

PAVLE OPAVSKY

Fakultet za fizičko vaspitanje Univerziteta u Beogradu

Izvorni znanstveni članak
UDC 519.237.5 : 577.3 : 796.431.1
Primljeno 26. 11. 1984.**MATEMATIČKI MODEL HORIZONTALNOG HICA — ZALETA**

Utvrđene su kvantitativne relacije između brzine zaleta i napadnog ugla, u uslovima standardnog rastojanja između težišta tela i tačke oslonca, kod skoka u dalj. Određuju se konkretne vrednosti napadnog ugla za svaku brzinu zaleta u aktualnom rasponu. U principu vrednost napadnog ugla gravitira ka vrednosti pravog ugla ukoliko se brzina zaleta smanjuje, odnosno ka polovini pravog ugla ukoliko se brzina zaleta povećava.

1. UVOD

Aksiomatična je pojava da svaki skakač uvis sa zaletom postiže veću visinu skoka nego bez zaleta. Mehanički pojam horizontalnog hica u biomehanici se identifikuje sa zaletom. U strukturi odskoka sledeći elementi u najvećoj mjeri utiču na visinu skoka:

- odskočni impuls,
- zamah slobodnim ekstremitetima,
- rastojanje težišta tela od centra odskoka u trenutku odvajanja tela od tla,
- napadni ugao odskoka,
- sila mišića opružaća u zglobovima odskočne noge,
- zalet (horizontalni hitac).

2. CILJ ISTRAŽIVANJA

Čim se empirijski utvrdilo da se bržim zaletom, uz standardnu tehniku skoka uvis, postiže veća visina, pristupilo se istraživanju u tom prostoru. Upadljiva je bila činjenica da je učinak zaleta za skok uvis najefikasniji ukoliko se konačni impuls kaopšti u trenutku kada je napadni ugao odskoka jednak 45° . Drugi faktor po značaju je visina težišta tela u trenutku odskoka. Ta je visina najveća ako napadni ugao odskoka iznosi 90° . Hipotetski se moglo pretpostaviti da, za svakog pojedinog skakača, ukoliko skače približno istom tehnikom i poseduje približno iste biomotoričke potencijale, uz odgovarajuću brzinu zaleta, postoji samo jedan optimalan napadni ugao odskoka, koji se nalazi između 45° i 90° . Kako bi svaki skakač uvis bio u stanju da odredi biomehaničke parametre sopstvenog stila, konstruisan je matematički model horizontalnog hica — zaleta kod skoka uvis, pomoću kojeg bi se kvantitativno odredili parametri od kojih zavisi rezultat skoka uvis. Budući da su samo brzina zaleta i napadni ugao odskoka promenljive veličine koje ne dostižu svoje maksimalne vrednosti, nego se za svaki skok,

odnosno za svakog skakača mora odrediti optimum za ta dva parametra, u ovom modelu će se te dve veličine postaviti kao nezavisne promenljive.

3. METOD RADA

Za konstrukciju matematičkog modela horizontalnog hica neophodno je prethodno utvrditi kinematičke, kibernetičke, informatičke, digitalne i analogne parametre određenog horizontalnog hica. Ovi parametri određuju se standardnim postupkom.

3.1. Elementarni kinematički obrasci za određivanje učešća brzine zaleta u visini penjanja težišta tela prilikom skoka uvis.

3.1.1. Kinematički obrazac za određivanje visine penjanja (h) pomoću početne brzine (v_0):

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1)$$

$$v_0 = g \cdot t \quad (2)$$

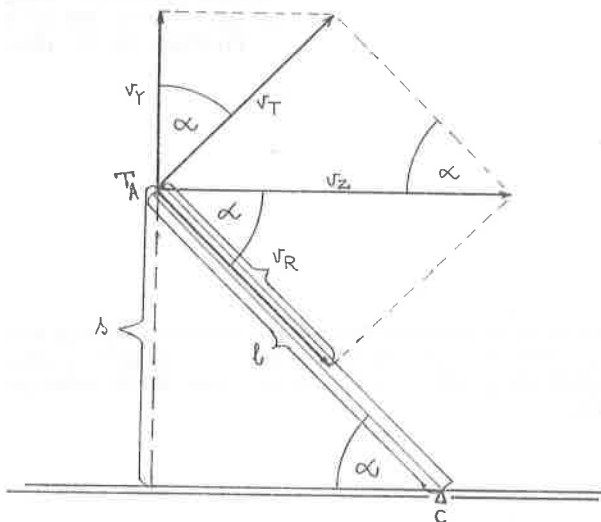
$$t = \frac{v_0}{g} \quad (3)$$

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g v_0^2}{2g^2} \quad (4)$$

$$h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \quad (5)$$

$$h = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2g} \quad (6)$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (7)$$



