STUDENTSKA RUBRIKA

Usporedba kvantitativnih efekata klasičnih modela otplate zajma

BOJAN KOVAČIĆ* BOJAN RADIŠIĆ †

Sažetak. *U radu se (uz uvjet ceteris paribus) uspoređuju kvantitativni efekti najčešćih "klasičnih" modela otplate zajma: model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima i model otplate zajma promjenjivim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama. Koristeći metode i tehnike diferencijalnoga računa dokazuje se da, sa stajališta dužnika, model otplate zajma promjenjivim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama općenito nije lošiji od modela otplate zajma nominalno jednakim anuitetima.*

Ključne riječi: *kvantitativni efekti, model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima, model otplate zajma promjenjivim anutitetima s jednakim otplatnim kvotama*

Comparison of the quantitative effects of classical model of loan

Abstract. *Assuming that condition ceteris paribus stands, the article is comparing the quantitative effects of the most common "classic" loan repayment models: loan repayment model with nominally equal installments and loan repayment model with variable installments and nominally equal repayment quotas. Using the metods and techniques of calculus, it is proven that, from the standpoint of a borrower, loan repayment model with variable installments and nominally equal repayment quotas is not worse than loan repayment model with nominally equal installments.*

Key words: *quantitative effects, loan repayment model with nominally equal installments, loan repayment model with variable installments and nominally equal repayment quotas*

1. Uvod

Jedan od karakterističnih načina pribavljanja financijskih sredstava potrebnih za određena ulaganja u suvremeno je doba uzimanje zajma. Zajam se može isplatiti

*Tehničko veleučilište, Vrbik 8, HR-10 000 Zagreb, e-mail: bojan.kovacic@tvz.hr

†Veleučilište u Požegi, Vukovarska 17, e-mail: bradisic@vup.hr

odjednom ili u obrocima (tzv. transama), a vraća se pravilnim periodičnim plaćanjem iznosa koji se nazivaju obročne rate ili anuiteti. Svaki anuitet sastoji se od dva dijela: otplatne kvote, odnosno dijela kojim se vraća osnovni dug, te složenih kamata, odnosno dijela kojim se plaća naknada za korištenje ustupljenih financijskih sredstava.

U skladu s navedenim, za svaki se pojedini zajam sastavlja plan njegove otplate (amortizacije) kojim se pregledno prikazuju iznosi koje zajmoprimac treba platiti i rokovi dospijeća tih iznosa. Svaki plan otplate zajma sadrži sljedeće osnovne elemente:
C_0 - nominalni iznos odobrenoga zajma;
n - ukupan broj razdoblja otplate zajma;
p - nominalni kamatnjak za jedinično vremensko razdoblje;
a_k - iznos anuiteta plaćenoga u k - tom razdoblju otplate, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$;
I_k - iznos kamata u k - tom razdoblju otplate, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$;
R_k - iznos otplatne kvote u k - tom razdoblju otplate, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$;
C_k - ostatak duga nakon plaćanja anuiteta a_k, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pri sastavljanju plana otplate moguće je koristiti brojne različite modele otplate zajma koji se mogu svrstati u dvije temeljne grupe: modele s primarno danim anuitetima i modele s primarno danim otplatnim kvotama. Najčešće korišteni (tzv. *klasični*) modeli otplate zajma su:

1.) model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima;

2.) model otplate zajma promjenjivim anuitetima s nominalno jednakim otplatnim kvotama.

Oba navedena modela izgrađuju se uz sljedeće pretpostavke:

1.) obračun kamata je složen;

2.) anuiteti dospijevaju u jednakim vremenskim jedinicama krajem svakoga razdoblja;

3.) duljina elementarnoga razdoblja ukamaćivanja jednaka je duljini vremenskoga dospijeća između dva sukcesivna anuiteta i iznosi 1;

4.) nominalni kamatnjak je stalan u cijelom razdoblju otplate zajma, a razdoblje na koje se odnosi podudara se s elementarnim razdobljem ukamaćivanja.

Svaki model može se utemeljiti na dekurzivnom ili anticipativnom načinu obračuna kamata. Stoga ćemo razmatrati ukupno 4 *klasična* modela otplate zajma:

A. model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima uz složen i dekurzivan obračun kamata;

B. model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima uz složen i anticipativan obračun kamata;

C. model otplate zajma promjenjivim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama uz složen i dekurzivan obračun kamata;

D. model otplate zajma promjenjivim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama uz složen i anticipativan obračun kamata.

