.1. KONVERGENCIJE NIZA U.S.P. NA $\Omega \times \mathcal{A}$

U svom radu [22], L.J. Kitchens je dao definicije konvergencije u verovatnoći, srednje kvadratno i skoro sigurno, niza $\{\xi_n, n \geq 1\}$ uopštenih (slučajnih) procesa na $\Omega \times K(R_+)$. U [22] su takođe određene karakterizacije niza u.s.p. na $\Omega \times K(R_+)$ koji konvergira na neki od navedenih načina.

Sledeći njegova istraživanja u ovoj glavi dajemo karakterizacije niza $\{\xi_n, n \geq 1\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$, koji konvergira u verovatnoći, skoro sigurno i srednje kvadratno. Niz u.s.p. često kraće označavamo $\{\xi_n\}$.

4.1.1. OSNOVNE DEFINICIJE

Definicija 4.1.1. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathcal{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathcal{A}$ u verovatnoći $(\mathcal{A}')$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $k \in N_0$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} P\{\omega \in \Omega : \sup_{\|\varphi\|_k \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi) - \xi(\omega,\varphi)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $(\mathcal{A}')$.

Definicija 4.1.2. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathcal{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathcal{A}$ srednjom $(\mathcal{A}')$ ako postoji $k \in N_0$ tako da

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sup_{\|\varphi\|_k \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi) - \xi(\omega,\varphi)| dP(\omega) = 0.$$

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{1} \xi$, $(\mathscr{A}')$.

Očigledno, konvergencija u verovatnoći (srednjem) $(\mathscr{A}')$ implicira takozvanu slabu konvergenciju u verovatnoći (srednjem):

Definicija 4.1.3. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira slabo u verovatnoći $(\mathscr{A}')$ ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ ako za svako $\varphi_0 \in \mathscr{A}$, $\xi_n(\cdot,\varphi_0) \xrightarrow{v} \xi(\cdot,\varphi_0)$.

Definicija 4.1.4. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira slabo u srednjem $(\mathscr{A}')$ ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ ako za svako $\varphi_0 \in \mathscr{A}$, $\xi_n(\cdot,\varphi_0) \xrightarrow{1} \xi(\cdot,\varphi_0)$.

Definicija 4.1.5. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ skoro sigurno $(\mathscr{A}')$ ako postoji skup $A \in \mathscr{F}$ takav da je $P(A) = 0$ i da za $\omega \in \Omega \setminus A$, $\xi_n(\omega,\cdot) \longrightarrow \xi(\omega,\cdot)$ slabo u $\mathscr{A}'$.

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{s.s.} \xi$, $(\mathscr{A},)$.

Definicija 4.1.6. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ ograničeno u verovatnoći $(\mathscr{A}')$ ako

(i) $\xi_n \xrightarrow{v} \xi$, $(\mathscr{A}')$,

(ii) postoji skup $A \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A) = 0$ i da je za $\omega \in \Omega \setminus A$ skup $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ je ograničen u $\mathscr{A}'$.

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{v.o.} \xi$, $(\mathscr{A}')$.

Definicija 4.1.7. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka ξ na $\Omega \times \mathscr{A}$ ograničeno u srednjem $(\mathscr{A}')$ ako

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{L} \xi$, $(\mathscr{M}')$.

Očigledno, konvergencija u verovatnoći (srednjem) $(\mathscr{M}')$ implicira takozvanu slabu konvergenciju u verovatnoći (srednjem).

Definicija 4.1.3. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{M}$ konvergira slabo u verovatnoći $(\mathscr{M}')$ ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{M}$ ako za svako $x_0 \in \mathscr{M}$, $\xi_n(\cdot, x_0) \xrightarrow{P} \xi(\cdot, x_0)$.

Definicija 4.1.4. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{M}$ konvergira slabo u srednjem $(\mathscr{M}')$ ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{M}$ ako za svako $x_0 \in \mathscr{M}$, $\xi_n(\cdot, x_0) \xrightarrow{L} \xi(\cdot, x_0)$.

Definicija 4.1.5. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{M}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{M}$ skoro sigurno $(\mathscr{M}')$ ako postoji skup $A \in \mathscr{F}$ takav da je $P(A) = 0$ i da za $\omega \in \Omega \setminus A$, $\xi_n(\omega, \cdot) \to \xi(\omega, \cdot)$ slabo u $\mathscr{M}'$.

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{s.s.} \xi$, $(\mathscr{M}')$.

Definicija 4.1.6. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{M}$ konvergira ka u.s.p. ξ na $\Omega \times \mathscr{M}$ ograničeno u verovatnoći $(\mathscr{M}')$ ako

(i) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $(\mathscr{M}')$,

(ii) postoji skup $A \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A) = 0$ i da je za $\omega \in \Omega \setminus A$, $\sup_n \{\xi_n(\omega, \cdot)\}$ je ograničen u $\mathscr{M}'$.

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{o.P} \xi$, $(\mathscr{M}')$.

Definicija 4.1.7. Niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ na $\Omega \times \mathscr{M}$ konvergira ka ξ na $\Omega \times \mathscr{M}$ ograničeno u srednjem $(\mathscr{M}')$ ako

(i) $\xi_n \xrightarrow{1} \xi$, $(\mathscr{A}')$,

(ii) postoji skup $A \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A) = 0$ i da je za $\omega \in \Omega \setminus A$ skup $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen u $\mathscr{A}'$.

Kraće pišemo $\xi_n \xrightarrow{1.o.} \xi$, $(\mathscr{A}')$.

Očigledno da $\xi_n \xrightarrow{v.o.} \xi$ implicira $\xi_n \xrightarrow{v} \xi$ i $\xi_n \xrightarrow{1.o.} \xi$ implicira $\xi_n \xrightarrow{1} \xi$.

Kako niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ konvergira ka u.s.p. ξ ako i samo ako niz u.s.p. $\{\xi_n - \xi\}$ konvergira ka nuli, dalje ćemo posmatrati samo slučaj kada niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ konvergira ka nuli.

4.2. KONVERGENCIJA SKORO SIGURNO $(\mathscr{A}')$

Teorema 4.2.1. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

A. Niz $\{\xi_n\}$ konvergira ka nuli skoro sigurno $(\mathscr{A}')$.

B. (i) Za svako $\varphi \in \mathscr{A}$, $\{\xi_n(\cdot,\varphi)\}$ konvergira ka nuli skoro sigurno.

(ii) Postoji skup $A \in \mathscr{F}$ takav da je $P(A)=0$, i za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ skup $\{\xi_n(\cdot,\varphi),\ n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen u $\mathscr{A}'$.

C. (i) Za svako $\varphi \in \mathscr{A}$, niz $\{\xi_n(\cdot,\varphi)\}$ konvergira ka nuli skoro sigurno.

(ii) Za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$, i broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$, oba nezavisni od n, takvi da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, i za svako $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{A}$, je $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq k_0 \|\varphi\|_{k_0}$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2. u [22]. Pokazaćemo da A.$\Rightarrow$ C.$\Rightarrow$ B.$\Rightarrow$ A..

(i) $\xi_n \xrightarrow{s} \xi$, $(\mathscr{F}^*)$.

(ii) postoji skup $A \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A) = 0$, da je za $\omega \in \Omega \setminus A$ skup $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen u $\mathscr{H}'$.

Tada pišemo $\xi_n \xrightarrow{s.w.} \xi$, $(\mathscr{F}^*)$.

Očigledno da $\xi_n \xrightarrow{s.w.} \xi$ implicira $\xi_n \xrightarrow{s} \xi$ i $\xi_n \xrightarrow{s.w.} \xi$ implicira $\xi_n \xrightarrow{s} \xi$.

Kako niz u s.p. $\{\xi_n\}$ konvergira ka u.s.p. ξ ako i samo ako niz u.s.p. $\{\xi_n - \xi\}$ konvergira ka $\theta(t)$, dalje ćemo posmatrati samo slučaj kada niz u.s.p. $\{\xi_n\}$ konvergira ka nuli.

4.2. KONVERGENCIJA SKORO SIGURNO $(\mathscr{F}^*)$

Teorema 4.2.1. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. nad $\mathscr{H}$. Sledeći uslovi su ekvivalentni.

A. Niz $\{\xi_n\}$ konvergira ka nuli skoro sigurno $(\mathscr{F}^*)$.

B. (i) Za svako $\varphi \in \mathscr{H}$, $\langle \xi_n(\cdot), \varphi \rangle$ konvergira ka nuli skoro sigurno.

(ii) Postoji skup $A \in \mathscr{F}$ takav da je $P(A)=0$, i da za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ skup $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$, $n \in \mathbb{N}$, je ograničen u $\mathscr{H}'$.

C. (i) Za svako $\varphi \in \mathscr{H}$, niz $\{\xi_n(\cdot,\varphi)\}$ konvergira ka nuli skoro sigurno.

(ii) Za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$ i broj $\lambda_0 \in \mathbb{N}_0$, oba nezavisni od n, takvi da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, i za svako $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{H}$, je $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq \lambda_0 |\varphi|_{\lambda_0}$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 2.2. u [23]. Pokazaćemo da $A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow A$.

A. → C. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} \xi$, $(\mathscr{A}')$. Tada C.(i) odmah sledi. Imamo da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ niz $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen, a kako je $\mathscr{A}' = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathscr{A}'_k$, sledi da postoji nenegativan prirodan broj $k = k(\omega)$, koji ne zavisi od n, takav da je $|\xi_n(\omega,\varphi)| \le k(\omega)\|\varphi\|_{k(\omega)}$, $\varphi \in \mathscr{A}$. Dalje, kao u [28, Theorem 2.], videti takođe [1,12], označimo

$$A_N(\varphi) = \{\omega \in \Omega: |\xi_n(\omega,\varphi)| \le N\|\varphi\|_N\}, \quad \varphi \in \mathscr{A},\ N \in \mathbb{N},$$

$$A_N = \bigcap_{\varphi \in S_r} A_N(\varphi).$$

Imamo da je A_N merljiv skup, da je $\Omega \setminus A \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$, i $A_N \subset A_{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$. Odatle dobijamo da za dato $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $P(A_k) \ge 1-\varepsilon$. Stavimo $B = A_k$ i C.(ii) sledi.

C. → B. Uslovi C.(i) i B.(i) su isti, a da bismo pokazali da C.(ii)→ B.(ii), odaberimo $\varepsilon=1/p$, $p \in \mathbb{N}$. Tada postoji B_p i k_p, nezavisni od n, takvi da je $P(B_p) \ge 1-1/p$, i za $\omega \in B_p$, $|\xi_n(\omega,\varphi)| \le k_p\|\varphi\|_{k_p}$, $\varphi \in \mathscr{A}$. Neka je $A = \Omega \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$. Tada je $P(A) = 0$ i B.(ii) sledi.

B. → A. Iz B.(i) sledi da za svako $\varphi \in S_r$ postoji skup $A_\varphi \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A_\varphi)=0$ i za svako $\omega \in \Omega\setminus A_\varphi$, $\xi_n(\omega,\varphi) \to 0$. Neka je $A' = A \cup (\bigcup_{\varphi \in S_r} A_\varphi)$, (A je skup iz uslova B.(ii)). Imamo da je $P(A') = 0$, i za svako $\varphi \in S_r$ i $\omega \in \Omega \setminus A'$, $\xi_n(\omega,\varphi) \to 0$. Kako iz uslova B.(ii) sledi da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A'$ niz $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen u $\mathscr{A}'$, na osnovu Banach-Steinhausove teoreme sledi da za svako $\omega \in \Omega \setminus A'$, $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$ $(\mathscr{A}')$. □

A ⇒ C. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.n.} \xi$, $(\mathcal{X}')$. Tada C.(i) odmah sledi. Imamo da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ niz $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen, a kako je $\mathcal{X}' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}'_k$, sledi da postoji nenegativan prirodan broj $k = k(\omega)$, koji ne zavisi od n, takav da je $|\xi_n(\omega,\varphi)| \le k(\omega)\|\varphi\|_{k,\omega}$, $\varphi \in \mathcal{X}$. Dalje, kao u [29, Theorem 2.], videti takođe [1,12], označimo

$$A_N(\varphi) = \{\omega \in \Omega\colon\ |\xi_n(\omega,\varphi)| \le N\|\varphi\|_N\},\quad \varphi \in \mathcal{X},\ N \in \mathbb{N},$$

$$A_N = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{X}_N} A_N(\varphi).$$

Imamo da je A_N merljiv skup, da je $\Omega \setminus A \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$, i $A_N \subset A_{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$. Odatle dobijamo da za dato $\varepsilon > 0$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $P(A_k) \ge 1-\varepsilon$. Stavimo $B = A_k$ i C.(ii) sledi.

