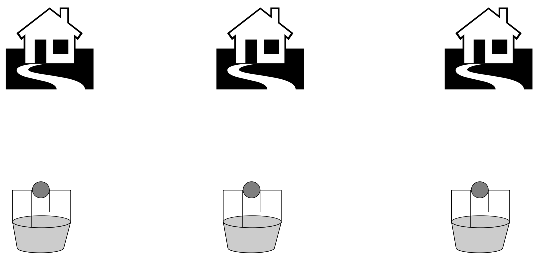
πlαy√matχ

Tri kuće, tri izvora

Ivan Gavran

Nacrtane su tri kuće i tri bunara. Spojite svaku od kuća sa svim trima bunarima tako da se linije ne sijeku.



Slika 1.

Ovaj zadatak, premda metuzalemski star, svakih nekoliko godina postaje zanimljiv. Malo tko dosad nije čuo za njega. Tako se, prije dvadesetak dana, zanimanje za ovaj zadatak strelovito proširilo našom školom. Najuporniji u rješavanju bili su prvaši koji su svojski zapeli da ga riješe. Pokušajte i sami riješiti zadatak na listu papira prije nego što nastavite čitati članak.

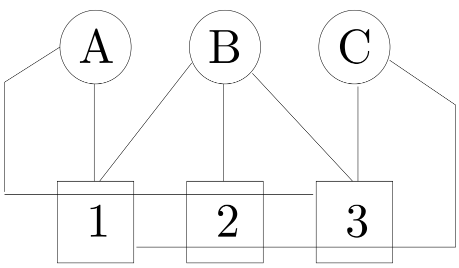
Sad ste vjerojatno shvatili da zadatak i nije tako bezazlen kako se čini na prvi pogled. Vjerojatno ostaje samo jedan put koji stvara nevolje?

Ono što me natjeralo da malo više promislim o ovom zadatku bilo je to što sam u samo nekoliko dana čuo za nekoliko odgonetaka ove zagonetke. Većina ljudi tvrdila je da rješenja nema, neki su to pokušali i dokazati, a nekolicina ponosnih rješavača hvalila se svojim rješenjem.

TKO JE U PRAVU?

Svi su oni imali pravo. U zadatku nije jasno rečeno smije li put od jedne kuće do izvora voditi kroz neku drugu kuću niti jesu li kuće i bunari zadani na plohi ili u euklidskoj ravnini (ravnoj plohi koja se proteže do beskonačnosti).

Ako se zadatak shvati tako da linija iz jedne kuće može voditi kroz druge kuće, rješenje i nije tako teško.



Slika 2.

Ipak, linije ne smiju prolaziti kroz kuće. Je li sada moguće riješiti zadatak? Ponovno, i da i ne. Neka zadatak glasi ovako: *U euklidskoj ravnini nacrtane su tri kuće i tri bunara. Spojite svaku od kuća sa svim trima bunarima tako da se linije ne sijeku.* Ovako zadanog, nemoguće ga je riješiti.

Nazovimo *slikom* skup točaka u ravnini spojenih linijama tako da nijedna linija ne siječe bilo koju drugu. Za svaku sliku vrijedi

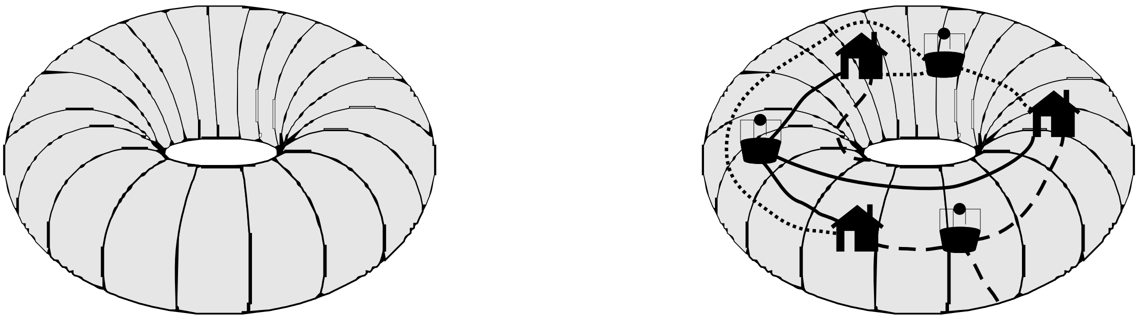
$$P - L + T = 2$$

gdje je L broj linija, T broj točaka, a P broj zatvorenih površina na koje slika dijeli ravninu (računa se i ona s vanjske strane linije, zornije, kod trokuta je $P = 2$). To se naziva **Eulerovom formulom**, a na par primjera lako se uvjeriti u njezinu istinitost.

Sada pretpostavimo da smo riješili zadatak. Postoji šest točaka i, zato što moramo spojiti svaku kuću sa svakim bunarom, $3 \cdot 3 = 9$ linija. Uvrstimo li to u Eulerovu formulu, dobije se da je broj zatvorenih površina $P = 2 - T + L = 5$.

U zadatku svaka je površina omeđena najmanje četirima linijama (jer nema smisla spajati kuću s kućom ili bunar s bunarom). Stoga bi broj linija na cijeloj slici bio $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (svaka linija omeđuje dvije površine). Prije smo zaključili da mora postojati 9 linija. Kako ne može istovremeno biti devet i deset linija, zadatak nema rješenja.

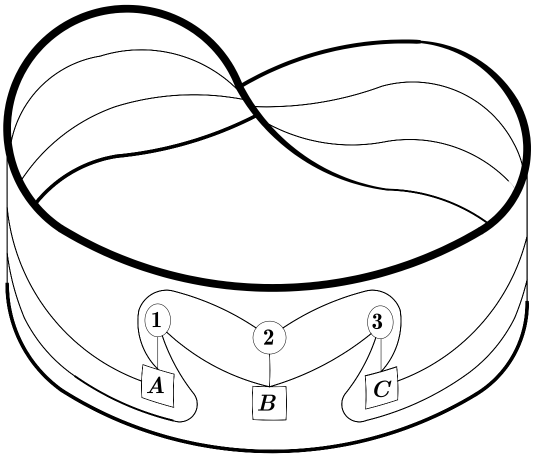
Što ako su kuće i bunari nacrtani na bilo kakvoj plohi? Tada se zadatak da riješiti na ***torusu***, zakrivljenoj plohi oblika automobilske gume (slika 3).



Slika 3.

Torus je uistinu ploha, probajte ga sami napraviti od pravokutnog papira istovremeno kružno spajajući kraću stranicu s kraćom i dužu s dužom. Na torusu se otvara jedan put više (slika 4) i zadatak je lako rješiv.

Osim ovog rješenja, koje je već dugo poznato, pogledajte i originalno rješenje Boška Kontića na Möbiusovoj vrpci, još jednoj zanimljivoj zakrivljenoj plohi.



Slika 4.