O fiksnim točkama osnovnih trigonometrijskih funkcija

MATEA JELČIĆ[1], KRISTINA IVANKIĆ[2], MIRELA KATIĆ ŽLEPALO[3] I BOJAN KOVAČIĆ[4]

Sažetak

U ovom članku razmatramo fiksne točke četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija: sinus, kosinus, tangens i kotangens. Za svaku pojedinu funkciju određujemo ukupan broj fiksnih točaka, te navodimo njihove točne vrijednosti (ako postoje), odnosno njihove približne vrijednosti izračunane metodom raspolavljanja. Komentirat ćemo i povezanost tih vrijednosti s arkus funkcijama.

1. Uvod

U ovom ćemo članku razmatrati egzistenciju i jedinstvenost fiksnih točaka osnovnih trigonometrijskih funkcija: sin x, cos x, tg x i ctg x. Prvo podsjetimo na definiciju fiksne točke realne funkcije jedne realne varijable.

Definicija 1. Neka su $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$. *Fiksna točka* funkcije f je svaki $x \in X$ za koji vrijedi jednakost $f(x) = x$.

Primjer 1. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana pravilom $f(x) = x^2$. Fiksne točke funkcije f su realna rješenja jednadžbe $x^2 = x$. Lako se dobije $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Dakle, fiksne točke funkcije f su 0 i 1. Doista, $f(0) = 0^2 = 0$ i $f(1) = 1^2 =1$.

Primjer 2. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana pravilom $g(x) = x^2 + 1$. Fiksne točke funkcije g su realna rješenja jednadžbe $x^2 + 1 = x$. Međutim, iz $x^2 + 1 = x$ slijedi $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} \notin \mathbb{R}$. Stoga funkcija g nema fiksnih točaka.

[1]Matea Jelčić, studentica stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu
[2]Kristina Ivankić, studentica stručnoga studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu
[3]Mirela Katić Žlepalo, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb
[4]Bojan Kovačić, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb

Napomena 1. Ponekad se pogrešno previđa zahtjev da fiksna točka nužno mora pripadati prirodnom području definicije (domeni) funkcije f. Ako bismo u Primjeru 1. uzeli $X = \langle 0, +\infty \rangle$, onda bi funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x) = x^2$ imala točno jednu fiksnu točku $x_0 = 1$. Dakle, skup svih fiksnih točaka funkcije f je podskup skupa svih realnih rješenja jednadžbe $f(x) = x$, a o domeni funkcije f ovisi je li riječ o pravom podskupu ili su ta dva skupa jednaka.

Napomena 2. Ako dodatno pretpostavimo da je $f : X \to \mathbb{R}$ bijekcija, onda se skup fiksnih točaka funkcije f podudara sa skupom fiksnih točaka njezina inverza f^{-1}. Doista, ako je f bijekcija, onda je i f^{-1} bijekcija, pa je u tom slučaju jednakost $f(x) = x$ ekvivalentna jednakosti $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x)$, odnosno jednakosti $f^{-1}(x) = x$. Odatle slijedi tvrdnja ove napomene.

Iako nijedna od četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija nije bijekcija, njihove restrikcije na određene intervale jesu bijekcije, pa ćemo u tim slučajevima moći primijeniti Napomenu 2., odnosno odrediti fiksne točke funkcija arcsin x, arccos x, arctg x i arcctg x.

2. Pregled osnovnih svojstava osnovnih trigonometrijskih funkcija

Radi jednostavnosti i preglednosti, u sljedećoj tablici navodimo osnovna svojstva svake od četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija koja ćemo koristiti u kasnijem izlaganju.

Funkcija	*Domena*	*Slika*	*(Ne)parnost i periodičnost*	*Derivacija*
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	neparna i periodična	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	parna i periodična	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ (2\cdot k+1)\cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle (2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2},\ (2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \right\rangle$	$\mathbb{R}$	neparna i periodična	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{ k\cdot\pi : k \in \mathbb{Z} \} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\cdot\pi,\ (k+1)\cdot\pi \rangle$	$\mathbb{R}$	neparna i periodična	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Tablica 1. Osnovna svojstva četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija

3. Pregled korištenih poučaka

Radi preglednosti, u ovoj točki navodimo pregled poučaka korištenih u daljnjem izlaganju. Svi oni odnose se na realne funkcije jedne realne varijable. Čitatelje zainteresirane za dokaze Poučaka 1. – 5. upućujemo na literaturu [1] i [2].