C ⇒ B. Uslovi C.(i) i B.(i) su isti, a da bismo pokazali da C.(ii) ⇒ B.(ii), označimo $\varepsilon = 1/p$, $p \in \mathbb{N}$. Tada postoji B_p i k_p, nezavisni od n, takvi da je $P(B_p) \ge 1-1/p$, i za $\omega \in B_p$, $|\xi_n(\omega,\varphi)| \le k_p\|\varphi\|_{k_p}$, $\varphi \in \mathcal{X}$. Neka je $A = \Omega \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$. Tada je $P(A) = 0$ i B.(ii) sledi.

B ⇒ A. Iz B.(i) sledi da za svako $\varphi \in \mathcal{X}$, postoji skup $A_\varphi \in \mathcal{F}$, takav da je $P(A_\varphi)=0$ i za svako $\omega \in \Omega\setminus A_\varphi$, $\xi_n(\omega,\varphi) \to 0$. Neka je $A' = A \cup (\bigcup_{\varphi \in \mathcal{X}_1} A_\varphi)$, ($A$ je skup iz uslova B.(ii)). Imamo da je $P(A') = 0$, i za svako $\varphi \in \mathcal{X}$, i $\omega \in \Omega \setminus A'$, $\xi_n(\omega,\varphi) \to 0$. Kako iz uslova B.(ii) sledi da je za svako $\omega \in \Omega \setminus A'$ niz $\{\xi_n(\omega,\cdot)\}$ ograničen u $\mathcal{X}'$, na osnovu Banach-Steinhausove teoreme sledi da za svako $\omega \in \Omega \setminus A'$, $\xi_n \xrightarrow{s.n.} 0$ $(\mathcal{X}')$. □

Teorema 4.2.2. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Tada $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathscr{A}')$ ako i samo ako $\forall\ \varepsilon > 0$ postoji skup $C \in \mathscr{F}$, takav da je $P(C) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, takav da za $k > k_0$ i $\omega \in C$,

$$(1)\quad \sup_{\|\varphi\|_k \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| \longrightarrow 0, \quad n\longrightarrow\infty.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathscr{A}')$. Tada iz Teoreme 4.2.1. deo C.(ii) sledi da postoji skup $B \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$ takvi da za $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq k_0 \|\varphi\|_{k_0}$. Dalje, iz **Teoreme 3.2.1.** sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n},\ m \in \mathbb{N}_0\}$ takav da je za svako $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{A}$,

$$\xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi), \tag{4.2.1}$$

i za svako $n \in \mathbb{N}$, i $k \geq k_0$, k fiksirano,

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\ \tilde{\lambda}_m^{-2k}\right]^{1/2} < k. \tag{4.2.2}$$

Kako $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathscr{A}')$, postoji $A \in \mathscr{F}$, takav da je $P(A) = 0$ i da za $\omega \in \Omega \setminus A$, $\xi_n(\omega,\varphi) \longrightarrow 0$ za svako $\varphi \in \mathscr{A}$. Stavimo $C=B \setminus A$. Tada je $P(C) \geq 1-\varepsilon$ jer je $P(\cdot)$ kompletna mera. Stavljajući $\varphi=\psi_m$, $m \in \mathbb{N}_0$ u (4.2.1.), dobijamo, za $\omega \in C$,

$$\xi_n(\omega,\psi_m) = c_{m,n}(\omega) \longrightarrow 0, \quad n\to 0,\ m \in \mathbb{N}_0, \tag{4.2.3}$$

Neka je $k > k_0$ fiksirano. Imamo, za $\varphi = \sum\limits_{m=} a_m\psi_m \in \mathscr{A}$, $\omega \in C$,

$$|\xi_n(\omega,\varphi)| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi)\right| =$$

$$= \left|\sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\ \tilde{\lambda}_m^{-k}\ \tilde{\lambda}_m^{k}\ a_m\right| \leq$$

$$\leq \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} \|\varphi\|_k .$$

Dalje,

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2k} =$$

$$\sum_{m=0}^{m_0} |c_{m,n}(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2k} + \tilde{\lambda}_{m_0+1}^{-2} \sum_{m=m_0+1}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2(k-1)} ,$$

gde je m_0 izabrano tako da

$$\tilde{\lambda}_{m_0+1}^{-2} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^2 .$$

Iz (4.2.3.) sledi da postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takvo da je, za $\omega \in C$

$$\sum_{m=0}^{m_0} |c_{m,n}(\omega)|^2 \, \tilde{\lambda}_m^{-2k} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 , \quad n \geq n_0 .$$

Dakle, imamo da za svako $\varepsilon > 0$, $\omega \in C$, $\varphi \in \mathscr{A}$, $k > k_0$,

$$|\xi_n(\omega, \varphi)| \leq \varepsilon \|\varphi\|_k ,$$

pa sledi (1).

Obrnuto, pretpostavimo da je (1) ispunjeno. Tada C.(ii) odmah sledi.

Za svaki $p \in \mathbb{N}$ izaberimo $\varepsilon = 1/p$. Iz (1) sledi da za $p \in \mathbb{N}$ postoji C_p i k_p takvi da je $P(C_p) \geq 1 - 1/p$, i za $\omega \in C_p$ $\sup_{\|\varphi\|_{k_p} \leq 1} |\xi_n(\omega, \varphi)| \longrightarrow 0$. Neka je $A = \Omega \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} C_p$, tada je $P(A) = 0$. Za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ postoji $p(\omega)$ takvo da $\omega \in C_{p(\omega)}$ i postoji $k_{p(\omega)}$, takvo da $\sup_{\|\varphi\|_{k_{p(\omega)}} \leq 1} |\xi_n(\omega, \varphi)| \longrightarrow 0$. Dakle, za dato $\varphi \in \mathscr{A}$, i za $\omega \in \Omega \setminus A$

$$|\xi_n(\omega, \varphi)| \leq \sup_{\|\varphi\|_{k_{p(\omega)}} \leq 1} |\xi_n(\omega, \varphi)| \, \|\varphi\|_{k_{p(\omega)}} \to 0,$$

pa C.(i) sledi. □

U Teoremi 3.2.3. data je reprezentacija u.s.p. ξ pomoću običnog slučajnog procesa. U sledećoj teoremi biće dat potreban u dovoljan uslov da u ovom slučaju niz $\{\xi_n\}$ konvergira skoro sigurno $(\mathcal{A}')$.

Teorema 4.2.3. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Tada $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathcal{A}')$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$ sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su i B i k_0 nezavisni od n; za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}(\omega)\colon n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k > k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, $n \in \mathbb{N}$, tako da , za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi),$$

$$\omega \in B,\ \varphi \in \mathcal{A},$$

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} < k,\quad \omega \in \Omega,$

(3) $\|X_{k,n}(\cdot,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{s.s.} 0,$

(4) za $\omega \in C$, $\sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega) \to 0$, $n\to\infty$,

gde je C skup iz **Teoreme 4.2.2.**.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0, (\mathcal{A}')$ i neka je $\varepsilon > 0$ dato. Iz C(ii) Teoreme 4.2.1. sledi da postoji skup $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$, oba nezavisna od n, takva da $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq \|\varphi\|_{k_0}$, $\omega \in B$, $\varphi \in \mathcal{A}$. Tada iz Teoreme 3.2.3. sledi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za $k \geq k_0$ postoji funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, i slučajne promenljive $c_{m,n}$ na Ω, $m \in \Lambda$, tako da je (1) i (2) ispunjeno.

pa C.(1) sledi. □

U Teoremi 3.2.2. data je reprezentacija u s.p. ξ pomoću običnog slučajnog procesa. U sledećoj teoremi biće dat potreban i dovoljan uslov da u ovom slučaju niz $\{\xi_n\}$ konvergira skoro sigurno $(\mathscr{K}')$.

Teorema 4.2.3. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{K}$. Tada $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathscr{K}')$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$ sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in N_0$, gde su i B i k_0 nezavisni od n; za svako $\alpha \in A$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{\alpha,n}(\omega),\ n \in N\}$, i za svako $k \ge k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, $n \in N$, tako da, za $n \in N$,

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\varphi^{(k)}(t)\,dt + \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,n}(\omega)\langle h_\alpha, \varphi\rangle,$$

$\omega \in B,\ \varphi \in \mathscr{K},$

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_2 < \varepsilon, \quad \omega \in B,$

(3) $\|X_{k,n}(\cdot,\cdot)\|_2 \xrightarrow{s.s.} 0,$

(4) za $\omega \in C$, $\sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,n}(\omega) \to 0$, $n \to \infty$,

gde je C skup iz Teoreme 4.2.2.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0, (\mathscr{K}')$ i neka je $\varepsilon > 0$ dato. Iz (C11) Teoreme 4.2.1 sledi da postoji skup $B \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji broj $k_0 \in N_0$, koji je nezavisan od n, takav da $|\xi_n(\omega,\varphi)| \le \|\varphi\|_{k_0}$, $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{K}$. Tada iz Teoreme 3.2.2. sledi da za svaki $n \in N$ i za $k \ge k_0$ postoji funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, i slučajne promenljive $c_{\alpha,n}$ na Ω, $\alpha \in A$, tako da je (1) i (2) ispunjeno.

Dalje, kako je

$$\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} = \begin{cases} \sup\limits_{\|\varphi\|_k \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)|, & \omega \in B \\ 0, & \omega \notin B \end{cases}, \qquad (4.2.5)$$

imamo, prema (1), Teorema 4.2.2., da $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \to 0$ za $\omega \in \Omega \setminus (B \cap A)$, (A je skup iz Definicije 4.1.5.). Kako je $P(B \cap A) = 0$ sledi (3).

Kako i u Teoremi 4.2.2. možemo dobiti da za svako $m \in \Lambda$, $c_{m,n}(\omega) \to 0$, $\omega \in C = B \setminus A$, kako je Λ konačno, (4) sledi.

Obrnuto, neka su uslovi (1) - (4) ispunjeni. Uslovi (3) i (4) impliciraju (1) iz Teoreme 4.2.2. pa iz iste teoreme sledi da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathcal{A}')$. □

U slučaju da je niz $\{\xi_n\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$ prikazan preko niza neprekidnih slučajnih procesa na $\Omega \times I$ imamo samo potreban uslov za konvergenciju skoro sigurno $(\mathcal{A}')$.

Pretpostavimo, kao i ranije, da su uslovi (*) i (**) iz Glave III zadovoljeni.

Teorema 4.2.4. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathcal{A}')$ tada za svako $\varepsilon < 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji broj $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}(\omega)\colon n \in \mathbb{N}\}$ na Ω, i za svako $k > k_0$ niz neprekidnih slučajnih procesa $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, tako da za $n \in \mathbb{N}$,

$$(1) \quad \xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\, \mathcal{R}^{k+p+s}\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi),$$

$\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{A}$, gde je $s \geq s_0$ iz (*), $p \geq p_0$ iz (**).

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \leq k$, $\omega \in \Omega$,

(3) $\{X_{k,n}(\omega,\cdot),\ n \geq 1\}$ je jednako neprekidan na I za $p > p_0$, $\omega \in \Omega \setminus A$,

(4) za $\omega \in \Omega \setminus (B \cap A)$, $X_{k,n}(\omega,\cdot) \to 0$, na I, $n \to \infty$,

(5) za svako $t \in I$ $X_{k,n}(\cdot,t) \to 0$, na $\Omega \setminus A$, $n \to \infty$,

(6) $\sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega) \to \infty$, $n \to \infty$, $\omega \in B \setminus A$

gde je A skup iz Definicije 4.1.5.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathscr{A}')$. Tada iz C(ii), Teorema 4.2.1. i Teoreme 3.2.5. slede (1) i (2), gde je za $n \in \mathbb{N}_0$ i $k \geq k_0$

$$X_{k,n}(\omega,t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-(k+p+s)}\, \psi_m(t), & \omega \in B \\ 0 & , \omega \notin B \end{cases}, \quad t \in I.$$

Neka je $t \in I$. Za $\omega \notin B$, $X_{k,n}(\omega,t) = 0$, a $\omega \in B$

$$|X_{k,n}(\omega,t)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-(k+p+s)}\, \psi_m(t) \right| \leq$$

$$\leq K \sum_{m=0}^{\infty} \left| c_{m,n}(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-(k+p)} \right| < \varepsilon, \text{ za } n \geq n_0(\varepsilon),$$

na isti način kao i u Teoremi 4.2.2., jer je $k+p > k_0$, pa (4) sledi. Uslov (6) sledi na isti način kao i uslov (4) u Teoremi 4.2.3.

