Primljen: 10.12.2018. Stručni rad

Prihvaćen: 17.04.2019. UDK:511.14

Kompleksni brojevi u Gaussovoj ravnini

Complex Numbers in the Complex Plane

[1]Marina Tevčić, [2]Marijana Špoljarić, [3]Marin Maras

[1, 3]Veleučilište u Karlovcu, J.J. Strossmayera, Karlovac

[2]Visoka škola za menadžment u turizmu i informatici u Virovitici, Matije Gupca 78, Virovitica

E-mail: [1]marina.tevcic@vuka.hr, [2]marijana.spoljaric@vsmti.hr, [3]marin.maras@vuka.hr

Sažetak: *Kompleksni brojevi sve do početka 19. stoljeća nisu prihvaćeni kao ravnopravni ostalim brojevima. Danas ne možemo ni zamisliti izradu matematičkoga modela, kojim se opisuju različite pojave u prirodnim i/ili tehničkim znanostima, bez primjene kompleksnih brojeva. U ovom je radu definiran imaginarni i kompleksni broj, dana je njihova geometrijska interpretacija u Gaussovoj ravnini. Koristeći algebarski prikaz kompleksnoga broja opisane su osnovne računske operacije, a pomoću trigonometrijskoga prikaza kompleksnoga broja, uz množenje i dijeljenje, pojašnjene su operacije potenciranja i korjenovanja.*

Ključni pojmovi: *algebarski oblik kompleksnoga broja, Gaussova ravnina, imaginarna jedinica, kompleksni broj, računske operacije s kompleksnim brojevima, trigonometrijski oblik kompleksnoga broja*

Abstract: *Complex numbers were not accepted as equal to other numbers until the beginning of the 19th century. Today we cannot even imagine the creation of a mathematical model describing different phenomena in natural and/or technical sciences without the application of complex numbers. In this paper imaginary and complex numbers are defined by giving their geometric interpretation in the complex plane. Using the algebraic representation of the complex number, the basic arithmetic operations are described, and using the* *trigonometric representation of the complex number, alongside multiplication and division, exponentiation and inverse exponentiation are explained.*

Key words: *algebraic form of a complex number, complex number, complex numerical computation, complex plane, imaginary unit, trigonometric form of a complex number*

1.Uvod

Iako se smatra da je starogrčki matematičar Heron (oko 10.-70.) prvi koji je primijetio imaginarne brojeve, o kompleksnim brojevima više se govori tek u 16. stoljeću (Cardano, Bombelli). U početku su imali uporište u zahtjevu za rješivost određenih jednadžbi za koje se zna da nemaju rješenje u području realnih brojeva. Realne brojeve se moglo povezati sa stvarnim procesima mjerenja, a imali su i oslonac u praktičnom ljudskom iskustvu. Svaka se dva realna broja mogu usporediti po veličini dok za kompleksne brojeve to nije slučaj. Stoga kompleksne brojeve dugo, čak ni matematičari, nisu smatrali "pravim" brojevima. Ovakav stav o kompleksnim brojevima zadržao se sve do objave znanstvenih radova švicarskoga matematičara i astronoma Leonharda Eulera (1707.-1783.) te njemačkoga Carla Friedrich Gaussa (1777.-1855.) u kojima su postavili temelje teorije kompleksnih brojeva. Iako su nastali s ciljem rješavanja postojećih problema unutar same matematike, vrijeme je pokazalo da su kompleksni brojevi, kao i svi drugi brojevi, alat za opisivanje svijeta. Kompleksni brojevi služe u izgradnji matematičkih modela za opis stvarnih pojava u različitim područjima prirodnih i tehničkih znanosti, primjerice u astronomiji, elektrotehnici, mehanici i hidrodinamici.

2.Pojam kompleksnoga broja

Rješenja jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ nisu realni brojevi jer kvadrat realnoga broja ne može biti negativan broj. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ proširujemo do skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ tako da vrijedi:

1. skup $\mathbb{R}$ sadržan je u skupu $\mathbb{C}$,
2. skup $\mathbb{C}$ sadrži rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$,
3. u skupu $\mathbb{C}$ definirane su operacije zbrajanja i množenja koje imaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ je broj sa svojstvom $x^2 = -1$, označavamo ga oznakom i $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ te nazivamo imaginarnom jedinicom.

Primijetimo da rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 4 = 0$ možemo zapisati u obliku:

$$x = \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i \cdot (\pm 2) = \pm 2i.$$

Broj oblika ib ili bi, gdje je b realni broj, a i imaginarna jedinica, zovemo imaginarnim brojem.

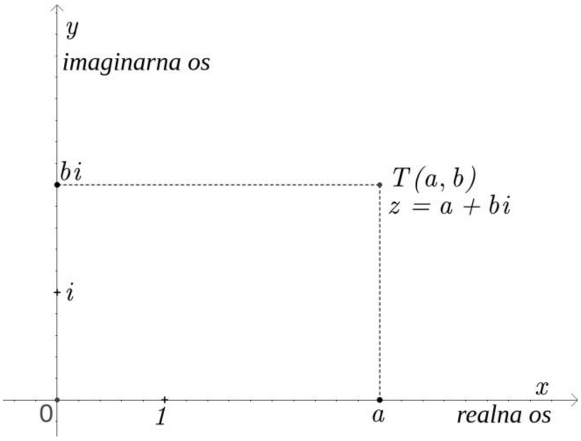
Kvadratnu jednadžbu $(x-5)^2 + 4 = 0$ možemo zapisati kao $x - 5 = \sqrt{-4}$, pa su njena rješenja brojevi oblika:

$$x = 5 + \sqrt{-4} = 5 + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 5 + i \cdot (\pm 2) = 5 \pm 2i.$$

Brojeve oblika $a + ib$, gdje su a i b realni brojevi, a i imaginarna jedinica, zovemo kompleksnim brojevima. Za oznaku kompleksnoga broja možemo koristiti samo jedno slovo z. U zapisu $z = a + bi$, broj a zovemo realni, a broj b imaginarni dio tog kompleksnoga broja. Za označavanje realnoga i imaginarnoga dijela kompleksnoga broja $z = a + bi$ koriste se i oznake: $a = Rez$, $b = Imz$. Ispis kompleksnoga broja z u obliku $z = a + bi$ nazivamo algebarski ili standardni prikaz tog kompleksnoga broja.