Sl. 1. 1 – rastojanje od težišta tela skakača (T_A) do centra oslonca (C); α – napadni ugao odskoka; v_z – brzina zaleta u trenutku odskoka; v_R – radijalna komponenta brzine zaleta; v_T – tangencijalna komponenta brzine zaleta; v_y – vertikalna projekcija tangencijalne komponente.

3.1.2. Kinematički obrazac za određivanje puta u vertikalnom smeru (h) pomoću vertikalne projekcije tangencijalne komponente (v_y) brzine zaleta (prema skici na slici 1):

$$v_R = v_z \cdot \cos \alpha \quad (8)$$

$$v_T = v_z \cdot \sin \alpha \quad (9)$$

$$v_y = v_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2}{2} \quad (10)$$

$$v_y = \frac{v_z}{2} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (11)$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad (12)$$

$$v_y = \frac{v_z}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (13)$$

$$h = \frac{v_y^2}{2 \cdot g} \quad (7)$$

$$h = \frac{v_z^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2 \alpha \quad (14)$$

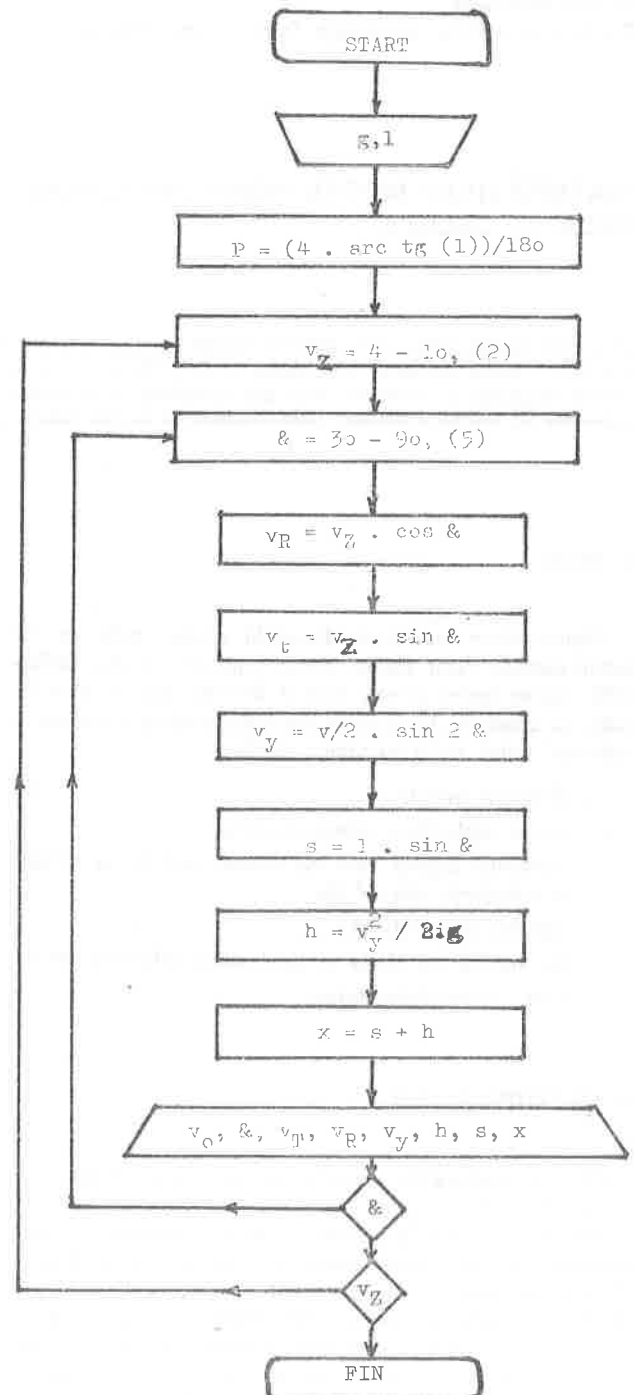
3.2. Algoritam za sastavljanje programa za računar

3.2.1. Na osnovu kinematičkih obrazaca, a prema principima kibernetike, složen je odgovarajući algoritam (prema skici na slici 2).

