



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Peter Vook

Náhodné mozaiky a jejich statistická analýza

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická
statistika a ekonometrie

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

RÁD BY SOM POĎAKOVAL VEDÚCEMU DIPLOMOVEJ PRÁCE, DOC. RNDR. ZBYŇKOVÍ PAWLASOVI, PH.D., ZA ZAUJÍMAVÚ TÉMU, OCHOTU A PRECÍZNU KONTROLU MOJEJ PRÁCE. ĎAKUJEM AJ MGR. IVE KARAFIÁTOVEJ ZA POMOC PRI GENEROVANÍ MOZAÍK.

NESMIERNA VĎAKA PATRÍ MOJEJ MAMKE ZA NEUSTÁLU PODPORU NIELEN PRI PÍSANÍ DIPLOMOVEJ PRÁCE, ALE V KAŽDOM ASPEKTE MÔJHO ŠTÚDIA. ĎAKUJEM AJ KAMARÁTOM, HLAVNE MARTINOVÍ ZA POCIT, ŽE ŽIADEN POČET STRÁN NIE JE PRÍLIŠ MALÝ A LUCII ZA TO, ŽE VŽDY STOJÍ PO MOJOM BOKU, ALE AJ ĎALŠÍM ZA POVZBUDENIE, KONTROLU KOLORITU PRÁCE A PODPORU V NEĽAHKÝCH ČASOCH POSLEDNÝCH MESIACOV.

Název práce: Náhodné mozaiky a jejich statistická analýza

Autor: Peter Vook

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Štatistickým aspektom náhodných mozaík nebolo v doterajšom výskume venované dostatočné množstvo pozornosti. Táto práca sa zaoberá odvodením odhadov a štatistických testov v modeli trojrozmerných Poissonových-Voroniových mozaík. V prvej kapitole je zhromaždená základná teória bodových procesov, náhodných uzavretých množín a procesov častíc. Tie sa v druhej kapitole použijú na odvodenie geometrických vlastností náhodných mozaík. Tretia kapitola približuje samotný štatistický výskum, odhady a testy modelu. Na korekciu štatistík napočítaných na zmenšenom výbere je zavedený Horvitzov-Thompsonov odhad. Vlastné výsledky sú overené počítačovou simuláciou aj porovnané s existujúcim výskumom v poslednej kapitole. Sledujeme prioritne kvalitu odhadov a silu navrhnutých testov.

Klíčová slova: náhodné mozaiky, Poissonova-Voroniova náhodná mozaika, Laguerrove mozaiky, Horvitzov-Thompsonov odhad, proces častíc

Title: Random tessellations and their statistical analysis

Author: Peter Vook

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Statistical aspects of random mosaics have not been heretofore given enough attention. This thesis deals with the derivation of estimators and statistical tests in a three-dimensional Poisson-Voronoi mosaic model. The first chapter compiles elementary results in the fields of point processes, random closed sets and particle processes. These are used in a second chapter to deduce geometric properties of random mosaics. The third chapter introduces the statistical research itself, estimators and model tests. Horvitz-Thompson estimator is introduced in order to correct statistics calculated on a reduced sample. Own results are tried in a computer simulation and compared to existing research in the last chapter. Mainly, the quality of estimators and the power of proposed tests is observed.

Keywords: random tessellations, Poisson-Voronoi random mosaic, Laguerre tessellations, Horvitz-Thompson estimator, particle process

Obsah

Úvod	3
1 Základy stochastickej geometrie	4
1.1 Bodové procesy	4
1.1.1 Priestorový bodový proces	5
1.1.2 Základné charakteristiky	6
1.1.3 Poissonov bodový proces	8
1.1.4 Kótované bodové procesy	8
1.2 Náhodné množiny	11
1.2.1 Zavedenie	11
1.2.2 Základné vlastnosti	12
1.3 Proces častíc	13
1.3.1 Zavedenie	13
1.3.2 Kótovaný proces častíc	14
2 Náhodné mozaiky	15
2.1 Základné pojmy a vlastnosti	15
2.1.1 Zavedenie v \mathbb{R}^d	15
2.1.2 Typická bunka	18
2.1.3 Vzťahy medzi intenzitami	19
2.2 Voronoiove mozaiky	23
2.2.1 Zavedenie	24
2.2.2 Poissonova-Voronoiova mozaika	26
2.3 Laguerrove mozaiky	28
2.3.1 Zavedenie	28
2.3.2 Poissonova-Laguerrova mozaika	32
3 Štatistika na náhodných mozaikách	36
3.1 Stereologické odhady	36
3.1.1 Stereologické vzťahy	37
3.1.2 Odhady intenzity generujúceho procesu	37
3.1.3 Odhady charakteristík rovinnej mozaiky	38
3.1.4 Testy Poissonovskosti	40
3.2 Štatistika na priestorovej mozaike	41
3.2.1 Odhady parametrov	42
3.2.2 Testy Poissonovskosti	45
4 Simulačná štúdia	47
4.1 Doterajšie výsledky	47
4.2 Realizácia simulácie	47
4.2.1 Voľba hyperparametrov	48
4.2.2 Spôsoby výpočtu	50
4.3 Výsledky simulácie	50
4.3.1 Stereologické výsledky	50
4.3.2 Výsledky na priestorovej mozaike	53

4.4 Zhrnutie výsledkov	63
Záver	64
Zoznam použitej literatúry	65
Zoznam obrázkov	68
Zoznam tabuliek	69

Úvod

Pri skúmaní kovov a kryštalických látok skôr či neskôr narazíme na potrebu existencie štruktúry, ktorou by sme popísali pozorovanú látku. Prirodzenou voľbou sú konvexné zrná, ktoré môžu pokrývať celý priestor, takzvané mozaiky. Takúto štruktúru však navrhol už Dirichlet pri riešení problémov teórie čísel oveľa dávnejšie, než bolo ľudstvo schopné skúmať látky na úrovni kryštálov.

Veci sa komplikujú, keď si mozaiku predstavíme ako realizáciu náhody. Takýto model je síce dostatočne bohatý na to, aby sme vedeli opisovať ľubovoľnú štruktúru látky, ktorú pozorujeme, ale vďaka svojej bohatosti sú mnohé jeho vlastnosti pre nás zatiaľ stále neznáme. Veľká časť existujúceho výskumu náhodných mozaík je zameraná na ich geometrické vlastnosti, zatiaľ čo štatistickým aspektom tohto systému nebolo venované veľké množstvo pozornosti. Väčšina explicitných výsledkov je formulovaná iba pre dvojrozmerný prípad a s výskumom v tejto oblasti sa skôr stretávame na poli materiálového inžinierstva. My sa v tejto práci pokúsime odvodiť aj uplatniť štatistické poznatky.

Hlavným predmetom nášho záujmu sú náhodné mozaiky v trojrozmernom priestore. S rozvojom výskumných techník ako napr. mikrotomografia sme schopní priamo pozorovať štruktúru látky v troch dimenziách, a preto výsledky na tomto poli budú čím ďalej tým cennejšie. Nemožnosť vyjadriť všetky výsledky v tvare uzavretého vzorca nám nebráni siahnuť po numerických metódach alebo počítačovej simulácii.

