Najteža glavolomka na svijetu

Bojan Kovačić[1]

Prije petnaestak je godina logičar i stručnjak za glavolomke Raymond Smullyan[2] smislio glavolomku koja, prema mnogim mišljenjima stručnjaka, nema ozbiljnijega protukandidata za titulu najteže svjetske glavolomke. Ovdje ćemo navesti jednu varijaciju te glavolomke, dati njezino rješenje i ukratko komentirati neke posljedice tog rješenja.

Osnovna glavolomka

Lutajući afričkim prašumama u potrazi za izgubljenim blagom, poznatog matematičara – pustolova Matka Skitaralića zarobilo je pleme Mljac-Mljac. U prvi mah su ga odlučili pojesti za nedjeljni ručak, ali ih je vrlo rječiti Matko uspio nagovoriti da mu pruže priliku da preživi. Poglavica plemena Mljac-Mljac donio je odluku: ukoliko Matko pogodi ime svakoga od triju božanstava plemena Mljac-Mljac, pustit će ga na slobodu. Potom su Matka doveli u prostoriju u kojoj su sjedila spomenuta tri božanstva: Istinoljubac, Lažac i Slučajac. Matku nije unaprijed poznato niti kako se zove koje božanstvo, niti njihov redoslijed sjedenja. Jedino što je doznao o njima jest da Istinoljubac uvijek govori istinu, Lažac uvijek govori neistinu, a Slučajac na potpuno slučajan način odgovara ili istinito ili lažno. Matko ima pravo postaviti najviše tri pitanja. Svako od njih mora biti postavljeno točno jednom božanstvu, a na njega se mora moći odgovoriti ili samo s "da" ili samo s "ne" (ako pitanje nije takvoga oblika, niti jedno božanstvo neće dati nikakav odgovor). Božanstva razumiju, ali ne govore hrvatski jezik, pa odgovaraju na svojemu (zajedničkom) jeziku, i to isključivo ili "de" ili "na". Matko ne razumije jezik božanstava, pa ne zna točno značenje svake od tih riječi, ali mu je lijepa poglavičina kćerka krišom prišapnula da "de" i "na" u nekom redoslijedu znače "da" i "ne" (tj. točno jedna od tih riječi znači "da" i točno jedna "ne").

Koja pitanja Matko treba postaviti božanstvima tako da na temelju odgovora na njih jednoznačno može odrediti ime svakog božanstva i tako se spasiti?

Najprije navedimo neke pretpostavke uobičajene za ovakav tip glavolomke:

- Istom božanstvu Matko smije postaviti najviše tri pitanja, odnosno moguće je da nekom od božanstava ne postavi niti jedno pitanje.
- Postavljanje drugog pitanja i izbor božanstva kojemu će ono biti postavljeno smije ovisiti o odgovoru dobivenom na prvo pitanje (analogno i za treće pitanje).
- Odgovaranje Slučajca treba zamišljati na sljedeći način: Kad čuje postavljeno pitanje, Slučajac na slučajan način baci simetričan novčić. Ako novčić padne na *pismo*, Slučajac odgovara istinito, a ako novčić padne na *glavu*, Slučajac odgovara neistinito.

Prije izlaganja rješenja osnovne glavolomke, postavit ćemo i riješiti tri pomoćne glavolomke povezane s netom postavljenom glavolomkom, ali bitno lakše od nje. Potom ćemo iskoristiti njihova rješenja kako bismo riješili osnovnu glavolomku. Posljednje dvije od triju pomoćnih glavolomki poznate su i otprije, dok je prvu smislio George Boolos[3] rješavajući osnovnu glavolomku.

---

[1] Autor je predavač matematičkih kolegija Tehničkog veleučilišta u Zagrebu, e-pošta: `bojan.kovacic@tvz.hr`.

[2] Raymond Merrill Smullyan (1919. –), američki matematičar, logičar i pijanist.

[3] George Stephen Boolos (1940. – 1996.), američki matematičar i filozof.