Poučak 1. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada f ima barem jednu nultočku u intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poučak 2. Svaka od četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija neprekidna je na svojoj domeni.

Poučak 3. Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne na X. Tada su i funkcije $f + g$ i $f - g$ neprekidne na X.

Poučak 4. Svaka strogo monotona[5] realna funkcija je injekcija.

Poučak 5. Neka je f realna funkcija definirana i derivabilna na otvorenom intervalu $I = \langle a, b \rangle$.

a) Ako za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi $f'(x) < 0$, onda je f strogo padajuća na I.

b) Ako za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi $f'(x) > 0$, onda je f strogo rastuća na I.

Poučak 6. Neka su $f : X \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in X$. Definirajmo funkciju $g : X \to \mathbb{R}$ pravilom $g(x) = f(x) - x$. Tada je x_0 fiksna točka funkcije f ako i samo ako je x_0 nultočka funkcije g.

Dokaz: Izravno iz Definicije 1. ■

Poučak 7. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neparna funkcija. Tada je $x_0 \in X$ fiksna točka funkcije f ako i samo ako je $-x_0$ fiksna točka te funkcije f.

Dokaz: Budući da je f neparna funkcija, za svaki $x \in X$ vrijedi jednakost $f(-x) = -f(x)$. Posebno, za $x = x_0$ dobivamo:

$$f(-x_0) = -f(x_0). \tag{1}$$

Prema pretpostavci, x_0 je fiksna točka funkcije f, pa prema Definiciji 1. vrijedi jednakost

$$f(x_0) = x_0. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$f(-x_0) = -x_0,$$

pa zaključujemo da je $-x_0$ fiksna točka funkcije f. Obrat se dokazuje analogno. ■

[5] tj. strogo rastuća ili strogo padajuća

4. O fiksnim točkama funkcije sin(*x*)

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 8. Funkcija $f(x) = \sin x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$.

Budući da vrijedi jednakost sin 0 = 0, iz Definicije 1. odmah slijedi da je $x_0 = 0$ fiksna točka funkcije *f*. Stoga treba dokazati jedino jedinstvenost fiksne točke. Radi preglednosti, to ćemo učiniti nizom pomoćnih tvrdnji (lema).

Lema 1. Neka je x_1 bilo koja fiksna točka funkcije *f*. Tada je nužno $x_1 \in \langle -1, 1\rangle$.

Dokaz: Znamo da je slika funkcije *f* segment [−1, 1], odnosno da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $-1 \leq \sin x \leq 1$. Posebno, vrijedi nejednakost:

$$-1 \leq \sin x_1 \leq 1. \tag{3}$$

Prema pretpostavci, x_1 je fiksna točka funkcije *f*, pa vrijedi jednakost

$$\sin x_1 = x_1. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) zaključujemo da vrijedi nejednakost $-1 \leq x_1 \leq 1$, tj. $x_1 \in [-1, 1]$.

Primijetimo da vrijede nejednakosti $\sin 1 \neq 1$ i $\sin(-1) \neq -1$. One se, osim korištenjem kalkulatora, mogu provjeriti i ovako: skup svih rješenja jednadžbe $\sin x = 1$ je $S_1 = \left\{(4\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ako bi vrijedila relacija $1 \in S_1$, onda bi morao postojati $k\in\mathbb{Z}$ takav da je $\pi = \frac{2}{4\cdot k+1}$. No, odatle bi slijedilo da je $\pi\in\mathbb{Q}$, što proturječi činjenici da je π iracionalan broj. Dakle, $1 \notin S_1$. Analogno se može pokazati i da je $\sin(-1) \neq -1$.

Dakle, zaključujemo da je $x_1 \notin \{-1, 1\}$. Zbog toga mora vrijediti relacija $x_1 \in \langle -1, 1\rangle$ koju smo i željeli pokazati. ■

Lema 2. Definirajmo funkciju $f_1 : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ pravilom

$$f_1(x) = \sin x - x. \tag{5}$$

Funkcija f_1 je strogo padajuća na svojoj domeni.