3.3. Konvencija kinematičkog i informatičkog jezika

3.3.1. Kako bi se za računar na njegovom jeziku (basic) mogao pripremiti odgovarajući program, neophodno je da se utvrdi sledeća konvencija:

3.3.1.1. G=g (ubrzanje sile teže) u metrima u sekundi na kvadrat;



3.3.1.2. L=l (rastojanje između težišta tela i centralne tačke odskoka) u metrima;

3.3.1.3. V=v_z (brzina zaleta — horizontalnog hica) u metrima u sekundi;

3.3.1.4. A=α (napadni ugao odskoka) u stepenima;

3.3.1.5. R=v_R (radijalna komponenta brzine zaleta) u metrima u sekundi;

- 3.3.1.6. $T = V_T$ (tangencijalna komponenta brzine zaleta) u metrima u sekundi;
- 3.3.1.7. $Y = v_y$ (vertikalna projekcija tangencijalne komponente brzine zaleta) u metrima u sekundi;
- 3.3.1.8. $H = h$ (visina postignuta dejstvom vertikalne projekcije tangencijalne komponente brzine zaleta) u metrima;
- 3.3.1.9. $S = s$ (vertikalna projekcija rastojanja od težišta tela do centra oslonca) u metrima;
- 3.3.1.10. $X = x$ (zbir veličina h i s) u metrima.

3.4. Program prema kojem će se izračunavati vrednosti relevantnih parametara horizontalnog hica

3.4.1. Na osnovu navedene konvencije, kinematičkih jednačina i kibernetičkih principa, za računar TI 99/4A (basic), složen je sledeći program:

100 REM Izračunaj parametre horizontalnog hica u uslovima skoka uvis.

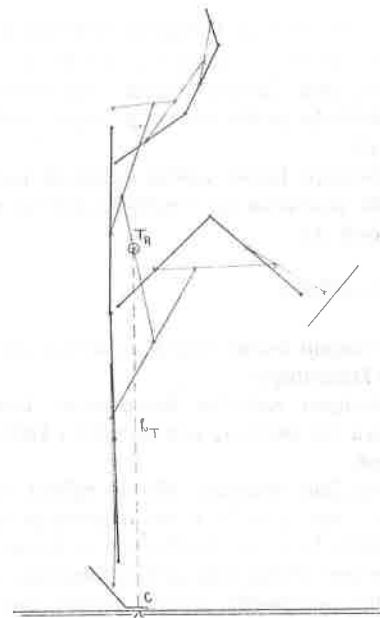
```

110 G=9.81
120 L=1.4053
130 P=(4-ATN(1))/180
140 FOR V=4 TO 10 STEP 2
150 PRINT "VELOCITAS="; V
160 PRINT "-----"
170 FOR A=30 TO 90 STEP 5
180 R = V * (COS (A * P))
180 T = V * (SIN (A * P))
200 Y = (V/2) * (SIN (2 * (A * P)))
210 H = (Y * 2)/(2 * G)
220 S = L * (SIN (A * P))
230 X=H+S
240 PRINT "ANGULUS="; A,R,T,Y,H,S,X
250 PRINT
260 NEXT A
270 NEXT V
280 END
RUN
    
```

