Domena kompozicije funkcija

Petar Žugec[1]

Kompozicija dviju funkcija $f(x)$ i $g(x)$ – u oznaci $(f \circ g)(x)$ – definirana je s

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)). \tag{1}$$

Riječima, kompozicija je nova funkcija dobivena uvrštavanjem funkcije $g(x)$ na mjesto argumenta funkcije $f(x)$. Pri tome je poredak funkcija bitan, u što se možemo uvjeriti konstrukcijom jednostavnog primjera. Npr., neka je $f(x) = x^2$ te $g(x) = \sin x$. Tada je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$, dok je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin x^2$. Ove dvije kompozicije očito nisu jednake, stoga općenito *ne* vrijedi: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Drugim riječima, kompozicije funkcija nisu komutativne. Kompozicija više funkcija – $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$,... – također je definirana:

$$(f \circ g \circ h \circ \cdots)(x) \equiv f(g(h(\cdots(x)))). \tag{2}$$

te je možemo shvatiti uzastopnim uvrštavanjem jedne funkcije u drugu, u točno zadanome poretku.

Domena $\mathcal{D}(f)$ funkcije $f(x)$ skup je svih vrijednosti argumenta x za koji je funkcija $f(x)$ dobro definirana, odnosno skup svih x-ova za koje funkcija $f(x)$ vraća neku vrijednost iz skupa brojeva nad kojim je definirana. Npr. domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, definirane nad skupom realnih brojeva, čini skup svih nenegativnih realnih brojeva: $\mathcal{D}(f) = [0, \infty\rangle$ jer za $x < 0$ rezultat funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ nije realan broj. Primijetimo da i negativni x-ovi postaju dozvoljeni argumenti proširimo li dozvoljene vrijednosti od $f(x)$ na skup kompleksnih brojeva. Štoviše, u tom slučaju čitav skup kompleksnih brojeva postaje domenom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, tj. $\mathcal{D}(f) = \mathbf{C}$. Stoga je pitanje skupa nad kojim je funkcija definirana od središnje važnosti pri određivanju njene domene. U ovom članku sve funkcije promatrat ćemo nad skupom realnih brojeva. U praktičnim primjenama ovakvo ograničenje domene nije naprosto proizvoljno. Na primjer, u fizici sve funkcije koje izravno opisuju neki element stvarnosti, moraju biti realne.

Kompozicije funkcija također imaju – i moraju imati – jasno definiranu domenu, pa makar ona bila prazan skup. No pri tome treba uzeti u obzir da i svaka potkompozicija cjelovite kompozicije mora biti dobro definirana. Na primjer, unutar kompozicije $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$ prvo funkcija $h(x)$ mora biti dobro definirana za svaki x iz domene završne kompozicije. Zatim isto mora biti zadovoljeno za potkompoziciju $g(h(x))$ pa tek onda za cjelovitu kompoziciju $f(g(h(x)))$. Težina ovog zahtjeva postaje savršeno jasnom na primjeru kompozicije $(f \circ g)(x)$ gdje su obje potfunkcije jednake $f(x) = g(x) = 1/x$. Izravnim uvrštavanjem slijedi: $f(g(x)) = 1/(1/x) = x$ te se na prvi pogled može učiniti da je kompozicija definirana za svaki realni broj. No prisjetimo se da prvo sama funkcija $g(x) = 1/x$ mora biti definirana, a nije za $x = 0$. Stoga je rezultat kompozicije $(f \circ g)(x)$ preslikavanje $f(g(x)) = x$ koje nije definirano za $x = 0$![2, 3]

---

[1] Autor je magistar fizike na Zavodu za eksperimentalnu fiziku na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, e-pošta: `pzugec@phy.hr`