V prvej kapitole práce si zhrnieme známe výsledky stochastickej geometrie, ktoré potrebujeme pri štúdiu náhodných mozaík. Bodové procesy slúžia na skúmanie generátorov jednotlivých buniek náhodnej mozaiky, koncept náhodnej množiny alebo procesu častíc zas na opis samotných zrn.

Geometrické vlastnosti náhodných mozaík v d -rozmernom euklidovskom priestore sú dobre preskúmaným problémom, na ktorého tému existuje veľké množstvo rigorózneho literatúry. My v druhej kapitole zhrnieme všeobecné výsledky užitočné pre náš výskum a potom sa zameriame na najdôležitejšiu triedu náhodných mozaík, tzv. Poissonove-Voroniove mozaiky. Tieto slúžia ako odrazový mostík pre zložitejšie modely. Navyše, vďaka svojej jednoduchosti ich vieme opísať jediným parametrom. To nám umožňuje explicitne odvodiť množstvo výsledkov. Na koniec kapitoly sa pozrieme na jedno zovšeobecnenie tohto modelu, tzv. Laguerrove mozaiky. Toto zovšeobecnenie nám umožní kompletne podchytiť triedu normálnych mozaík. Podľa výsledkov iných autorov je táto trieda navyše najvhodnejšia na opis polykryštalických látok a penových štruktúr.

V tretej kapitole sa konečne dostávame k štatistickým aspektom náhodných mozaík. Začneme so stereologickými odhadmi, teda snahou odvodiť parametre trojrozmernej mozaiky na základe jej plošných rezov. Na túto tému už existuje nejaká literatúra, no je väčšinou formulovaná veľmi heuristicky. Na podobných princípoch ako v stereologickej časti potom sami vyrobíme odhady na základe pozorovania mozaiky v trojrozmernom okne. Takisto navrhujeme niekoľko štatistických testov, či pozorovaná mozaika pochádza z modelu Poissonových-Voronioových mozaík. Kvalitu odvodených odhadov a testov overíme v simulačnej štúdii v štvrtej kapitole, ktorá spolu so štatistickým výskumom trojrozmerných mozaík v kapitole 3 predstavuje náš vlastný prínos k predmetnej téme.

1. Základy stochastickej geometrie

V prvej kapitole si predstavíme základné pojmy stochastickej geometrie, ktoré budeme potrebovať v teórii náhodných mozaík. Tieto modely sa používajú či už pri ich konštrukcii alebo opise. Množstvo definícií modelov pre mozaiky vychádza z bodového procesu; asi najznámejším príkladom je Voronoiova teselácia. Bodové procesy však sprevádzajú aj ďalšie skúmanie náhodných mozaík, napr. bodové procesy vrcholov alebo stredov stien mozaiky.

Teória náhodných množín je potrebná pri skúmaní množín všetkých hrán alebo stien (pre mozaiku v rovine, respektívne priestore). Charakteristiky týchto množín sú neoceniteľné pri opise veľkosti a variability buniek mozaiky.

1.1 Bodové procesy

Spolu s pojmom náhodnej množiny tvorí bodový proces dva najzákladnejšie piliere stochastickej geometrie. V množstve aplikácií sú bodmi bodového procesu obyčajné body v d -rozmernom Euklidovskom priestore \mathbb{R}^d , avšak „bodmi“ bodového procesu môžu byť aj množiny. Z tohto dôvodu študujeme bodové procesy v ľubovoľnom lokálne kompaktnom priestore E . Základnou myšlienkou bodového procesu na E je vytvorenie náhodnej zbierky bodov. Univerzálna definícia bodového procesu využíva pojem náhodnej miery.

Označme $\mathcal{M} = \mathcal{M}(E)$ priestor všetkých *lokálne konečných mier* na $(E, \mathcal{B}(E))$, teda takých mier μ , ktoré spĺňajú $\forall K \in \mathcal{C}(E) : \mu(K) < \infty$, $\mathcal{C}(E)$ systém kompaktných a $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ systém borelovských podmnožín priestoru E . Ďalej, priestorom všetkých *lokálne konečných počítacích mier* nazveme

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(E) = \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \quad \forall B \in \mathcal{B}(E) \right\}.$$

Pre $B \in \mathcal{B}(E)$ vezmeme zobrazenie $\pi_B : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ definované predpisom $\pi_B(\mu) = \mu(B)$. Na priestore $\mathcal{M}(E)$ zavedieme najmenšiu σ -algebru \mathfrak{M} , voči ktorej sú π_B merateľné pre všetky $B \in \mathcal{B}(E)$. K priestoru \mathcal{N} sa zavádza σ -algebra \mathfrak{N} , ktorá je stopou σ -algebry \mathfrak{M} na \mathcal{N}

$$\mathfrak{N} = \{ \mathcal{U} \cap \mathcal{N} : \mathcal{U} \in \mathfrak{M} \}.$$

S týmito ingredienciami môžeme konečne definovať pojem bodového procesu.

Definícia 1. *Nech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor. Náhodná miera je merateľné zobrazenie $\Psi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$. Rozdelením náhodnej miery Ψ rozumieme pravdepodobnostnú mieru \mathbb{P}_Ψ na $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ definovanú predpisom $\mathbb{P}_\Psi(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \Psi(\omega) \in \mathcal{U}\})$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{M}$.*

Bodový proces je merateľné zobrazenie $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$. Rozdelením bodového procesu Φ rozumieme pravdepodobnostnú mieru \mathbb{P}_Φ na $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ definovanú predpisom $\mathbb{P}_\Phi(\mathcal{U}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in \mathcal{U}\})$, $\mathcal{U} \in \mathfrak{N}$.

Poznámka. Bodový proces je teda špeciálny prípad náhodnej miery s $\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{N}) = 1$. Korektnosť tohto tvrdenia plynie z vlastnosti $\mathcal{N} \in \mathfrak{M}$, ktorá je dokázaná napr. v Daley a Vere-Jones (2008, Lemma 9.1.V). Toto oprávňuje aj našu definíciu \mathfrak{N} .

Pre naše potreby postačuje rámec menšej triedy bodových procesov. Ide o procesy, pri ktorých má každý bod priestoru početnosť najviac 1, teda bránime situácii, že pri náhodnom „rozhadzovaní bodov“ dostaneme nejaký bod viackrát.

Definujme priestor jednoduchých lokálne konečných počítacích mier

$$\mathcal{N}^* = \left\{ \nu \in \mathcal{N}(E) : \nu(\{x\}) \leq 1 \quad \forall x \in E \right\},$$

ktorý je zjavne podpriestorom \mathcal{N} a definujme σ -algebru \mathfrak{N}^* ako stopu \mathfrak{N} v \mathcal{N}^*

$$\mathfrak{N}^* = \{ \mathcal{U} \cap \mathcal{N}^* : \mathcal{U} \in \mathfrak{N} \}.$$

Definícia 2. *Bodový proces Φ nazveme jednoduchý, ak $\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{N}^*) = 1$.*

V zmysle definície 1 môžeme jednoduchý bodový proces chápať aj ako merateľné zobrazenie $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}^, \mathfrak{N}^*)$.*

Korektnosť definície plyní z merateľnosti systému jednoduchých lokálne konečných počítacích mier, teda $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{N}$. To plyní napr. z rozpisu

$$\mathcal{N}^* = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{B \in \mathcal{S}_n : B \subseteq A} \{ \nu \in \mathcal{N} : \nu(B) \leq 1 \},$$

kde $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ je DC-systém* na E .