Glavolomka 1

Za kupnju novoga automobila Ćiro Zapijalo želi posuditi novac od svog brata, strastvenog kartaša Ferde Zapijala. Ferdo je na stol postavio tri karte: dva asa i jednoga jockera, pri čemu mu je poznat točan poredak svih triju karata. Potom je rekao Ćiri neka odabere bilo koju od postavljenih karata i postavi mu točno jedno pitanje na koje se može odgovoriti ili s "da" ili s "ne". (Ako pitanje nije takvog oblika, Ferdo neće dati nikakav odgovor). Pritom je Ferdo čvrsto obećao: bude li Ćiro odabrao asa, istinito će odgovoriti na Ćirino pitanje, a bude li odabrao jockera, slučajno će odgovoriti na Ćirino pitanje (tj. Ferdin odgovor može biti ili istinit ili lažan). Nakon što Ćiro čuje Ferdin odgovor, treba odrediti točno jednu kartu na kojoj se nalazi as i, ako to ispravno napravi, Ferdo će mu posuditi novac.

Koje pitanje Ćiro treba postaviti Ferdi tako da na temelju odgovora dobivenog na njega sigurno može odrediti koja karta je as?

Glavolomka 2

Tragajući za izgubljenim blagom cara Tvrdislava, logičar-pustolovac Logičko Skitalarić doznao je da se blago nalazi u jednoj od dviju spiljâ ispred kojih sjede dva božanstva: Istinoljubac i Lažac. U drugoj spilji nalazi se gladni zmaj koji će pojesti Logička uđe li u njegovu spilju. Logičko ne zna unaprijed niti kako se zove koje božanstvo niti njihov redoslijed sjedenja, ali zna da Istinoljubac uvijek govori istinu, a Lažac uvijek laže. Božanstva razumiju i govore hrvatski jezik, te na njemu odgovaraju na postavljena pitanja. Pritom ta pitanja moraju biti postavljena tako da se na njih može odgovoriti ili "da" ili "ne" (ako pitanje nije takvog oblika, niti jedno božanstvo ne daje nikakav odgovor na njega). Božanstva dozvoljavaju ulaz u točno jednu spilju, ali ne dozvoljavaju izlaz iz spilje u kojoj se nalazi zmaj.

Koje pitanje Logičko treba postaviti točno jednom od božanstava tako da se iz njegova odgovora jednoznačno može izvesti istinit zaključak u kojoj se spilji nalazi blago?

Glavolomka 3

Tragajući za izgubljenim blagom cara Škrtislava, matematičarka-pustolovka Matkica Skitaralić doznala je da se blago nalazi u jednoj od dviju spilja ispred kojih sjedi božanstvo Istinoljubac. U drugoj spilji nalazi se gladni zmaj koji će pojesti Matkicu uđe li u njegovu spilju. Istinoljubac odgovara isključivo na pitanja na koja se može odgovoriti ili "da" ili "ne" (ako pitanje nije takvog oblika, Istinoljubac ne daje nikakav odgovor), a njegovi odgovori su uvijek istiniti. Istinoljubac razumije, ali ne govori hrvatski jezik, pa odgovara na svojem jeziku u kojemu riječi "de" i "na" u nekom redoslijedu znače "da" i "ne".

Koje pitanje Matkica treba postaviti tako da iz dobivenog odgovora može izvesti istinit zaključak u kojoj se spilji nalazi blago?

U nastavku iznosimo rješenja postavljenih glavolomki.

Rješenje Glavolomke 1

Strategija je sljedeća:

- Ćiro odabire srednju od triju izloženih karata i postavlja Ferdi pitanje:
  ”*Je li lijeva karta as*?”
- Bude li Ferdin odgovor “*da*”, Ćiro treba odabrati lijevu kartu (tj. ta karta je as).
- Bude li Ferdin odgovor “*ne*”, Ćiro treba odabrati desnu kartu (tj. ta karta je as).

Uvjerimo se da *neovisno o tome koja je srednja karta* opisanom strategijom Ćiro sigurno može odrediti koja karta je as. Razmotrimo sljedeće slučajeve:

a) Pretpostavimo da je srednja karta as. Tada odgovor na postavljeno pitanje mora biti istinit. Odgovori li Ferdo “*da*”, to znači da je lijeva karta uistinu as, pa Ćiro treba odabrati upravo tu kartu. Odgovori li Ferdo “*ne*”, to znači da lijeva karta nije as (tj. lijeva karta je *jocker*). Stoga su preostale dvije karte asevi, pa Ćiro može točno odabrati desnu kartu (u ovom je slučaju i srednja karta as, ali to je nebitno).

b) Pretpostavimo da je srednja karta *jocker*. Tada su lijeva i desna karta asevi. Sada lako vidimo da odabir karte *ne ovisi o istinitosti* dobivena odgovora: odgovori li Ferdo “*da*”, Ćiro sigurno može odabrati lijevu kartu (u ovom je slučaju i desna karta as, ali to je nebitno) a odgovori li Ferdo “*ne*”, Ćiro sigurno može odabrati desnu kartu (u ovom je slučaju i lijeva karta as, ali to je nebitno).