[2] Iako se čini da se kod $1/(1/x)$ nedefiniranosti od $1/x$ u zapisu međusobno "pokrate", takvo razmišljanje je pogrešno. Naime, kompozicije treba shvatiti kao djelovanje potfunkcija korak po korak, umjesto čitave kompozicije "odjednom". Stoga, ako je rezultat djelovanja prve funkcije u $x = 0$ neodređen – u slikovitom zapisu: $g(0) = ?$ – sljedeća funkcija u nizu ne može iz nepoznatog argumenta rekonstruirati jasnu vrijednost: $f(?) = 0$. Za pomoć u shvaćanju koliko ovo nije tek puka matematička formalnost ne treba ići dalje od kalkulatora. Kakav bi rezultat kalkulator vratio nakon unosa ovakve linije: `1/(1/0)`?

[3] Svaka funkcija definirana je trima elementima: (1) domenom, (2) kodomenom, (3) pravilom preslikavanja (svojim "zapisom"). Prema tome, funkcija x i rezultat kompozicije $1/(1/x)$ nisu jednake funkcije jer im domene nisu jednake!

U ovom članku pokazat ćemo kako odrediti domene kompozicija na nekoliko složenijih primjera. Iako će ovdje izabrani primjeri uglavnom biti artificijelni – odabrani zbog svoje matematičke privlačnosti – postupci nalaženja domena složenih funkcija svakako imaju i praktične primjene. U fizici, na primjer, kad je neki fizikalni parametar argument neke funkcije, tada domena funkcije određuje koje je vrijednosti tog parametra moguće, a koje nije ostvariti u danoj fizikalnoj situaciji.

Zadatak 1. Odredite domene kompozicija $f_1(x) = \sin x \circ \ln x$ i $f_2(x) = \ln x \circ \sin x$.

Ovaj zadatak poslužit će tek kao uvodni primjer, odnosno priprema za kasnije složenije probleme. Zadane funkcije jednake su: $f_1(x) = \sin(\ln x)$ i $f_2(x) = \ln(\sin x)$. Promotrimo prvo funkciju f_1. Argument x isprva je ograničen domenom prirodnog logaritma: $x > 0$. Slika[4] prirodnog logaritma čitav je skup realnih brojeva. Isto tako, domena sljedeće funkcije u nizu – $\sin(\ln x)$ – također je čitav skup realnih brojeva, stoga sinus ne postavlja dodatna ograničenja na dozvoljene vrijednosti od $\ln x$, a prema tome niti na x. Dakle, domena kompozicije f_1 određena je jedino prvim ograničenjem:

$$\mathcal{D}(f_1) = \langle 0, \infty \rangle \; . \tag{3}$$

Unutar kompozicije f_2 početna funkcija $\sin x$ ne postavlja nikakva ograničenja na x, osim onoga koje smo sami nametnuli: zatvorenost unutar skupa realnih brojeva: $x \in \mathbf{R}$. No sljedeća funkcija u nizu – $\ln(\sin x)$ – prihvaća jedino pozitivne vrijednosti od $\sin x$, dok se slika sinusa proteže i preko negativnih vrijednosti: $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$. Stoga moramo postaviti primjereno ograničenje na argument prirodnog logaritma: $\sin x > 0$. Ova nejednakost zadovoljena je za x unutar svakog intervala $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$ gdje je k proizvoljan cijeli broj: $k \in \mathbf{Z}$. S obzirom da kompozicija f_2 ne postavlja daljnja ograničenja, njenu domenu zapisujemo kao uniju svih ovakvih intervala:

$$\mathcal{D}(f_2) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \; . \tag{4}$$

Na ovome primjeru postalo je sasvim jasno da općenito ne samo da ne vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, već isto tako *ne* vrijedi niti $\mathcal{D}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{D}[(g \circ f)(x)]$. Vrlo je lako uvjeriti se da niti slike kompozicija općenito *ne* zadovoljavaju $\mathcal{S}[(f \circ g)(x)] = \mathcal{S}[(g \circ f)(x)]$.