Trieda bodových procesov je dostatočne bohatá pre naše potreby konštrukcie náhodných mozaik. Termín *jednoduchý* budeme preto častokrát vynechávať. Ako obsiahly text na tému bodových procesov odporúčame čitateľovi knihu Møller a Waagepetersen (2004).

1.1.1 Priestorový bodový proces

Uvažujme teraz $E = \mathbb{R}^d$ so štandardnou euklidovskou metrikou a príslušnou borelovskou σ -algebrou \mathcal{B}^d . Bodový proces na takom priestore nazveme *priestorový bodový proces*. Symbolom \mathcal{B}_0^d budeme značiť systém všetkých ohraničených borelovských podmnožín \mathbb{R}^d .

Definícia 3. *Pre $z \in \mathbb{R}^d$ označíme t_z operátor posunutia v \mathcal{M} . Tento je daný vzťahom*

$$(t_z \mu)(A) = \mu(A - z), \quad \mu \in \mathcal{M}, A \in \mathcal{B}^d.$$

Náhodnú mieru Φ na \mathbb{R}^d nazveme stacionárnou, ak pre všetky $z \in \mathbb{R}^d$ majú $t_z \Phi$ a Φ rovnaké rozdelenie.

Definícia 4. *Pre rotáciu \mathcal{O} okolo počiatku označíme $R_{\mathcal{O}}$ operátor rotácie v \mathcal{M} . Tento je daný vzťahom*

$$(R_{\mathcal{O}} \mu)(A) = \mu(\mathcal{O}^{-1} A), \quad \mu \in \mathcal{M}, A \in \mathcal{B}^d.$$

Náhodnú mieru Φ na \mathbb{R}^d nazveme izotropickou, ak pre všetky rotácie \mathcal{O} majú $R_{\mathcal{O}} \Phi$ a Φ rovnaké rozdelenie.

Definícia 5. *Náhodnú mieru Φ nazveme pohybovo invariantnou[†], ak je zároveň stacionárna a izotropická.*

V zmysle poznámky za definíciou 1 môžeme nazývať príslušnými pojmami *stacionárny*, *izotropický* a *pohybovo invariantný* aj bodový proces. Tieto predpoklady sa bežne objavujú v stochastickej geometrii, a hlavne predpoklad stacionarity tvorí základ pre odvodzovanie výsledkov v kapitole 2.

* *dissecting-covering systém*, viď napr. Daley a Vere-Jones (2003, Appendix A1.6) † *anglicky motion invariant*

1.1.2 Základné charakteristiky

Miera intenzity, intenzita

Základnou charakteristikou náhodnej miery je jej miera intenzity. Táto miera je analógiou strednej hodnoty reálnej náhodnej veličiny.

Definícia 6. Pre náhodnú mieru Ψ definujeme jej mieru intenzity vzťahom

$$\Lambda(B) = \mathbb{E} \Psi(B).$$

Miera intenzity $\Lambda(B)$ je teda priemerný počet bodov v množine B . Ak je Ψ stacionárna náhodná miera na \mathbb{R}^d , tvar jej miery intenzity sa zjednoduší.

Lemma 1. Ak Ψ je stacionárna náhodná miera s lokálne konečnou mierou intenzity Λ , potom Λ je nezáporný násobok Lebesgueovej miery, teda

$$\Lambda(B) = \lambda|B|, \quad B \in \mathcal{B}^d, \text{ pre nejaké } \lambda \geq 0.$$

Dôkaz. Zo stacionarity máme $\forall z \in \mathbb{R}^d : \Lambda(B+z) = \Lambda(B)$. Tvrdenie potom plynie z faktu, že až na multiplikatívnu konštantu je Lebesgueova miera jediná lokálne konečná miera na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$, ktorá je invariantná voči posunutiu (viď napr. Chiu a kol. (2013, str. 30)).

□

Definícia 7. Skalárny činiteľ z lemma 1 sa nazýva intenzita stacionárnej náhodnej miery.

Reprezentácia bodového procesu

Definícia 8. Bod $x \in E$ nazveme atómom bodového procesu Φ , ak $\Phi(\{x\}) > 0$.

Definícia 9. Nosič miery $\mu \in \mathcal{M}$ (značíme $\text{supp } \mu$) definujeme ako najmenšiu uzavretú množinu $A \subseteq E$ takú, že $\mu(E \setminus A) = 0$.

Nosič bodového procesu je zjednotenie jeho atómov. V každej ohraničenej množine ich je najviac konečne mnoho. V literatúre sa často stretávame s alternatívnou definíciou bodových procesov založenej na postupnosti $\{X_j\}$ náhodných veličín v E . Táto prirodzene tvorí postupnosť Diracových mier $\{\delta_{X_j}\}$. Bodový proces je potom vyjadrený ako spočetný súčet týchto mier. Toto je formálne zhrnuté v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 2. Každý bodový proces Φ môžeme reprezentovať ako

$$\Phi(B) = \sum_i \delta_{X_i}(B), \quad B \in \mathcal{B}(E),$$

kde X_i je náhodná veličina z E a δ_x značí Diracovu mieru v bode x , teda

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in B, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Dôkaz. Viď Schneider a Weil (2008, Lemma 3.1.3).

□

Palmovo rozdelenie

Pri štúdiu bodových procesov a následnej štatistickej inferencii hrá dôležitú rolu ich rozdelenie podmienené polohou ostatných bodov. Tento koncept formálne zachytáva Palmovo rozdelenie. V teórii bodových procesov má význam napríklad pri definícii pojmu typický bod.

Definícia 10. *Majme (S, \mathcal{S}) a (T, \mathcal{T}) merateľné priestory. Povieme, že zobrazenie $K : S \times T \rightarrow [0, \infty]$ je jadro z (S, \mathcal{S}) do (T, \mathcal{T}) , ak:*

(i) *zobrazenie $s \rightarrow K(s, B)$ je nezáporná merateľná funkcia na S pre každé $B \in \mathcal{T}$,*

(ii) *$K(s, \cdot)$ je miera na (T, \mathcal{T}) pre každé $s \in S$.*

Povieme, že K je markovské alebo pravdepodobnostné jadro, ak $K(s, \cdot)$ je pravdepodobnostná miera pre každé $s \in S$.