U ovom ćemo radu izvršiti usporedbu (uz uvjet *ceteris paribus*[1]) kvantitativnih efekata tih četiriju modela. Preciznije, uzimajući iste početne uvjete (iznos odobrenoga zajma, ukupan broj razdoblja otplate zajma i nominalni kamatnjak za jedinično vremensko razdoblje) usporedit ćemo nominalne iznose ukupnih kamata, odnosno nominalne iznose ukupnih dugova koje generiraju ti modeli. Pritom ćemo koristiti slijedeću pretpostavku:

Pretpostavka 1. Nominalna vrijednost kamatnjaka p može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj (ako se kamate obračunavaju dekurzivno), odnosno bilo koji realan broj iz intervala $\langle 0, 100\rangle$ (ako se kamate obračunavaju anticipativno[2]). U gospodarskoj je praksi nominalna vrijednost kamatnjaka p strogo pozitivan racionalan broj s konačnim decimalnim zapisom. Stoga naša pretpostavka obuhvaća i praktično neostvariv slučaj poput npr. $p = \pi$. Međutim, ta pretpostavka omogućuje konceptualno ispravnu primjenu metoda i tehnika diferencijalnoga računa koje će biti korištene u razmatranju.

Napomenimo da, iako u *klasične* modele otplate zajma pripada i model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima, taj model nećemo razmatrati. Naime, ako se zajam otplaćuje unaprijed dogovorenim anuitetima, onda ukupan broj svih anuiteta ovisi o nominalnom dogovornom iznosu anuiteta, pa se n u tom slučaju ne može tretirati kao proizvoljan, ali fiksiran prirodan broj. Time se narušava načelo *ceteris paribus*, pa je zbog toga spomenuti model izostavljen iz razmatranja.

2. Leme

Radi preglednosti i razumljivosti izlaganja, najprije ćemo iskazati i dokazati nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, ali fiksiran. Za svaki $x \in [1, +\infty\rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$(n-1) \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + (n+1) \cdot x - n + 1 \geq 0. \tag{1}$$

Dokaz. Lako se provjeri da za $n = 1$ u (1) vrijedi znak jednakosti (neovisno o vrijednosti varijable x). Stoga u nastavku pretpostavljamo da je $n \geq 2$. Promatramo realnu funkciju $f : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu formulom

$$f(x) = (n-1) \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + (n+1) \cdot x - n + 1. \tag{2}$$

Najprije ćemo dokazati da je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$. Prve dvije derivacije funkcije f su:

$$f'(x) = (n^2 - 1) \cdot x^n - (n^2 + n) \cdot x^{n-1} + n + 1; \tag{3}$$

[1] Lat.: uz nepromijenjene ostale uvjete.

[2] Anticipativan način obračuna kamata nije moguće primijeniti u slučaju $p \geq 100$. Detaljnije o tome može se vidjeti u [1] ili [2].

$$f''(x) = (n^3 - n) \cdot x^{n-1} - (n^3 - n) \cdot x^{n-2}. \tag{4}$$

Izraz (4) možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$f''(x) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot x^{n-2} \cdot (x-1). \tag{5}$$

Zbog pretpostavke $n \geq 2$, svaki od brojeva $n-1$, n i $n+1$ je strogo pozitivan. Za $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ strogo pozitivne su i veličine x^{n-2}, odnosno $x-1$, pa vrijedi stroga nejednakost

$$f''(x) > 0. \tag{6}$$

Odatle slijedi da je funkcija f' strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$, odnosno da vrijedi stroga nejednakost:

$$f'(x) > f'(1) = 0. \tag{7}$$

Zaključujemo da je i funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$, pa za svaki $x \in [1, +\infty \rangle$ vrijedi nejednakost

$$f(x) \geq f(1) = 0, \tag{8}$$

otkuda izravno slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati.

$\square$

Napomena 1. Označimo li:

$$g(x, n) = (n-1) \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + (n+1) \cdot x, \tag{9}$$

izraz (1) postaje:

$$g(x, n) - (n-1) \geq 0. \tag{10}$$

Analogno, izraz:

$$(n-1) \cdot x^{n+1} - (n+1) \cdot x^n + (n+1) \cdot x + n - 1 \geq 0 \tag{11}$$

postaje:

$$g(x, n) + (n-1) \geq 0. \tag{12}$$

Obzirom da je izraz (10) veći ili jednak nuli, a $n \geq 1$, jasno je da i izraz (12) mora biti veći ili jednak nuli.