Kako vidimo, opisana strategija ne ovisi o tome koja karta je srednja, pa u svakom slučaju možemo napraviti ispravan izbor karte.

Bilješka 1. Ćiro je mogao postaviti i pitanje: ”*Je li desna karta as*?”, pa u tom slučaju odabrati desnu kartu bude li Ferdin odgovor “*da*”, odnosno lijevu kartu bude li dobiveni odgovor “*ne*”. Potpuno analognim zaključivanjem kao u rješenju Glavolomke 1 zaključujemo da i ta strategija vodi na ispravan izbor karte.

Rješenje Glavolomke 2

Najprije podsjetimo na logički operator *ekvivalencije* (oznaka: $\Longleftrightarrow$). Njegova tablica istinitosti je sljedeća:

$\tau(A)$	$\tau(B)$	$\tau(A \Longleftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dakle, logička izjava $A \Longleftrightarrow B$ (A je ako i samo ako je B) je istinita u točno dva slučaja:

1) Izjava A i izjava B su istovremeno istinite;

2) Izjava A i izjava B su istovremeno neistinite.

Iskoristimo ovaj logički operator u rješavanju Glavolomke 2. Pitanje koje Logičko treba postaviti *bilo kojem* od dvaju božanstava glasi:

Jesi li ti Istinoljubac ako i samo ako je blago u prvoj spilji?

Odgovor na postavljeno pitanje ujedno je i odgovor na pitanje je li blago u prvoj spilji.

Uvjerimo se da ova strategija doista daje istinitu informaciju.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Logičko postavio pitanje prvom božanstvu. Ne znamo je li to božanstvo Istinoljubac ili Lažac, pa ćemo pokazati da ta činjenica uopće nije bitna. Budući da oba božanstva znaju istinit odgovor na postavljeno pitanje, razmatranja ćemo provoditi u skladu s tom pretpostavkom. Radi jednostavnosti, označimo:

A: *Ja sam Istinoljubac.*

B: *Blago je u prvoj spilji.*

Primijetimo da je, uz navedene oznake, postavljeno pitanje zapravo pitanje je li tvrdnja $A \iff B$ istinita. Stoga je *istinit* odgovor na to pitanje "*da*" ako i samo ako je tvrdnja $A \iff B$ istinita, a "*ne*" ako i samo ako je tvrdnja $A \iff B$ neistinita. Razmišljamo na sljedeći način:

- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Istinoljubac, te da je blago doista u prvoj spilji. Tada su tvrdnje A i B istovremeno istinite, pa je i tvrdnja $A \iff B$ istinita. Budući da Istinoljubac uvijek govori istinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*da*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Istinoljubac, te da je blago u drugoj spilji. Tada je tvrdnja A istinita, a tvrdnja B neistinita. Stoga je tvrdnja $A \iff B$ neistinita. Budući da Istinoljubac uvijek govori istinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*ne*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Lažac, te da je blago u prvoj spilji. Tada je tvrdnja A neistinita, a tvrdnja B istinita. Stoga je tvrdnja $A \iff B$ neistinita. Stoga je istinit odgovor na postavljeno pitanje "*ne*". Budući da Lažac uvijek govori neistinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*da*".
- Pretpostavimo da je upitano božanstvo Lažac, te da je blago u drugoj spilji. Tada su obje tvrdnje A i B istovremeno neistinite, pa je tvrdnja $A \iff B$ istinita. Stoga je istinit odgovor na postavljeno pitanje "*da*". Budući da Lažac uvijek govori neistinu, njegov odgovor na postavljeno pitanje je "*ne*".