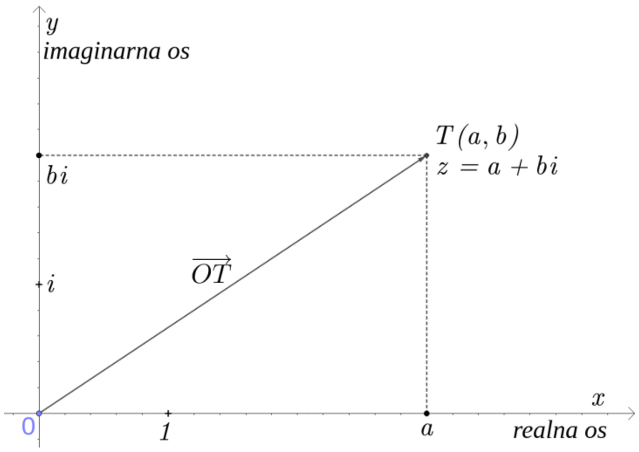
Svakom realnom broju a na brojevnom pravcu pridružena je odgovarajuća točka. Geometrijska interpretacija kompleksnoga broja temelji se na činjenici da se svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ odgovara uređen par realnih brojeva (a, b). Stoga je prirodno komplesnom broju $z = a + bi$ pridružiti točku $T(a, b)$ u Kartezijev<om koordinatnom sustavu. Na taj način, svakom kompleksnom broju odgovara točno jedna točka ravnine, i obrnuto. Os Ox nazivamo realna os, na njoj se prikazuje realni dio kompleksnoga broja. Os Oy, na kojoj se prikazuje imaginarni dio kompleksnoga broja, se naziva imaginarna os. Tako opisana ravnina zove se kompleksna ili Gaussova ravnina.

Primijetimo, točke na realnoj osi su oblika $a = a + 0i$, to su realni brojevi. Njima je u kompleksnoj ravnini pridružen uređeni par $(a, 0)$. S druge strane, imaginarni se brojevi $bi = 0 + bi$ u kompleksnoj ravnini predočavaju uređenim parom $(0, b)$ i crtaju na imaginarnoj osi.



Slika 1. Prikaz kompleksnoga broja $z = a + bi$ u Gaussovoj ravnini

Osim, kao točke u Gaussovoj ravnini, kompleksni brojevi mogu se prikazati i u obliku vektora. Povučemo li spojnicu od ishodišta do točke $T(a, b)$ koja odgovara kompleksnom broju $z = a + bi$ dobijemo radij-vektor $\overrightarrow{OT}$. Taj vektor možemo shvatiti kao geometrijskog reprezentanta kompleksnoga broja $z = a + bi$. Predočavanje kompleksnih brojeva vektorima olakšava grafičko predstavljanje osnovnih algebarskih operacija s kompleksnim brojevima.



Slika 2. Prikaz kompleksnog broja $z = a + bi$ u obliku vektora

3.Potencije imaginarne jedinice

Temeljno svojstvo kompleksnoga broja i je da kvadriranjem daje realni broj -1, pa vrijedi:

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Imaginarna jedinica i je kompleksan broj kojem je realni dio jednak 0, a imaginarni dio jednak 1, pa ga možemo zapisati u obliku:

$$z = 0 + 1 \cdot i = i.$$

Iz ovog zapisa imaginarne jedinice može se zaključiti da se u kompleksnoj ravnini imaginarna jedinica nalazi na imaginarnoj osi, odnosno kompleksnom broju $z = i$ pridružujemo uređeni par $(0,1)$.

Rotiranjem točke $(0,1)$ za $90°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu dobivamo točku $(-1, 0)$, odnosno $z = -1$. Rotacija za $90°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu predstavlja množenje s i, odnosno

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

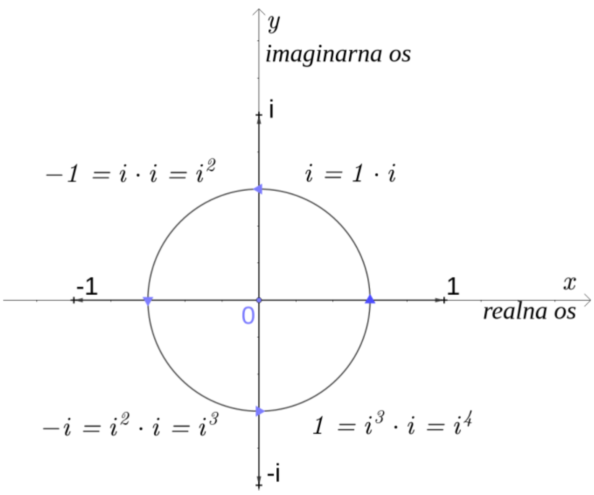
Rotiranjem točke $(0,1)$ za $180°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu dobivamo točku $(0, -1)$, odnosno $z = -i$. Rotacija za $180°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu predstavlja množenje s i^2, odnosno

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i.$$

Rotiranjem točke $(0,1)$ za $270°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu dobivamo točku $(1,0)$, odnosno $z = 1$. Rotacija za $270°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu predstavlja množenje s i^3, odnosno

$$i^4 = i \cdot i^3 = i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1.$$

Na sličan način može se definirati množenje s $-i$, kao rotacija točke $(0,1)$ za $90°$ u smjeru kazaljke na satu, pa rotacijom točke $(0,1)$ dobivamo točku $(1,0)$, tj. vrijedi: $i \cdot (-i) = -i^2 = -(-1) = 1$.