Zadatak 2. Za dani n, odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}}_{\text{par}} \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1} \circ \cdots \circ \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}}^{n \text{ parova}} \; . \tag{5}$$

Čemu teži domena za $n \to \infty$?

Ovdje smo odlučili indeksirati kompoziciju indeksom n kad je u njoj n parova potfunkcija, tj. ukupno $2n$ potfunkcija. Stoga ćemo za kompozicije s neparnim brojem potfunkcija korisititi oznaku $f_{n-1/2}$. Promotrimo kompozicije za nekoliko najnižih

[4] Slika $\mathcal{S}(f)$ funkcije f skup je svih vrijednosti koje funkcija f može poprimiti. Npr. slika funkcije $\sin x$ je interval svih realnih brojeva između -1 i 1: $\mathcal{S}(\sin x) = [-1, 1]$.

vrijednosti indeksa. Za početni član očito vrijedi

$$f_{1/2} = \frac{1}{x-1} \tag{6}$$

te kao takav na domenu svake kasnije kompozicije u nizu postavlja ograničenje: $x \neq 1$. Zatim

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \circ f_{1/2}(x) = x - 1 \tag{7}$$

Do sada već znamo da je ova funkcija jednaka $x-1$ samo u pojednostavnjenom zapisu, s obzirom da u točki $x = 1$ nije definirana: $\mathcal{D}(f_1) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Nadalje

$$f_{3/2}(x) = \frac{1}{x-1} \circ f_1(x) = \frac{1}{x-2}\,, \tag{8}$$

odakle za svaku kasniju kompoziciju, pa tako i za

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \circ f_{3/2}(x) = x - 2\,, \tag{9}$$

slijedi novi zahtjev: $x \neq 2$. Do sada smo domenu ograničili na: $\mathcal{D}(f_2) = \mathbf{R} \setminus \{1, 2\}$. Nastavimo li ovakvo određivanje uzastopnih kompozicija, vrlo brzo opazit ćemo sljedeću pravilnost[5]:

$$f_{n-1/2}(x) = \frac{1}{x-n} \qquad \text{i} \qquad f_n = x - n \tag{10}$$

Pri tome svaka neparna kompozicija $f_{n-1/2}$ izbacuje dodatnu točku ($x \neq n$) iz domene svih kasnijih kompozicija. Stoga je lako zaključiti da se nagomilavanjem svih ovakvih ograničenja domena kompozicije f_n svodi na:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \{k\} \tag{11}$$

što u limesu $n \to \infty$ rezultira izbacivanjem čitavog skupa prirodnih brojeva:

$$\mathcal{D}(f_\infty) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}. \tag{12}$$

Zadatak 3. Slično prethodnom zadatku, za dani n odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}\right)}_{\text{par}} \circ \left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}\right) \circ \cdots \circ \left(\frac{1}{x} \circ \frac{1}{x-1}\right)}^{n \text{ parova}}. \tag{13}$$

Ovaj put redoslijed određivanja potfunkcija reguliran je pojavom novih zagrada. Rješavanjem svih zagrada možemo zapisati:

$$f_n(x) = (x-1) \circ (x-1) \circ \cdots \circ (x-1) \tag{14}$$

pri čemu nijedna $x-1$ potfunkcija nije definirana u jedinici. Sada se na prvi pogled može učiniti da $x \neq 1$ ostaje jedino ograničenje, s obzirom da nijedna potfunkcija nije osjetljiva niti u jednoj drugoj točki. No provjerimo što se događa s uzastopnim kompozicijama. Za $f_1(x) = x - 1$ već znamo da ne podnosi $x = 1$. No kod f_2:

$$f_2(x) = (x-1) \circ f_1(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\neq 1} - 1 \tag{15}$$

na označeno mjesto ne smije se uvrstiti vrijednost 1 jer lijeva $x-1$ potfunkcija između dvaju znakova jednakosti nije definirana za vrijednost argumenta 1. A kako je taj

