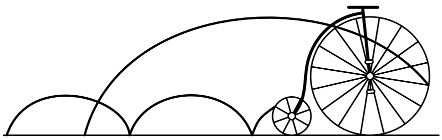
KOTRLJAJUĆE KRUŽNICE

Ivana Martinić, Supetar

Fascinacija matematičara kružnicom i krugom stara je koliko i sama povijest matematike. Nakon što su proučena brojna njihova svojstva, u 15. je stoljeću njemački matematičar **Nikola Kuzanski** zakotrljao kružnicu i pritom promatrao samo jednu njezinu točku. Nastala krivulja svoju je popularnost dočekala tek dvjestotinjak godina kasnije kada je prozvana *Helenom geometrije* zbog prepirki koje je uzrokovala, a sve zahvaljujući briljantnim svojstvima.

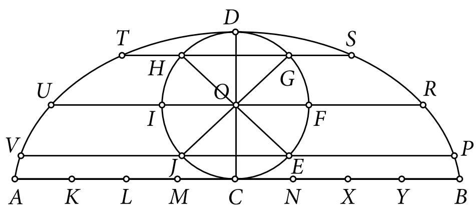
Zadatak: Pronađite nekakav okrugli predmet (npr. poklopac) i na vanjskoj kružnici označite jednu točku. Nacrtajte pravac na papiru i odredite početni položaj. Kotrljajte poklopac jednakom brzinom duž pravca i bilježite različite položaje označene točke. Što ih više ucrtate, to ćete lakše nacrtati krivulju spajanjem tih točaka. Nacrtanu krivulju nazivamo *cikloidom*.



Cikloida je ravninska krivulja koju opisuje fiksna točka kružnice dok se kružnica kotrlja po pravcu.

Ime toj zanimljivoj krivulji prvi je nadjenuo **Galileo Galilei** 1599. Pokušavao je doći do formule za površinu ispod luka cikloide, ali mu to nije uspijevalo. Zatim mu je sinula ideja da izradi modele cikloide i generirajućeg kruga od metala te ih izvaže. Tim je eksperimentom došao do zaključka da je masa cikloide jednaka trostrukoj masi kruga. Međutim, taj je rezultat Galileo odbacio zbog uvjerenja da omjer površine cikloide i kruga treba biti iracionalan broj.

Kako precizno nacrtati cikloidu? Nacrtajte pravac i na njemu točku C. Konstruirajte kružnicu sa središtem u točki O koja dira pravac u točki C. Točka D je centralnosimetrična točki C s obzirom na točku O i ona predstavlja tjeme cikloide. Dužinu $\overline{AB}$ dobivamo iz uvjeta da je njezina duljina jednaka opsegu kružnice i da je točka C njezino polovište. Primijetite da su A i B početna i krajnja točka cikloide. Podijelite kružnicu dužinama iz O na 8 sukladnih dijelova točkama E, F, G, D, H, I i J. Dužinu $\overline{AB}$ također podijelite na 8 dijelova točkama K, L, M, C, N, X i Y. Konstruirajte paralele s $\overline{AB}$ kroz točke E, F i G. Točka P cikloide nalazi se na pravcu JE, a duljina dužine $\overline{EP}$ jednaka je duljini dužine $\overline{NB}$. Točke R i S dobivaju se na analogan način, dok su točke V, U i T osnosimetrične točkama P, R i S s obzirom na pravac CD.



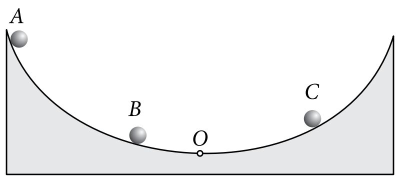
Zadatak: Provjerite je li Galileo bio u pravu! Konstruirajte cikloidu na papiru i izrežite nekoliko sukladnih krugova čija će površina biti jednaka krugu čijim je kotrljanjem nastala vaša cikloida. Te krugove izrežite na manje komadiće i pokušajte njima prekriti cikloidu. Možete li odrediti koliko je krugova bilo potrebno? Kolika je površina cikloide?

Zadatak: Pokušajte približno odrediti duljinu luka cikloide koristeći komad užeta. Izrazite tu duljinu preko polumjera kruga čijim je kotrljanjem nastala cikloida.

Mnogi su matematičari 17. stoljeća istraživali svojstva cikloide. Tako je **Roberval** 1628. izračunao površinu ispod luka cikloide koristeći se *Cavalierijevim principom*, a **Fermat** i **Descart** su u otprilike isto vrijeme došli do metode određivanja tangenti na cikloidi. **Blaise Pascal** svojedobno je odustao od studija matematike, želeći se posvetiti Bogu. Međutim, jedne večeri 1658. godine Pascala je mučila zubobolja pa je besanu noć proveo razmišljajući o čudnovatoj krivulji cikloidi. Bol je ubrzo nestala, što je on shvatio kao Božji znak i nastavio proučavati cikloidu cijeloga svog života. Uskoro je organizirao matematičko natjecanje i nudio novčane nagrade za otkrića njenih novih svojstava.