Da bismo pokazali (3) uočimo da iz uslova (**) sledi, za $p > p_0$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2p} = A < \infty.$$

Možemo odabrati l_0 tako da je

$$\left[\min_{m\ge l_0} \tilde{\lambda}_m^2 \right]^{-1} < \frac{\varepsilon^2}{4AK^2k^2} .$$

Konstanta K je iz uslova (*). Niz $\tilde{\lambda}_m$, $m \in \mathbb{N}_0$ je monotono neopadajući pa je $\tilde{\lambda}_{l_0}^2 = \min_{m\ge l_0} \tilde{\lambda}_m^2$.

Kako su $\psi_m(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}_0$ neprekidne funkcije, za svako $t, t' \in I$ i svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta=\delta(\varepsilon,t)$ tako da je

$$\sum_{m=0}^{l_0-1} |\psi_m(t) - \psi_m(t')|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2(s+p)} < \frac{\varepsilon^2}{2k^2},$$

ako je $|t-t'| < \delta(\varepsilon,t)$. Sada imamo za $t,t' \in I$, $|t-t'| < \delta(\varepsilon,t)$, $\omega \in B$

$$|X_{k,n}(\omega,t)-X_{k,n}(\omega,t')| \le \sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|\,|\tilde{\lambda}_m|^{-(k+p+s)}\,|\psi_m(t)-\psi_m(t')| \le$$

$$\le \Big(\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{m=0}^{\infty} |\psi_m(t)-\psi_m(t')|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2(p+s)}\Big)^{1/2} \le$$

$$\le k\,\Big(\sum_{m=0}^{l_0-1} |\psi_m(t)-\psi_m(t')|\tilde{\lambda}_m^{-2(p+s)} + 2K^2 \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2p}\Big)^{1/2} \le$$

$$\le k\left[\frac{\varepsilon^2}{2k^2} + \frac{2K^2}{\tilde{\lambda}_{l_0}^2} \sum_{m=l_0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2(p-1)}\right]^{1/2} \le$$

$$\le k\left[\frac{\varepsilon^2}{2k^2} + \frac{\varepsilon^2}{2k^2}\right]^{1/2} = \varepsilon.$$

Kako je još $X_{k,n}(\omega,\cdot)=0$ za $\omega \in B$, sledi (3), odnosno da je niz $\{X_{k,n}(\omega,\cdot)\}$ jednako neprekidan na I.

Dalje, za $t_0 \in I$, $X_{k,n}(\omega,t_0)=0$ za $\omega \in B$, a za $\omega \in B \setminus A$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{2p} = A < \infty .$$

Možemo odabrati l_0 tako da je

$$\left[\min_{n \le l_0} \lambda_n^2 \right]^{-1} < \frac{\varepsilon^2}{4AK^2} .$$

Konstanta K je iz uslova (4). Niz λ_n, $n \in N_0$ je monotono opadajući pa je $\lambda_{l_0}^2 = \min_{n \le l_0} \lambda_n^2$.

Kako su $\varphi_n(\cdot)$, $n \in N_0$ neprekidne funkcije, za svako $\varepsilon > 0$ i svako $t \in T$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, t)$ tako da je

$$\sum_{n=0}^{l_0-1} |\varphi_n(t) - \varphi_n(t')|^2 \lambda_n^{2(p+1)} < \frac{\varepsilon^2}{2K^2} ,$$

ako je $|t-t'| < \delta(\varepsilon,t)$. Onda imamo za $t, t' \in I$, $|t-t'| < \delta(\varepsilon,t)$, $\omega \in \Omega$:

$$|X_{k,n}(\omega,t) - X_{k,n}(\omega,t')| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_{k,n}(\omega)| |\lambda_n|^{-(p+1)} \cdot |\lambda_n|^{p+1} |\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| \le$$

$$\le \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_{k,n}(\omega)|^2 \lambda_n^{-2(p+1)} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(t) - \varphi_n(t')|^2 \lambda_n^{2(p+1)} \right)^{1/2} \le$$

$$\le K \left(\sum_{n=0}^{l_0-1} |\varphi_n(t) - \varphi_n(t')|^2 \lambda_n^{2(p+1)} + 4K^2 \sum_{n=l_0}^{\infty} \lambda_n^{2(p+1)} \right)^{1/2} \le$$

$$\le K \left[\frac{\varepsilon^2}{2K^2} + \frac{4K^2}{\lambda_{l_0}^{2}} \sum_{n=l_0}^{\infty} \lambda_n^{2p} \right]^{1/2} \le$$

$$\le K \left[\frac{\varepsilon^2}{2K^2} + \frac{\varepsilon^2}{2K^2} \right]^{1/2} = \varepsilon .$$

Kako je još $X_{k,n}(\omega,\cdot) \in C$ za $\omega \in \Omega$, sledi (3), odnosno da je niz $\{X_{k,n}(\omega,\cdot)\}$ jednako neprekidan na I.

Dalje, za $t_0 \in I$, $X_{k,n}(\omega,t_0) \to 0$ za $\omega \in \Omega$, $k \to \infty$, $n \in N \setminus A$.

$t \in I$,

$$|X_{k,n}(\omega,t_o)| = |X_{k,n}(\omega,t_o) - X_{k,n}(\omega,t) + X_{k,n}(\omega,t)| \le$$

$$\le |X_{k,n}(\omega,t_o) - X_{k,n}(\omega,t)| + |X_{k,n}(\omega,t)|.$$

Iz (3) imamo da je $|X_{k,n}(\omega,t_o) - X_{k,n}(\omega,t)| \le \varepsilon/2$, kada je $|t-t_o| < \delta(\varepsilon,t_o)$, a iz (4) da je $|X_{k,n}(\omega,t)| \le \varepsilon/2$, za $n \ge n_o(\varepsilon)$, pa (5) sledi. □

4.3. KONVERGENCIJA U VEROVATNOĆI ($\mathscr{A}'$)

Teorema 4.3.1. . Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0, (\mathscr{A}')$ tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$, takav da je $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_o \in \mathbb{N}_o$, gde su B i k_o nezavisni od n, i za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}: m \in \mathbb{N}_o\}$ takođe da je, za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\,(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in B,\ \varphi \in \mathscr{A},$$

(2) $$\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2} \le k_o, \quad \omega \in B,$$

(3) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B:\ \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2} > \delta\right\} \to 0,\ n\to\infty$$

(4) $$P\left\{\omega \in B:\ |c_{m,n}(\omega)| > \delta\right\} \to 0,\ n\to\infty,\quad m \in \mathbb{N}_o.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0, (\mathscr{A}')$, i neka je $\varepsilon > 0$ dato. Uslov (ii) iz Definicije 4.1.6. je isti kao i uslov B.(ii) iz Teoreme 4.2.1. pa je prema tome ekvivalentan uslovu C.(ii) iste teoreme. Prema tome, postoji skup $B \in \mathscr{F}$, takav da

$t \in I$,

$$|X_{k,n}(\omega,t_0)| = |X_{k,n}(\omega,t_0) - X_{k,n}(\omega,t) + X_{k,n}(\omega,t)| \le$$

$$\le |X_{k,n}(\omega,t_0) - X_{k,n}(\omega,t)| + |X_{k,n}(\omega,t)|.$$

Iz (3) imamo da je $|X_{k,n}(\omega,t_0) - X_{k,n}(\omega,t)| \le \varepsilon/2$, kada je $|t-t_0| < \delta(\varepsilon,t_0)$, a iz (4) da je $|X_{k,n}(\omega,t)| \le \varepsilon/2$, za $n \ge n_0(\varepsilon)$, pa (5) sledi. □

4.3. KONVERGENCIJA U VEROVATNOĆI ($\mathcal{H}^*$)

Teorema 4.3.1. Neka je $\{\xi_n\}$ niz s.e.p. iz $\mathcal{C} \times \mathcal{H}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{v.v.} 0, (\mathcal{H}^*)$ tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, takav da je $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $K_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su $B \subset A_0$ reprezentacija od ξ_n i za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}; m \in \mathbb{N}_0\}$ takvih da je, za $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\langle h_m,\varphi\rangle$, $\omega \in B$, $\varphi \in \mathcal{H}$

(2) $\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 (2m+1)^{-2k_0}\right]^{1/2} \le K_0$, $\omega \in B$.

(3) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B: \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 (2m+1)^{-2k_0}\right]^{1/2} > \delta\right\} \to 0,\ n\to\infty$$

(4) $P\left\{\omega \in B: |c_{m,n}(\omega)| > \delta\right\} \to 0$, $n\to\infty$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{v.v.} 0, (\mathcal{H}^*)$, i neka je $\varepsilon > 0$ dato. Uslov (ii) iz Definicije 4.1.6. je isti kao i uslov B (ii) iz Teoreme 4.2.1. pa je prema lemi ekvivalentan uslovu C (ii) ove teoreme. Prema tome, postoji skup $B \in \mathcal{F}$, takav da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_o \in \mathbb{N}_o$, nezavisni od n, takvi da za $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathscr{A}$ važi $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq k_o\|\varphi\|_{k_o}$. Na osnovu toga (1) i (2) slede direktno iz Teoreme 3.2.1.

Iz dokaza Teoreme 3.2.1. imamo da je

$$\sup_{\|\varphi\|_{k_o}\leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| = \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2}, \quad \omega \in B.$$

Dakle, za $\delta > 0$ je

$$P\left\{\omega \in B: \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k} \right]^{1/2} \geq \delta\right\} =$$

$$= P\left\{\omega \in B: \sup_{\|\varphi\|_{k_o}\leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| \geq \delta\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega \in \Omega: \sup_{\|\varphi\|_{k_o}\leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| \geq \delta\right\} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty,$$

pa važi (3).

Za $\varphi=\psi_m$, iz (1) dobijamo $\xi_n(\cdot,\psi_m) = c_{m,n}(\cdot)$, $m \in \mathbb{N}_o$. Kako konvergencija niza $\{\xi_n\}$ ograničeno u verovatnoći implicira slabu konvergenciju u verovatnoći imamo da je

$$P\{\omega \in B: |c_{m,n}(\omega)| \geq \delta\} \leq P\{\omega \in \Omega: |\xi_n(\omega,\psi_m)| \geq \delta\} \longrightarrow 0,$$

$n\to\infty$, pa (4) sledi. □

Da bismo pokazali suprotno, potreban nam je dodatni uslov.

Teorema 4.3.2. Niz $\{\xi_n\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka nuli ograničeno u verovatnoći $(\mathscr{A}')$ ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}: m \in \mathbb{N}_o\}$ tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

Postoji $k_o \in \mathbb{N}_o$ tako da za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji skup $B_p \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \geq 1-1/p$, i da je za $n \in \mathbb{N}$, je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $t_0 \in N_0$, nezavisno od n, takvi da za $\omega \in B$ i $\varphi \in \mathcal{H}$ važi $|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq t_0 \|\varphi\|_{t_0}$. Na osnovu toga (1) $\Rightarrow$ (2) sleduje direktno iz Teoreme 4.2.1.

Iz dokaza Teoreme 4.2.1. imamo da je

$$\sup_{\|\varphi\|_{t_0} \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| = \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}(\omega)|^2 \lambda_m^{-2t_0} \right]^{1/2}, \quad \omega \in B$$

Dakle, za $\delta > 0$ je

$$P\left\{\omega \in B, \left[\sum_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}(\omega)|^2 \lambda_m^{-2t} \right]^{1/2} \geq \delta \right\} =$$

$$= P\left\{\omega \in B, \sup_{\|\varphi\|_{t_0} \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| \geq \delta \right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega \in \Omega, \sup_{\|\varphi\|_{t_0} \leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| \geq \delta \right\} \to 0, \quad n\to\infty$$

pa važi (3).