Veta 3 (O dezintegrácii). *Nech (S, \mathcal{S}) je merateľný priestor a nech (T, \mathcal{T}) je úplný separabilný metrický priestor s borelovskou σ -algebrou. Nech ďalej μ je miera na $(S \times T, \mathcal{S} \otimes \mathcal{T})$ taká, že projekcia $\nu(\cdot) = \mu(\cdot \times T)$ je σ -konečná miera na (S, \mathcal{S}) . Potom existuje pravdepodobnostné jadro K z (S, \mathcal{S}) do (T, \mathcal{T}) tak, že pre každú nezápornú merateľnú funkciu f na $S \times T$ platí vzťah*

$$\int_{S \times T} f(s, t) \mu(d(s, t)) = \int_S \int_T f(s, t) K(s, dt) \nu(ds).$$

Dôkaz. Vid Rataj (2006, Veta 7.1). □

Definícia 11. *Campbellovu mieru C asociovanú s náhodnou mierou Ψ definujeme ako*

$$C(A) = \mathbb{E} \int_E \mathbb{1}_A(x, \Psi) \Psi(dx), \quad A \in \mathcal{B} \times \mathfrak{M}.$$

Konkrétne,

$$C(B \times \mathcal{U}) = \mathbb{E} \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(\Psi) \Psi(B), \quad B \in \mathcal{B}, \mathcal{U} \in \mathfrak{M}.$$

Tvrdenie 4. *Buď Ψ náhodná miera na E s rozdelením Q a $\Lambda \in \mathcal{M}$ miera intenzity. Potom existuje pravdepodobnostné jadro P z (E, \mathcal{B}) do $(\mathcal{M}, \mathfrak{M})$ spĺňajúce*

$$\int_{\mathcal{M}} \int_E f(x, \mu) \mu(dx) Q(d\mu) = \int_E \int_{\mathcal{M}} f(x, \mu) P(x, d\mu) \Lambda(dx) \quad (1.1)$$

pre ľubovoľnú nezápornú merateľnú funkciu f na $E \times \mathcal{M}$.

Dôkaz. \mathcal{M} tvorí úplný separabilný metrický priestor (dôkaz napr. Rataj (2006, Veta 2.2)), použijeme vetu 3 s $S = E$, $T = \mathcal{M}$, $\nu = \Lambda$ a $\mu = C$. □

Definícia 12. *Ak P je pravdepodobnostné jadro z tvrdenia 4 spĺňajúce (1.1), potom rozdelenie $P_x(\cdot) = P(x, \cdot)$ nazývame Palmovo rozdelenie náhodnej miery Ψ v bode $x \in E$.*

Definícia 13. Pre bodový proces Φ definujeme redukované Palmovo rozdelenie v bode x ako pravdepodobnostnú mieru $P_x^!$ danú vzťahom

$$\int_{\mathcal{N}} g(\nu) P_x^!(d\nu) = \int_{\mathcal{N}} g(\nu - \delta_x) P_x(d\nu)$$

pre ľubovoľnú nezápornú merateľnú funkciu g . Symbol δ_x značí Diracovu mieru ako v tvrdení 2.

Poznámka. Palmovo rozdelenie P_x jednoduchého bodového procesu Φ môžeme interpretovať ako podmienené rozdelenie Φ za podmienky, že x je atóm bodového procesu. Pre malé ε máme $\mathbb{P}(\Phi \in \mathcal{U} \mid \Phi(b(x, \varepsilon)) > 0) \approx P_x(\mathcal{U})$, kde $b(x, \varepsilon)$ značí guľu so stredom x a polomerom ε . Pre podrobný dôkaz viď Rataj (2006, Lemma 7.2).

Podobne môžeme $P_x^!$ interpretovať ako podmienené rozdelenie bodového procesu za podmienky, že x je atóm, ktorý nepočítame.

Poznámka. V úvode podsekcie o Palmovom rozdelení sme spomenuli jeho význam pri definícii typického bodu bodového procesu. To vieme použiť tak, že povieme, že typický bod x spĺňa nejakú vlastnosť, ak je táto vlastnosť splnená v Palmovom rozdelení P_x .

1.1.3 Poissonov bodový proces

Najdôležitejším príkladom bodového procesu je Poissonov bodový proces, ktorý formalizuje koncept úplnej priestorovej náhodnosti. Ako kanonický model sa využíva pri štúdiu sumárnych charakteristík bodových procesov.

Definícia 14. Nech Λ je lokálne konečná miera na E . Bodový proces Φ spĺňajúci podmienky

- (i) $\Phi(B)$ má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\Lambda(B)$ pre každé $B \in \mathcal{B}_0$,
- (ii) $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_n)$ sú nezávislé pre každé $n \in \mathbb{N}$; $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$ po dvoch disjunktné,

sa nazýva Poissonov bodový proces s mierou intenzity Λ .

Lemma 5. Poissonov bodový proces Φ s mierou intenzity $\Lambda \in \mathcal{M}$ je jednoduchý vtedy a len vtedy, keď je Λ difúzna (teda neatomická, t.j. $\Lambda(\{x\}) = 0$ pre ľubovoľné $x \in E$).

Dôkaz. Viď Rataj (2006, Lemma 6.1. a Dôsledok 4.2)

□

1.1.4 Kótované bodové procesy

Bodové procesy nám teda umožňujú popísať udalosti náhodne umiestnené v priestore. K týmto udalostiam nás môže navyše zaujímať nejaká ich vlastnosť. Tieto vlastnosti formálne zachytíme pomocou *kót*. Z bodového procesu vyrobíme kótovaný bodový proces pripnutím nejakej charakteristiky, teda kóty, každému bodu bodového procesu. Pre nás bude toto užitočné pri štúdiu jedného druhu náhodných mozaík v sekcii 2.3.

Definícia 15. *Nech \mathbb{M} je úplny separabilný lokálne kompaktný metrický priestor (takzvaný priestor kót*) a $\mathcal{B}_{\mathbb{M}}$ jemu príslušná borelovská σ -algebra. Kótovaný bodový proces definujeme ako jednoduchý bodový proces Φ_m na priestore $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$, ktorého miera intenzity spĺňa*

$$\Lambda_m(B \times \mathbb{M}) < \infty, \quad B \in \mathcal{B}_0^d.$$

Príslušný nekótovaný bodový proces nazveme podkladovým procesom[†]

$$\Phi(B) = \Phi_m(B \times \mathbb{M}), \quad B \in \mathcal{B}^d.$$

Kóty môžu byť jednorozmerné diskkrétne či spojité, ale pokojne aj viacroz-
merné. Príkladom na kótovaný proces je pohľad na (všeobecný) bodový proces
v \mathbb{R}^d pomocou kótovaného (ktorý je z definície jednoduchý). Ten vyrobíme tak,
že viac bodov všeobecného bodového procesu ležiacich v tých istých súradniciach
stotožníme za jeden bod toho jednoduchého a pridáme mu kótu počtosti toho
bodu v pôvodnom procese. Je však dobré si uvedomiť aj to, že nie každý bodový
proces na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ je kótovaný. Definícia 15 totiž požaduje konečnú mieru intenzity
pre istý typ všeobecne neohraničených množín.

Väčšina charakteristík pre kótovaný bodový proces sa definuje pomocou vlast-
ností podkladového procesu. My si teraz explicitne uvedieme niektoré z nich.