Iz gore navedenoga vidimo da se istinitost tvrdnje B uvijek podudara s odgovorom "*da*", a neistinitost tvrdnje B s odgovorom "*ne*". Drugim riječima, pokazali smo da su tvrdnje:

C: Blago je u prvoj spilji ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "*da*";

D: Blago je u drugoj spilji ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "*ne*";

istinite *neovisno o božanstavu kojemu je postavljeno pitanje*. Stoga navedena strategija uvijek daje istinitu informaciju.

Rješenje Glavolomke 3

Rješenje ove glavolomke je vrlo slično rješenju Glavolomke 2. Najvažnije je da *ne trebamo saznati točno značenje riječi "de" i/ili "na"*. Pitanje koje Matkica treba postaviti Istinoljupcu je:

Znači li riječ "de" "da" ako i samo ako je blago u prvoj spilji?

Bude li Istinoljupčev odgovor na postavljeno pitanje "de", blago se nalazi u prvoj spilji, a bude li njegov odgovor "na", blago se nalazi u drugoj spilji.

Prepuštamo čitatelju da se sâm uvjeri da ova strategija daje istinitu informaciju neovisno o značenjima riječi "de" i/ ili "na".

Bilješka 2. Da se umjesto Istinoljupca ispred spilja nalazio Lažac (koji uvijek laže), strategija bi bila: Bude li Laščev odgovor na postavljeno pitanje "na", blago se nalazi u prvoj spilji, a bude li njegov odgovor "de", blago se nalazi u drugoj spilji.

Rješenje osnovne glavolomke

Prvi Matkov potez je odrediti koje od triju božanstava *sigurno nije* Slučajac, tj. odrediti barem jedno božanstvo za kojeg će biti siguran da je ili Istinoljubac ili Lažac. U tu svrhu označimo božanstva s A, B i C sukladno njihovu redoslijedu sjedenja.

Prvom božanstvu (tj. božanstvu A) Matko treba postaviti sljedeće pitanje:

Znači li "de" "da" ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je B Slučajac?

Prepuštamo čitatelju da se sâm uvjeri u istinitost sljedećih tvrdnji:

I: *B je ili Istinoljubac ili Lažac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "na".*

J: *C je ili Istinoljubac ili Lažac ako i samo ako je odgovor upitanoga božanstva "de"*

i to *neovisno o upitanom božanstvu* (Istinoljubac, Lažac ili Slučajac). Time Matko jednim pitanjem (i dobivenim odgovorom) dolazi u situaciju da *sigurno* može odrediti koje od božanstava nije Slučajac.

Nakon ovog zaključka bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je odgovor na prvo pitanje bio "na", tj. da je B ili Istinoljubac ili Lažac (za drugi slučaj jednostavno možemo božanstvo C preimenovati u B i provesti potpuno isto razmatranje). Stoga svoje drugo pitanje Matko postavlja upravo tom božanstvu i ono glasi:

Znači li "de" "da" ako i samo ako je Zagreb glavni grad Republike Hrvatske[4] *?*

Iz rješenja Glavolomke 3 slijedi da će Istinoljupčev odgovor na ovo pitanje svakako biti "de", a Laščev odgovor na ovo pitanje svakako će biti "na". Prema tome, *ne znajući pravo značenje riječi* "de" i "na", iz odgovora na postavljeno pitanje Matko može identificirati božanstvo B.

Preostaje identificirati preostala dva božanstva. U tu svrhu Matko postavlja (ponovno) božanstvu B (čiji je identitet već otkrio) treće i posljednje pitanje:

Znači li "de" "da" ako i samo ako je A Slučajac?

Razlikujemo dva slučaja:

1) B je Istinoljubac.

Iz rješenja Glavolomke 3 slijedi:

a) Ako je Istinoljupčev odgovor "de", onda je A Slučajac, pa je C Lažac. Poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja je: *Slučajac*, *Istinoljubac*, *Lažac*.

b) Ako je Istinoljupčev odgovor "na", zaključujemo da A nije Slučajac, pa – jer je B, prema pretpostavci, Istinoljubac – A mora biti Lažac. Stoga je C Slučajac, pa je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Lažac*, *Istinoljubac*, *Slučajac*.

2) B je Lažac.