Lema 2. *Za svaki $x \in \langle 0, 100 \rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{100}\right) + \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{100}\right) - \frac{x^2}{10000} > 0. \tag{13}$$

Dokaz. Definirajmo realnu funkciju $f : [0, 100\rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{100}\right) + \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{100}\right) - \frac{x^2}{10000}. \tag{14}$$

Očito je $f(0) = 0$. Pokažimo da f strogo raste na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$. Prve dvije derivacije su:

$$f'(x) = \frac{1}{5000} \cdot \left[50 \cdot \ln\left(\frac{100 + x}{100 - x}\right) - x\right] \tag{15}$$

$$f''(x) = \frac{x^2}{5000 \cdot (100 - x)(100 + x)}. \tag{16}$$

Za svaki $x \in \langle 0, 100 \rangle$ je očito $f''(x) > 0$, pa $f'(x)$ strogo raste na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$. Odatle slijedi da za svaki $x \in \langle 0, 100 \rangle$ vrijedi:

$$f'(x) > f'(0) = 0, \tag{17}$$

pa zaključujemo da funkcija f strogo raste na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$. Dakle, za svaki $x \in \langle 0, 100 \rangle$ vrijedi

$$f(x) > f(0) = 0, \tag{18}$$

a to je upravo tvrdnja leme.

□

Lema 3. *Neka je $p \in \langle 0, 100 \rangle$ proizvoljan, ali fiksiran. Za svaki $x \in [1, +\infty\rangle$ vrijedi nejednakost:*

$$(x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x - (x+1) \geq 0. \tag{19}$$

Dokaz. Definirajmo realnu funkciju $f : [1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) = (x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x - (x+1). \tag{20}$$

Očito je $f(1) = 0$. Pokažimo da je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$. Prve dvije derivacije te funkcije su:

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x + (x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ & + (x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ & + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) - 1 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = {} & (x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) + \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]^2 \\ & + 2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) + \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right] \\ & + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln^2\left(1 - \frac{p}{100}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Za svaki $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ i svaki $p \in \langle 0, 100 \rangle$ očito vrijede nejednakosti:

$$(x-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x \cdot \left[\ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) + \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right]^2 > 0 \tag{23}$$

i

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln^2\left(1+\frac{p}{100}\right)+\left(1-\frac{p}{100}\right)^x \cdot \ln^2\left(1-\frac{p}{100}\right)>0 \tag{24}$$

Jednostavno se može pokazati da je

$$f''(x)>0, \tag{25}$$

odakle slijedi da je funkcija $x \mapsto f'(x)$ strogo rastuća na intervalu $\langle 1,+\infty\rangle$, pa vrijedi nejednakost:

$$\begin{aligned} f'(x)>f'(1)=&\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)+\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)+\\ &+\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot\ln\left(1-\frac{p}{100}\right)-1=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)+\\ &+\left(1-\frac{p}{100}\right)\ln\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{p^2}{10000}. \end{aligned} \tag{26}$$

Iz Leme 2 slijedi da je desna strana posljednje nejednakosti strogo pozitivan realan broj, odnosno da za svaki $x \in \langle 1,+\infty\rangle$ vrijedi:

$$f'(x)>0. \tag{27}$$

Stoga je funkcija f strogo rastuća na intervalu $\langle 1,+\infty\rangle$, pa za svaki $x \in [1,+\infty\rangle$ vrijedi:

$$f(x) \geq f(1)=0. \tag{28}$$

Odatle izravno slijedi nejednakost (19).

□

3. Primjeri

Usporedbu kvantitativnih efekata modela **A**, **B**, **C** i **D** izvršit ćemo razmatrajući četiri općenita primjera i na kraju jedan konkretan primjer sa zadanim iznosima.

Primjer 1. *Neka su $n \in \mathbb{N}$, te $C_0, p \in \langle 0,+\infty\rangle$ proizvoljni, ali fiksirani. Zajmoprimac želi posuditi iznos od C_0 novčanih jedinica i u tu svrhu razmatra ponude dviju poslovnih banaka:*

Ponuda I. *Poslovna banka X nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n nominalno jednakih godišnjih anuiteta uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata.*

Ponuda II*. Poslovna banka Y nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n promjenjivih godišnjih anuiteta s jednakim otplatnim kvotama uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata.*

Ako zajmoprimac želi da nominalan iznos ukupnih kamata bude što manji, koja od navedenih ponuda je povoljnija za njega?

Budući da nominalan iznos svih anuiteta mora biti jednak zbroju nominalnoga iznosa odobrenoga zajma i nominalnoga iznosa ukupnih kamata, lako se vidi da je nominalan iznos ukupnih kamata minimalan ako i samo ako je nominalan iznos svih anuiteta minimalan. Stoga se problem minimizacije nominalnoga iznosa ukupnih kamata zamjenjuje ekvivalentnim problemom minimizacije nominalnoga iznosa svih anuiteta.