Za $p=\infty$, iz (1) dobijamo $\xi_n(\cdot, e_m) = a_{m,n}(\cdot)$, $m \in N_0$. Kako konvergencija niza $\{\xi_n\}$ ograničeno u verovatnoći implicira slabu konvergenciju u verovatnoći sleduje da je

$$P\{\omega \in B;\ |a_{m,n}(\omega)| \geq \delta\} \leq P\{\omega \in \Omega;\ |\xi_n(\omega, e_m)| \geq \delta\} \to 0,$$

$n\to\infty$, pa (4) sledi. ∎

Da bismo pokazali suprotno, potreban nam je dodatni uslov.

Teorema 4.3.2. Niz $\{\xi_n\}$ u $\mathcal{H}'$ na Ω konvergira ka nuli ograničeno u verovatnoći $(\mathcal{H}')$ ako za svako $\varepsilon \in (0,1)$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n};\ m \in N_0\}$ takvo da su ispunjeni sledeći uslovi:

Postoji $t_0 \in N_0$ tako da za svako $\varepsilon \in \mathbb{R}$ postoji skup $B_\varepsilon \in \mathcal{F}$, $P(B) \geq 1-\varepsilon/p$, i da je za $n \in N$,

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\,(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in B_p, \ \varphi \in \mathcal{A},$

(2) $\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2} < k_o, \quad \omega \in B_p,$

(3) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B_p:\ \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right] > \delta\right\} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon=1/p$, $p \in \mathbb{N}$. Tada za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji skup $B_p \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \geq 1-1/p$ tako da važi (1), (2), (3). Neka je $\Omega_1 = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$. Imamo da je $P(\Omega)=1$, i za $\omega \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{A}$,

$$|\xi_n(\omega,\varphi)| \leq \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2} \|\varphi\|_{k_o} \leq k_o \|\varphi\|_{k_o},$$

tako da je uslov (ii) Definicije 4.1.6. ispunjen, gde je $A = \Omega \setminus \Omega_1$.

Da bismo pokazali da je ispunjen i uslov (i) Definicije 4.1.6., pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je $P(B_p) \geq 1-\varepsilon/2$, odnosno $P(P_p^c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Takođe iz (3) sledi da za svako $\delta > 0$ postoji $n_o=n_o(\varepsilon,\delta)$, tako da za $n \geq n_o$

$$P\left\{\omega \in B_p:\ \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2} > \delta\right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

kako je

$$\sup_{\|\varphi\|_{k_o}\leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| = \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_o}\right]^{1/2}, \quad \omega \in B_p,$$

imamo da je za svako $n \geq n_o$, $\delta > 0$,

$$P\left\{\omega \in \Omega_1:\ \sup_{\|\varphi\|_{k_o}\leq 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| > \delta\right\}=$$

$$= P\left\{\omega \in B_p:\ \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 |\tilde{\lambda}_m|^{-2k_o}\right]^{1/2} > \delta\right\} +$$

$$+ P\left\{\omega \in B_p:\ \sup_{\|\varphi\|_{k_o}\le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| > \delta\right\} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Teorema 4.3.3. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0$, $(\mathscr{A}')$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_o \in \mathbb{N}_o$, gde su B i k_o nezavisni od n, za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}:\ n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k \ge k_o$ postoji niz funkcija, $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, tako da je, za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\mathscr{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)\ (\psi_m,\varphi),$

$\omega \in B,\quad \varphi \in \mathscr{A},$

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} < k,\quad \omega \in \Omega,$

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{v} 0,\quad n\to\infty,$

(4) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B:\ \left|\sum_{m\in\Lambda} |c_{m,n}(\omega)|\right| > \delta\right\} \to 0,\quad n\to\infty.$$

Dokaz. Kako $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0$, $(\mathscr{A}')$ ispunjen je uslov (ii) iz Definicije 4.1.6.. Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu C.(ii) Teoreme 4.2.1. pa na osnovu Teoreme 3.2.3. imamo da je (1) i (2) ispunjeno, gde je, za $n \in \mathbb{N}$, $k > k_o$

$$\le P\left\{\omega \in \Omega_0 : \left[\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_{m,k}(\omega)|^p\right]^{1/p} \left[\ \cdots\ \right]^{2-p} > \delta\right\}$$

$$+ P\left\{\omega \in \Omega_0 : \sup_{\|\varphi\|_c \le 1} \left(\ |\xi_n(\omega,\varphi)|\ \right) > \delta\right\}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Teorema 4.2.2. Neka je (ξ_n) niz u.s.p. na $\Omega \times \Phi'$. Ako $\xi_n \xrightarrow{P-s} 0$, (Φ'), tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, za $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, da svako $\omega \in A$ postoji niz slučajnih procesa $\{X_{k,n},\ k \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k \ge k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times \Omega$, tako da je, za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \int X_{k,n}(\omega,t) K^{k}\varphi(t)\,dt + \sum_{m \le k} c_{m,n}(\omega)\,(\varphi_m,\varphi)$

$\omega \in B,\ \varphi \in \Phi$.

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_2 < \infty$, $\omega \in B$.

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_2 \xrightarrow{P} 0$, $n\to\infty$.

(4) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B : \left|\sum_{m \le k} |c_{m,n}(\omega)|\right| \ge \delta\right\} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Dokaz. Kako $\xi_n \xrightarrow{P-s} 0$, (Φ') ispunjen je uslov (i) iz Definicije 4.1.8. Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu C.(i) Teoreme 4.2.1. pa na osnovu Teoreme 2.2.3. imamo da je (1) i (2) ispunjeno, gde je, za $n \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$.

$$X_{k,n}(\omega,t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\, \tilde{\lambda}_m^{-k}\, \psi_m(t), & \omega \in B \\ 0, & \omega \in B \end{cases}, \quad t \in I.$$

Tako imamo da je

$$\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k}, & \omega \in B,\ t \in I \\ 0, & \omega \in B,\ t \in I \end{cases} < k,$$

a za $\omega \in B$, $\varphi \in \mathscr{A}$

$$\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} = \sup_{\|\varphi\|_k \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)|.$$

Dakle, kako je za svako $\delta > 0$

$$P\{\omega \notin B: \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} > \delta\} = 0,$$

imamo, za to isto $\delta > 0$,

$$P\{\omega \in \Omega: \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} > \delta\} = P\{\omega \in B: \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} > \delta\} =$$

$$= P\{\omega \in B: \sup_{\|\varphi\|_k \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| > \delta\} \le P\{\omega \in \Omega: \sup_{\|\varphi\|_k \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| > \delta\} \to 0,\ n \to \infty,$$

odnosno, važi (3).

(4) sledi na isti način kao i (4) u Teoremi 4.3.1., jer je Λ konačan skup.

Teorema 4.3.4. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Tada $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0$, $(\mathscr{A}')$ ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da za svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $B_p \in \mathscr{F}$, sa $P(B_p) \ge 1-1/p$, i za $n \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n} : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ i za svako $n \in \Lambda$ niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n} : m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\mathscr{R}^k \varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)\,(\psi_m,\varphi),$$

$$\omega \in B_p,\quad \varphi \in \mathscr{A},$$

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} < k, \quad \omega \in \Omega,$

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{v} 0, \quad n\to\infty,$

(4) za svako $\delta > 0$

$$P\left\{\omega \in B_p : \ \left| \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega) \right| > \delta \right\} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

Dokaz. Dokaz je isti kao dokaz Teoreme 4.3.2. jer je

$$\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} = \begin{cases} \sup\limits_{\|\varphi\|_k\le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)|, & \omega \in B_p \\ 0, & \omega \notin B_p \end{cases}. \qquad \square$$

Neka su uslovi (*) i (**) zadovoljeni.

Teorema 4.3.5. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0 \ (\mathscr{A}')$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n},\ n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k > k_0$ niz neprekidnih slučajnih procesa $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, tako da za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\mathscr{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)\ (\psi_m,\varphi),$$

$$\omega \in B, \quad \varphi \in \mathscr{A},$$

gde je $s \ge s_0$ iz (*), $p \ge p_0$ iz (**),

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} < k, \quad \omega \in \Omega,$

(3) $\{X_{k,n}(\omega,\cdot),\ n \ge 1\}$ je jednako neprekidan na I, $p > p_0$, $\omega \in \Omega \setminus A$, gde je A skup iz Definicije 4.1.6.,

(4) za svako $t \in I$, $k > k_0$, $X_{k,n}(\cdot,t) \xrightarrow{v} 0, \quad n\to\infty,$

(5) za svako $\delta > 0$

$$P\{\omega \in B: \ |\sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)| > \delta\} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$$

Dokaz. Kako $\xi_n \xrightarrow{v.o.} 0$, $(\mathscr{A}')$ ispunjen je uslov (ii) iz Definicije 4.1.6.. Ovaj uslov je ekvivalentan uslovu C.(ii) Teoreme 4.2.1. pa na osnovu Teoreme 3.2.5. imamo da je (1) i (2) ispunjeno, gde je za $n \in \mathbb{N}$, $k > k_0$

$$X_{k,n}(\omega,t) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)\, \tilde{\lambda}_n^{-(k+p+s)}\, \psi_m(t), & \omega \in B \\ 0, & \omega \in B \end{cases}, \quad t \in I.$$

(5) sledi kao (4) u Teoremi 4.3.3.. Dokaz (3) je dat u Teoremi 4.2.4..

Da bismo pokazali (4) dovoljno je videti da je, za $\omega \in B$

$$|X_{k,n}(\omega,t)| \le \sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|\, |\tilde{\lambda}_m^{-k}|\, |\psi_m(t)|\, |\tilde{\lambda}_m^{-s}|\, |\tilde{\lambda}_m^{-p}| \le$$

$$\le K^2 M\Big[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\Big]^{1/2},$$

gde je K konstanta iz (*) a $M = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_m^{-2p}$. Kako je $X_{k,n}(\omega,t)=0$, $\omega \in B$, $t \in I$, imamo za svako $\delta > 0$ i $t_0 \in I$,

$$P\Big\{\omega \in \Omega: |X_{k,n}(\omega,t_0)| > \delta\Big\} \le P\Big\{\omega \in B: K^2 M\Big[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k}\Big]^{1/2} > \delta\Big\}$$

$$\le P\Big\{\omega \in \Omega: K^2 M \sup_{\|\varphi\|_k} |\xi_n(\omega,\varphi)| > \delta\Big\} \longrightarrow 0, \quad n\to\infty. \quad \square$$

Suprotno tvrđenje Teoremi 4.3.5. nije tačno.

4.4. KONVERGENCIJA U SREDNJEM ($\mathscr{A}'$)

Sva tvrđenja o konvergenciji ograničeno u verovatnoći niza $\{\xi_n\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$ mogu se preneti na konvergenciju ograničeno u srednjem, uz male izmene. Navešćemo tvrđenja i dati skice dokaza.

Teorema 4.4.1. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{1.o.} 0$, ($\mathscr{A}'$), tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathscr{F}$, sa $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, i za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n},\ m\in\mathbb{N}_0\}$ tako da je za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\quad \xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in B, \quad \varphi \in \mathscr{A},$

(2) $\quad \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_0}\right]^{1/2} \leq k_0, \quad \omega \in B,$

(3) $\quad \int_B \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2\, \tilde{\lambda}_m^{-2k_0}\right]^{1/2} dP(\omega) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty.$

(4) $\quad \int_B |c_{m,n}(\omega)|\,dP(\omega) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty, \quad m \in \mathbb{N}_0.$

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{1.o.} 0$, ($\mathscr{A}'$), tada (1) i (2) slede kao (1) i (2) u Teoremi 4.3.1.. Konvergencija ograničeno u srednjem implicira slabu konvergenciju niza u.s.p. pa imamo za $\varphi=\psi_m$, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_B |c_{m,n}(\omega)|\,dP(\omega) \leq \int_\Omega |\xi_n(\omega,\psi_m)|\,dP(\omega) \longrightarrow 0, \quad n\to\infty,$$ što pokazuje (3).