Poznámka. V zmysle tvrdenia 2 môžeme kótovaný bodový proces reprezentovať
ako

$$\Phi_m = \sum_i^{\tau} \delta_{(X_i, M_i)}, \quad (1.2)$$

kde (X_i, M_i) je postupnosť náhodných veličín v $\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}$ a $\tau = \Phi_m(\mathbb{R}^d \times M) = \Phi(\mathbb{R}^d)$.

Podobne ako pre nekótovaný bodový proces v \mathbb{R}^d môžeme definovať staciona-
ritu a izotropiu.

Definícia 16. *Nech pre $z \in \mathbb{R}^d$ je \hat{t}_z operátor posunutia na priestore $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$*

$$\hat{t}_z \mu(A \times B) = \mu((A - z) \times B), \quad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}), A \in \mathcal{B}^d, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{M}}.$$

*Povieme, že kótovaný bodový proces Φ_m je stacionárny, ak $\hat{t}_z \Phi_m$ má rovnaké roz-
delenie ako Φ_m pre všetky $z \in \mathbb{R}^d$.*

Definícia 17. *Pre rotáciu \mathcal{O} okolo počiatku buď $\hat{R}_{\mathcal{O}}$ jej operátor na $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M})$*

$$\hat{R}_{\mathcal{O}} \mu(A \times B) = \mu((\mathcal{O}^{-1} A) \times B), \quad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{M}), A \in \mathcal{B}^d, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{M}}.$$

*Kótovaný bodový proces Φ_m nazveme izotropný, ak $\hat{R}_{\mathcal{O}} \Phi_m$ má rovnaké rozdelenie
ako Φ_m pre všetky $z \in \mathbb{R}^d$.*

Definícia 18. *Mieru intenzity kótovaného bodového procesu Φ_m definujeme pred-
pisom*

$$\Lambda_m(B \times L) = \mathbb{E} \Phi_m(B \times L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathcal{B}(\mathbb{M}).$$

* anglicky *mark space* † anglicky *ground process*

Miera intenzity udáva priemerný počet bodov procesu v množine B s kótou z množiny L . V stacionárnom prípade má miera intenzity užitočný rozklad.

Veta 6. *Pre stacionárny kótovaný bodový proces Φ_m v \mathbb{R}^d existuje jednoznačne určená pravdepodobnostná miera \mathbb{Q} na \mathbb{M} tak, že ak pre mieru intenzity Φ_m platí $\Lambda_m \neq 0$, potom*

$$\Lambda_m(B \times L) = \lambda \cdot |B| \cdot \mathbb{Q}(L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathcal{B}_{\mathbb{M}},$$

kde λ je kladná konečná intenzita podkladového procesu.

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Veta 3.5.1). □

Definícia 19. *Pravdepodobnostnú mieru \mathbb{Q} z vety 6 nazveme stacionárne rozdelenie kót.*

Pre $L \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$ definujeme intenzitu kótovaného procesu vzhľadom k množine L

$$\lambda_L = \lambda \mathbb{Q}(L).$$

Poznámka. Pre Φ_m platí $\lambda_{\mathbb{M}} = \lambda$.

Pojem rozdelenia kót je vo všeobecnom prípade bez zrejmeho uplatnenia. Pre jeho zmysluplné skúmanie je dôležitá podtrieda nezávisle kótovaných bodových procesov.

Definícia 20. *Kótovaný bodový proces X nazveme nezávisle kótovaným, ak má reprezentáciu (1.2), kde kóty M_1, M_2, \dots tvoria postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín nezávislých na $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Spoločné rozdelenie \mathbb{Q} kót $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sa nazýva rozdelenie kót nezávisle kótovaného bodového procesu.

Veta 7. *Nech Φ_m je nezávisle kótovaný bodový proces s rozdelením kót \mathbb{Q} . Potom pre jeho mieru intenzity platí*

$$\Lambda_m(B \times L) = \Lambda(B) \mathbb{Q}(L), \quad B \in \mathcal{B}^d, L \in \mathcal{B}(\mathbb{M}),$$

kde Λ je miera intenzity podkladového procesu.

Ak je Φ_m navyše stacionárny, je rozdelenie kót \mathbb{Q} zhodné so stacionárnym rozdelením kót z definície 19.

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Veta 3.5.6). □

V ďalšom skúmaní budeme pod pojmom bodové procesy uvažovať jednoduché, ak nebude explicitne uvedené inak.

1.2 Náhodné množiny

Náhodné množiny (v priestore E) slúžia ako matematický model pre nepravidelné náhodné tvary. V súlade s klasickým prístupom axiomatickej pravdepodobnosti je to náhodná veličina, ktorej výsledkom je množina, teda merateľné zobrazenie z pravdepodobnostného priestoru do systému podmnožín E opatreného vhodnou σ -algebrou. Ako najvhodnejšie sa za E volí lokálne kompaktný topologický priestor so spočítateľnou bázou spolu so systémom svojich uzavretých podmnožín.

Náhodné množiny môžu byť skúmané rôznymi spôsobmi. Je prirodzené uvažovať nejaký systém testovacích množín a analyzovať prieniky náhodných množín s tými testovacími. Na to ale musíme zvoliť vhodnú sadu testovacích množín a vhodný spôsob analýzy prieniku. Ako uvádza Kendall (1974), nie všetky miery (ako napríklad Lebesgueova miera prieniku) sú vhodné. Naopak, namiesto „velkosti“ prieniku autor odporúča sledovať, či je prienik testovacej a náhodnej množiny prázdny alebo nie.

1.2.1 Zavedenie

Podobne ako v sekcii 1.1 označíme $\mathcal{F}(E), \mathcal{G}(E), \mathcal{C}(E)$ postupne systém uzavretých, otvorených a kompaktných podmnožín topologického priestoru E . Ak nám nehrozí viacznačnosť použitého značenia, vynecháme priestor E a dostaneme tak značenie $F, \mathcal{G}, \mathcal{C}$.

Keďže náhodné množiny skúmame cez ich pravdepodobnosti prieniku* s danými množinami, potrebujeme si zdefinovať dve dôležité podtriedy systému \mathcal{F} .

Definícia 21. Pre $A, A_1, \dots, A_k \subseteq E, k \in \mathbb{N}_0$ položme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_A &= \{F \in \mathcal{F}, F \cap A \neq \emptyset\}, & \mathcal{F}^A &= \{F \in \mathcal{F}, F \cap A = \emptyset\}, \\ \mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k}^A &= \mathcal{F}^A \cap \mathcal{F}_{A_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{A_k} \\ &= \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset, F \cap A_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap A_k \neq \emptyset\} \quad (\equiv \mathcal{F}^A \text{ pre } k = 0). \end{aligned}$$

Priestor \mathcal{F} sa ďalej vybaví topológiou generovanou sadou množín $\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}\}$. Tejto topológii sa hovorí *Fellova topológia*[†]. Zvedavému čitateľovi odporúčame kapitolu 12 z knihy Schneider a Weil (2008), kde sú opísané základné vlastnosti tejto topológie.