Slika 3. Prikaz imaginarne jedinice u kompleksnoj ravnini

Dakle, $i^0 = 1, i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ i^6 = -1,$ itd. Daljnje se potencije periodički ponavljaju. Naime, svaki se prirodni broj n može zapisati u obliku $n = 4k + r$, gdje je r ostatak pri dijeljenju s 4, $r \in \{0,1,2,3\}$, što dalje povlači:

$$i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

Izračunavanje potencija imaginarne jedinice temelji se na izračunavanja ostatka prilikom dijeljenja eksponenta s brojem 4, stoga vrijedi:

$$i^{4k} = 1,$$

$$i^{4k+1} = i,$$

$$i^{4k+2} = -1,$$

$$i^{4k+3} = -i.$$

Primijetimo, jednadžbu $x^4 - 1 = 0$ možemo preko potencija imaginarne jedinice, koristeći osnovni teorem algebre, napisati u obliku:

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x^2 - 1) \cdot \left(x^2 - (-1)\right)$$

$$= (x^2 - 1) \cdot (x^2 - i^2)$$

$$= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i).$$

4.Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definirane su računske operacije zbrajanja i množenja te vrijede sva pravila algebarskog računa naslijeđena iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

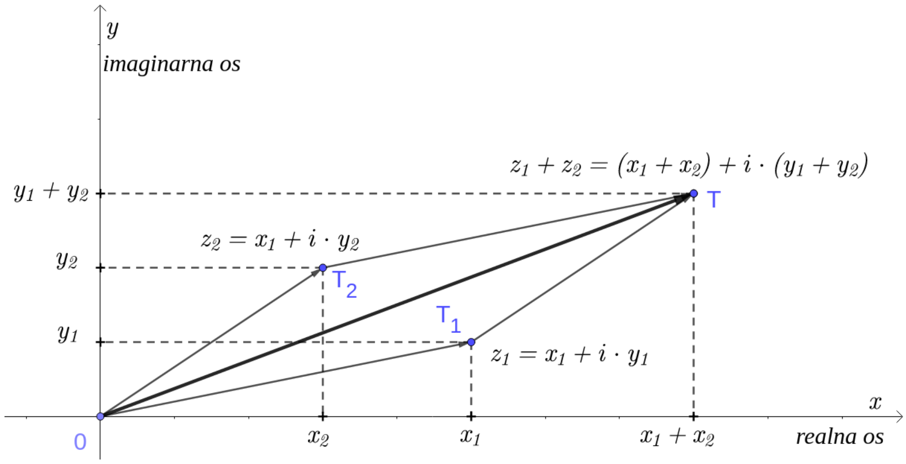
Neka su $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ bilo koja dva kompleksna broja. Za kompleksne brojeve z_1 i z_2 kažemo da su jednaki ako i samo ako vrijedi:

1. realni dio kompleksnoga broja z_1 jednak realnom dijelu broja z_2, tj. $x_1 = x_2$,
2. imaginarni dio kompleksnoga broja z_1 jednak imaginarnom dijelu kompleksnoga broja z_2, tj. $y_1 = y_2$.

Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove. Ako su $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ bilo koja dva kompleksna broja, tada je njihov zbroj:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Zbrajanje dvaju kompleksnih brojeva $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ geometrijski se može predočiti kao vektorsko zbrajanje pripadajućih radij-vektora $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{OT_2}$, gdje su $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ točke u kompleksnoj ravnini koje predstavljaju zadane kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Vektore zbrajamo po zakonu paralelograma ili po zakonu trokuta (nadovezivanje jednog vektora na drugi) kao što je ilustrirano na Slici 4.



Slika 4. Zbrajanje kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini

Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijede zakoni:

1. Komutacije

   $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

2. Asocijacije

   $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$

Dokaz: Neka su $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ tri proizvoljno odabrana kompleksna broja. Tada vrijedi:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

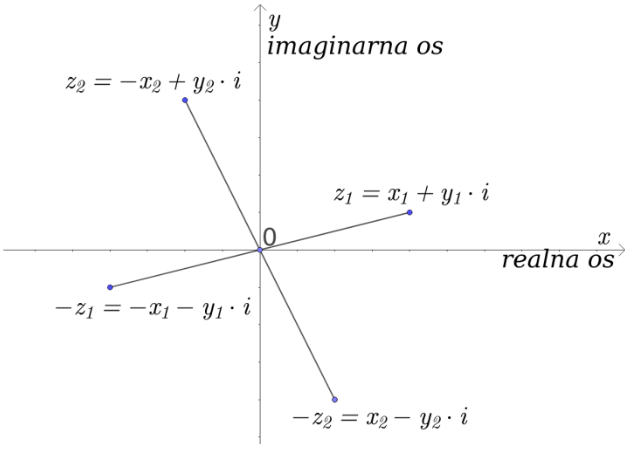
$$= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1) + [(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)]$$

$$= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 + x_3 + iy_3$$
$$= [(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] + (x_3 + iy_3)$$
$$= (z_1 + z_2) + z_3.$$