Dalje, iz Definicije 4.1.7. sledi,

$$\int_B \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k_0} \right]^{1/2} dP(\omega) \le \int_B \sup_{\|\varphi\|_{k_0} \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) \le$$

$$\le \int_\Omega \sup_{\|\varphi\|_{k_0} \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Teorema 4.4.2. Niz $\{\xi_n\}$ u.s.p. na $\Omega \times \mathscr{A}$ konvergira ka nuli ograničeno u srednjem $(\mathscr{A}')$ ako za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n},\ m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

Postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji $B_p \in \mathscr{F}$, sa $P(B_p) \ge 1-1/p$, i da je za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi), \quad \omega \in B_p,\ \varphi \in \mathscr{A},$

(2) $\left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k_0} \right]^{1/2} < k_0, \quad \omega \in B_p,$

(3) $\int_{B_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k_0} \right]^{1/2} dP(\omega) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$

Dokaz. Da bismo pokazali uslov (i) iz Definicije 4.1.7., neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $P(B_p) \ge 1-\varepsilon/2k_0$. Takođe, iz (3) sledi da postoji $n_0=n_0(\varepsilon)$ tako da za $n \ge n_0$,

$$\int_{B_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k_0} \right]^{1/2} dP(\omega) \le \varepsilon/2.$$

Dakle,

$$\int_\Omega \sup_{\|\varphi\|_{k_0} \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) =$$

$$= \int_{B_p} \sup_{\|\varphi\|_{k_0} \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) + \int_{B_p^c} \sup_{\|\varphi\|_{k_0} \le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) \le$$

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{m=0}^{\infty}|c_{m,n}(\omega)|^{2}\,\lambda_m^{2k_p}\right]^{1/2}dP(\omega) \le \int_{\Omega}\sup_{\|\theta\|_{k_p}\le 1}|\xi_n(\omega,\theta)|\,dP(\omega) \le$$

$$\le \int_{\Omega}\sup_{\|\theta\|_{k_0}\le 1}|\xi_n(\omega,\theta)|\,dP(\omega) \to 0,\quad n\to\infty.$$

Teorema 4.4.5. Niz $\{\xi_n\}$ u.s.p. na $\Theta\times\mathcal{A}$ konvergira ka nuli ograničeno u srednjem $(\mathcal{A}')$ ako za svako $p\in N$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}\}$, $n\in N_0$, tako da su ispunjeni sledeći uslovi.

Postoji $k_p\in N_0$ tako da za svako $p\in N$ postoji $\Omega_p\in\mathcal{F}$, za $P(\Omega_p)\ge 1-1/p$, i da je za $n\in N$,

$$(1)\quad \xi_n(\omega,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}c_{m,n}(\omega)(x_m,\theta),\quad \omega\in\Omega_p,\ \theta\in\mathcal{A},$$

$$(2)\quad \left[\sum_{m=0}^{\infty}|c_{m,n}(\omega)|^{2}\,\lambda_m^{2k_p}\right]^{1/2} < k_p,\quad \omega\in\Omega_p,$$

$$(3)\quad \int_{\Omega_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}|c_{m,n}(\omega)|^{2}\,\lambda_m^{2k_p}\right]^{1/2}dP(\omega)\to 0,\quad n\to\infty.$$

Dokaz. Da bismo pokazali uslov (1) iz Definicije 4.1.7., neka je $\varepsilon>0$ dato. Tada postoji $p\in N$ takav da je $P(\Omega_p)\ge 1-\varepsilon/2k_p$. Takođe, iz (3) sledi da postoji $n_0=n_0(\varepsilon)$ tako da za $n\ge n_0$,

$$\int_{\Omega_p}\left[\sum_{m=0}^{\infty}|c_{m,n}(\omega)|^{2}\,\lambda_m^{2k_p}\right]^{1/2}dP(\omega)\le\varepsilon/2.$$

Dakle,

$$\int_{\Omega}\sup_{\|\theta\|_{k_p}\le 1}|\xi_n(\omega,\theta)|\,dP(\omega)=$$

$$=\int_{\Omega_p}\sup_{\|\theta\|_{k_p}\le 1}|\xi_n(\omega,\theta)|\,dP(\omega)+\int_{\Omega_p^c}\sup_{\|\theta\|_{k_p}\le 1}|\xi_n(\omega,\theta)|\,dP(\omega)\le$$

$$\leq \int_{B_p} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \tilde{\lambda}_m^{-2k_0} \right]^{1/2} dP(\omega) + k_0 \int_B dP(\omega) \leq \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \frac{\varepsilon}{2k_0} = \varepsilon,$$

za $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Uslovi (ii) iz Definicije 4.1.7. sledi kao i u Teoremi 4.3.2.. □

Teorema 4.4.3. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{1.o.} 0$, $(\mathcal{A}')$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, tako da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}\colon n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k \geq k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, tako da je, za $n \in \mathbb{N}$

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)(\psi,\varphi)$, $\omega \in B$, $\varphi \in \mathcal{A}$,

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \leq k$, $\omega \in \Omega$,

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{1} 0$, $n \to \infty$,

(4) $\int_B |\sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)| dP(\omega) \to 0$, $n\to\infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{1.v.} 0$, $(\mathcal{A}')$. Tada (1), (2) slede kao (1), (2) u Teoremi 4.3.3.. (4) sledi na osnovu (4) Teorema 4.4.1. jer je Λ konačno.

Dalje

$$\int_\Omega \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} dP(\omega) = \int_B \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} dP(\omega) =$$

$$\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\sum_{m=0}^{\infty} |c_{m,n}(\omega)|^2 \lambda_m^{2s} \varepsilon \right]^{1/2} dP(\omega) + K_0 \int_{\Omega} dP(\omega) \leq \frac{\varepsilon}{2} + K_0 \frac{\varepsilon}{2K_0} = \varepsilon,$$

za $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Uslovi (ii) iz Definicije 4.1.7. slede kao i u Teoremi 4.3.2. □

Teorema 4.4.3. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathbb{R}$, gde $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathcal{S}')$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, tako da je $P(B) \geq 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, za svako $a_i \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{a,n}: n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k \geq k_0$ postoji niz funkcija $X_{k,n}$ na $\Omega \times I$, tako da je, za $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)\varphi^{(k)}(t)dt + \sum_{a\in\Lambda} c_{a,n}(\omega)\varphi(a)$, $\omega \in B$, $\varphi \in \mathcal{S}$,

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \leq 1$, $\omega \in \Omega$,

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{s} 0$, $n \to \infty$,

(4) $\int_\Omega | \sum_{a\in\Lambda} c_{a,n}(\omega)| dP(\omega) \to 0$, $n \to \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\xi_n \xrightarrow{s.s.} 0$, $(\mathcal{S}')$. Tada (1), (2) slede kao (1), (2) u Teoremi 4.3.3. (4) sledi iz uslova (4) Teorema 4.4.1. jer je Λ konačan.

Dalje je

$$\int_\Omega \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} dP(\omega) = \int_{\Omega} \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} dP(\omega) =$$

$$= \int_B \sup_{\|\varphi\|_{k_0}\le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)|dP(\omega) \le \int_\Omega \sup_{\|\varphi\|_{k_0}\le 1} |\xi_n(\omega,\varphi)|dP(\omega) \longrightarrow 0,$$

$n\to\infty$, pa sledi (3). □

Teorema 4.4.4. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Tada $\xi_n \xrightarrow{\text{l.o.}} 0$, $(\mathcal{A}')$ ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svaki $p \in \mathbb{N}$, postoji $B_p \in \mathcal{F}$, sa $P(B_p) \ge 1-1/p$, i za $n \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$, postoji niz funkcija $X_{k,n} : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ i za svako $n \in \Lambda$ niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}: m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

(1) $$\xi_n(\omega,\varphi) = \int_I X'_{k,n}(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi),$$

$$\omega \in B_p,\quad \varphi \in \mathcal{A},$$

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \le k,\quad \omega \in \Omega,$

(3) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{1} 0,\quad n\to\infty,$

(4) $$\int_{B_p} \Big| \sum_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)\Big| dP(\omega) \longrightarrow 0,\quad n\to\infty.$$

Dokaz. Dokaz je isti kao dokaz Teoreme 4.3.2, odnosno Teoreme 4.4.2. □

Neka su uslovi (*) i (**) zadovoljeni.

Teorema 4.4.5. Neka je $\{\xi_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \mathcal{A}$. Ako $\xi_n \xrightarrow{\text{l.o.}} 0$, $(\mathcal{A}')$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, sa $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n, za svako $m \in \Lambda$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n}: n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k > k_0$ niz neprekidnih slučajnih procesa $X_{k,n}$ na

$$= \int_{B_p} \sup_{\|\varphi\|_{\kappa_0} \le 1} |\zeta_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) \le \int_{\Omega} \sup_{\|\varphi\|_{\kappa_0} \le 1} |\zeta_n(\omega,\varphi)| dP(\omega) \to 0,$$

$n\to\infty$, pa sledi (3). □

Teorema 4.4.4. Neka je $\{\zeta_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \Phi$. Tada $\zeta_n \xrightarrow{L^1\text{-}\Phi'} 0$, (Φ') ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svaki $p \in \mathbb{N}$ postoji $B_p \in \mathcal{F}$, sa $P(B_p) \ge 1 - p^{-1}$, i za $n \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$, postoji niz funkcija $X_{k,n}: \Omega \times I \to \mathbb{C}$ i za svako $n \in A$ niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n};\ m \in \mathbb{N}_0\}$ tako da je

$$(1) \quad \zeta_n(\omega,\varphi) = \int_I X_{k,n}(\omega,t)D^k\varphi(t)dt + \sum_{m\le k} c_{m,n}(\omega)(\sigma_m,\varphi),$$

$$\omega \in B_p, \quad \varphi \in \Phi,$$

$$(2) \quad \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \le 1, \quad \omega \in \Omega,$$

$$(3) \quad \|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \xrightarrow{L^1} 0, \quad n\to\infty,$$

$$(4) \quad \int_{B_p} |\sum_{m\le k} c_{m,n}(\omega)| dP(\omega) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Dokaz. Dokaz je isti kao dokaz Teoreme 4.3.3. koristeći Teoremu 4.4.3. □

Neka su uslovi (*) i (***) zadovoljeni.

Teorema 4.4.5. Neka je $\{\zeta_n\}$ niz u.s.p. na $\Omega \times \Phi$. Ako $\zeta_n \xrightarrow{L^1\text{-}\Phi'} 0$, (Φ'), tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji skup $B \in \mathcal{F}$, za $P(B) \ge 1-\varepsilon$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$, gde su B i k_0 nezavisni od n; za svako $n \in A$ postoji niz slučajnih promenljivih $\{c_{m,n};\ n \in \mathbb{N}\}$, i za svako $k > k_0$ niz neprekidnih slučajnih procesa $X_{k,n}$ na

$\Omega \times I$, tako da za $n \in \mathbb{N}$,

(1) $\xi_n(\omega,\varphi) = \int\limits_I X_{k,n}(\omega,t)\mathcal{R}^k\varphi(t)dt + \sum\limits_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)(\psi_m,\varphi)$,

$\omega \in B$, $\varphi \in \mathcal{A}$, gde je $s \geq s_0$ iz (*), $p \geq p_0$ iz (**),

(2) $\|X_{k,n}(\omega,\cdot)\|_{L^2} \leq k$, $\omega \in \Omega$,

(3) za svako $t \in I$ i $k > k_0$,

$X_{k,n}(\cdot,t) \xrightarrow{1} 0$, $n \to \infty$,

(4) $\{X_{k,n}(\omega,\cdot),\ n \geq 1\}$ je jednako neprekidan na I, za $p > p_0$,

$\omega \in \Omega \setminus A$, gde je A skup iz Definicije 4.1.7.,

(5) $\int\limits_B |\sum\limits_{m\in\Lambda} c_{m,n}(\omega)|dP(\omega) \longrightarrow 0$, $n\to\infty$.

Dokaz. (1), (2), (4) slede kao (1), (2), (3) u Teoremi 4.3.5., a (3) i (5) kao u Teoremi 4.4.3.. □

Neka je ξ u.s.p. na $\Omega \times V$. Ako je familija $\{\xi(\cdot,\varphi)\colon \varphi \in V\}$ kompleksna Gausovska familija, ξ ćemo nazivati *kompleksan Gausov u.s.p.*, ili kraće *Gausov u.s.p.* ako je jasno da se radi o kompleksnom u.s.p.