Pre formálnu definíciu náhodnej množiny potrebujeme priestor \mathcal{F} opatriť borelovskou σ -algebrou. Jej tvar opisuje nasledujúca lemma.

Lemma 8. σ -algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ borelovských množín z \mathcal{F} je generovaná jedným zo systémov

$$\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \quad \text{alebo} \quad \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Dôkaz. Viď Schneider a Weil (2008, Lemma 2.1.1). □

Definícia 22. Náhodná uzavretá množina[‡] v E je merateľné zobrazenie

$$\Xi : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathcal{F})).$$

* anglicky *hitting probabilities* † alternatívne aj topológia uzavretej konverencie alebo *hit-and-miss topológia* ‡ anglicky *random closed set*

1.2.2 Základné vlastnosti

Definícia 23. *Nech $E = \mathbb{R}^d$. Náhodná uzavretá množina Ξ sa nazýva stacionárna, ak*

$$\Xi \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\xi + x : \xi \in \Xi\}.$$

Izotropickú náhodnú uzavretú množinu definujeme analogicky, avšak posunutie o x nahradíme rotáciou \mathcal{O} ako v definícii 4.

Tvrdenie 9. *Neprázdna stacionárna náhodná uzavretá množina Ξ je skoro iste neohraničená. Stacionárna konvexná náhodná uzavretá množina je skoro iste prázdna alebo rovná \mathbb{R}^d .*

Dôkaz. Vid' Schneider a Weil (2008, Veta 2.4.4). □

System neprázdnych uzavretých podmnožín označíme symbolom $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \emptyset$. System kompaktných konvexných podmnožín \mathbb{R}^d označíme \mathcal{K} . Ďalej, $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \emptyset$.

Lemma 10. *Miera μ na \mathcal{F}' je lokálne konečná vtedy a len vtedy, keď*

$$\mu(\mathcal{F}_C) < \infty \quad \text{pre všetky } C \in \mathcal{C}.$$

Dôkaz. Vid' Schneider a Weil (2008, Lemma 2.3.1). □

Na koniec si ešte zavedieme jednu užitočnú štatistiku na opis konvexných telies.

Definícia 24. *Pre neprázdnu konvexnú množinu $K \in \mathcal{K}'$ a $\varepsilon > 0$ definujeme teleso rovnobežné s K vo vzdialenosti ε ako*

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\},$$

kde dist je Euklidovská vzdialenosť v \mathbb{R}^d . Jeho objem je polynóm stupňa najviac d ; tento výsledok je známy ako Steinerov vzorec

$$V_d(K_\varepsilon) = \sum_{i=0}^d \varepsilon^i \omega_i V_{d-i}(K),$$

kde V_d je d -rozmerná Lebesgueova miera a ω_i je objem jednotkovej gule v \mathbb{R}^i .

Takto definované $V_j, j \in \{0, \dots, d\}$ nazveme j -tý vnútorný objem* telesa K .

Definíciu vnútorného objemu môžeme aditívne rozšíriť pre spočetné zjednotenie konvexných telies. Na podrobnejšie štúdium vnútorných objemov odporúčame čitateľovi článok Mrkvička a Rataj (2008) alebo sekciu 14.2 v Schneider a Weil (2008).

Definícia 25. *Nech Ξ je náhodná uzavretá množina v \mathbb{R}^d . Za predpokladu konečnosti prvého momentu $V_j(\Xi \cap rB)$ definujeme hustotu j -tého vnútorného objemu Ξ ako*

$$\bar{V}_j = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} V_j(\Xi \cap rB)}{V_d(rB)},$$

kde B je ľubovoľná konvexná množina s neprázdnyim vnútrom a $rB = \{r \cdot b, b \in B\}$.

Geometrický význam V_j si predvedieme v \mathbb{R}^3 : pre trojrozmerné konvexné teleso sú jednotlivé významy zhrnuté v tabuľke 1.1.

* anglicky *j*th intrinsic volume

V_3	objem telesa
$2V_2$	povrch telesa
$\frac{1}{2}V_1$	priemerná šírka telesa
V_0	Eulerova charakteristika telesa

Tabuľka 1.1: Geometrický význam vnútorného objemu V_j v \mathbb{R}^3 .

Spravili sme si rýchly prehľad o náhodných množinách. Tieto si vieme dať do súvislosti aj s predchádzajúcou sekciou – náhodné množiny nám poskytujú alternatívny náhľad na bodové procesy – nosič jednoduchého bodového procesu je náhodná (lokálne konečná) uzavretá množina na danom priestore. Nakoniec sa zoznámime s konceptom procesu častíc.

1.3 Proces častíc

Proces častíc patrí medzi geometrické procesy, čo sú procesy, ktorých nosič je nejaký podsystem uzavretých množín, ktorý vieme odlišiť jeho geometrickým významom. Konkrétne, proces častíc je sústredený na systéme neprázdnych kompaktných množín. Tento systém označíme $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$.

1.3.1 Zavedenie

Definícia 26. Procesom častíc v \mathbb{R}^d rozumieme bodový proces uzavretých množín, ktorý je sústredený na množine \mathcal{C}' , t.j. jeho miera intenzity spĺňa

$$\Lambda(\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}') = 0.$$

Lokálna konečnosť je podľa lemy 10 ekvivalentná podmienke $\Lambda(\mathcal{F}_C) < \infty$ pre všetky $C \in \mathcal{C}$.

Definícia stacionarity časticového procesu je zdedená z definície 3 stacionarity pre bodový proces. Pre mieru intenzity stacionárneho časticového procesu existuje užitočný rozklad. Na jeho získanie potrebujeme ešte tri geometrické pojmy.

Definícia 27. Pre množinu $C \in \mathcal{C}'$ definujeme jej funkciu stredu $c : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d$, ktorá C priradí stred opísanej gule $c(C)$. Tento je jednoznačne určený ako stred najmenej gule v \mathbb{R}^d , ktorá obsahuje C .

Priestor zín procesov častíc definujeme ako

$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}' : c(C) = 0\}.$$

Homeomorfizmus $\mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}'$, ktorý priradí dvojici $(x, C) \mapsto x + C$ nazveme φ .

Veta 11. Nech Φ je stacionárny proces častíc v \mathbb{R}^d s mierou intenzity $\Lambda \neq 0$. Potom existuje číslo $\gamma \in (0, \infty)$ a pravdepodobnostná miera \mathbb{Q} na \mathcal{C}_0 tak, že

$$\Lambda = \gamma \varphi(\lambda \otimes \mathbb{Q}).$$

Číslo γ a miera \mathbb{Q} sú jednoznačne určené.

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Veta 4.1.1).

□

Definícia 28. Číslo γ nazveme intenzita a mieru \mathbb{Q} rozdelenie zrn* stacionárneho procesu častíc Φ .

Náhodná množina s rozdelením \mathbb{Q} sa nazýva typické zrno Φ .

1.3.2 Kótovaný proces častíc

Definícia 29. Kótovaným procesom častíc Φ rozumieme jednoduchý bodový proces na $\mathcal{C}' \times \mathbb{M}$, kde \mathbb{M} je priestor kót ako v sekcii 1.1.4.