Iz rješenja Glavolomke 3 slijedi:

a) Ako je Laščev odgovor "de", onda A nije Slučajac, pa – jer je B, prema gornjoj pretpostavci, Lažac – A mora biti Istinoljubac. Stoga je C Slučajac, pa je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Istinoljubac*, *Lažac*, *Slučajac*.

b) Ako je Laščev odgovor "na", onda je A Slučajac, pa – jer je B, prema gornjoj pretpostavci, Lažac – C mora biti Istinoljubac. Stoga je poredak božanstava prema redoslijedu sjedenja: *Slučajac*, *Lažac*, *Istinoljubac*.

Time je osnovna glavolomka u potpunosti razriješena.

Zaključno istaknimo da je Gabriel Uzquiano[5] 2010. pokazao da se osnovna glavolomka može riješiti postavljanjem točno dvaju pitanja. Ta su pitanja nešto kompleksnija od ovdje navedenih (a potrebna su i još neka dodatna razmatranja), pa zainteresiranog čitatelja upućujemo na literaturu [3].

---

[4] Ovdje umjesto izjave *Zagreb je glavni grad Republike Hrvatske* može stajati bilo koja istinita izjava čiju istinitost unaprijed znamo.

[5] Gabriel Uzquiano, američki filozof, matematičar i logičar.

Pitanja za promišljanje

1. Je li u rješenju Glavolomke 1 moguće postaviti točno jedno od sljedećih pitanja:

Je li srednja karta as?
Je li lijeva karta jocker?
Je li srednja karta jocker?
Je li desna karta jocker?

tako da pomoću odgovora na to pitanje možemo sigurno zaključiti koja karta je as? Ako je moguće, izložite strategiju sigurnog odabira točno jedne karte na kojoj se nalazi as.

2. Je li u rješenju Glavolomke 3 moguće postaviti točno jedno od sljedećih pitanja:

Znači li riječ "de" "ne" ako i samo ako je Ouagadougou grad u Egiptu?
Znači li riječ "de" "da" ako i samo ako Ouagadougou nije grad u Egiptu?
Znači li riječ "de" "ne" ako i samo ako Ouagadougou nije grad u Egiptu?
Znači li riječ "na" "da" ako i samo ako je Ouagadougou grad u Egiptu?
Znači li riječ "na" "ne" ako i samo ako je Ouagadougou grad u Egiptu?
Znači li riječ "na" "da" ako i samo ako Ouagadougou nije grad u Egiptu?
Znači li riječ "na" "ne" ako i samo ako Ouagadougou nije grad u Egiptu?

tako da iz Istinoljupčevog odgovora možemo sigurno zaključiti je li Ouagadougou grad u Egiptu ili nije? Ako je moguće, navedite strategiju zaključivanja koja vodi na ispravan zaključak.

3. Riješite prethodni zadatak uz pretpostavku da ste pitanje uputili Lašcu.

4. Neka je X bilo koja tvrdnja (koja može biti ili istinita ili lažna). Pretpostavimo da Istinoljubac i Lažac razumiju, ali ne govore hrvatski jezik, te da smo točno jednom od njih postavili točno jedno od sljedećih pitanja:

Znači li "de" "da" ako i samo ako si ti Lažac ako i samo ako je X istinita tvrdnja?
Znači li "de" "da" ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X lažna tvrdnja?
Znači li "de" "ne" ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X istinita tvrdnja?
Znači li "de" "ne" ako i samo ako si ti Lažac ako i samo ako je X istinita tvrdnja?
Znači li "de" "ne" ako i samo ako si ti Istinoljubac ako i samo ako je X lažna tvrdnja?

Za svako od tih pitanja razmotrite postoji li strategija pomoću koje iz odgovora upitanog božanstva možemo sigurno istinito zaključiti je li X istinita ili lažna tvrdnja.

5. Riješite prethodni zadatak uz uvjet da ste točno jedno od navedenih pitanja postavili Slučajcu (koji također razumije, ali ne govori hrvatski jezik).

Literatura

[1] G. Boolos, *The hardest logic puzzle ever*, The Harvard Review of Philosophy, 6, str. 62–65, 1996.

[2] B. Rabern, L. Rabern, *A simple solution to the hardest logic puzzle ever*, Analysis 68(2), str. 105–112, 2008.

[3] G. Uzquiano, *How To Solve The Hardest Logic Puzzle Ever In Two Questions*, Analysis 70(1), str. 39–44, 2010.

[4] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2010.