Teorema 5.1. Neka je V Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|_V$ a W njegov potprostor. Neka je ξ Gausov u.s.p. na $\Omega \times W$, i neka postoji pozitivna funkcija $C(\omega)$, $\omega \in \Omega$, takva da je za svako $\omega \in \Omega \times W$ $\xi(\omega,x)| \le C(\omega)\|x\|_V$. Tada postoji Gausov u.s.p. ξ_1 na $\Omega \times V$ takav da je

(1) $\forall \omega \in \Omega,\ x \in W,\ \xi_1(\omega,x) = \xi(\omega,x)$,

(2) $\forall \omega \in \Omega,\ x \in V,\ |\xi_1(\omega,x)| \le C(\omega)\|x\|_V$.

Dokaz. Označimo sa $\overline{W}$ zatvorenje od W u V i sa $\overline{W}^{\perp}$ ortogonalan komplement od $\overline{W}$ u V.

Definišimo

$$\xi_1(\omega,x) = \begin{cases} \xi(\omega,x), & x \in W \\ \lim \xi(\omega,x_n),\ x_n \in W,\ x_n \to x,\ n\to\infty & x \in \overline{W},\ \omega \in \Omega. \\ 0, & x \in \overline{W}^{\perp} \end{cases}$$

Kako je $\xi(\omega,\cdot)$ neprekidno za svako $\omega \in \Omega$, (2) sledi, pa je $\xi_1(\omega,\cdot)$ neprekidna funkcija za svako $\omega \in \Omega$. Da bismo pokazali da je $\xi_1(\cdot,x)$ merljiva funkcija za svako $x \in V$, neka je $x = u + v$, $u \in \overline{W}$, $v \in \overline{W}^{\perp}$ i $u_n \to u$, $n_n \to \infty$, $u_n \in \overline{W}^{\perp}$. Tada je za svako $\omega \in \Omega$

$$\xi_1(\omega,x) = \xi(\omega,u) + \xi(\omega,v) = \lim_{n\to\infty} \xi(\omega,u_n) + 0,$$

pa je ξ_1 merljiva kao granica niza merljivih funkcija. Sledi da je ξ_1 je u.s.p. na $\Omega \times V$.

Za $x \in \overline{W}$, ξ_1 je definisano kao granica niza Gausovih slučajnih promenljivih koji tačkasto konvergira. Iz Teorema 1.5.14. i 1.5.16. sledi da je granica Gausova slučajna promenljiva, pa je $\xi_1(\cdot,x)$ Gausova slučajna promenljiva za svako $x \in V$. Označimo sa $\mathbb{Z} = \{\xi(\cdot,x): x \in W\}$ i sa $\overline{\mathbb{Z}}$ linearno zatvorenje od $\mathbb{Z}$ u $L^2(\Omega)$. $\overline{\mathbb{Z}}$ je Gausovska familija, a kako je $\mathbb{Z}_1 = \{\xi_1(\cdot,x): x \in V\}$ podfamilija od $\overline{\mathbb{Z}}$, sledi da je $\mathbb{Z}_1$ Gausovska familija, odnosno da je ξ_1 Gausov u.s.p.. □

Označimo sa $C[0,1]$ skup neprekidnih funkcija na intervalu $[0,1]$. U radu [45, Lemma 3.] je dobijena reprezentacija u.s.p. ξ na $\Omega \times C[0,1]$ pomoću običnog slučajnog procesa na $\Omega \times [0,1]$, čije su trajektorije funkcije ograničene varijacije. Ako, međutim, pretpostavimo da je ξ Gausov u.s.p., važi sledeća teorema.

Teorema 5.2. Neka je ξ Gausov u.s.p. na $\Omega \times C[0,1]$. Tada postoji Gausov slučajni proces $f : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{C}$ takav da je za svako $\omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot)$ funkcija ograničene varijacije i za svako $\omega \in \Omega$ i svako $\varphi \in C[0,1]$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)df(\omega,t).$$

$$\xi_1(\omega,x) = \xi(\omega,x) - \tilde{\xi}(\omega,V) = \lim_{n\to\infty} \xi(\omega,u_n) - C\alpha$$

pa je ξ_1 merljiva kao granica niza merljivih funkcija. Sledi da je ξ_1 je u.s.p. na $\Omega \times V$.

Za $x \in \bar{V}$, ξ_1 je definisano kao granica niza Gausovih slučajnih promenljivih koji takođe konvergira. Iz Teorema 1.5.14. i 1.5.15. sledi da je granica Gausova slučajna promenljiva, pa je $\xi_1(\cdot,x)$ Gausova slučajna promenljiva za svako $x \in V$. Označimo sa $Z = \{\xi(\cdot,x) : x \in V\}$ i sa $\bar{Z}$ linearno zatvorenje od Z u $L^2(\Omega)$. $\bar{Z}$ je Gausova familija, a kako je $Z_1 = \{\xi_1(\cdot,x) : x \in V\}$ podfamilija od $\bar{Z}$, sledi da je Z_1 Gausova familija. Odatle da je ξ_1 Gausov u.s.p.

Označimo sa $C[0,1]$ skup neprekidnih funkcija na intervalu $[0,1]$. U radu [45, Lemma 3.] je dokazana reprezentacija u.s.p. ξ na $\Omega \times C[0,1]$ pomoću običnog slučajnog procesa na $\Omega \times [0,1]$, čije su trajektorije funkcije ograničene varijacije. Ako, dodatno, pretpostavimo da je ξ Gausov u.s.p., važi sledeća teorema

Teorema 5.5. Neka je ξ Gausov u.s.p. na $\Omega \times C[0,1]$. Tada postoji Gausov slučajni proces $f : \Omega \times [0,1] \to C$ takav da je za svako $\omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot)$ funkcija ograničene varijacije, i za svako $\omega \in \Omega$ i svako $\varphi \in C[0,1]$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)df(\omega,t)$$

Dokaz. Prvi deo dokaza teoreme je isti kao i dokaz Lemme 3. u [45], ali ćemo ga, zbog celine, ponoviti. U.s.p. $\xi(\omega,\cdot)$ je za svako $\omega \in \Omega$ linearan funkcional na $C[0,1]$, pa sledi da za svako $\omega \in \Omega$ postoji funkcija ograničene varijacije $f(\omega,\cdot)$ na intervalu $[0,1]$ takva da je za svako $\varphi \in C[0,1]$ i to isto $\omega \in \Omega$

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)df(\omega,t).$$

Označimo sa $\tilde{f}(\omega,t) = f(\omega,t) - f(\omega,1)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0,1]$. Imamo da je $\tilde{f}(\omega,1) = 0$ i $d\tilde{f} = df$. Zato, ne gubeći na opštosti, možemo pretpostaviti da je za svako $\omega \in \Omega$, $f(\omega,1) = 0$, i da je $f(\omega,\cdot)$ neprekidna sa desne strane u svakoj tački otvorenog intervala $(0,1)$.

Pokazaćemo da je za svako $t \in [0,1]$, $f(\cdot,t)$ Gausova slučajna promenljiva. Za $t = 0$ je to tačno jer je

$$\xi(\omega,1) = \int_0^1 df(\omega,t) = -f(\omega,0).$$

Dalje, neka je t_0 proizvoljna tačka iz intervala $(0,1)$. Definišimo niz neprekidnih funkcija $\{a_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ na sledeći način.

$$a_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_0, \\ -n(t-t_0)+1, & t_0 < t < t_0 + \frac{1}{n}. \\ 0, & t \ge t_0 + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Imamo da je $|a_n| \le 1$, $n\in\mathbb{N}$, pa po Lebegovoj teoremi dominantne konvergencije imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(t)df(\omega,t) = f(\omega,t_0) - f(\omega,0),$$

Dokaz. Prvi deo dokaza leme je isti kao i dokaz leme 2. u [47], ali ćemo ga, zbog celine, ponoviti. Kako je $f(\omega,\cdot)$ je za svako $\omega \in \Omega$ linearni funkcional na $C[0,1]$, pa sledi da za svako $\omega \in \Omega$ postoji funkcija ograničene varijacije $F(\omega,\cdot)$ na intervalu $[0,1]$ takva da je za svako $\varphi \in C[0,1]$ i za svako $\omega \in \Omega$

$$f(\omega,\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dF(\omega,t).$$

Definišimo sa $\tilde{F}(\omega,t) = F(\omega,t) - F(\omega,0)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0,1]$. Lako se je $\tilde{F}(\omega,0) = 0$, $\omega \in \Omega$. Zato, ne gubeći na opštosti, možemo pretpostaviti da je za svako $\omega \in \Omega$, $F(\omega,0) = 0$ i da je $F(\omega,\cdot)$ neprekidna sa desne strane u svakoj tački otvorenog intervala $(0,1)$.

Pokazaćemo da je za svako $t \in [0,1]$, $F(\cdot,t)$ slučajna veličina. Za $t = 0$ je to tačno jer je

$$F(\omega,1) = \int_0^1 dF(\omega,t) = f(\omega,1).$$

Dalje, neka je t_0 proizvoljna tačka iz intervala $(0,1)$. Definišimo niz neprekidnih funkcija $\{a_n : n \in N\}$ na sledeći način:

$$a_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_0, \\ -n(t-t_0)+1, & t_0 < t \le t_0 + \frac{1}{n}, \\ 0, & t_0 + \frac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$

Jasno je da je $|a_n(t)| \le 1$, $n \in N$, pa po Lebegovoj teoremi dominantne konvergencije imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(t)\,dF(\omega,t) = F(\omega,t_0) - F(\omega,0).$$

te možemo definisati

$$f(\omega,t_0) = f(\omega,0) + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(t)df(\omega,t).$$

Imamo da granica niza $\xi(\omega,a_n) = \int_0^1 a_n(t)df(\omega,t)$, $n\in\mathbb{N}$, postoji za svako $\omega \in \Omega$. Iz Teorema 1.5.14. i 1.5.16. sledi da je granica $\xi_\infty(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \xi(\cdot,a_n)$ Gausova slučajna promenljiva.

Označimo sa $\mathbb{Z} = \{\xi(\cdot,\varphi)\colon \varphi \in C[0,1]\}$ i sa $\bar{\mathbb{Z}}$ zatvaranje od $\mathbb{Z}$ u $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. Kako su $f(\cdot,0)$ i ξ_∞ elementi od $\bar{\mathbb{Z}}$, sledi da je njihova linearna kombinacija, $f(\cdot,t_0)$, Gausova slučajna promenljiva. Kako $f(\cdot,1) = 0$ kao konstanta ima degenerisanu Gausovu raspodelu, dobijamo da je, za svako $t \in [0,1]$, $f(\cdot,t)$ Gausova slučajna promenljiva.

Više od toga, kako je familija $\{f(\cdot,t)\colon t\in[0,1]\}$ podfamilija od $\bar{\mathbb{Z}}$, sledi da je $f(\cdot,t)$, $t \in [0,1]$, Gausov slučajni proces.□

Definicija 5.1. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Niz $\{E_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ Borelovih skupova u $\mathbb{R}^n$ se *skuplja lepo* u x ako postoji broj $\alpha > 0$ sa sledećom osobinom: Svaki E_n leži u otvorenoj lopti $B(x,r_n)$, sa centrom u x i poluprečnika $r_n > 0$, tako da je

$$m(E_n) \ge \alpha\, m(B(x,r_n)), \quad n \ge 1.$$

i $r_n \to 0$, $n \to \infty$.

Ovde i u daljem tekstu m označava Lebegovu meru na $\mathbb{R}^n$.

Neka je $\{E_n: n\in\mathbb{N}\}$ niz Lebeg merljivih skupova u $\mathbb{R}^n$, koji se skuplja lepo u $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Neka je $\varkappa(E_n)$ karakteristična funkcija od E_n, $n\in\mathbb{N}$, i stavimo

$$(5.1.1)\qquad \delta_n(x-x_0) = \frac{\varkappa(E_n)(x)}{m(E_n)}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Lako se vidi da je $\delta_n(x-x_0)$, $n\in\mathbb{N}$, δ-niz u smislu teorije distribucija [39]. To znači da $\delta_n(x-x_0)$ konvergira, kad $n\to\infty$, ka $\delta(x-x_0)$ - Dirakovoj δ-funkciji koncentrisanoj u x_0.