Stacionarita opäť znamená stacionaritu nekótovaného podkladového bodového procesu. S použitím zobrazenia

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{C}_0 \times \mathbb{M} &\rightarrow \mathcal{C}' \times \mathbb{M} \\ (x, C, m) &\mapsto (x + C, m)\end{aligned}$$

dostaneme analogicky k vete 11 rozklad miery intenzity

$$\Lambda = \gamma \varphi(\lambda \otimes \mathbb{Q}_{\mathbb{M}}).$$

Definícia 30. Pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}_{\mathbb{M}}$ na $\mathcal{C}_0 \times \mathbb{M}$ sa nazýva zrnokótové rozdelenie† kótovaného procesu častíc Φ .

Máme pripravené základy stochastickej geometrie potrebné pre štúdium náhodných mozaík.

* anglicky *grain distribution* † anglicky *grain-mark distribution*

2. Náhodné mozaiky

Pod pojmom mozaika rozumieme rozdelenie priestoru (v našom prípade \mathbb{R}^d) systémom mnohostenov. Aby sme sa nezmiatli hneď na začiatok, spravme si poriadok v lexike. V anglickej literatúre sa stretne s dvoma názvami pre tento systém – *mosaic* a *tessellation*. Keď trochu zapátrame v slovníkoch, zistíme, že *tessellation* je produkt, ktorý vznikol procesom, ktorý delí nejaký priestor bez medzier alebo prekryvov, zatiaľ čo *mosaic* je pojem vyhradený skôr pre ozdobné poskladanie nejakých predmetov, napríklad sklíčok. Spisovná slovenčina však, na rozdiel od češtiny, kde sa v niektorých slovníkoch cudzích slov môžeme stretnúť s pojmom *teselace*, pozná iba pojem *mozaika*. To nám však nebráni pre účely tejto práce vytvoriť a používať kalky *teselácia* a *teselovať*, ktorými budeme sporadicky označovať proces delenia priestoru. Pre konkrétne realizácie týchto delení budeme zásadne používať iba pojem mozaika.

Delíme teda celý priestor \mathbb{R}^d na systém konvexných mnohostenov s navzájom disjunktnými vnútromi. Alternatívne môžeme na náhodnú mozaiku pozeráť ako na špeciálnu náhodnú uzavretú množinu (tvorenú hranicami bunky mozaiky) alebo bodový proces konvexných mnohostenov. Pre začiatok sa budeme držať širokého rámca teselácií v \mathbb{R}^d , avšak pre výsledky, ktoré nie sú vo všeobecnom priestore známe alebo sú príliš komplikované, sa budeme musieť obmedziť na dvoj alebo trojrozmerný prípad.

Na tému náhodných mozaík existuje nepreberné množstvo literatúry. Mozaiky sú neoceniteľné pri výskume štruktúry látok; napríklad zrnitá štruktúra kovov v metalurgii, skúmanie kryštalických látok, ale aj v teórii sietí, astronómii či biológii. Podrobnejší zoznam aplikácií vrátane odkazov na príslušnú literatúru nájde čitateľ v knihe Chiu a kol. (2013, str. 349) alebo diele Okabe a kol. (2000). My budeme prioritne vychádzať z kníh Schneider a Weil (2008, kap. 10) a Chiu a kol. (2013, kap. 9). Teóriu mozaík v \mathbb{R}^d nájdeme v Møller (1989).

2.1 Základné pojmy a vlastnosti

2.1.1 Zavedenie v \mathbb{R}^d

Značenie \mathcal{F}' a \mathcal{C}' používame pre postupne neprázdne uzavreté a neprázdne kompaktné množiny; $\mathcal{F}'(E) = \mathcal{F}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{C}'(E) = \mathcal{C}(E) \setminus \{\emptyset\}$. My skúmame mozaiky pre $E = \mathbb{R}^d$.

Definícia 31. Mozaikou (teseláciou) v \mathbb{R}^d nazveme spočítateľný systém $T = \{C_i, i \in \mathbb{N}\}$ množín $C_i \in \mathcal{C}'$, ktorý spĺňa

- (i) $\text{int } C_i \cap \text{int } C_j = \emptyset$, $i \neq j$,
- (ii) $\bigcup_i C_i = \mathbb{R}^d$,
- (iii) T je lokálne konečná, t.j. $\#\{C_i \in T : C_i \cap B \neq \emptyset\} < \infty$ pre všetky $B \in \mathcal{B}_0^d$,
- (iv) každá C_i je kompaktná konvexná množina s vnútornými bodmi.

Množiny C_i nazveme bunky mozaiky.

Bunky mozaiky majú nutne jednu špeciálnu vlastnosť.

Tvrdenie 12. *Bunky mozaiky sú konvexné polytopy*.*

Dôkaz. Dôkaz, ktorý predvedieme je inšpirovaný dôkazom Schneider a Weil (2008, Lemmy 10.1.1).

Nech T je mozaika a $C \in T$. Z bodu (iii) definície 31 existuje najviac konečne mnoho buniek $C_1, \dots, C_m \in T \setminus \{C\}$ takých, že $C_i \cap C \neq \emptyset$. Podľa bodu (ii) potom platí $\text{bd } C = \bigcup_{i=1}^m (C_i \cap C)$.

Nech $i \in \{1, \dots, m\}$. Podľa bodu (i) definície $\text{int } C \cap \text{int } C_i = \emptyset$, preto konvexné útvary C a C_i môžeme oddeliť nadrovinou H_i , teda pre ňou vytvorené uzavreté polpriestory (označme H_i^+ a H_i^-) platí $C \subset H_i^+, C_i \subset H_i^-$ (nadroviny pomenujeme tak, aby to platilo). Tvrdíme, že toto implikuje

$$C = \bigcap_{i=1}^m H_i^+. \quad (2.1)$$

Časť $C \subset \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ je zrejmá. Nech $x \in \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ a predpokladajme, že $x \notin C$. Existuje bod $y \in \text{int } C \subset \text{int } \bigcap_{i=1}^m H_i^+$. Úsečka spájajúca body x a y teda obsahuje bod $x' \in \text{bd } C$. Keďže $x' \neq x$, máme $x' \in \text{int } \bigcap_{i=1}^m H_i^+$.

Na druhú stranu, $x' \in C_j$ pre nejaké $j \in \{1, \dots, m\}$, čo je spor. Teda (2.1) platí a C , súc kompaktnou množinou, ktorá je prienikom konečne mnoho uzavretých polpriestorov, je polytop. □

Definícia 32. Stena [†] konvexného polytopu P v \mathbb{R}^d je prienik P s jeho opornými nadrovinami.

Stenu P dimenzie k nazveme k -stena [‡] polytopu P .

Teda 0-steny polytopu sú *vrcholy* (stotožňujeme $\{x\}$ a x), 1-steny sú *hrany* a $(d-1)$ -steny sú *fazety*[§] polytopu. Pre pohodlnosť budeme d -rozmerný polytop P považovať za d -stenu P . Ak máme polytop reprezentovaný ako prienik nadrovin (viď (2.1)), každá k -stena P je prienik P s $d-k$ vhodnými nadrovinami.