Treba napomenuti da u praksi duljina razdoblja na koje se odnosi nominalni kamatnjak p ne mora biti jednaka duljini razdoblja ukamaćivanja, pa tako npr. nominalni kamatnjak može biti godišnji, a ukamaćivanje mjesečno i sl. U takvim slučajevima nominalni kamatnjak najprije treba preračunati u odgovarajući relativni ili konformni kamatnjak, pa u izradbi plana otplate primjenjivati tako izračunani kamatnjak.

Radi pojednostavljivanja razmatranja, najprije ćemo izvesti zatvorene forme za izračunavanje nominalnoga iznosa svih anuiteta u svakoj pojedinoj ponudi. Neka je:

$$r := 1 + \frac{p}{100}.^{3} \tag{29}$$

Primijetimo da nejednakost $r > 1$, tj. $r \in \langle 1, +\infty \rangle$ vrijedi zbog nejednakosti:

$$1 + \frac{p}{100} > 1 > 1 - \frac{p}{100}, \tag{30}$$

za svaki $p \in \langle 0, +\infty \rangle$. Lako se pokaže da je nejednakost (30) ekvivalentna nejednakosti

$$p > 0 > -p, \tag{31}$$

a ta je nejednakost očito istinita za svaki $p \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Propozicija 1. *Nominalni iznos svih anuiteta u ponudi I. dan je izrazom:*

$$(a_{uk})_I = \frac{n \cdot r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C_0. \tag{32}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je iznos a svakoga od nominalno jednakih anuiteta dan izrazom:

$$a = \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C_0. \tag{33}$$

Izvodi formule (33) mogu se pronaći u [1] ili [2].

□

Propozicija 2. *Nominalni iznos svih anuiteta u ponudi II. dan je izrazom:*

$$(a_{uk})_{II} = \left[\frac{n+1}{2} \cdot (r-1) + 1\right] \cdot C_0. \tag{34}$$

Dokaz. Može se pokazati da je nominalan iznos ukupnih kamata u ponudi II. dan izrazom:

$$(I_{uk})_{II} = \frac{C_0 \cdot p \cdot (n+1)}{200}. \tag{35}$$

[3] Veličina r naziva se *dekurzivni kamatni faktor*.

Izvod formule (35) može se pronaći u [1]. Iz definicijske jednakosti (29) slijedi

$$p = 100 \cdot (r - 1), \tag{36}$$

pa formulu (35) možemo zapisati u obliku

$$(I_{uk})_{II} = \frac{C_0 \cdot (r-1) \cdot (n+1)}{2}, \tag{37}$$

Stoga je nominalan iznos svih anuiteta jednak

$$(a_{uk})_{II} = C_0 + (I_{uk})_{II} = C_0 + \frac{C_0 \cdot (r-1) \cdot (n+1)}{2}, \tag{38}$$

a odatle slijedi (34).

□

Propozicija 3. *Ponuda II. nije lošija od ponude I., tj. vrijedi nejednakost*

$$(a_{uk})_I \geq (a_{uk})_{II}. \tag{39}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati da vrijedi nejednakost:

$$(a_{uk})_I - (a_{uk})_{II} \geq 0. \tag{40}$$

Uvrštavanjem izraza (32) i (34) u (40) dobivamo:

$$\frac{n \cdot r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \cdot C_0 - \left[\frac{n+1}{2} \cdot (r-1) + 1\right] \cdot C_0 \geq 0, \tag{41}$$

odnosno, nakon sređivanja

$$(n-1) \cdot r^{n+1} - (n+1) \cdot r^n + (n+1) \cdot r - n + 1 \geq 0. \tag{42}$$

Valjanost nejednakosti (42) izravno slijedi iz Leme 1, pri čemu, zbog $r > 1$, znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

□

Korolar 1. ***a)*** *Za $n = 1$ ponuda* ***I.*** *i ponuda* ***II.*** *su jednako povoljne za zajmoprimca (neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*
b) *Za $n \geq 2$ ponuda* ***II.*** *za zajmoprimca je povoljnija od ponude* ***I.*** *(neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*