Dokaz: Dokaz je najjednostavnije provesti koristeći diferencijalni račun. Vrijedi:

$$f_1'(x) = \cos x - 1. \tag{6}$$

Znamo da je slika funkcije cos *x* segment [−1, 1]. To znači da vrijedi nejednakost $-1 \leq \cos x \leq 1$, pa odatle slijedi:

$$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0,$$
$$-2 \leq f_1'(x) \leq 0$$

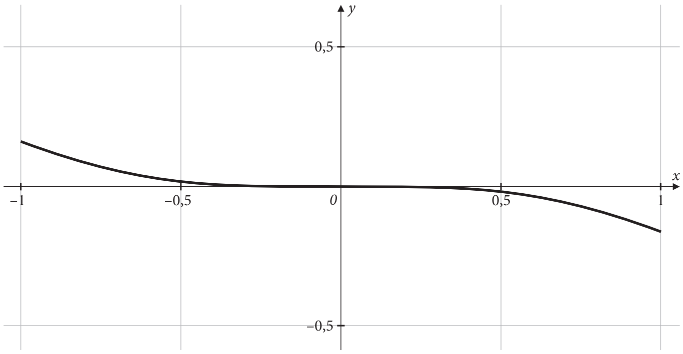
Sva rješenja jednadžbe $f_1'(x)=0$ tvore skup $S_2 = \{2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Jedini element toga skupa koji pripada intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ je $x_0 = 0$. To znači da za sve $x \in \langle -1, 1 \rangle$, takve da je $x \neq 0$, vrijedi nejednakost $f_1'(x) < 0$. Iz Poučka 5. a) slijedi da je funkcija f_1 strogo padajuća na otvorenim intervalima $\langle -1, 0 \rangle$ i $\langle 0, 1 \rangle$, odnosno na otvorenom intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. ■

Dokaz Poučka 8.: Primjenom Leme 2. i Poučka 4. zaključujemo da je funkcija $f_1(x) = \sin x - x$ injekcija na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Neka je x_1 bilo koja fiksna točka funkcije f. Iz Leme 1. slijedi $x_1 \in \langle -1, 1 \rangle$. Prema Poučku 6., x_1 i 0 su nultočke funkcije f_1, pa vrijedi jednakost $f_1(x_1) = f_1(0) = 0$. Prema definiciji injekcije mora vrijediti implikacija:

$$f_1(x_1) = f_1(0) \Rightarrow x_1 = 0 \tag{7}$$

Dakle, nužno mora biti $x_1 = 0$, a odatle slijedi jedinstvenost fiksne točke funkcije f. ■

Graf funkcije f_1 prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Graf funkcije f_1

Primjedba 1. Restrikcija $f_2 := f|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ je bijekcija. Budući da je $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, zaključujemo da je $x_0 = 0$ jedinstvena fiksna točka funkcije f_2. Prema Napomeni 2., $x_0 = 0$ je jedinstvena fiksna točka inverza funkcije f_2, a to je funkcija $f_3(x) = \arcsin x$.

Time je dokazan sljedeći poučak.

Poučak 9. Funkcija $f_3(x) = \arcsin x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$. ■

5. O fiksnim točkama funkcije cos(*x*)

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 10. Funkcija $g(x) = \cos x$ ima jedinstvenu fiksnu točku r. Taj broj je iracionalan.

Napomena 3. Fiksna točka iz Poučka 10 ponekad se naziva *Dottien broj*. Dottien broj r zapravo je transcendentan[6], a samim time i iracionalan. Dokaz te tvrdnje koristi Lindemann-Weierstrassov poučak i izlazi iz okvira ovoga članka. Stoga ćemo dokazati samo postojanje i jedinstvenost fiksne točke.

Kao i u točki 4., dokaz provodimo nizom lema.

Lema 3. Neka je x_1 bilo koja fiksna točka funkcije g. Tada je nužno $x_1 \in \langle -1, 1\rangle$.

Dokaz: Dokaz je potpuno analogan dokazu Leme 1. Prepuštamo ga čitatelju. ■

Lema 4. Definirajmo funkciju $g_1 : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$ pravilom

$$g_1(x) = \cos x - x.$$

Funkcija g_1 strogo je padajuća na svojoj domeni.

Dokaz: Dokaz je potpuno analogan dokazu Leme 2. Prepuštamo ga čitatelju. ■

Lema 5. Funkcija g_1 definirana u Lemi 4. je injekcija na svojoj domeni.