Neka je $z = x + yi$ po volji odabrani kompleksni broj. Tada postoji samo jedan kompleksan broj $-z$ takav da vrijedi:

$$z + (-z) = -z + z = 0.$$

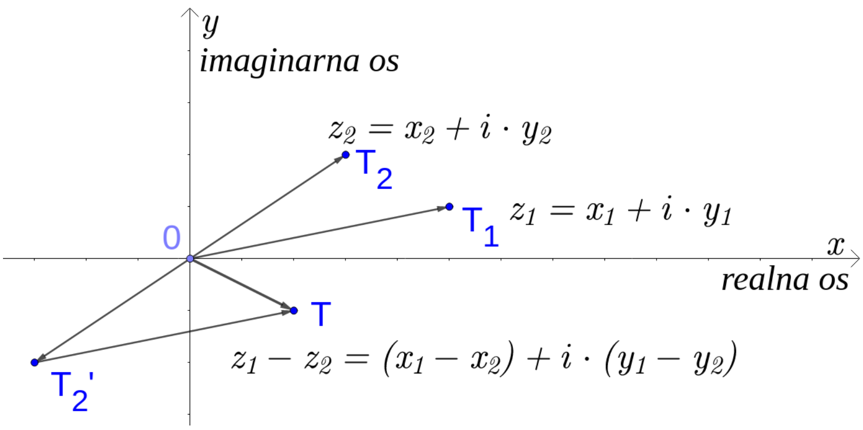


Slika 5. Suprotan broj kompleksnih brojeva $z_1 = x_1 + y_1\, i, z_2 = -x_2 + y_2\, i$

Broj $-z$ dobiva se iz broja z tako da se promijeni predznak i realnoga i imaginarnoga dijela kompleksnoga broja z, tj. $-z = -x - yi$, nazivamo ga suprotan broj komplesnom broju z. U kompleksnoj ravnini suprotni broj kompleksnoga broja $z = x + yi$ je centralnosimetričan s obzirom na ishodište kompleksne ravnine.

Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ dva kompleksna broja. Oduzimanje kompleksnoga broja z_2 od kompleksnoga broja z_1 definira se kao pribrajanje suprotnoga broja $-z_2$ kompleksnom broju z_1, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2) = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \end{aligned}$$



Slika 6. Oduzimanje kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini

Neka su $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ proizvoljno odabrana dva kompleksna broja, a $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ točke u kompleksnoj ravnini koje opisuju zadane kompleksne brojeve. Geometrijska interpretacija oduzimanja kompleksnih brojeva temelji se na pravilu za oduzimanje vektora (pribrajanju suprotnog vektora).

$$\overrightarrow{OT_1} - \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_1} + \left(-\overrightarrow{OT_2}\right) = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_2O} = \overrightarrow{T_2O} + \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{T_2T_1}.$$

Na Slici 6 vektoru $\overrightarrow{T_2T_1}$ odgovara vektor $\overrightarrow{OT}$ (jednaki su).

Množenje komplesnog broja $z = x + yi$ nekim skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$ podrazumijeva množenje kako realnoga dijela x, tako i imaginarnoga dijela y tog broja skalarom α, tj. $\alpha \cdot z = \alpha \cdot (x + yi) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot yi$.

U Gaussovoj ravnini, umnožak $\alpha \cdot z$ može se prikazati kao novi vektor koji je dobiven množenjem vektora $\overrightarrow{OT}$ (radij-vektora koji predstavlja kompleksni broj z) skalarom $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukoliko je skalar broj koji je po apsolutnoj vrijednosti veći od 1, modul novoga vektora se povećava, a ukoliko je skalar broj iz intervala $\langle 0,1 \rangle$ modul vektora se smanjuje. Biranjem skalara $\alpha < 0$, vektor $\overrightarrow{OT}$ mijenja orjentaciju.

Množenjem po volji odabranoga kompleksnoga broja $z = x + yi$ imaginarnom jedinicom i, u Gaussovoj ravnini podrazumijeva rotaciju tog kompleksnoga broja za 90^0 u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Vrijedi:

$$z \cdot i = (x + yi) \cdot i = xi + yi^2 = xi + y \cdot (-1) = -y + xi.$$

Rotacija broja z za $180°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu predstavlja množenje i^2, pa dobivamo:

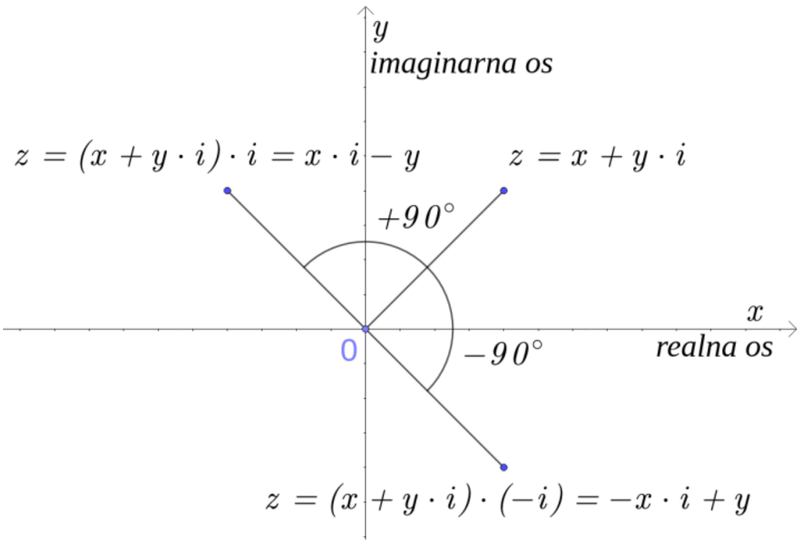
$$z \cdot i^2 = (x + yi) \cdot i^2 = xi^2 + yi^3 = x \cdot (-1) + y \cdot (-i) = -x - yi.$$

Rotacija broja z za $270°$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu predstavlja množenje s i^3, stoga vrijedi:

$$z \cdot i^3 = (x + yi) \cdot i^3 = xi^3 + yi^4 = x \cdot (-i) + y \cdot 1 = y - xi.$$

Rotacija kompleksnoga broja z za $90°$ u smjeru kazaljke na satu podrazumijeva množenje s $(-i)$, pa dobivamo:

$$z \cdot (-i) = (x + yi) \cdot (-i) = -xi - yi^2 = -xi - y \cdot (-1) = y - xi.$$