□

Ovakav rezultat je logičan jer nominalni iznosi anuiteta u Ponudi II. tvore strogo padajući niz, tj. u početnim razdobljima otplate zajma plaćaju se veliki iznosi, a u kasnijim razdobljima sve manji.
Primjer 2. *Neka su $n \in \mathbb{N}$, te $C_0, p \in \langle 0, 100\rangle$ proizvoljni, ali fiksirani. Zajmoprimac želi posuditi iznos od C_0 novčanih jedinica i u tu svrhu razmatra ponude dviju*

poslovnih banaka:
Ponuda I. *Poslovna banka X nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n nominalno jednakih godišnjih anuiteta uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p_a, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i anticipativan obračun kamata.*
Ponuda II. *Poslovna banka Y nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n promjenjivih godišnjih anuiteta s jednakim otplatnim kvotama uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i anticipativan obračun kamata.*
Ako zajmoprimac želi da nominalan iznos ukupnih kamata bude što manji, koja od navedenih ponuda je povoljnija za njega?

I u ovom ćemo slučaju umjesto problema minimizacije nominalnoga iznosa ukupnih kamata rješavati problem minimizacije nominalnoga iznosa svih anuiteta. Pritom u rješavanju nećemo uzimati u obzir tzv. *nultu kamatu*, odnosno iznos koji se obračunava i plaća odmah pri odobrenju zajma. Naime, budući da je obračun kamata u objema ponudama anticipativan, to znači da se *nulta kamata* obračunava od odobrenoga iznosa zajma i plaća u trenutku odobrenja zajma. U objema je ponudama iznos *nulte kamate* jednak

$$I_0 = \frac{p}{100} \cdot C_0, \tag{43}$$

pa nominalni iznos ukupnih kamata u objema ponudama ovisi o iznosu kamata u svakom od n razdoblja otplate zajma. Stoga se i pri izradbi plana otplate zajma, te njegove kontrole ne uzima u obzir *nulta kamata*, nego isključivo elementi plana otplate u razdobljima u kojima se plaćaju (stvarni) anuiteti.
Ponovno ćemo najprije izvesti zatvorene forme za izračunavanje nominalnoga iznosa svih anuiteta u svakoj ponudi. Neka je [4]

$$\rho := \frac{100}{100 - p}. \tag{44}$$

Primijetimo da nejednakost $r > 1$, tj. $r \in \langle 1, +\infty \rangle$ vrijedi zbog nejednakosti:

$$1 < 1 + \frac{p}{100} < \frac{100}{100 - p}, \tag{45}$$

za svaki $p \in \langle 0, 100 \rangle$. Prvi dio nejednakosti poseban je slučaj nejednakosti (31). Najednakost

$$1 + \frac{p}{100} < \frac{100}{100 - p}, \tag{46}$$

smijemo pomnožiti izrazom $100 \cdot (100 - p)$ koji je strogo pozitivan za $p \in \langle 0, 100 \rangle$. Nakon množenja dobiva se nejednakost $x^2 > 0$ koja je istinita za svaki $p \neq 0$, a posebno i za $p \in \langle 0, 100 \rangle$.

Propozicija 4. *Nominalni iznos svih anuiteta u ponudi **I.** dan je formulom*

$$(a_{uk})_I = \frac{n \cdot \rho^{n-1} \cdot (\rho - 1)}{\rho^n - 1} \cdot C_0. \tag{47}$$

[4] Veličina ρ naziva se *anticipativni kamatni faktor*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je iznos a svakoga od nominalno jednakih anuiteta dan izrazom

$$(a_{uk})_I = \frac{\rho^{n-1} \cdot (\rho - 1)}{\rho^n - 1} \cdot C_0. \tag{48}$$

Izvod formule (48) može se naći u [1].

□

Propozicija 5. *Nominalni iznos svih anuiteta u ponudi II. dan je formulom*

$$(a_{uk})_{II} = \frac{(n+1) \cdot \rho - n + 1}{2\rho} \cdot C_0. \tag{49}$$

Dokaz. Budući da je obračun kamata anticipativan, kamate se obračunavaju i isplaćuju na početku razdoblja od glavnice s kraja toga razdoblja, pa za svaki $k = 1, \ldots, n$ vrijedi:

$$I_k = \frac{p}{100} \cdot C_k. \tag{50}$$

Istaknimo da za $k = n$ vrijedi $I_k = C_k = 0$ jer ostatak duga na kraju posljednjega razdoblja otplate zajma mora biti jednak nuli zbog anticipativnoga načina obračuna kamata, i iznos kamata za posljednje razdoblje otplate zajma također mora biti jednak nuli.[5]
U svakom pojedinom razdoblju vraća se jednak dio glavnice (odobrenoga iznosa zajma), pa za svaki $k = 1, \ldots, n$ vrijedi jednakost:

$$R_k = \frac{C_0}{n}. \tag{51}$$

Nominalni iznos ostatka duga na kraju k - toga razdoblja jednak je razlici iznosa odobrenoga zajma i ukupnoga iznosa k plaćenih otplatnih kvota. Stoga je za svaki $k = 1, \ldots, n$ nominalni iznos C_k ostatka duga na kraju k - toga razdoblja jednak:

$$C_k = C_0 - \sum_{i=1}^{k} R_i = C_0 - \sum_{i=1}^{k} \frac{C_0}{n} = C_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right). \tag{52}$$