Dokaz: Izravno iz Leme 4. i Poučka 5 a). ■

Lema 6. Funkcija g_1 definirana u Lemi 4. ima barem jednu nultočku.

Dokaz: Primijetimo da vrijede relacije

$$0,\ \frac{\pi}{4} \in \left\langle -1,\ 1 \right\rangle \ \text{i} \ \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{9}}{4} > \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stoga je:

$$g_1(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0,$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{\ }}{2} - \frac{\pi}{4} < \quad .$$

Dakle, funkcija g_1 u krajevima segmenta $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right] \subset \left\langle -1,\ 1\right\rangle$ ima različite predznake. To znači da vrijedi nejednakost $g_1(0)\cdot g_1\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$.

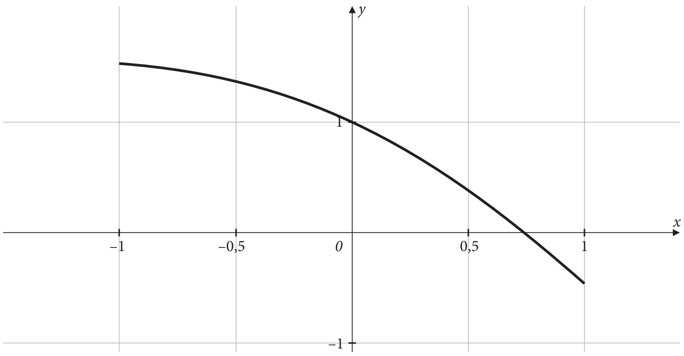
[6]Realan broj a je transcendentan ako ne postoji polinom P s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(a) = 0$. Tipični primjeri transcendentnih brojeva su π i e. Svaki transcendentni broj je iracionalan, ali obrat ne vrijedi (npr. $\sqrt{2}$ je iracionalan broj, ali ne i transcendentan jer za polinom $P(x) = x^2 - 2$ s cjelobrojnim koeficijentima očito vrijedi $P\left(\sqrt{2}\right) = 0$).

Budući da su funkcija g i identiteta $i(x) = x$ neprekidne funkcije na skupu $\mathbb{R}$, one su posebno neprekidne i na segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Primjenom Poučka 3. zaključujemo da je funkcija g_1 također neprekidna na tom segmentu.

Time smo provjerili da funkcija g_1 zadovoljava sve pretpostavke Poučka 1. Primjenom toga poučka zaključujemo da funkcija g_1 ima barem jednu nultočku u segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, a samim time i u intervalu $\langle -1, 1\rangle$. ■

Dokaz Poučka 10.: Postojanje fiksne točke izravno slijedi iz Poučka 6. i Leme 6. Jedinstvenost fiksne točke dokazuje se koristeći Lemu 5. analogno kao u dokazu Poučka 8. Detalje prepuštamo čitatelju. ■

Graf funkcije g_1 prikazan je na Slici 2.



Slika 2. Graf funkcije $g_1(x) = \cos x - x$

Primjedba 2. Iz dokaza Leme 6. i iskaza Poučka 10. zaključujemo da vrijednost r iz iskaza Poučka 10. pripada segmentu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Budući da je $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset [0, \pi]$, posebno vrijedi i $r \in [0, \pi]$. Restrikcija $g_2 := g|_{[0,\pi]}$ je bijekcija i njezin je inverz funkcija $g_3(x) = \arccos x$. Iz Napomene 2. zaključujemo da je r ujedno i fiksna točka funkcije g_3. Time je dokazan sljedeći poučak.

Poučak 11. Funkcija $g_3(x) = \arccos x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = r$. ■

Napomenuli smo da je točna vrijednost veličine r transcendentan, pa posebno i iracionalan broj, što znači da tu vrijednost možemo samo približno izračunati. Za približan izračun vrijednosti veličine r koristit ćemo *metodu raspolavljanja*. Ta se metoda zapravo zasniva na Poučku 1., a – grubo govoreći – ideja je određivati sve manje i manje intervale u kojima se nalazi nultočka neke funkcije. Čitatelja koji želi doznati više o metodi raspolavljanja upućujemo na literaturu [3].