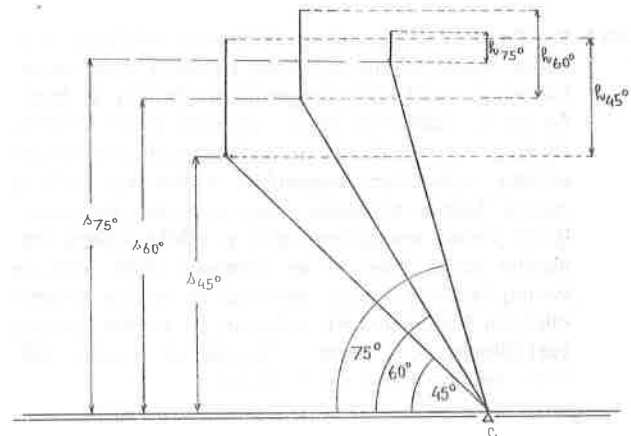
Na osnovu podataka u programu može se utvrditi da se traži optimalni napadni ugao odskoka uz adekvatnu brzinu zaleta, za skakača čija je telesna visina oko dva metra, a rastojanje težišta njegovog tela od centra odskoka u trenutku odvajanja od podloge (slika 3) iznosi 1.4053 metra. Pošto je vertikalna projekcija tangencijalne komponente brzine zaleta (v_y) najveća kada je napadni ugao odskoka jednak 45° , a visina težišta tela skakača (T_A) je najveća ikada je napadni ugao odskoka jednak 90° , može se zaključiti da će se zavisno od brzine zaleta optimalni napadni ugao odskoka pomerati u rasponu od 45° do 90° (slika 4).

4. REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Računar je za nekoliko minuta na ekranu ispisao 364 broja sa deset decimala, na osnovu kojih je izvršen prikaz kretanja veličina relevantnih parametara horizontalnog



Sl. 3. T_A – težište tela skakača; h_T – rastojanje od težišta tela skakača do centra oslonca (C), koje prema Fričovom kanonu u čoveka telesne visine od dva metra u normalnom uspravnom stavu iznosi 1.1937 metara, a u trenutku odskoka kod skoka uvis 1.4053 metara.



Sl. 4. Pri brzini zaleta od šest metara u sekundi, o tri skicirana položaja, maksimalna vrednost zbira razlike invoja težišta tela skakača od centra oslonca (s) i visine postignute zaletom (h), postignuta je pri napadnom uglu odskoka od 60 stupnjeva.

hica – zaleta kod skoka uvis. Prikaz tih parametara je u ovom istraživanju izvršen na dva načina:

- 4.1. Digitalni izraz relacija između parametara horizontalnog hica u funkciji napadnog ugla odskoka uz određenu brzinu zaleta (Tablice broj 1, 2, 3, i 4).
- 4.2. Analogni izraz relacija između parametara horizontalnog hica u funkciji napadnog ugla odskoka uz određenu brzinu zaleta (Grafikoni broj 1, 2, 3, i 4).

5. ZAKLJUČCI

- 5.1. Opšti zaključci.
 - 5.1.1. Brzina zaleta kod skoka uvis nije maksimalna.
 - 5.1.2. Napadni ugao odskoka je veći od 45° , a manji od 90°

- 5.1.3. Skakači sa većom telesnom visinom imaju prednost u odnosu na skakače niže rastom.
- 5.1.4. Povećavanjem brzine zaleta optimalni napadni ugao odskoka približava se polovini vrednosti pravog ugla.
- 5.1.5. Smanjivanjem brzine zaleta optimalni napadni ugao odskoka približava se vrednosti pravog ugla (Grafikon broj 5).

5.2. Izvedeni zaključci

- 5.2.1. Povećavanjem brzine zaleta povećava se njena radijalna komponenta.
- 5.2.2. Povećavanjem radijalne komponente brzine zaleta povećava se moment sile u zglobu kolena odskočne noge.
- 5.2.3. Povećavanjem momenta sile u zglobu kolena odskočne noge povećava se naprezanje četvoroglavog mišića buta (m. quadriceps femoris).
- 5.2.4. U uslovima skoka uvis pod optimalnim uslovima i u okviru postojećih pravila, maksimalni izometrijski i pliometrijski potencijali četvoroglavog mišića buta odskočne noge nisu dovoljni da se suprostave radijalnoj komponenti maksimalne brzine zaleta.

5.3. Generalni zaključak

- 5.3.1. U cilju osposobljavanja skakača uvis radi postizavanja maksimalnog rezultata u skoku uvis, neophodno je prethodno programirati trening u kome će se sa submaksimalnim opterećenjem u izometrijskom režimu, kao i u balističko-pliometrijskom režimu, specifično osposobiti mišići opružajući u zglobu kolena odskočne noge u smislu suprostavljanja većim momentima sile u zglobu kolena odskočne noge. Time bi se omogućio skok uvis sa većom brzinom zaleta, odnosno sa većom tangencijalnom komponentom, odnosno sa većom njenom vertikalnom projekcijom, odnosno sa većom visinom penjanja težišta tela skakača.