Teorema 5.3. Neka je ξ Gausov u.s.p. na $\Omega \times L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada za svako $\omega \in \Omega$ postoji skup $A(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ takav da je $m(A(\omega)) = 0$ i takav da za svako $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$ i svaki δ-niz $\delta_n(x-x_0)$ oblika kao u (5.1.1), postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty}\xi(\omega,\delta_n(x-x_0)), \qquad \omega \in \Omega.$$

Dokaz. Za svako $\omega \in \Omega$, $\xi(\omega,\cdot)$ je linearana i neprekidna funkcionela na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Odatle sledi da postoji $h(\omega,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\omega,t)\varphi(t)dt, \qquad \varphi(t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Neka je $\{O_k: k\geq\}$ lokalno konačna familija otvorenih, ograničenih lopti u $\mathbb{R}^n$, takva da je $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$.

Za fiksirano O_k definišimo

Neka je $\{E_n\}$ niz Lebeg merljivih skupova u R^n koji se skupljaju u $x_0 \in R^n$. Neka je $m(E_n)$ Lebegova mera skupa E_n, $n \in N$, i stavimo

$$\delta_n(x-x_0) = \frac{\chi(E_n)(x)}{m(E_n)}, \qquad n \in N, \quad x \in R^n.$$

Lako se vidi da je $\delta_n(x-x_0)$, $n \in N$, δ-niz u smislu teorije distribucija [30]. To znači da $\delta_n(x-x_0)$ konvergira, kad $n \to \infty$, ka $\delta(x-x_0)$ – Dirakovoj δ-funkciji, koncentrisanoj u x_0.

Teorema 5.3. Neka je T Banahov [illegible] $L^1(R^n)$. Tada se svako $u \in T$ [illegible] skup $A(u) \subset R^n$ takav da je $m(A(u)) = 0$ i takav da za svako $x_0 \in R^n - A(u)$ i svaki niz $\delta_n(x-x_0)$ definisan kao u (5.[illegible]), postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} (u, \delta_n(x-x_0)), \qquad u \in T.$$

Dokaz. Za svako $u \in T$, $(u, \cdot)$ je linearni [illegible] funkcional na $L^1(R^n)$. Otuda sledi da postoji [illegible] tako da je

$$(u,s) = \int_{R^n} h(u,t)s(t)dt, \qquad s(t) \in L^1(R^n).$$

Neka je $\{Q_k : k \in N\}$ lokalno konačna familija otvorenih ograničenih kocki u R^n, takva da je $R^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$.

Za fiksirano Q_k definišimo

$$h_k(\omega,x) = \begin{cases} h(\omega,x), & x \in \mathcal{O}_k \\ 0, & x \notin \mathcal{O}_k \end{cases}, \quad \omega \in \Omega.$$

Za proizvoljan otvoren skup E u $\mathbb{R}^n$ definišimo, za $\omega \in \Omega$,

$$\mu_k(\omega,E) = \int_E h_k(\omega,t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa(E\cap\mathcal{O}_k)h_k(\omega,t)dt = \xi(\omega,\varkappa(E\cap\mathcal{O}_k)).$$

Imamo da je $\mu_k(\omega,\cdot)$, $\omega \in \Omega$, kompleksna Borelova mera na $\mathbb{R}^n$. Iz Teoreme 8.6., [37], sledi da je za svako $\omega \in \Omega$, $\mu_k(\omega,\cdot)$ diferencijabilna skoro svuda u odnosu na Lebegovu meru m (a.e. [m]). Za niz $\{E_n : n\in\mathbb{N}\}$ otvorenih skupova koji se lepo skuplja u $x \in \mathbb{R}^n$, imamo, za $\omega \in \Omega$,

$$D\mu_k(\omega,\cdot) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_k(\omega,E_n)}{m(E_n)} .$$

Imamo da je $D\mu_k(\omega,\cdot) = h_k(\omega,\cdot)$ a.e. [m], $\omega \in \Omega$. Kako je $D\mu_k(\omega,x)\equiv 0$, $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_k$, sledi da postoji skup $A(\omega,k) \subset \mathcal{O}_k$, $m(A(\omega,k)) = 0$, takav da $D\mu_k(\omega,x)$ postoji za svako $x \in \mathcal{O}_k \setminus A(\omega,k)$.

Neka je $x \in \mathcal{O}_{k_1} \cap \mathcal{O}_{k_2}$, $k_1,k_2 \in \mathbb{N}$, i $\{E_n: n\in\mathbb{N}\}$ niz otvorenih skupova u $\mathbb{R}^n$ koji se lepo skuplja u x. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n\geq n_0$, $E_n \subset \mathcal{O}_{k_2} \cap \mathcal{O}_{k_2}$, pa je $\varkappa(E_n \cap \mathcal{O}_{k_1}) = \varkappa(E_n \cap \mathcal{O}_{k_2})$.

Imamo, za $\omega \in \Omega$, $n \geq n_0$

$$\mu_{k_1}(\omega,E_n) = \xi(\omega,\varkappa(E_n \cap \mathcal{O}_{k_1})) = \xi(\omega,\varkappa(E_n \cap \mathcal{O}_{k_2})) = \mu_{k_2}(\omega,E_n),$$

pa sledi za svako $x \in \mathcal{O}_{k_1} \cap \mathcal{O}_{k_2}$, i $\omega \in \Omega$,

$$D\mu_{k_1}(\omega,x) = D\mu_{k_2}(\omega,x)$$

Definišimo za $\omega \in \Omega$,

$$g(\omega,x) = D\mu_k(\omega,x), \quad x \in \mathcal{O}_k \setminus A(\omega,k), \ k\in\mathbb{N}.$$

Stavimo $A(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(\omega,k)$. Imamo da je $m(A(\omega)) = 0$ pa je $g(\omega,x)$ definisano za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$, to jest, a.e. [m].

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$. Očigledno je da je, za svako $\omega \in \Omega$, iproizvoljan niz $\{E_n: n\in\mathbb{N}\}$ koji se lepo skuplja u x_0, i $\delta_n(x-x_0) = \varkappa(E_n)/m(E_n)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \xi(\omega,\delta_n(x-x_0)) = g(\omega,x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

pa tvrđenje sledi.□

Teorema 5.4. Neka je ξ u. s. p. na $\Omega \times L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada postoji slučajan proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takav da je

(1) $\forall\omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\forall\omega \in \Omega$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,t)\, \varphi(t)dt.$$

Dokaz. Ovo tvrđenje su dali C. H. Swartz i D. E. Myers u [42] ali u ovom dokazu su ispravljeni neki propusti u njihovom dokazu.

Za svako $\omega \in \Omega$, $\xi(\omega,\cdot)$ je linearan i neprekidan funkcional na $L^1(\mathbb{R}^n)$, pa sledi da postoji $h(\omega,\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\omega,t)\, \varphi(t)dt, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$D\mu_{k_1}(\omega,x) = D\mu_{k_2}(\omega,x)$$

Definišimo za $\omega \in \Omega$,

$$g(\omega,x) = D\mu_k(\omega,x), \quad x \in \mathcal{O}_k \setminus A(\omega,k), \; k\in\mathbb{N}.$$

Stavimo $A(\omega) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(\omega,k)$. Imamo da je $m(A(\omega)) = 0$ pa je $g(\omega,x)$ definisano za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$, to jest, a.e. $[m]$.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$. Očigledno je da je, za svako $\omega \in \Omega$, iproizvoljan niz $\{E_n : n\in\mathbb{N}\}$ koji se lepo skuplja u x_0, i $\delta_n(x-x_0) = \varkappa(E_n)/m(E_n)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \xi(\omega,\delta_n(x-x_0)) = g(\omega,x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

pa tvrđenje sledi.□

Teorema 5.4. Neka je ξ u. s. p. na $\Omega \times L^1(\mathbb{R}^n)$. Tada postoji slučajan proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takav da je

(1) $\forall\omega \in \Omega,\ f(\omega,\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\forall\omega \in \Omega,\ \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,t)\,\varphi(t)dt.$$

Dokaz. Ovo tvrđenje su dali C. H. Swartz i D. E. Myers u [42] ali u ovom dokazu su ispravljeni neki propusti u njihovom dokazu.

Za svako $\omega \in \Omega$, $\xi(\omega,\cdot)$ je linearan i neprekidan funkcional na $L^1(\mathbb{R}^n)$, pa sledi da postoji $h(\omega,\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} h(\omega,t)\,\varphi(t)dt, \qquad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

$$[illegible](x,\omega) = \Sigma\varphi_i(\omega,x)$$

Definišimo za $\omega \in \Omega$,

$$g(\omega,x) = \Sigma\varphi_i(\omega,x), \quad x \in [illegible] \setminus A(\omega,i), \ i \in \mathbb{N}.$$

Stavimo $A(\omega) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(\omega,i)$; [illegible] $\mathbb{R}^n$ [illegible]

definisano za svako $x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$. [illegible]

[illegible] $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$. [illegible] $\omega \in \Omega$

konvergiraju [illegible]

$= \omega(E_0) \cap (E_1)$, [illegible]

$$\lim_{n\to\infty} f(\omega, \varphi_n(x - x_0)) = g(\omega,x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

pa tvrđenje sledi. □

Teorema 5.4. Neka je [illegible] Tada postoji slučajan proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takav da je:

(1) $\forall \omega \in \Omega,\ f(\omega,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\forall \varphi \in \Omega,\ \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$T(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Dokaz. Ovo tvrđenje su dali [illegible] u [43] ali u ovom dokazu su ispravljeni neki propusti u pomenutom dokazu.

Za svako $\omega \in \Omega$, $T(\omega,\cdot)$ je linearan i neprekidan funkcional na $L^1(\mathbb{R}^n)$; pa sledi da postoji $f(\omega,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tako da je

$$T(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Iz Teoreme 5.3. sledi da je $h(\omega,\cdot) = g(\omega,\cdot)$, a.e. $[m]$, $\omega \in \Omega$. Fiksirajmo $\omega \in \Omega$. Neka je $C(\omega) = \text{esssup}\,|h(\omega,x)|$, i neka su E_n, $n\in\mathbb{N}$, $\mu_k(\omega,\cdot)$, $\mathbb{O}_k$, $k\geq 1$, kao u Teoremi 5.2. Tada je

$$\left|\frac{\mu_k(\omega,E_n)}{m(E_n)}\right| \leq C(\omega).$$

Definišimo

$$f(\omega,x) = \begin{cases} g(\omega,x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega), \\ \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\mu_k(\omega,E_n)}{m(E_n)}, & x \in \mathbb{O}_k \cap A(\omega), \quad k\in\mathbb{N} \end{cases},$$

gde je $\{E_n : n\in\mathbb{N}\}$ familija otvorenih skupova koja se lepo skuplja u $x \in \mathbb{O}_k \setminus A(\omega)$, $k\in\mathbb{N}$.

Kako je $\mu_k(\omega,E_n) = \xi(\omega,\varkappa(E_n \cap \mathbb{O}_k))$ merljiva, sledi da je $f(\omega,x)$ merljiva za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Šta više, za $\omega \in \Omega$, $f(\omega,x) = h(\omega,x)$ a.e. $[m]$, pa (1) i (2) sledi.□

Teorema 5.5. Neka je ξ Gausov u.s.p. $\Omega \times L^1(\mathbb{R}^n)$, takav da za svako $\omega \in \Omega$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $\delta_n(x-x_0)$ kao u (5.1.1) postoji granica

$$\lim_{n\to\infty} \xi(\omega,\delta_n(x-x_0)).$$

Tada postoji Gausov slučajni proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takav da je

(1) $\forall\omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\forall\omega \in \Omega$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\xi(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,t)\,\varphi(t)dt.$$

Dokaz. Iz Teoreme 5.3. sledi da postoji slučajni proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ takav da su (1) i (2) zadovoljeni. Kako granica $\lim_{n\to\infty} \xi(\omega,\delta_n(x-x_0))$ postoji za svako $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$ i δ_n, sledi da

Iz Teorema 5.3. sledi da je $\varphi(\omega, \xi - \omega(\omega,\cdot))$, $a \in [-1]$, $\omega \in \Omega$. Fiksirajmo $\omega \in \Omega$. Tada je $u(\omega)$ [illegible] $\mathbb{R}^n$ [illegible] $u_\xi(\omega, \cdot)$, φ_ξ [illegible]. Sada iz Teoreme 5.2. sledi je

$$\lim \frac{u_\xi(\omega,\xi)}{m(\xi)} = \varphi(\omega)$$

Definišimo

$$f(\omega,x) = \begin{cases} \varphi(\omega,x), & x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega), \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_\xi(\omega,\xi_n)}{m(\xi_n)}, & x \in A(\omega) \end{cases}$$

gde je (ξ_n) neka familija [illegible] koja se [illegible] skupu x, $x \in \mathbb{R}^n \setminus A(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Tada je $u_\xi(\omega,\xi_n)$ [illegible], sledi da je $f(\omega,x)$ [illegible] za svako $x \in \mathbb{R}^n$ [illegible], $\omega \in \Omega$. $f(\omega,x)$ = $h(\omega,x)$ s.s. [illegible], pa (1) i (2) važe.