[5] Jednom kada smo naslutili ove relacije, formalno bismo ih dokazali matematičkom indukcijom. No u ovom slučaju veze iz (10) dovoljno su jednostavne i očite pa ćemo dokaz izostaviti.

argument rezultat prethodne kompozicije, unutar f_2 slijedi sljedeći zahtjev na f_1:

$$f_1(x) = x - 1 \neq 1 \implies x \neq 2. \tag{16}$$

Ponavljanjem ovog postupka za f_3:

$$f_3(x) = (x - 1) \circ f_2(x) = f_2(x) - 1 \tag{17}$$

na mjesto argumenta – koje sad zauzima funkcija f_2 – ponovno ne smijemo uvrstiti jedinicu, što vodi na

$$f_2(x) = x - 2 \neq 1 \implies x \neq 3\,. \tag{18}$$

I ponovno možemo uočiti pravilnost[6] prema kojoj svaka pojedina kompozicija f_n iz svoje domene izbacuje točku $x = n$, čime rješenje ovog zadatka postaje potpuno identično onome prethodnog zadatka. Ovaj rezultat nije slučajan, već je zajamčen svojstvom asocijativnosti kompozicija: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Zadatak 4. Odredite domenu kompozicije:

$$f(x) = \frac{1}{x} \circ \cos x \circ \ln x \circ \sin x\,. \tag{19}$$

Prva potfunkcija $\sin x$ ne postavlja nikakva ograničenja na x, dakle:

$$\mathcal{D}(\sin x) = \mathbf{R}. \tag{20}$$

Domenu sljedeće potfunkcije $\ln(\sin x)$ već smo odredili u sklopu zadatka 1:

$$\mathcal{D}(\ln(\sin x)) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \langle\, 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle\,. \tag{21}$$

Nadolazeća potfunkcija $\cos(\ln(\sin x))$ ne unosi dodatne zahtjeve jer je, poput sinusa, definirana na čitavom skupu realnih brojeva te može prihvatiti bilo koju vrijednost iz slike prirodnog logaritma. Dakle:

$$\mathcal{D}(\cos(\ln(\sin x))) = \mathcal{D}(\ln(\sin x)). \tag{22}$$

Konačno, cjelokupna kompozicija $1/\cos(\ln(\sin x))$ ne trpi nulu u nazivniku, stoga uvodi sljedeće ograničenje: $\cos(\ln(\sin x)) \neq 0$, koje je potrebno prevesti u ograničenje na sam x. Funkcija $\cos y$ postiže nulu za svaki argument oblika: $y = (n + 1/2)\pi$, pri čemu je n proizvoljan cijeli broj: $n \in \mathbf{Z}$. Odavde slijedi

$$\ln(\sin x) \neq (n + 1/2)\pi \implies \sin x \neq e^{(n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{Z}\,. \tag{23}$$

No neka od ovih ograničenja (za određene n) su suvišna jer su vrijednosti izraza $e^{(n+1/2)\pi}$ odozgo neograničene, dok sinus ionako ne može premašiti jedinicu. Prema tome, dovoljno je zadržati samo takve n za koje se ograničenje našlo unutar slike sinusa:

$$e^{(n+1/2)\pi} \leqslant 1 \implies (n + 1/2)\pi \leqslant 0\,. \tag{24}$$

Budući da je n cijeli broj, najveća vrijednost za koju je prethodna nejednakost zadovoljena iznosi $n = -1$. Stoga zadržavamo samo ona ograničenja za koja je $n \leqslant -1$. I ovakav novi skup vrijednosti možemo elegantno zapisati primijetimo li sljedeće: zahtijevati da je n iz skupa cijelih brojeva manjih ili jednakih -1, isto je kao i zahtijevati da je $-n$ iz skupa prirodnih brojeva:

$$n \in \mathbf{Z} \quad \text{i} \quad n \leqslant -1 \iff -n \in \mathbf{N}\,. \tag{25}$$