Tabela broj 1 ($v_0 = 4$ m/sec)

&	v_R	v_T	v_y	h	s	x
30	3.464	2.000	1.732	.153	.703	.856
35	3.277	2.294	1.879	.180	.806	.986
40	3.064	2.571	1.970	.198	.903	1.101
45	2.828	2.828	2.000	.204	.994	1.198
50	2.571	2.064	1.970	.198	1.077	1.274
55	2.294	3.277	1.879	.180	1.151	1.331
60	2.000	3.464	1.732	.153	1.217	1.370
65	1.690	3.625	1.532	.120	1.274	1.393
70	1.368	3.759	1.286	.084	1.321	1.405
75	1.035	3.864	1.000	.051	1.357	1.408
80	.695	3.939	.684	.024	1.384	1.407
85	.349	3.985	.347	.006	1.400	1.406
90	0.000	4.000	0.000	.000	1.405	1.405

Tabela broj 2 ($v_0 = 6$ m/sec)

&	v_R	v_T	v_y	h	s	x
30	5.196	3.000	2.598	.344	.703	1.047
35	4.915	3.441	2.819	.405	.806	1.211
40	4.596	3.857	2.954	.445	.903	1.348
45	4.243	4.243	3.000	.459	.994	1.452
50	3.857	4.596	2.954	.445	1.077	1.521
55	3.441	4.915	2.819	.405	1.151	1.556
60	3.000	5.196	2.598	.344	1.217	1.561
65	2.536	5.438	2.298	.269	1.274	1.543
70	2.052	5.638	1.928	.190	1.321	1.510
75	1.553	5.796	1.500	.115	1.351	1.472
80	1.042	5.909	1.026	.054	1.384	1.438
85	.523	5.977	.521	.014	1.400	1.414
90	.000	6.000	.000	.000	1.405	1.405

Tabela broj 3 ($v_0 = 8$ m/sec)

&	v_R	v_T	v_y	h	s	x
30	6.928	4.000	3.464	.612	.703	1.314
35	6.553	4.589	3.759	.720	.806	1.526
40	6.128	5.142	3.939	.791	.903	1.694
45	5.659	5.659	4.000	.815	.994	1.809
50	5.142	6.128	3.939	.791	1.077	1.867
55	4.589	6.553	3.759	.720	1.151	1.871
60	4.000	6.928	3.464	.612	1.217	1.829
65	3.381	7.250	3.064	.479	1.274	1.752
70	2.736	7.518	2.571	.337	1.321	1.657
75	2.071	7.727	2.000	.204	1.357	1.561
80	1.389	7.878	1.368	.095	1.384	1.479
85	.697	7.970	.695	.025	1.400	1.425
90	.000	8.000	.000	.000	1.405	1.405

Tabela broj 4 ($v_0 = 10$ m/sec)

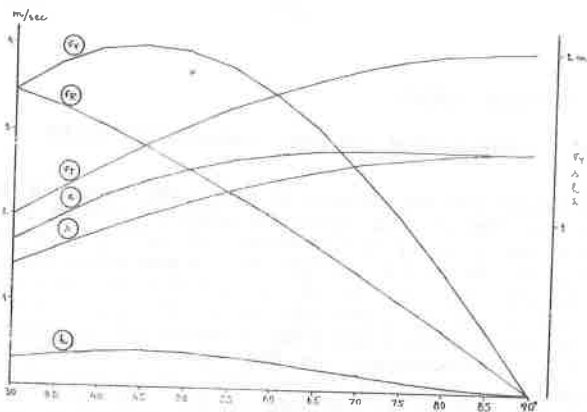
&	v_R	v_T	v_y	h	s	x
30	8.660	5.000	4.330	.956	.703	1.658
35	8.192	5.736	4.698	1.125	.806	1.931
40	7.660	6.428	4.924	1.236	.903	2.139
45	7.071	7.071	5.000	1.274	.994	2.268
50	6.428	7.660	4.924	1.236	1.077	2.312
55	5.736	8.192	4.698	1.125	1.151	2.276
60	5.000	8.660	4.330	.956	1.217	2.173
65	4.226	9.063	3.830	.748	1.274	2.021
70	3.420	9.397	3.214	.526	1.321	1.847
75	2.588	9.659	2.500	.319	1.357	1.676
80	1.736	9.848	1.710	.149	1.384	1.533
85	.872	9.962	.868	.038	1.400	1.438
90	.000	10.000	.000	.000	1.405	1.405