Pretpostavimo da primjenom metode raspolavljanja želimo izračunati približnu vrijednost veličine r s točnošću od 10^{-3}. Prema dokazu Leme 6., ta vrijednost pripada intervalu $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$. Budući da je $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398163$, za početni interval (segment) uzimamo [0, 0.8]. Najveći potreban broj iteracija određujemo kao najmanje prirodno rješenje nejednadžbe

$$n \geq \frac{\log(0.8-0)-\log\left(10^{-3}\right)}{\log 2}-1=\frac{\log 0.8+3}{\log 2}-1 \approx 8.643856 .$$

Dakle, trebamo provesti najviše n = 9 iteracija. Dobivamo:

Iteracija	a	b	x	$g_1(x)$
0	0	0.8	0.4	0.521060994
1	0.4	0.8	0.6	0.225335615
2	0.6	0.8	0.7	0.064842187
3	0.7	0.8	0.75	-0.018311131
4	0.7	0.75	0.725	0.023499422
5	0.725	0.75	0.7375	0.002651969
6	0.7375	0.75	0.74375	-0.007815207
7	0.7375	0.74375	0.740625	-0.002578015
8	0.7375	0.740625	0.7390625	0.0000379

Tablica 1. Određivanje fiksne točke funkcije $g(x) = \cos x$ metodom raspolavljanja

Prema tome, $r \approx 0.739$.

6. O fiksnim točkama funkcije tg(*x*)

U ovoj točki dokazujemo sljedeći poučak.

Poučak 12. Funkcija $h(x) = \operatorname{tg} x$ ima beskonačno mnogo međusobno različitih fiksnih točaka. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ funkcija h ima točno jednu fiksnu točku u intervalu $I_k := \left\langle (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2},\ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Primjedba 3. Zbog neparnosti funkcije h i Poučka 7. dovoljno je razmatrati samo nenegativne fiksne točke. Naime, sve strogo negativne fiksne točke dobiju se promjenom predznaka odgovarajuće strogo pozitivne fiksne točke.

Dokaz Poučka 12.: Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\lim_{x \to \left((2 \cdot k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)-} \operatorname{tg} x = +\infty,$$
$$\lim_{x \to \left((2 \cdot k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Definirajmo funkciju $h_1 : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \to \mathbb{R}$ pravilom $h_1(x) = \operatorname{tg} x - x$. Iz gornjih jednakosti slijedi da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \left((2 \cdot k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)-} h(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \to \left((2 \cdot k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)+} h(x) &= -\infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Odaberimo proizvoljan, ali fiksiran $k_0 \in \mathbb{Z}$. Iz činjenice da je identiteta neprekidna na cijelom skupu $\mathbb{R}$, pa posebno i na intervalu I_{k_0}, te Poučaka 2. i 3., zaključujemo da je funkcija h_1 neprekidna na intervalu I_{k_0}.

Iz jednakosti (8) slijedi da u intervalu I_{k_0} postoji barem jedan $a \in I_{k_0}$ takav da je $h_1(a) > 0$ i barem jedan $b \in I_{k_0}$ takav da je $h_1(b) < 0$. Iz zaključka da je funkcija h_1 neprekidna na intervalu I_{k_0} slijedi da je h neprekidna i na segmentu $[a, b]$.

Primjenom Poučka 1. zaključujemo da postoji barem jedna točka $x_{k_0} \in I_{k_0}$ takva da je $h_1(x_{k_0}) = 0$. Iz Poučka 6. slijedi da je x_{k_0} fiksna točka funkcije h.

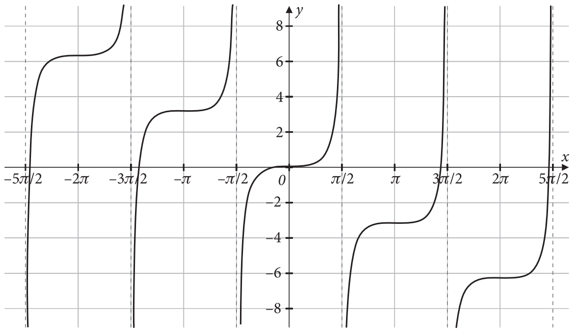
Nadalje, pokažimo da u intervalu I_{k_0} funkcija h ima točno jednu fiksnu točku. Već smo zaključili da je funkcija h_1 neprekidna na intervalu I_{k_0}. Njezina prva derivacija je:

$$h_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

U intervalu I_{k_0} jednadžba $h_1'(x) = 0$ ima jedinstveno rješenje $(x_s)_{k_0} = k_0 \cdot \pi$. Međutim, lako se vidi da za svaki $x \in I_{k_0} \setminus \left\{(x_s)_{k_0}\right\}$ vrijedi nejednakost $h_1'(x) > 0$. Primjenom Poučka 5.b) analogno kao u dokazu Leme 2. zaključujemo da je funkcija h_1 strogo rastuća na I_{k_0}. Željenu jedinstvenost potom dalje dokazujemo analogno kao u dokazu Poučka 8. Detalje prepuštamo čitatelju.