Teorema 5.6. Neka je f [illegible] $\in L(\mathbb{R}^n)$, takav da za svako $\omega \in \Omega$, $x_n \in \mathbb{R}^n$ i $\delta_n(x-x_n)$ kao u (5.1.) postoji granica

$$\lim_{n\to\infty} f(\omega, \delta_n(x-x_n)).$$

Tada postoji Borelov slučajni proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to C$ takav da je

(1) $\forall \omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(2) $\forall \varphi \in \Omega$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$f(\omega,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega,x)\varphi(x)dx.$$

Dokaz. Iz Teorema 5.3. sledi da postoji slučajni proces $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to C$ takav da su (1) i (2) zadovoljeni. Kako granica $\lim\limits_{n\to\infty} f(\omega,\delta_n(x-x_n))$ postoji za svako $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}^n$ [illegible], sledi da je za $\omega \in \Omega$, $g(\omega, x)$ definisana za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Tako je

$$f(\omega, x) = g(\omega, x), \qquad \omega \in \Omega, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Štaviše imamo, za $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\cdot, x_0) = \lim_{n\to\infty} \xi(\cdot, \delta_n(x - x_0)).$$

Iz Teorema 1.5.14. i 1.5.16. sledi da je granica niza na desnoj strani jednakosti Gausova slučajna promenljiva, pa je $f(\cdot, x)$ Gausova slučajna promenljiva za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Neka je $\mathbb{Z} = \{\xi(\cdot, \varphi), \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ i $\overline{\mathbb{Z}}$ linearno zatvaranje od $\mathbb{Z}$ u $L^2(\Omega)$. Familija $\{f(\cdot, x): x \in \mathbb{R}^n\}$ je podfamilija od $\overline{\mathbb{Z}}$, pa sledi da je $f(\cdot, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, Gausov slučajni proces.□

Napomena. Tvrđnje Teoreme 5.5. važi i ako se prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$ i njegov dual $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ zamene prostorom $L^p(\mathbb{R}^n)$ i njegovim dualom $L^q(\mathbb{R}^n)$.

OSNOVNE OZNAKE

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$,

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\mathbb{N}_0^n = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n): k_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \ldots, n\}$

$\mathbb{Q}$ - skup racionalnih brojeva,

$\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva,

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$,

$\mathbb{C}$ - skup kompleksnih brojeva,

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n\}: z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}$,

$\cup$ - unija

$\cap$ - presek

^{c} - komplement.

$\setminus$ - razlika

$\mathcal{B}$ - σ - algebra Borelovih skupova u $\mathbb{R}$,

$\mathcal{C}$ - σ - algebra Borelovih skupova u $\mathbb{C}$,

$\mathcal{B}^n$ - σ - algebra Borelovih skupova u $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{C}^n$ - σ - algebra Borelovih skupova u $\mathbb{C}^n$,

$|z|$ - apsolutna vrednost broja $z \in \mathbb{C}$,

$\bar{z}$ - konjugovano kompleksan broj za $z \in \mathbb{C}$,

$i = \sqrt{-1}$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, + \ldots, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$x^\alpha = (x_1)^{\alpha} \ldots (x_n)^{\alpha_n}, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$\alpha! = \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$D_x^\alpha = D^\alpha = (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$,

V - vektorsko topološki prostor,

$\|\cdot\|_V$ - norma u V,

V' - dualni prostor za V,

$\|\cdot\|_{V'}$ - norma u V',

$\varprojlim$ - projektivna granica,

$\varinjlim$ - induktivna granica,

G - otvoren skup u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{R}^n$,

$L^p(G)$, $p \geq 1$ - prostor p - integrabilnih funkcija nad G,

$\|u\|_{L^p(G)} = (\int_G |u(x)|^p dx)^{1/p}$ - norma u $L^p(G)$,

$L^\infty(G)$ - Lebegov prostor esencijalno ograničenih funkcija nad G,

C(G) - prostor neprekidnih funkcija nad G,

$C^m(G)$ - prostor m puta diferencijabilnih funkcija nad G, $m \in \mathbb{N}_0$ ili $m = +\infty$,

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - prostor verovatnoća,

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - prostor slučajnih promenljivih nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa konačnim drugim momentom.

LITERATURA

[1] C. Chaning, Representation of random linear functional on certain $S\{M_p\}$ spaces, Studia Math. 64 (1979), 195-212.

[2] J. L. Doob, Stohastic Processes, J.Wiley, New York, 1953.

[3] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higher transcedental functionals, Vol. 2, Mc Graw-Hill, New York, Toronto, London, 1953.

[4] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, Generalized Functions - Properties and Operations, Vol. 1, Acad. Press, New York (1964).

[5] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, Generalized Functions - Spaces of Fundamental and Generalized Functions, Vol. 2, Acad. Press, New York (1968).

[6] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, Generalized Functions - Theory of Differential Equations, Vol. 3, Acad. Press, New York, (1967).

[7] I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions - Application to Harmonic Analysis, Vol. 4, Acad. Press, New York, (1964).

[8] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions, Integral Geometry and Representation Theory, Vol. 5, Acad. Press, New York, (1966).

[9] И. М. Гельфанд, Обобщеые случайные процессы, Доклады Ак. Наук СССР, 100 No 5 (1955), 853-856.

[10] B. Gnedenko, The Theory of Probability, Mir Publishers, Moscow, 1976.

[11] P. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, Toronto, New York, London, 1954.

[12] O. Hanš, Measurability of extensions of continuous random transforms, Amer. Math. Statist. 30 (1959), 1152-1157.

[13] **Т. Хида, Броуновское движение, Наука, Москва, 1987.**

[14] T. Hida, Stationary Stohastic Processes, Princeton University Press, Priceton 1970.

[15] **И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, Наука, Москва, 1970.**

[16] H. Inaba and B. D. Tapley, Generalized random processes: A theory and the white Gaussian process, SIAM J. Control, Vol. 13, No. 3, may (1975), 719-735.

[17] H. Inaba and I. Shioya, Generalized random processes on the Sobolev spaces $H_0^m(T)$: Their relations to generalized random functions, Res. Act. Fac. Sci. Engrg. Tokyo Denki Univ. 4 (1982), 3-10.

[18] K. Ito, Stationary random distributions, Mem, Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, 28 (1954), No. 3, 209-223.

[19] Z. A. Ivković, Z. Lozanov, On Hermite Polynomials of Gaussian Random Process, Zbornik radova PMF, Serija za matematiku

[20] Z. A. Ivković, Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom, Građevinska knjiga, Beograd 1976.

[21] L. J. Kitchens, Almost sure representation of random functionals on $K\{M_p\}$ spaces, rukopis.

[22] L. J. Kitchens, Convergence of random functionals on $K\{M_p\}$ spaces, rukopis.

[23] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Introductory Real Analysis, Dover Publications, New York, 1970.

[24] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 20, (1973), 25-105.

[25] G. Köthe, Topologishe lineare Räume I, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

[26] M. Leove, Probability Theory, Van Nostrand, Toronto, New York, London, 1955.

[27] Z. Lozanov, Ermitski polinomi Gausovog slučajnog procesa, magistrarski rad.

[28] Z. Lozanov-Crvenković and S. Pilipović, On some classes of generalized random linear functionals, J. Math. Anal. Appl. 129 (1988), 433-442.

[29] Z. Lozanov-Crvenković and S. Pilipović, Generalized random processes on the Zemanian spaces $\mathscr{A}$, predato za štampu.

[30] Z. Lozanov-Crvenković, Convergences of a sequence of generalized random processes on Zemanian space $\mathscr{A}$, Rew. Res. Fac. Sci. ser. math, u štampi.

[31] Z. Lozanov-Crvenković, Expectation of the generalized random process on the Zemanian spece $\mathscr{A}$, Rew. Res. Fac. Sci. ser. math. (u štampi).

[32] Z. Lozanov-Crvenković, S. Pilipović, Representation and extension theorems for Gaussian generalized random process, u pripremi.

[33] E. Pap and S. Pilipović, Semigroups of operators on the space of generalized functions Exp$\mathscr{A}'$, J. Math. Anal. Appl.

[23] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, Introductory Real Analysis, Dover Publications, New York, 1970.

[24] H. Komatsu, Ultradistributions, I. Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 20, (1973), 25-105.

[25] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.

[26] M. Loève, Probability Theory, Van Nostrand, Toronto, New York, London, 1955.

[27] Z. Lozanov, Kraĉunski poligon, Gaussovy slučajnog procesa, magistarski rad.

[28] Z. Lozanov-Crvenković and S. Pilipović, On some classes of generalized random linear functionals, J. Math. Anal. Appl. 129 (1988), 433-442.

[29] Z. Lozanov-Crvenković and S. Pilipović, Generalized random processes on the Gaussian spaces $\mathcal{H}$, predato za štampu.

[30] Z. Lozanov-Crvenković, Convergence of a sequence of generalized random processes on Gaussian space $\mathcal{H}$, Rev. Res. Fac. Sci. ser. math, u štampi

[31] Z. Lozanov-Crvenković, Expectation of the generalized random process on the Gaussian space $\mathcal{H}$, Rev. Res. Fac. Sci. ser. math. (u štampi).

[32] Z. Lozanov-Crvenković, S. Pilipović, Representation and extension theorems for Gaussian generalized random process, u pripremi

[33] E. Pap and S. Pilipović, Semigroups of operators on the space of generalized functions Exp^A, J. Math. Anal. Appl.

126 (1987). 501-515.

[34] S. Pilipović, Generalization of Zemaian spaces of generalized functions which elements have unique orthonormal expansions, SIAM j. Math. Anal 17 (1986), 477-484.

[35] M. M. Rao, Stohastic Processes and integration, Sijthoff and Noordhoff, 1979.

[36] **Ю. А. Розанов, Марковские случайные поля, Наука, Москва, 1981.**

[37] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New Delhi, 1977.

[38] N. Sarapa, Teorija verojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 1987.

[39] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1950.

[40] B. Stanković, Osnovni funkcionalne analize, Naučna knjiga, 1975.

[41] B. Stanković, S. Pilipović, Teorija distribucija , PMF, Institut za matematiku, Novi Sad, 1983.

[42] C. H. Swartz and D. E. Myers, Random functionals on $K\{M_p\}$ spaces, Studia Math. 39 (1971), 233-240; Corection to the paper "Random functionals on $K\{M_p\}$ spaces", Studia Math. 43 (1972), 273.

[43] **А. Н. Ширяев, Вероятность, Наука, Москва, 1980.**

[44] M. Ullrich, Some theorems on random Schwertz distribution, Trans. of the first Prague conference on Information Theory, Statistical Decisions Functions, Random Processes, Prague 1957, 273-291.

[45] M. Ullrich, Representation theorems for random Schwartz distributions, in "Trans. of the 2nd Prague Conference, Prague 1959", 661-666.

[46] K. Urbanik, Stohastic processes whose sample functions are distributions, Theory Probability Appl. 1 (1956), 132-134.

[47] А. Г. Земанян, **Интегральные преобразования обобщенных функций**, Наука, Москва, 1974.

[48] A. M. Yaglom, Stationary Random Functions, Dover Publication , New York, 1962.