Uvrštenjem izraza (52) u izraz (50) i zbrajanjem svih n iznosa kamata dobiva se:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} I_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{100} \cdot C_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{p}{100} \cdot C_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right) = \\ &= \frac{p}{100} \cdot C_0 \cdot \left[n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right] = \frac{C_0 \cdot p \cdot (n-1)}{200}.\end{aligned} \tag{53}$$

Iz definicijske jednakosti (44) slijedi:

$$p = \frac{100 \cdot (\rho - 1)}{\rho}, \tag{54}$$

[5]Izravna posljedica te činjenice je da iznos posljednjega anuiteta mora biti nominalno jednak iznosu dijela glavnice koji dospijeva na otplatu u posljednjem razdoblju, što se primjenjuje prigodom kontrole plana otplate

pa uvrštavanjem izraza (54) u izraz (53) dobivamo:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{C_0 \cdot \frac{100\cdot(\rho-1)}{\rho} \cdot (n-1)}{200} = \frac{C_0 \cdot (\rho-1) \cdot (n-1)}{2\rho}. \tag{55}$$

Stoga je nominalni iznos svih anuiteta u ponudi II. jednak:

$$(a_{uk})_{II} = C_0 + \sum_{k=1}^{n} I_k = C_0 + \frac{(\rho-1)(n-1)}{2\rho} \cdot C_0 = \frac{(n+1)\cdot\rho - n + 1}{2\rho} \cdot C_0, \tag{56}$$

što je i valjalo pokazati.

□

Rješenje Primjera 2. dano je sljedećom propozicijom:

Propozicija 6. *Ponuda **II.** nije lošija od ponude **I.**, tj. vrijedi nejednakost*

$$(a_{uk})_I \geq (a_{uk})_{II}. \tag{57}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati valjanost nejednakosti:

$$(a_{uk})_I - (a_{uk})_{II} \geq 0. \tag{58}$$

Uvrštavanjem izraza (47) i (49) dobivamo:

$$\frac{n\cdot\rho^{n-1}\cdot(\rho-1)}{\rho^n - 1} \cdot C_0 - \frac{(n+1)\cdot\rho - n + 1}{2\rho} \cdot C_0 \geq 0, \tag{59}$$

otkuda množenjem sa strogo pozitivnim brojem $\frac{2\rho\cdot(\rho^n-1)}{C_0}$ slijedi:

$$(n-1)\cdot\rho^{n+1} - (n+1)\cdot\rho^n + (n+1)\cdot\rho + n - 1 \geq 0. \tag{60}$$

Valjanost nejednakosti (60) slijedi izravno iz (11), pri čemu, zbog $\rho > 1$, znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

□

Korolar 2. ***a)*** *Za $n = 1$ ponuda **I.** i ponuda **II.** su jednako povoljne za zajmoprimca (neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*
b) *Za $n \geq 2$ ponuda **II.** za zajmoprimca je povoljnija od ponude **I.** (neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*

□

Primjer 3. *Neka su $n \in \mathbb{N}$, te $C_0, p \in \langle 0, 100\rangle$ proizvoljni, ali fiksirani. Zajmoprimac želi posuditi iznos od C_0 novčanih jedinica i u tu svrhu razmatra ponude dviju poslovnih banaka:*
Ponuda I. *Poslovna banka X nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n nominalno jednakih godišnjih anuiteta uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, plaćanje*

anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata.
Ponuda II. *Poslovna banka Y nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n nominalno jednakih godišnjih anuiteta uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i anticipativan obračun kamata.*

Ako zajmoprimac želi da nominalan iznos ukupnih kamata bude što manji, koja od navedenih ponuda je povoljnija za njega?