Tako smo dokazali da za svaki $k_0 \in \mathbb{Z}$ funkcija h ima jedinstvenu fiksnu točku u intervalu I_{k_0}. Odatle izravno slijede obje tvrdnje koje smo željeli dokazati. ■

Primjedba 4. Funkcija h_1 nije periodična funkcija pa sve strogo pozitivne fiksne točke funkcije h ne možemo izračunati dodavanjem nekoga perioda. Njezin je graf prikazan na Slici 3.



Slika 3. Graf funkcije $h_1(x) = \operatorname{tg} x - x$

Iz netom dokazanoga Poučka 12. posebno slijedi da funkcija h ima jedinstvenu fiksnu točku u intervalu $I_0 = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Lako je vidjeti da je ta fiksna točka $x_0 = 0$. Međutim, restrikcija $h_2 := h\,|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle}$ je bijekcija i njezin je inverz funkcija $h_3(x) = \operatorname{arctg} x$. Primjenom Napomene 2. dobivamo sljedeći poučak.

Poučak 13. Funkcija $h_3(x) = \operatorname{arctg} x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 = 0$. ■

Najmanju strogo pozitivnu fiksnu točku funkcije f odredit ćemo metodom raspolavljanja s točnošću od 10^{-3}. Ta se fiksna točka nalazi u intervalu $I_1 = \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2} \right\rangle$.

Budući da je $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ i $\frac{3\cdot\pi}{2} \approx 4.71$, za početni segment uzmimo $[a, b] = [1.6, 4.7]$. Najveći potreban broj iteracija je najmanje prirodno rješenje nejednadžbe

$$n \geq \frac{\log(4.7-1.6) - \log\left(10^{-3}\right)}{\log 2} - 1 = \frac{\log 3.1 + 3}{\log 2} - 1 \approx 10.6,$$

tj. $n = 11$. Dakle, trebamo provesti najviše $n = 11$ iteracija. Dobivamo sljedeću tablicu:

Iteracija	*a*	*b*	*x*	$h_1(x)$
0	1.6	4.7	3.15	−3.141592455
1	3.15	4.7	3.925	−2.928973728
2	3.925	4.7	4.3125	−1.946545294
3	4.3125	4.7	4.50625	0.275937641
4	4.3125	4.50625	4.409375	−1.21082562
5	4.409375	4.50625	4.4578125	−0.614947602
6	4.4578125	4.50625	4.48203125	−0.218015982

Iteracija	*a*	*b*	*x*	$h_1(x)$
7	4.48203125	4.50625	4.494140625	0.014813871
8	4.48203125	4.494140625	4.488085938	–0.10485133
9	4.488085938	4.494140625	4.491113281	–0.045864657
10	4.491113281	4.494140625	4.492626953	–0.015741246
11	4.492626953	4.494140625	4.493383789	–0.00051821

Tablica 2. Određivanje najmanje strogo pozitivne fiksne točke funkcije h(x) = tg x metodom raspolavljanja

Dakle, približna vrijednost najmanje strogo pozitivne fiksne točke funkcije h je $x_1 \approx 4.493$.

7. O fiksnim točkama funkcije ctg(x)

Za fiksne točke funkcije $p(x) = \operatorname{ctg} x$ vrijedi rezultat donekle „sličan” rezultatu za funkciju tangens. Preciznije, vrijedi sljedeći poučak.

Poučak 14. Funkcija $p(x) = \operatorname{ctg} x$ ima beskonačno mnogo različitih fiksnih točaka. Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ funkcija f ima točno jednu fiksnu točku u intervalu $J_k := \langle k\cdot\pi,\ (k+1)\cdot\pi\rangle$.