Sada (23) možemo zapisati na ovaj način:

$$\sin x \neq e^{(-n+1/2)\pi}; \quad n \in \mathbf{N}\,, \tag{26}$$

te moramo odrediti sva rješenja jednadžbe $\sin x = z$, pri čemu ćemo kasnije uvrstiti $z = e^{(-n+1/2)\pi}$. Za početak, $x = \arcsin z$ svakako je jedno rješenje jednadžbe. No

[6] Za ovaj uvid moram zahvaliti Ivici Kičiću, studentu istraživačkog smjera fizike s Fizičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

valja se prisjetiti da je sinus periodičan s periodom 2π, stoga je i svaki x oblika $x = 2k\pi + \arcsin z$ ($k \in \mathbf{Z}$) također rješenje jednadžbe $\sin x = z$. U konačnici, ne smijemo zaboraviti još jednu činjenicu: svaki brijeg sinusa – razapet između $2k\pi$ i $(2k+1)\pi$ – zrcalno je simetričan! Prema tome, ako je $x = 2k\pi + \arcsin z$ rješenje jednadžbe $\sin x = z$, tada je također i $x = (2k+1)\pi - \arcsin z$. Temeljem ovih razmatranja, iz (26) slijedi:

$$x \neq 2k\pi + \arcsin\left(e^{(-n+1/2)\pi}\right) \quad \text{i} \quad x \neq (2k+1)\pi - \arcsin\left(e^{(-n+1/2)\pi}\right);\ n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}. \tag{27}$$

Napokon, moramo sjediniti ovaj uvjet s ograničenjem iz (21), odnosno (22). Primjećujemo da smo iz svakog intervala $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle$ iz (21), ograničenjem iz (27) dodatno izbacili sve točke pobrojane s n. Stoga domenu cjelokupne kompozicije $f(x) = 1/\cos(\ln(\sin x))$ zapisujemo na način:

$$\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \left\{ 2k\pi + \arcsin\left(e^{(-n+1/2)\pi}\right), \right.\right.$$
$$\left.\left. 2(k+1)\pi - \arcsin\left(e^{(-n+1/2)\pi}\right) \right\} \right) \tag{28}$$

Zadatak 5. Za dani $n \in \mathbf{N}$, odredite domenu kompozicije:

$$f_n(x) = \overbrace{\frac{1}{x+1} \circ \frac{1}{x+1} \circ \cdots \circ \frac{1}{x+1}}^{n \text{ članova}} \tag{29}$$

Unutar kojeg intervala su izolirane sve točke izbačene iz domene kompozicije za $n \to \infty$?

Kao i u zadatku 1, krenut ćemo s ispisivanjem kompozicija za nekoliko prvih vrijednosti n te pokušati uočiti pravilnost, ako postoji:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{x+1} &&\Longrightarrow x_1 \neq -1 \\
f_2(x) = \frac{1}{x+1} \circ f_1(x) &= \frac{x+1}{x+2} &&\Longrightarrow x_2 \neq -2 \\
f_3(x) = \frac{1}{x+1} \circ f_2(x) &= \frac{x+2}{2x+3} &&\Longrightarrow x_3 \neq -\frac{3}{2} \\
f_4(x) = \frac{1}{x+1} \circ f_3(x) &= \frac{2x+3}{3x+5} &&\Longrightarrow x_4 \neq -\frac{5}{3} \\
f_5(x) = \frac{1}{x+1} \circ f_4(x) &= \frac{3x+5}{5x+8} &&\Longrightarrow x_5 \neq -\frac{8}{5}
\end{aligned} \tag{30}$$