Razmotrit ćemo dva slučaja:
Slučaj 1. $n = 1$
Ponuda I: Na kraju prve godine, tj. na kraju razdoblja otplate zajma zajmoprimac plaća točno jedan anuitet a. Iznos toga anuiteta jednak je zbroju osnovnoga duga (iznosa odobrenoga zajma) i iznosa ukupnih kamata u prvoj godini. Pritom se kamate obračunavaju (i plaćaju) na kraju prve godine od glavnice s početka te godine, odnosno od odobrenoga iznosa zajma. Stoga je ukupni iznos S_I koji će platiti zajmoprimac jednak:

$$S_I = a = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{p}{100} \cdot C_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot C_0. \tag{61}$$

Ponuda II: Kako je već istaknuto u rješenju Primjera 2., prigodom odobrenja zajma zajmoprimac plaća iznos *nulte kamate* obračunate na iznos odobrenoga zajma čiji je iznos dan formulom (44). Na kraju prve godine, tj. na kraju razdoblja otplate zajma zajmoprimac plaća samo iznos osnovnoga duga (iznosa odobrenoga zajma) jer su kamate za posljednje razdoblje otplate zajma uvijek jednake nuli. Stoga je ukupni iznos S_{II} koji će platiti zajmoprimac jednak:

$$S_{II} = I_0 + C_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot C_0. \tag{62}$$

Očito je $S_I = S_{II}$, pa su u ovome slučaju ponude **I.** i **II.** jednako povoljne za zajmoprimca. Istaknimo da se navedene ponude razlikuju u iznosu koji zajmoprimac dobiva *na ruke* prigodom odobrenja zajma: u ponudi **I.** taj je iznos jednak C_0, dok je u drugoj taj iznos jednak $C_0 - I_0$.
Slučaj 2. $n \geq 2$
Ponuda I: Ukupan nominalni iznos S_I koji mora platiti zajmoprimac dan je formulom (33). Uvrstimo li u tu formulu izraz (30), dobivamo:

$$S_I = \frac{n\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1} \cdot \frac{p}{100} \cdot C_0. \tag{63}$$

Ponuda II: Ukupan nominalni iznos S_{II} koji mora platiti zajmoprimac jednak je zbroju ukupnoga iznosa svih anuiteta i iznosa *nulte kamate*. Stoga iz (44) i (48) slijedi:

$$S_{II} = \frac{n \cdot \rho^{n-1} \cdot (\rho - 1)}{\rho^n - 1} \cdot C_0 + \frac{p}{100} \cdot C_0. \tag{64}$$

odnosno, nakon uvrštavanja izraza (47),

$$S_{II} = \left[\frac{n}{1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n} + 1\right] \cdot \frac{p}{100} \cdot C_0. \tag{65}$$

Razlika iznosa S_{II} i S_I jednaka je

$$\Delta S = \left[\frac{n}{1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n} + 1 - \frac{n \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1} \right] \cdot \frac{p}{100} \cdot C_0. \tag{66}$$

Izraz u uglatoj zagradi jednak je:

$$\frac{(n-1) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n + \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n + \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n - (n+1)}{\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right] \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n\right]} \tag{67}$$

Lako se vidi da za svaki $p \in \langle 0, 100 \rangle$ i svaki $n \geq 2$ vrijede nejednakosti:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1 > 0, \tag{68}$$

i

$$1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n > 0. \tag{69}$$

Stoga je nazivnik razlomka (67) strogo pozitivan realan broj. Iz Leme 2.3 izravno slijedi da je brojnik razlomka (67) također strogo pozitivan realan broj, pa zaključujemo da je $\Delta S > 0$, odnosno da je ponuda **I.** bolja od ponude **II.**

□

Tako smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 7. *Ponuda **I.** nije lošija od ponude **II.***

□

Korolar 3. ***a)*** *Za $n = 1$ ponuda **I.** i ponuda **II.** su jednako povoljne za zajmoprimca (neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*
b) *Za $n \geq 2$ ponuda **I.** za zajmoprimca je povoljnija od ponude **II.** (neovisno o vrijednostima parametara C_0 i p).*

□

Primjer 4. *Neka su $n \in \mathbb{N}$, te $C_0, p \in \langle 0, 100 \rangle$ proizvoljni, ali fiksirani. Zajmoprimac želi posuditi iznos od C_0 novčanih jedinica i u tu svrhu razmatra ponude dviju poslovnih banaka:*
Ponuda I. *Poslovna banka X nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n promjenjivih godišnjih anuiteta s jednakim otplatnim kvotama uz stalan godišnji dekurzivni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i dekurzivan obračun kamata.*
Ponuda II. *Poslovna banka Y nudi posudbu iznosa C_0 uz otplatu duga s n promjenjivih godišnjih anuiteta s jednakim otplatnim kvotama uz stalan godišnji anticipativni kamatnjak p, plaćanje anuiteta krajem godine, te složen, godišnji i anticipativan obračun kamata.*
Ako zajmoprimac želi da nominalan iznos ukupnih kamata bude što manji, koja od navedenih ponuda je povoljnija za njega?