Primjedba 4. Zbog neparnosti funkcije p, činjenice da $x = 0$ ne pripada domeni funkcije p i Poučka 7., dovoljno je razmatrati samo strogo pozitivne fiksne točke. Naime, sve strogo negativne fiksne točke dobiju se promjenom predznaka odgovarajuće strogo pozitivne fiksne točke.

Dokaz Poučka 14.: Primijetimo da za svaki $l \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\lim_{x\to(l\cdot\pi)-} \operatorname{ctg} x = -\infty,$$
$$\lim_{x\to(l\cdot\pi)+} \operatorname{ctg} x = +\infty.$$

Definirajmo funkciju $p_1 : \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} J_k \to \mathbb{R}$ pravilom $p_1(x) = \operatorname{ctg} x - x$. Iz gornjih jednakosti slijedi da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(k\cdot\pi)-} p_1(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to(k\cdot\pi)+} p_1(x) &= +\infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Odaberimo proizvoljan, ali fiksiran $k_0 \in \mathbb{Z}$. Iz činjenice da je identiteta $i(x) = x$ neprekidna na skupu $\mathbb{R}$, pa posebno i na intervalu J_{k_0}, te Poučaka 2. i 3., zaključujemo da je funkcija p_1 neprekidna na intervalu J_{k_0}.

Iz jednakosti (9) slijedi da u intervalu J_{k_0} postoji barem jedan $a \in J_{k_0}$ takav da je $p_1(a) > 0$ i barem jedan $b \in J_{k_0}$ takav da je $p_1(b) > 0$. Iz zaključka da je funkcija p_1 neprekidna na intervalu J_{k_0} slijedi da je h neprekidna i na segmentu $[a, b]$.

Primjenom Poučka 1. zaključujemo da postoji barem jedna točka $x_{k_0} \in J_{k_0}$ takva da je $p_1(x_{k_0}) = 0$. Iz Poučka 6. slijedi da je x_{k_0} fiksna točka funkcije p.

Nadalje, pokažimo da u intervalu J_{k_0} funkcija p ima točno jednu fiksnu točku. Već smo zaključili da je funkcija p_1 neprekidna na intervalu J_{k_0}. Njezina prva derivacija je:

$$p_1'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Primijetimo da za svaki $x \in J_{k_0}$ vrijedi nejednakost $\sin x \neq 0$. Zbog toga za svaki $x \in J_{k_0}$ vrijedi nejednakost $\sin^2 x > 0$, a iz te nejednakosti slijedi

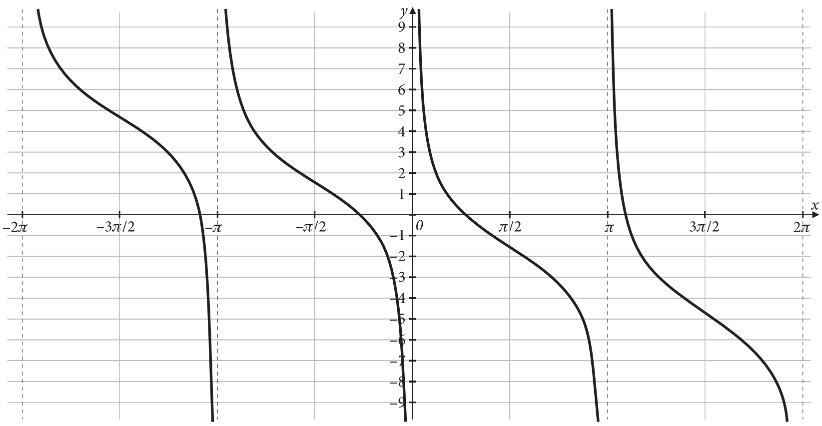
$$-\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < 0 - 1 = -1 < 0,$$

odnosno $p_1'(x) < 0$.

Primjenom Poučka 5.a) analogno kao u dokazu Leme 2. zaključujemo da je funkcija p_1 strogo padajuća na J_{k_0}. Željenu jedinstvenost potom dalje dokazujemo analogno kao u dokazu Poučka 8. Detalje prepuštamo čitatelju.

Tako smo dokazali da za svaki $k_0 \in \mathbb{Z}$ funkcija p ima jedinstvenu fiksnu točku u intervalu J_{k_0}. Odatle izravno slijede obje tvrdnje koje smo željeli dokazati. ■

Analogno kao i kod funkcije $\operatorname{tg} x$, zbog neperiodičnosti funkcije p_1 svaku fiksnu točku funkcije p potrebno je računati zasebno. Graf funkcije p_1 prikazan je na Slici 4.