Tab. br. 1. Relacije između nezavisno promenljive (&), i ostalih zavisno promenljivih, kada je brzina zaleta četiri metra u sekundi. & – napadni ugao odskoka; v_R – radijalna komponenta brzine zaleta; v_T – tangencijalna komponenta brzine zaleta; v_y – vertikalna projekcija tangencijalne komponente brzine zaleta; h – visina postignuta dejstvom vertikalne projekcije tangencijalne komponente brzine zaleta; s – vertikalna projekcija rastojanja od težišta tela skakača do centra oslonca u trenutku odskoka; x – zbir vrednosti h i s.

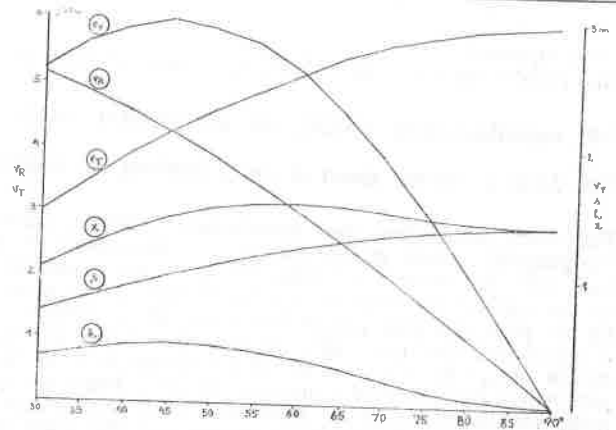
Tab. br. 2. Relacije između nezavisno promenljive (&), i ostalih zavisno promenljivih, kada je brzina zaleta šest metara u sekundi.

Tab. br. 3. Relacije između nezavisno promenljive (&), i ostalih zavisno promenljivih, kada je brzina zaleta osam metara u sekundi.

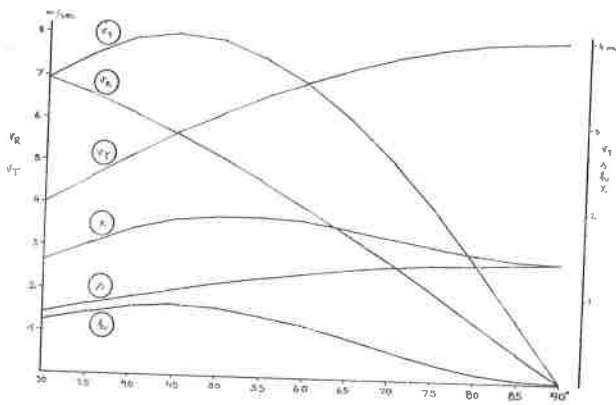
Tab. br. 4. Relacije između nezavisno promenljive (&), i ostalih zavisno promenljivih, kada je brzina zaleta 10 metara u sekundi.



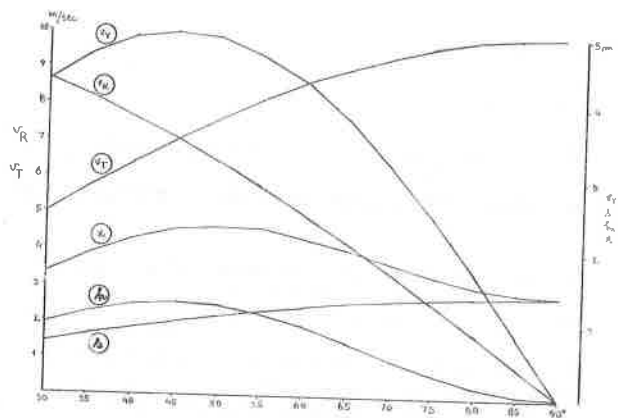
Graf. br. 1. Analogni izraz relacija relevantnih parametara horizontalnog hica – zaleta, – prikazanih na tabeli 1.



