Münchausenovi brojevi

Maja Kovač[1], *Ozren Perše*[2]

Uvod

Prirodan broj 3435 ima sljedeće zanimljivo svojstvo:

$$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5.$$

Brojeve s tim svojstvom, slijedeći [1], nazivamo *Münchausenovi brojevi.* Prirodno pitanje koje se nameće je, odrediti sve prirodne brojeve s tim svojstvom. Preciznije, neka je $n \in \mathbf{N}$ i

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} c_i 10^i,$$

pri čemu su $0 \leqslant c_i \leqslant 9$ za $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ znamenke od n, a $m = \lfloor \log n + 1 \rfloor$ broj znamenaka od n. Za n ćemo reći da je Münchausenov broj (u bazi 10) ako je

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{c_i},$$

pri čemu uzimamo da je $0^\circ = 1$. Jedan od osnovnih rezultata ovog članka je da postoji samo konačno mnogo Münchausenovih brojeva, tj. preciznije da je svaki Münchausenov broj manji ili jednak od $2 \cdot 10^{10}$. Korištenjem te tvrdnje može se pokazati da su 1 i 3435 jedini Münchausenovi brojevi.

Općenitije, slijedeći [1], definiramo pojam Münchausenovog broja u proizvoljnoj bazi $b \geqslant 2$ i pokazujemo da postoji konačno mnogo takvih brojeva u fiksnoj bazi b. To nam omogućava da direktnom provjerom (korištenjem računala) odredimo sve Münchausenove brojeve u danoj bazi b.

U ovom članku s

$$x \mapsto \log_b x$$

označavamo realnu logaritamsku funkciju realne varijable, za bazu $b \in \mathbf{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$. Također, koristimo standardne oznake $\log x = \log_{10} x$ i $\ln x = \log_e x$. Očito je

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

Za $x \in \mathbf{R}$, s $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj manji ili jednak od x.

[1] Studentica je na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `kovacmaja@net.hr`

[2] Docent je na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `perse@math.hr`

Za prirodne brojeve $b, n \in \mathbf{N}$, pri čemu je $b \geqslant 2$, prikaz broja n u bazi b označavamo s $(c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_0)_b$. Tada je $0 \leqslant c_i \leqslant b-1$ za sve $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ i

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b^i.$$

Nadalje, definiramo funkciju $\theta_b : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ s

$$\theta_b(n) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{c_i},$$

pri čemu je $n = (c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_0)_b$.

Definicija 2.1. Prirodan broj $n \in \mathbf{N}$ zovemo *Münchausenov broj u bazi* b ako je $n = \theta_b(n)$.

Uz ovu definiciju, očito je 1 Münchausenov broj u svakoj bazi. U uvodu smo vidjeli da je 3435 Münchausenov broj u bazi 10. Iz rezultata ovog članka slijedit će da su 1 i 3435 jedini Münchausenovi brojevi u bazi 10.

Napomena 2.2. Može se pokazati da bi uz dogovor $0^\circ = 0$ imali još jedan primjer: 438579088.

Napomena 2.3. Naziv *Münchausenov broj*, dobiven po barunu von Münchausenu (vidi npr. [3]), potječe od svojstva znamenki tog broja da potenciraju same sebe. Sličan pojam je *narcističan broj*, kojeg proučavamo u poglavlju 4.

Osnovni rezultat ovog članka je da za proizvoljnu bazu $b \geqslant 2$ postoji samo konačno mnogo Münchausenovih brojeva u bazi b. Za dokaz te tvrdnje potrebne su nam sljedeće dvije leme.

Lema 2.4. *Za sve* $n \in \mathbf{N}$ *vrijedi*

$$\theta_b(n) \leqslant (\log_b n + 1)(b-1)^{b-1}.$$

Dokaz. Funkcija $n \mapsto n^n$ je očito strogo rastuća za $n \in \mathbf{N}$. Budući da je $0^\circ = 1$, vidimo da je ta funkcija rastuća na nenegativnim cijelim brojevima.

Neka je sada $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n = (c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_0)_b$, pri čemu je $0 \leqslant c_i \leqslant b-1$ za sve $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Tada je

$$\theta_b(n) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^{c_i} \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (b-1)^{b-1} = m(b-1)^{b-1}.$$

Nadalje, broj znamenaka u prikazu broja n u bazi b jednak je $\lfloor \log_b n + 1 \rfloor$, odnosno

$$m = \lfloor \log_b n + 1 \rfloor \leqslant \log_b n + 1.$$

Dakle, $\theta_b(n) \leqslant (\log_b n + 1)(b-1)^{b-1}$. $\square$

Lema 2.5. *Za* $n \in \mathbf{N}$ *takav da je* $n > 2b^b$ *vrijedi*

$$\frac{n}{\log_b n + 1} > (b-1)^{b-1}.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n > 2b^b$. Prvo primijetimo da je realna funkcija f realne varijable definirana s

$$f(x) = \frac{x}{\log_b x}$$

strogo rastuća za $x > e$. To slijedi iz činjenice da je njena derivacija

$$f'(x) = \ln b \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

pozitivna za $x > e$. Budući da je $n > 2b^b > e$, imamo

$$\frac{n}{\log_b n} > \frac{2b^b}{\log_b(2b^b)},$$

odakle dobivamo

$$\frac{n}{\log_b n + 1} > \frac{2b^b}{b + \log_b 2 + 1}.$$

Očito je $\log_b 2 + 1 \leqslant 2 \leqslant b$, pa je

$$\frac{n}{\log_b n + 1} > \frac{2b^b}{2b} = b^{b-1} > (b-1)^{b-1},$$

pa je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Sada imamo:

Teorem 2.6. *Za svaku bazu $b \geqslant 2$ postoji samo konačno mnogo Münchausenovih brojeva u bazi b.*

Dokaz. Iz prethodnih lema slijedi da za $n \in \mathbf{N}$ takav da je $n > 2b^b$ vrijedi

$$n > (\log_b n + 1)(b-1)^{b-1} \geqslant \theta_b(n).$$

Dakle, jednakost $n = \theta_b(n)$ nužno povlači da je $n \leqslant 2b^b$. Odatle direktno slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Popis Münchausenovih brojeva za $b \leqslant 10$

U prethodnom poglavlju smo dokazali da je za proizvoljnu bazu $b \geqslant 2$, svaki Münchausenov broj u bazi b nužno manji ili jednak $2b^b$. Sada je moguće, za danu bazu b, direktnom provjerom vidjeti koji su od tih brojeva zaista Münchausenovi. Na primjer, za $b = 2$, kandidati su $1, 2, \ldots 8$, pa se direktnom provjerom vidi da su samo $1 = (1)_2$ i $2 = (10)_2$ Münchausenovi brojevi. Za veće b je, naravno, potrebna upotreba računala da bi se izvršila ta provjera (npr. već za $b = 3$, potrebno je izvršiti provjeru za prirodne brojeve $1, 2, \ldots, 54$).

Tablica 1 daje popis svih Münchausenovih brojeva u bazama $b \leqslant 10$. Recimo, u bazi $b = 4$, jedini Münchausenovi brojevi različiti od 1 su 29 i 55. Imamo:

$$29 = (131)_4 = 1^1 + 3^3 + 1^1 \qquad \text{i} \qquad 55 = (313)_4 = 3^3 + 1^1 + 3^3.$$

Baze 5 i 8 imaju svojstvo da ne postoje netrivijalni Münchausenovi brojevi u tim bazama.

baza	Münchausenov broj	prikaz u bazi
2	1, 2	$(1)_2$, $(10)_2$
3	1, 5, 8	$(1)_3$, $(12)_3$, $(22)_3$
4	1, 29, 55	$(1)_4$, $(131)_4$, $(313)_4$
5	1	$(1)_5$
6	1, 3164, 3416	$(1)_6$, $(22352)_6$, $(23452)_6$
7	1, 3665	$(1)_7$, $(13454)_7$
8	1	$(1)_8$
9	1, 28, 96446, 923362	$(1)_9$, $(31)_9$, $(156262)_9$, $(1656547)_9$
10	1, 3435	$(1)_{10}$, $(3435)_{10}$

Tablica 1. Münchausenovi brojevi u bazama 2 do 10.

Napomena 3.1. Münchausenovi brojevi su navedeni u "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" ([2]), pod oznakom A166623. U toj enciklopediji je naveden popis Münchausenovih brojeva u bazama $b \leqslant 14$.

Slični pojmovi

Uz oznake kao u poglavlju 2, za prirodan broj $n \in \mathbf{N}$, $n = (c_{m-1}c_{m-2}\ldots c_0)_b$, kažemo da je *narcističan broj* u bazi $b \geqslant 2$ (vidi npr. [4]) ako je:

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^m.$$

Na primjer $n = 153$ je narcističan broj u bazi $b = 10$ jer $153 = (153)_{10} = 1^3 + 5^3 + 3^3$, a $n = 17$ je narcističan u bazi $b = 3$ jer $17 = (122)_3 = 1^3 + 2^3 + 2^3$.

Lagano se može pokazati da je broj narcističnih brojeva u fiksnoj bazi b konačan. Na primjer, postoji točno 88 narcističnih brojeva u bazi 10, od kojih najveći ima 39 znamenaka.

Ako u definiciji narcističnog broja ispustimo uvjet da je potencija kojom potenciramo znamenke jednaka broju znamenaka, tj. ako zahtijevamo da je

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} c_i^k,$$

za neki $k \in \mathbf{N}$ koji nije nužno jednak m, tada broj n nazivamo *savršena digitalna invarijanta* u bazi b ([4]). Na primjer, broj 4150 je savršena digitalna invarijanta u bazi 10 jer je $4150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$, ali nije narcističan u toj bazi (jer mu je broj znamenaka jednak 4).

Za razliku od Münchausenovih i narcističnih brojeva, nije poznato da li je broj savršenih digitalnih invarijanti u danoj bazi konačan ili beskonačan.

Literatura

[1] D. van Berkel, *On a curious property of 3435*, arXiv:0911.3038

[2] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org/`

[3] Wikipedia, *Baron Munchhausen*, `http://en.wikipedia.org/`

[4] Wikipedia, *Narcissistic Number*, `http://en.wikipedia.org/`