Slika 7. Množenje kompleksnih brojeva s imaginarnim brojem u kompleksnoj ravnini

Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ bilo koja po volji odabrana kompleksna broja. Umnožak dvaju kompleksnih brojeve z_1 i z_2 definiramo na sljedeći način:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Primjenjujući zakon distribucije koji je naslijeđen iz skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ može se primijetiti da izrečena definicija zaista vrijedi:

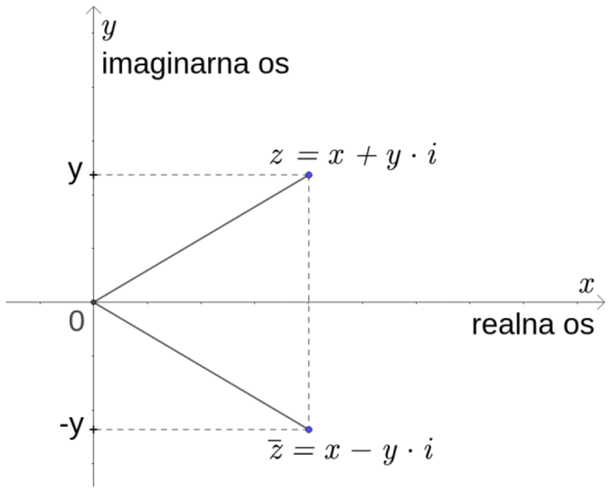
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

čime je pokazano da vrijedi formula kojom je definirano množenje dvaju kompleksnih brojeva z_1 i z_2.

5.Dijeljenje kompleksnih brojeva

Kompleksan broj $x - yi$ naziva se konjugirano kompleksnim brojem broja $x + yi$. Konjugirano kompleksni broj od $z = x + yi$ označava se sa $\overline{z}$, tj. $\overline{z} = x - yi$. Kažemo da brojevi z i $\overline{z}$ čine par kompleksno konjugiranih brojeva. Razlikuju se samo u predznaku imaginarnoga dijela.



Slika 8. Prikaz para kompleksno konjugiranih brojeva u Gaussovoj ravnini

U Gaussovoj ravnini konjugirano kompleksni brojevi su simetrični s obzirom na realnu os. Oni imaju isti realni dio, ali suprotan imaginarni dio, odnosno konjugirani broj ili „imaginarna refleksija“ ima suprotan kut.

Kompleksno konjugiranje ima sljedeća svojstva:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Dokaz: Neka su $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ po volji odabrani kompleksni brojevi. Tada vrijedi:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)}$$

$$= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)$$

$$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)}$$

$$= \overline{x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 i^2}$$

$$= \overline{x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2}$$

$$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 - x_1y_2i - y_1x_2i$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2i^2 - x_1y_2i - y_1x_2i$$

$$= x_1(x_2 - y_2i) - y_1i(x_2 - y_2i)$$

$$= (x_1 - y_1i) \cdot (x_2 - y_2i)$$

$$= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Neka su $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, $(z_2 \neq 0)$ po volji odabrani kompleksni brojevi. Operacija dijeljenja dvaju kompleksnih brojeva definira se na sljedeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} \cdot \frac{x_2 - y_2i}{x_2 - y_2i}$$

$$= \frac{x_1x_2 - x_1y_2i + y_1x_2i - y_1y_2i^2}{x_2^2 - y_2^2i^2}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 - y_2^2i^2}$$

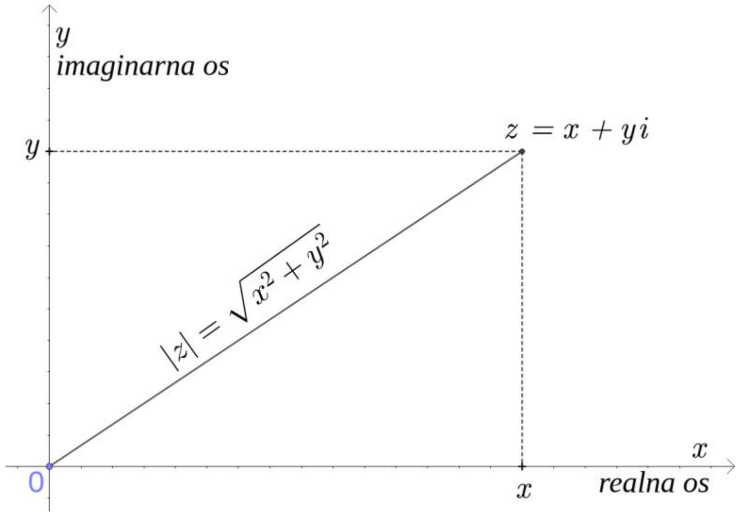
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Primijetimo da za umnožak para kompleksno konjugiranih brojeva vrijedi:

$$z \cdot \overline{z} = (\,x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

Modul ili apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja $z = x + yi$ definira se formulom:

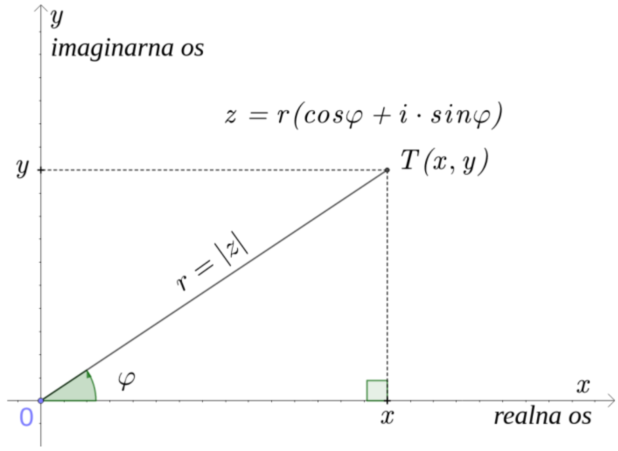
$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Rez)^2 + (Imz)^2}.$$



Slika 9. Modulom kompleksnog broja $z = x + yi$ u kompleksnoj ravnini

6.Trigonometrijski prikaz kompleksnoga broja

Zapis kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku olakšava definiranje i provođenje operacija množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva.