Nominalan iznos ukupnih kamata $(I_{uk})_I$ u ponudi **I.** dan je izrazom (33), dok je nominalan iznos ukupnih kamata $(I_{uk})_{II}$ u ponudi **II.** jednak zbroju desnih strana izraza (41) i (49). Lako se pokaže da vrijedi:

$$(I_{uk})_I = (I_{uk})_{II}, \tag{70}$$

pa zaključujemo da su ponude **I.** i **II.** jednako povoljne za zajmoprimca (neovisno o vrijednosima parametara C_0, n i p). Te se ponude, međutim, razlikuju u iznosu koji zajmoprimac dobiva *na ruke* prigodom odobrenja zajma: u ponudi **I.** taj je iznos jednak C_0, dok je u ponudi **II.** taj iznos jednak

$$S = C_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right). \tag{71}$$

Primjer 5. *Tvrtka* Mudrijašević d.d. *za otvaranje svojega novoga poslovnoga centra želi podići zajam u iznosu od* 1.000.000, 00 kn. Gospodarska banka *nudi rok otplate 10 godina uz godišnju kamatnu stopu* 7, 99% *i model otplate zajma:*
A. model *nominalno jednakim godišnjim anuitetima uz složen i dekurzivan obračun kamata;*
B. model *nominalno jednakim godišnjim anuitetima uz složen i anticipativan obračun kamata;*
C. model *promjenjivim godišnjim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama uz složen i dekurzivan obračun kamata;*
D. model *promjenjivim godišnjim anuitetima s jednakim otplatnim kvotama uz složen i anticipativan obračun kamata.*
Koja od navedenih ponuda je najpovoljnija za tvrtku Mudrijašević d.d.*?*

Uvrštavanjem vrijednosti $C_0 = 1.000.000, 00kn$, $p = 7.99, n = 10, r = 1 + \frac{p}{100} = \frac{10799}{10000}$ i $\rho = \frac{100}{100-p} = \frac{10000}{9201}$ u izraze $(33), (35), (48)$ i (50) dobivamo da je nominalni iznos svih anuiteta u *modelu A* jednak 1.489.450, 00 *kn*, u *modelu B* 1.493.711, 09 *kn*,a u *modelima C* i *D* iznose 1.439.450, 00 *kn*.
Usporedbom ukupnih nominalnih iznosa svih anuiteta zaključujemo da *model C* i *model D* generiraju iste ukupne kamate. Te se ponude, međutim, razlikuju u iznosu koji zajmoprimac dobiva *na ruke* prigodom odobrenja zajma: u *modelu C* taj je iznos jednak 1.000.000, 00 *kn*, dok je u *modelu D* taj iznos jednak 920.100, 00 *kn*. Najpovoljnija ponuda prema tome bila bi *model C*.

4. Zaključak

Zaključno istaknimo da se u gospodarskoj praksi primijenuje znatno veći broj modela otplate zajma. Poslovne banke u svojim kreditnim ponudama (npr. stambenih kredita) obično navode da model **A** generira nominalno veće ukupne kamate od modela **C**. No, u nastavi gospodarske matematike na stručnim studijima ekonomije *tradicionalno* se spominju upravo modeli **A. - D.** zajedno s modelom otplate zajma dogovorno jednakim anuitetima, ali (čak i u obaveznoj literaturi!) bez usporedbe kvantitativnih efekata važnih za donošenje odluka zajmoprimaca. Stoga se ovim radom barem djelomično nastojala ispuniti praznina nastala izostavljanjem navedene usporedbe.

Literatura

[1] B. Relić, *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb, 2002.

[2] B. Šego, *Financijska matematika*, Zgombić i partneri, Zagreb, 2008.

[3] B. Kovačić, B. Radišić, *Gospodarska matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 2011.

[4] B. Gruić, I. Jemrić, I. Šutalo, H. Volarević, *Matematika za ekonomiste i managere*, MATE, Zagreb, 2008.

[5] B. Kovačić, B. Radišić, *Usporedba kvantitativnih efekata osnovnih kamatnih računa*, Osječki matematički list **11**(2011), 45–55.

[6] L. Neralić, B. Šego, *Matematika* , Element, Zagreb, 2009.

[7] Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Informator, Zagreb, 1980.

[8] S. Kurepa, *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[9] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.