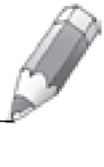
Jedno od njih pronašao je nizozemski matematičar, fizičar i astronom **Christiaan Huygens** koji je provodio vrijeme razmišljajući kako izgraditi što precizniji sat s njihalom. *Jednostavno matematičko njihalo* sastoji se od kuglice pričvršćene na uže u fiksnoj točki. Problem satova s takvim njihalima je u tome što period titranja nije jednak za sve otklone. Drugim riječima, period titranja njihala ne ovisi o kutu jedino ako je taj kut jako malen. Za sve ostale slučajeve postoji ovisnost perioda T i otklona njihala α koja je dana formulom:

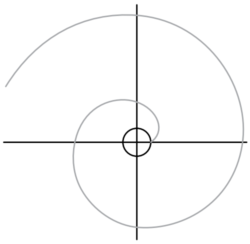
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$



Huygens je znao da treba pronaći krivulju sa svojstvom da spuštanjem tijela s bilo koje visine te krivulje - sva dođu u najnižu točku istovremeno. Godine 1659. pokazao je da je ta krivulja upravo cikloida. Taj je problem u povijesti znanosti poznat kao **problem izokrone** *(eng. tautochrone problem).* Ako pustimo više tijela, npr. kuglice, da se spuštaju niz padinu cikloide s različitih visina, sve će doći u najnižu točku krivulje u isto vrijeme. Na slici će kuglice A, B i C istodobno doći u točku O. Rješavanje problema izokrone tako postaje inspiracijom za njegov veliki izum - prvi sat s preciznim mehanizmom. Huygens pokušava dokučiti kako „natjerati" njihalo da oscilira po cikloidalnoj, umjesto kružnoj putanji.

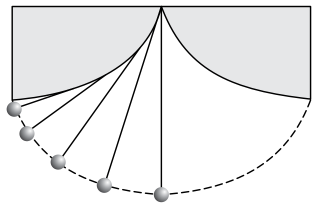
Zadatak: Pronađite okrugli poklopac ili nekakav drugi predmet čija je baza krug i prislonite ga na papir. Na vanjski rub poklopca zalijepite početak užeta koje ćete potom omotati oko poklopca. Na slobodan kraj užeta privežite olovku. Jednom rukom čvrsto držite poklopac, a drugom odmotavajte uže s





poklopca. Pritom pazite da olovka stalno bude na papiru pod jednakim kutom. Kakva je novonastala krivulja? Isprobajte i obrnuti postupak, tj. namotajte zategnuto uže oko poklopca.

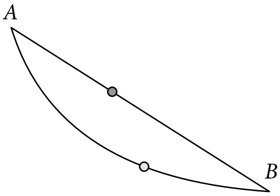
Evolventa krivulje (eng.*involute)* je krivulja dobivena tako što se na zadanu krivulju postavi zamišljeno zategnuto uže čiji se slobodni kraj prati dok se ono namotava po zadanoj krivulji ili, obratno, dok se odmotava po krivulji.



Huygens je prvi definirao pojam evolvente krivulje i pokazao da je evolventa cikloide također cikloida, i to potpuno sukladna početnoj! Zato je postavio njihalo između dva cikloidna poluluka s duljinom klatna koja odgovara duljini jedne polovice luka. Tako će se njihalo pomicati po cikloidi istog oblika i veličine, kao što je i cikloida sastavljena od dviju polovica lukova pa će trebati jednako vremena da njihalo dođe u položaj ravnoteže bez obzira na iznos amplitude! Studija o satu s njihalom kojim je bilo moguće precizno mjeriti longitudu u navigaciji objavljena je u djelu *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium 1673.*

Zadatak: Izradite cikloidu od kartona, izrežite je na dva sukladna dijela (vidi sliku iznad) i pomoću užeta postavljenog između dva cikloidna poluluka provjerite je li evolventa cikloide također cikloida.

Problem brahistrone (*grč. brachistos*: najkraći, *chronos*: vrijeme)



Kakav treba biti oblik putanje da bi tijelo, prolazeći između dva položaja *A* i *B*, taj put prešlo u najkraćem mogućem vremenu? Vjerojatno biste prvo pomislili na dužinu, kao najkraću spojnicu dviju točaka. Galileo je pak smatrao da je četvrtina kružnice bolji izbor i dokazao kako je vrijeme spuštanja tijela manje nego za dužinu. Također je izračunao da je nagib od 45° najučinkovitiji. Ali to nije najbrži put! Rješenje je, već pogađate, cikloida. Problem brahistrone prvi je riješio **Johann Bernoulli** 1696. godine. Do istog su otkrića nešto kasnije došli i **L'Hopital**, **Leibniz** i **Newton** kojemu je trebalo manje od dana da dođe do odgovora.

Cikloida je našla primjenu u različitim područjima. Njen oblik nalazi se na svodovima, lukovima mostova, zupčanicima, skijaškim skakaonicama i bob stazama. U muzeju u Hopkintonu nalazi se klavir iz 19. stoljeća čija površina oponaša oblik cikloide. Njegov tvorac **Harry Lindeman** dao mu je ime *Cycloid Grand.*