Slika 10. Pravokutan trokut za izvođenje veze među koordinatama

Svakoj točki T u Kartezijevom koordinatnom sustavu pripadaju pravokutne koordinate (x, y). Njen položaj u Gaussovoj ravnini može se odrediti i pomoću sljedeća dva podatka:

1. udaljenosti r točke T od ishodišta 0,
2. kuta φ što ga spojnica OT zatvara s pozitivnim dijelom x-osi.

Pomoću tih dvaju podataka možemo kompleksan broj $z = x + yi$, pri čemu je $z \neq 0$, grafički predočiti u polarnom koordinatnom sustavu[1]. Neka je $T(x, y)$ točka kompleksne ravnine koja odgovara broju $z = x + yi$. Polarne koordinate kompleksnog broja z su (r, φ), gdje je:

1. r, udaljenost točke $T(x, y)$ od ishodišta koordinatnog sustava, odnosno modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z,
2. φ, kut što ga zatvara pozitivni dio osi x i zraka na kojoj se nalazi dužina OT, nazivamo ga argument kompleksnog broja i označavamo: $\varphi = \arg z\,, \varphi \in [0, 2\pi\rangle$.

Argument kompleksnog broja, φ, nije jednoznačno određen. Naime, svakom kutu φ možemo dodati višekratnik broja 2π i dobiti jednak kompleksan broj.

$$\arg z=\varphi+2k\pi,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

Vezu između Kartezijevih pravokutnih (x, y) koordinata i polarnih koordinata (r, φ) nalazimo primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta. Prema Slici 10. vidimo da vrijedi:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \varphi.$$

Uvrštavajući u formulu za algebarski prikaz komplesnog broja dobivamo:

$$z = x + yi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Prikaz kompleksnog broja z u obliku $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazivamo trigonometrijski prikaz kompleksnoga broja z.

Primjetimo da je udaljenost r jednaka modulu kompleksnog broja z. Primjenom Pitagorinoga poučka (Slika 10) dolazimo do relacije:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Argument kompleksnog broja, kut φ, pronalazimo primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta (Slika 10):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

---

[1] Točki T u polarnom sustavu pripadaju polarne koordinate (r, φ) gdje je r udaljenost točke T od pola O ($r = |\overrightarrow{OT}|$), a φ polarni kut – kut između pravca OT i polarne osi (pozitivnog dijela x-osi). Polarni kut smatramo pozitivnim kada ga brojimo suprotno gibanju kazaljke na satu.

Trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva naglašava činjenicu da su i realni i imaginarni brojevi posebni slučajevi kompleksnih brojeva. Realni broj je broj kojemu je imaginaran dio jednak nula, odnosno $y = 0$. U Gaussovoj ravnini oni se nalaze na realnoj osi (os apscisa), a točke kojima su prikazani su oblika $T(x, 0)$. U trigonometrijskom obliku pozitivni realni brojevi imaju argument $\varphi = 0$, a negativni $\varphi = \pi$. Imaginarni broj je broj kojemu je realni dio jednak nula, odnosno $x = 0$. U Gaussovoj ravnini oni se nalaze na imaginarnoj osi (os ordinata), a točke kojima su predočeni su oblika $T(0, y)$. U trigonometrijskom obliku pozitivni imaginarni brojevi imaju argument $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a negativni $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Tablica 1 sadrži formule koje olakšavaju izračun argumenta, kuta φ, te pretvorbu kompleksnoga broja iz algebarskoga u trigonometrijski zapis. Iz tablice je vidljivo da argument kompleksnoga broja koji se nalazi u prvom kvadrantu $(x, y > 0)$ računamo koristeći formulu:

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Argumente kompleksnih brojeva koji se nalaze u drugom, trećem ili četvrtom kvadrantu računamo tako da izračunamo pripadajući kut φ_0 u prvom kvadrantu (za koji su $x, y > 0$).

$$\varphi_0 = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nakon toga kut φ izražavamo pomoću kuta φ_0:

1. ukoliko se kompleksan broj nalazi u II kvadrantu kut φ računamo po formuli $\varphi = \pi - \varphi_0$,
2. ukoliko se kompleksan broj nalazi u III kvadrantu kut φ računamo po formuli $\varphi = \pi + \varphi_0$,
3. ukoliko se kompleksan broj nalazi u IV kvadrantu kut φ računamo po formuli $\varphi = 2\pi - \varphi_0$.

Položaj kompleksnog broja	**Oblik kompleksnog broja $x, y > 0$**	**Argument (radijani)**	$0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{tg}\,\varphi_0 > 0$	
Pozitivni dio realne osi	$z = x$	$\varphi = 0$	$\mathrm{tg}\,\varphi = 0$	$\varphi_0 = 0$

I kvadrant	$z = x + yi$	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_0 > 0$	$\varphi = \varphi_0$
Pozitivni dio imaginarne osi	$z = yi$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{tg}\varphi \to \pm\infty$	$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$
II kvadrant	$z = -x + yi$	$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\operatorname{tg}\varphi$ $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\operatorname{tg}(\pi - \varphi_0)$	$\varphi = \pi - \varphi_0$
Negativni dio realne osi	$z = -x$	$\varphi = \pi$	$\operatorname{tg}\varphi = 0$	$\varphi_0 = \pi$
III kvadrant	$z = -x - yi$	$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}\varphi$ $\operatorname{tg}\varphi_0 = \operatorname{tg}(\pi + \varphi_0)$	$\varphi = \pi + \varphi_0$
Negativni dio imaginarne osi	$z = -yi$	$\varphi = \frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{tg}\varphi \to \pm\infty$	$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$
IV kvadrant	$z = x - yi$	$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$	$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\operatorname{tg}\varphi$ $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\operatorname{tg}(2\pi - \varphi_0)$	$\varphi = 2\pi - \varphi_0$

Tablica 1. Računanje argumenta kompleksnog broja $z = x + yi$ po kvadrantima

Koristeći trigonometrijski zapis kompleksnoga broja, ponovno ćemo definirati operacije množenja i dijeljenja kompleksnih brojeva te uvesti pravila za njihovo potenciranje i korjenovanje.