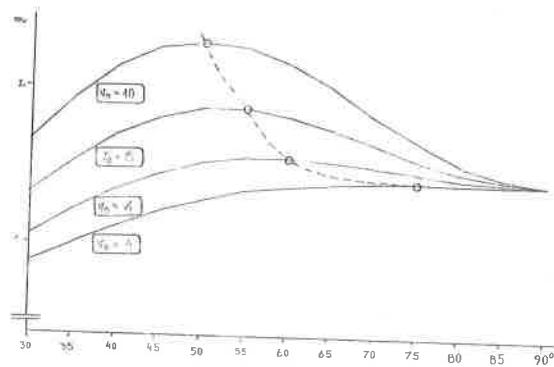
Graf. br. 2. Analogni izraz relacija relevantnih parametara horizontalnog hica – zaleta, prikazanih u tabeli 2.



Graf. br. 3. Analogni izraz relacija relevantnih parametara horizontalnog hica – zaleta, prikazanih na tabeli 3.



Graf. br. 4. Analogni izraz relacija relevantnih parametara horizontalnog hica – zaleta, prikazanih na tabeli 4.



Graf. br. 5. Isprekidanom linijom prikazan je nomogram maksimalne vrednosti visine težišta tela (Γ_A) skakača uvis sa različitim brzinama zaleta. Posmatra se samo visina težišta tela skakača, koja je postignuta visinom težišta tela skakača u trenutku odskoka i zaletom.

Pavle Opavsky
The Faculty for Physical Culture, University of Belgrade

THE MATHEMATICAL MODEL OF HORIZONTAL TRAJECTORY OF BODY FLIGHT

high jump / run-up, speed of run / pushing off, angle of attack / biomechanical analysis / mathematical model

The study establishes the quantitative relations between the run-up and the distance of body's gravity centre from the jump-off centre at the moment of separation of the body from the ground. While the point of contract of the body with the ground is falling ahead of the projection of body's gravity centre, ertain amount of running speed acts in the vertical direction so that the height of the jump is determined not only by the take off and arm swing, cet also by the prior run. This part of the speed of run which is traby the prior run. This part of the speed if the attack angle is equal half the right angle. On the other hand, the closer the attack angle is to the right angle, the higher the bodily centre of gravity is at the moment of jump. In order to calculate the existing quantitative relations among relevant parameters of horizontal trajectory of body flight an appropriate computer program was done. On the basis of computer results, quantitative relations were established between he speed of run and the attack angle with standard distance between the centre of gravity and the point of support. The study gives concrete values of the attack angle for each speed of run in the actual range. Generally speaking, value of the attack angle gravitates towards the value of the right angle if the speed of run decreases, and it gravitates towards half the right angle if the speed of run increases.

Павле Опавски

Факультет физической культуры Белградского университета

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО БРОСКА — РАЗБЕГА

В настоящей феноменологической работе определяются количественные взаимоотношения между скоростью разбега и расстоянием центра тяжести и центра толчка в момент отделения тела от почвы. Так как контакт с почвой осуществляется перед центром тяжести лета в направлении разбега, то определенная часть скорости разбега действует в вертикальном направлении, так что высота прыжка зависит не только от интенсивности толчка и замаха, а также от скорости разбега. Та часть скорости разбега, которая переносится в вертикальном направлении, является максимальной тогда, когда угол атаки равняется половине прямого угла. С другой стороны, чем больше величина угла атаки приближается к прямому углу, тем выше расположен центр тяжести тела в момент толчка. С целью вычисления существующих количественных взаимоотношений между характерными параметрами горизонтального броска, составлена соответствующая программа для ЭВМ. На основе результатов, полученных при помощи этой программы, определены количественные взаимоотношения между скоростью разбега и углом атаки в условиях стандартного расстояния между центром тяжести тела и точкой опоры. В работе определяются конкретные величины угла атаки для каждой скорости разбега в актуальных пределах. В принципе величина угла атаки приближается к прямому углу при снижении скорости разбега, а ее при повышении величина угла атаки приближается к половине прямого угла.