Slika 4. Graf funkcije $p_1(x) = \operatorname{ctg} x - x$

Preostaje odrediti najmanju strogo pozitivnu fiksnu točku funkcije p s točnošću od 10^{-3}. Ta fiksna točka pripada intervalu $I_0 = \langle 0, \pi \rangle$.

Budući da je $\pi \approx 3.14$, za početni segment uzmimo $[a, b] = [0.1, 3.1]$. Najveći potreban broj iteracija je najmanje prirodno rješenje nejednadžbe

$$n \geq \frac{\log(3.1-0.1)-\log\left(10^{-3}\right)}{\log 2} - 1 = \frac{\log 3 + 3}{\log 2} - 1 \approx 10.551,$$

tj. $n = 11$. Dobiva se sljedeća tablica:

Iteracija	a	b	x	$p_1(x)$
0	0.1	3.1	1.6	−1.629211978
1	0.1	1.6	0.85	0.028477785
2	0.85	1.6	1.225	−0.86472803
3	0.85	1.225	1.0375	−0.447146451
4	0.85	1.0375	0.94375	−0.219149433
5	0.85	0.94375	0.896875	−0.098218289
6	0.85	0.896875	0.8734375	−0.035654061
7	0.85	0.8734375	0.86171875	−0.003792714
8	0.85	0.86171875	0.855859375	0.012290263
9	0.855859375	0.86171875	0.858789063	0.00423585
10	0.858789063	0.86171875	0.860253906	0.000218354

Tablica 3. Određivanje najmanje strogo pozitivne fiksne točke funkcije p(x) = ctg x metodom raspolavljanja

Dakle, približna vrijednost najmanje strogo pozitivne fiksne točke funkcije p iznosi $x_0 \approx 0.860$.

Primjedba: Restrikcija $p_2 := p\big|_{[0,\pi]}$ je bijekcija i njezin inverz je $p_3(x) = \operatorname{arcctg} x$. Primjenom Napomene 2. dobivamo sljedeći poučak.

Poučak 14. Funkcija $p_3(x) = \operatorname{arcctg} x$ ima jedinstvenu fiksnu točku $x_0 \approx 0.860$. ■

8. Zaključak

U nastavi matematičkih predmeta na tehničkim stručnim studijima uobičajeno se obrađuju osnovne trigonometrijske funkcije i njihovi inverzi, te se u vezi s njima rješavaju različite vrste jednadžbi. U ovom smo članku promatrali relativno jednostavne nealgebarske jednadžbe. Koristeći standardne rezultate diferencijalnoga računa, riješili smo probleme postojanja i jedinstvenosti rješenja tih jednadžbi. Time smo nastojali ukazati na važnost cjelovitoga razmatranja pojedinih vrsta nealgebarskih jednadžbi, a ne isključivo približnoga izračuna rješenja. Upravo cjelovito razmatranje i analizu pojedinih vrsta nealgebarskih jednadžbi studenti nerijetko doživljavaju kao „nepotrebno teorijsko razmatranje" koje se „praktički može preskočiti" (u smislu: „bitan je način, a ne teorija"). Ovim člankom nastojali smo dati još nekoliko konkretnih primjera i valjanih argumenata u prilog tezi da takva „preskakanja" idu nauštrb razumijevanja temeljnih postavki problema, što smatramo lošim i neprihvatljivim. Drugim riječima, smatramo da – i u „matematičkim" i u „nematematičkim" situacijama – jedino cjelovita kvalitetna analiza nekoga problema može dovesti do nalaženja kvalitetnoga rješenja.

Literatura

1. S. Kurepa: *Matematička analiza* 1 – *Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
2. S. Kurepa: *Matematička analiza* 2 – *Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
3. V. Hari: *Numerička analiza – osnovni udžbenik*, skripta, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2004.
4. R. Scitovski: *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek, 2004.
5. Eric W. Weisstein: *Dottie Number*, javno dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/DottieNumber.html (21. 9. 2015.)
6. Eric W. Weisstein: *Fixed Point*, javno dostupno na: http://mathworld.wolfram.com/FixedPoint.html (21. 9. 2015.)