Izaberimo dva kompleksna broja i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Za operacije množenja i dijeljenja dva kompleksna broja vrijede formule:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Dokaz:

Iz adicijskih formula[2] za trigonometrijske funkcije dobivamo:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

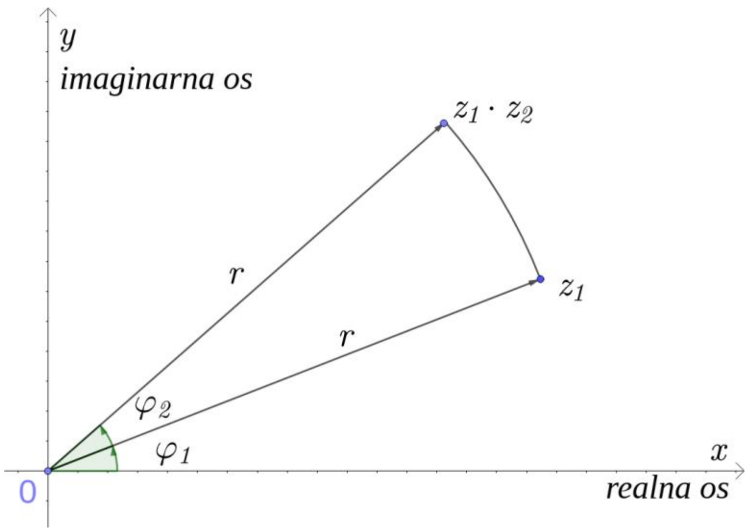
Korištenjem adicijskih formula[3] za trigonometrijske funkcije te osnovnoga identiteta trigonometrije[4], dobivamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \cdot \frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 - i^2\sin^2\varphi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$



Slika 11. Množenje dva kompleksna broja ako su moduli $|z_1| = r$, $|z_2| = 1$

[2] $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$
$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2$

[3] $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$
$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2$

[4] $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

Kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku množe se tako da se pomnože moduli, a argumenti zbroje. Tvrdnja vrijedi ne samo za slučaj kad se produkt sastoji od dva faktora (kompleksna broja), već i za bilo koji broj faktora. Dva se kompleksna broja dijele tako da se moduli podijele, a argumenti oduzmu.

Neka su $z_1 = r \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dva kompleksna broja modula $|z_1| = r,\ |z_2| = 1$. U Gaussovoj ravnini njihov umnožak odgovara rotaciji broja z_1 oko ishodišta za kut φ_2 u pozitivnom smjeru (Slika 11). Modul umnoška jednak je modulu od z_1, a argument umnoška jednak je zbroju argumenata od z_1 i z_2.

$$z_1 \cdot z_2 = r \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

7.Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Neka je $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ proizvoljno odabran kompleksni broj. Iz formule za umnožak dobivamo:

$$z \cdot z = r \cdot r \cdot [\cos(\varphi + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi)]$$

$$z^2 = r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Pravilo za potenciranje kompleksnoga broja prirodnim brojem n prirodno se može izvesti iz pravila za produkt n jednakih faktora:

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Tvrdnja se može dokazati i primjenom matematičke indukcije.

Baza indukcije: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^1 = r^1(\cos 1\varphi + i\sin 1\varphi)$.

Pretpostavka indukcije: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$

Korak indukcije:

$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{k+1} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^k \cdot r(\cos 1\varphi + i\sin 1\varphi)$

$= r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \cdot r^1(\cos 1\varphi + i\sin 1\varphi)$

$= r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= r^{k+1}(\cos k\varphi \cos \varphi + i \cos \varphi \sin \varphi + i \sin k\varphi \cos \varphi + i^2 \sin k\varphi \sin \varphi)$

$= r^{k+1}[(\cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi) + i(\sin k\varphi \cos \varphi + \cos k\varphi \sin \varphi)]$

$= r^{k+1}[\cos(k\varphi + \varphi) + i \sin(k\varphi + \varphi)]$

$= r^{k+1}[\cos(k + 1)\varphi + i \sin(k + 1)\varphi]$.

Dokazano je pravilo: kompleksan se broj potencira prirodnim brojem n tako da se modul potencira, a argument pomnoži s tim brojem.

Za $r = 1$ dobivamo de Moivreovu[5] formulu:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Kompleksni broj $w = \rho(\cos \psi + i\ \sin \psi)$ nazivamo n-ti korijen $(n \in \mathbb{N})$ zadanog kompleksnog broja $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ako je $w^n = z$.