Index n pod x_n označava da se radi o n-toj izbačenoj točki. Obratimo pozornost na brojeve koji se pojavljuju:

$$1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Mnogi će u ovome nizu prepoznati Fibonaccijeve brojeve! Za $n > 1$, pojedini Fibonnacijev broj F_n definiran je zbrojem prethodnih dvaju, uz odgovarajuće početne vrijednosti:

$$\begin{aligned} &F_0 = 0 \quad \text{i} \quad F_1 = 1 \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n > 1\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Jednom kad smo naslutili da imamo posla s Fibonaccijevim brojevima, pažljivo namještamo indekse kako bismo rekonstruirali prvih nekoliko primjera iz (30):

$$f_n(x) = \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_n x + F_{n+1}} \implies x_n \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}\,. \tag{32}$$

Na ovoj razini prethodno poopćenje još uvijek je samo slutnja koju tek treba dokazati. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom:

I. Baza indukcije: Pokazujemo da (32) vrijedi za $n = 1$:

$$f_1(x) = \frac{F_0 x + F_1}{F_1 x + F_2} = \frac{0 \cdot x + 1}{1 \cdot x + 1} = \frac{1}{x+1} \implies x_1 \neq -1\,. \tag{33}$$

Da je ovo istina, znamo iz (30).

II. Pretpostavka indukcije: Pretpostavljamo da za neki $n \geqslant 1$ vrijedi slutnja iz (32).

III. Korak indukcije: Pokazujemo da ako pretpostavka indukcije vrijedi za n, tada vrijedi i za $n+1$:

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x+1} \circ f_n(x) = \frac{1}{x+1} \circ \frac{F_{n-1}x + F_n}{F_n x + F_{n+1}} = \frac{F_n x + F_{n+1}}{(F_n + F_{n-1})x + (F_{n+1} + F_n)}\,. \tag{34}$$

Sada koristimo definicijsko svojstvo Fibbonacijevih brojeva iz (31) kako bismo članove iz nazivnika sveli na:

$$f_{n+1}(x) = \frac{F_n x + F_{n+1}}{F_{n+1}x + F_{n+2}} = \frac{F_{(n+1)-1}x + F_{(n+1)}}{F_{(n+1)}x + F_{(n+1)+1}}\,. \tag{35}$$

Dakle, pokazali smo da izraz za $f_{n+1}(x)$ ima isti oblik kao i izraz za $f_n(x)$. Nadalje, $x_{n+1} \neq -\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$. Time je dokaz indukcijom završen.

Konačno, zaključujemo da smo izgradnjom n-te kompozicije f_n kao u (30), iz njene domene izbacili skup od n točaka $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, stoga pišemo:

$$\mathcal{D}(f_n) = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \left\{ -\frac{F_{k+1}}{F_k} \right\}. \tag{36}$$

Za sve Fibonaccijeve brojeve vrijedi $F_{n+1} \geqslant F_n$, što je očito iz same definicije (31). Prema tome: $F_{n+1}/F_n \geqslant 1$ (gdje uzimamo $n \geqslant 1$), što za sve izbačene točke povlači: $x_n \leqslant -1$. S druge strane, za $n \geqslant 1$ također vrijedi[7]: $F_{n+1} \leqslant 2F_n$, odnosno $F_{n+1}/F_n \leqslant 2$. Odavde, pak, za sve izbačene točke vrijedi: $x_n \geqslant -2$. Prema tome, sve točke izbačene iz domene kompozicije $f_n(x)$ izolirane su unutar intervala $[-2, -1]$.

---

[7] Uvrštavanjem izraza za $(n-1)$-i Fibonaccijev broj ($F_{n-1} = F_n - F_{n-2}$) iz definicije n-tog, u definiciju $(n+1)$-og broja ($F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$), slijedi: $F_{n+1} = 2F_n - F_{n-2}$. Kako za svaki Fibonaccijev broj – ovdje posebno za F_{n-2} – vrijedi $F_n \geqslant 0$ (pri čemu one s negativnim indeksom smatramo 0), zaključujemo: $F_{n+1} \leqslant 2F_n$.