Uvrštavajući u formulu za potenciju kompleksnoga broja

$$\rho^n(\cos n\psi + i\ \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

uspoređivanjem lijeve i desne strane jednakosti dobivamo:

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},$$

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$

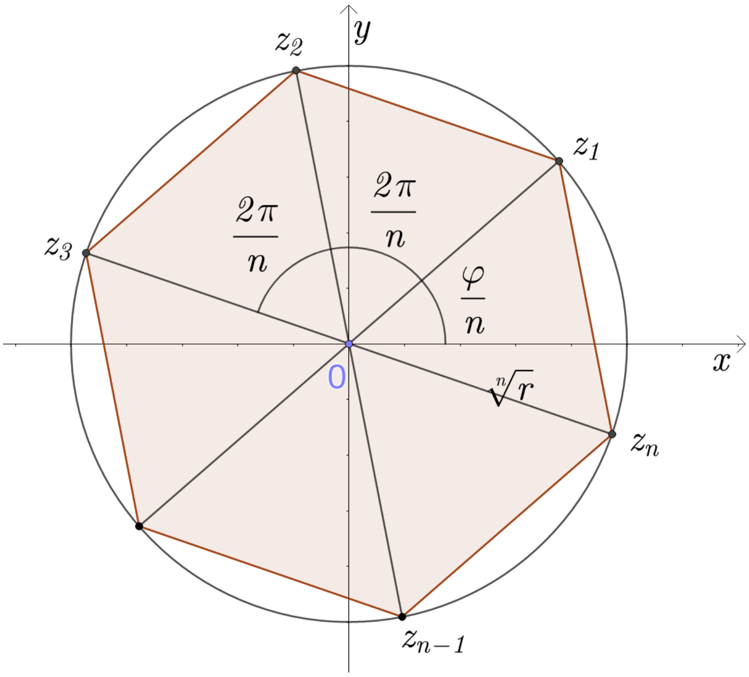
odnosno

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2, \dots, n-1.$$

Postoji točno n različitih vrijednosti n-tog korijena za koje vrijedi:

1. n-ti korijeni imaju isti modul $\sqrt[n]{r}$, svi ti brojevi leže na kružnici sa središtem u ishodištu radijusa $\sqrt[n]{r}$, oni su vrhovi upisanog pravilnog n-terokuta,
2. „prvi“ korijen na toj kružnici ima argument $\frac{\varphi}{n}$ (to je glavna vrijednost n-tog korijena), a ostale korijene dobivamo da tom kutu dodajemo po redu višekratnike od $\frac{2\pi}{n}$.

[5] Abraham de Moivre (1667.-1754.), francuski matematičar



Slika 12. Vrijednosti n-tog korijena kompleksnog broja

Primjer

Računske operacije s kompleksnim brojevima ilustrirat ćemo na primjeru: neka su $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = \sqrt{3} + i$. Treba izračunati: $z_1 + 2z_3$, $3z_1 - z_3$, $z_2 \cdot z_4$, $\frac{z_2}{z_3}$ koristeći algebarski zapis kompleksnih brojeva,te $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$ i $\sqrt[3]{z_3}$ koristeći trigonometrijski zapis kompleksnih brojeva.

Rješenje:

$$z_1 + 2z_3 = 1 + i + 2(1 - i) = 1 + i + 2 - 2i = 3 - i$$

$$3z_1 - z_3 = 3(1 + i) - (1 - i) = 3 + 3i - 1 + i = 2 + 4i$$

$$z_2 \cdot z_4 = \left(1 - i\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + i\right) = \sqrt{3} + i - i\sqrt{3}\sqrt{3} - i^2\sqrt{3}$$

$$= \left(\sqrt{3} + \sqrt{3}\right) + i(1 - 3) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{1\text{-i}\sqrt{3}}{1\text{-i}} = \frac{1\text{-i}\sqrt{3}}{1\text{-i}} \cdot \frac{1\text{+i}}{1\text{+i}} = \frac{1 + i - i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3}}{1 - i^2}$$

$$= \frac{\left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(1 - \sqrt{3}\right)}{1 + 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

U trigonometrijskom obliku su:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z_3 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$z_4 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4}[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4)]$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0) = 1\cdot(1 + i\cdot 0) = 1$$

$$\sqrt[3]{z_3} = \sqrt[3]{1 - i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$\sqrt[3]{z_3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), k = 0,1,2$$

$$(z_3)_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 105° + i\sin 105°)$$

$$(z_3)_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 225° + i\sin 225°)$$

$$(z_3)_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 345° + i\sin 345°)$$

8.Zaključak

Ovaj je rad namijenjen učenicima srednjih škola te studentima stručnih studija kao dodatni izvor za utvrđivanje i nadopunu znanja o kompleksnim brojevima. Uveden je pojam imaginarne jedinice, dana definicija kompleksnoga broja, definiran prikaz kompleksnoga broja u algebarskom i trigonometrijskom zapisu. Za dva kompleksna broja prikazana u algebarskom obliku opisane su operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Zapis kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku olakšao je izvođenje operacija dijeljenja, množenja, potenciranja i korjenovanja kompleksnih brojeva. Dana je geometrijska interpretacija kompleksnoga broja u Gaussovoj ravnini.

Literatura

[1] Aglić Aljinović, A. i dr. (2014). Matematika 1, Zagreb, Element.

[2] Blanuša, D. (1965). Viša matematika, I dio, Zagreb, Tehnička knjiga.

[3] Dakić, B., Elezović, N. (2001). Matematika 4, udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije, Zagreb, Element.

[4] Elezović, N. (2017). Kompleksna analiza, Zagreb, Element.

[5] Elezović, N. (2000). Kompleksni brojevi, Zagreb, Element.

[6] Gusić, I. (1995.) Matematički rječnik, Element, Zagreb, Element.

[7] Jukić, D.; Scitovski, R. (2017). Matematika I, Osijek, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku.

[8] Pauše, Ž. (2007). Matematika i zdrav razum, Zagreb, Školska knjiga.

[9] Pauše, Ž. (2003). Matematički priručnik 1, Zagreb, Školska knjiga.

[10] Hrvatska enciklopedija. http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=33043 (20.03.2018.)

[11] Math world. http://mathworld.wolfram.com (20.03.2018.)

[12] Better explained. https://betterexplained.com/articles/understanding-why-complex-multiplication-works (20.03.2018.)