Označme $\Delta_k(P)$ množinu všetkých k -stien polytopu P a

$$\Delta_k(T) = \bigcup_{C \in T} \Delta_k(C)$$

množinu všetkých k -stien všetkých buniek mozaiky T . Ďalej, nech

$$F(y) = \bigcap_{C \in T, y \in C} C, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

je prienik všetkých buniek mozaiky obsahujúcich bod y . Potom $F(y)$ je konečný prienik d -rozmerných polytopov, a keďže je neprázdny, tak je sám k -rozmerným polytopom pre nejaké $k \in \{0, \dots, d\}$. Teda môžeme zaviesť množinu

$$\mathcal{S}_k(T) = \{F(y) : \dim F(y) = k, y \in \mathbb{R}^d\}, \quad k = 0, \dots, d$$

* pre nás najzaujímavejší mnohosten v prípade $d = 3$; termín polytop používame pre rozlíšenie zovšeobecnenia mnohostenu do \mathbb{R}^d [†] anglicky *face* [‡] anglicky *k-face* [§] anglicky *facet*

všetkých k -stien mozaiky T . Potom k -stena $H \in \Delta_k(T)$ bunky C mozaiky T je zjednotením všetkých k -stien $F \in \mathcal{S}_k(T)$ mozaiky obsiahnutej v H .

Ďalej označíme

$$\Delta_\bullet(P) = \bigcup_{k=0}^d \Delta_k(P).$$

Definícia 33. *Nech T je teselácia v \mathbb{R}^d .*

Teseláciu T nazveme face-to-face, ak sú steny buniek a steny mozaiky zhodné, teda

$$\Delta_k(T) = \mathcal{S}_k(T), \quad k = 0, \dots, d$$

alebo ekvivalentne pre dva polytopy P, P' buniek T platí

$$P \cap P' \in (\Delta_\bullet(P) \cap \Delta_\bullet(P')) \cup \{\emptyset\}.$$

Face-to-face mozaiku nazveme normálnou, ak každá jej k -stena patrí do hranice práve $d - k + 1$ buniek, $k = 0, \dots, d - 1$.

Zavedenie face-to-face mozaík teda bráni situácii, aby vrchol bunky bol iba relatívne vnútorným bodom steny susednej bunky. Normalita zas skúma vzťah k -stien k bunkám mozaiky. Pre $k = d - 1$ je podmienka normality automaticky splnená – každá fazeta v mozaike patrí práve dvom susediacim bunkám – pre ostatné k však nie je normalita automatická. V rovine $d = 2$ normalita znamená, že v každom vrchole mozaiky sa stretávajú práve 3 bunky, a teda práve 3 hrany. Vo všeobecnosti, v normálnej mozaike každá j -stena prislúcha

$$\binom{d - j + 1}{k - j}, \quad 0 \leq j \leq k \leq d \tag{2.2}$$

k -stenám (viď Møller (1989, Tvrdenie 3.1)).

Ďalej sa v našom bádání zameriame na face-to-face mozaiky. Pre typy mozaík, s ktorými sa stretneme neskôr bude táto podmienka splnená automaticky. Označme \mathbb{T} množinu všetkých mozaík v \mathbb{R}^d , ďalej \mathbb{T}_f množinu všetkých face-to-face mozaík a \mathbb{T}_n množinu všetkých normálnych mozaík v \mathbb{R}^d .

Pre formálne zavedenie náhodných mozaík potrebujeme ešte jedno tvrdenie o merateľnosti. Priestor \mathcal{F}' opatrený Fellovou topológiou (viď vysvetlenie za definíciou 21) tvorí lokálne kompaktný priestor so spočítateľnou bázou (viď Schneider a Weil (2008, poznámka (b) za Vetou 12.2.1)). Fellovu topológiu teda môžeme definovať aj pre systém $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$.

Tvrdenie 13. *Systémy \mathbb{T} a \mathbb{T}_f sú borelovské množiny v $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$. Zobrazenie*

$$\begin{aligned} \varphi_k : \mathbb{T}_f &\rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}') \\ T &\mapsto \mathcal{S}_k(T) \end{aligned}$$

je merateľné, $k = 0, \dots, d - 1$.

Dôkaz. Viď Schneider a Weil (2008, Lemma 10.1.2). □

Definícia 34. Náhodnou teseláciou nazveme merateľné zobrazenie

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{T}, \mathcal{T}),$$

kde \mathcal{T} je stopa σ -algebry z lemy 8 na \mathbb{T} .

Náhodnú teseláciu nazveme face-to-face alebo normálnou, ak sú jej realizácie \mathbb{P} -skoro iste (postupne) face-to-face alebo normálne.

Rozdelením náhodnej mozaiky rozumieme pravdepodobnostnú mieru indukovanú na $(\mathbb{T}, \mathcal{T})$.

Poznámka. Ekvivalentne môžeme náhodnú mozaiku definovať ako proces častíc Φ v \mathbb{R}^d , ktorý skoro iste splňa $\Phi \in \mathbb{T}$ (prípadne \mathbb{T}^*). Takýto prístup je použitý napr. v knihe Schneider a Weil (2008).

Stacionarita a izotropia sa definujú obvyklým spôsobom.

Definícia 35. Pre mozaiku $T \in \mathbb{T}$ definujeme jej posunutie $t_z T$ a rotáciu $R_{\mathcal{O}} T$ ako

$$\begin{aligned} t_z T &= \{C + z : C \in T\}, \quad z \in \mathbb{R}^d \\ R_{\mathcal{O}} T &= \{R_{\mathcal{O}} C : C \in T\}, \quad R_{\mathcal{O}} \text{ operátor rotácie } \mathcal{O} \text{ rotácia v } \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Náhodnú mozaiku nazveme stacionárnou, ak jej rozdelenie je invariantné voči posunutiam a izotropickou, ak je invariantné voči rotáciám.

2.1.2 Typická bunka

Pre náhodnú mozaiku T definuje

$$T^{(k)} = \mathcal{S}_k(T), \quad k \in \{0, \dots, d\}$$

(s konvenciou $T^{(d)} = T$) proces častíc; konkrétne bodový proces k -rozmerných polytopov. Jeho merateľnosť je dôsledkom tvrdenia 13, lokálna konečnosť zas dôsledkom definície 31. Mieru intenzity $T^{(k)}$ označíme $\Lambda^{(k)}$. Zdôrazňujeme, že lokálna konečnosť $\Lambda^{(d)}$ neimplikuje lokálnu konečnosť $\Lambda^{(k)}$ pre $k < d$ (protipríklad viď napr. v Schneider a Weil (2008, poznámka 2 k sekcii 10.1)).

V nasledujúcich odvodzovaniach budeme dodržiavať úzus, že aj procesy stien $T^{(k)}$, $k = 0, \dots, d$ majú lokálne konečné miery intenzity. Takisto budeme uvažovať iba stacionárne náhodné mozaiky. Ich procesy stien $T^{(k)}$ sú tiež stacionárne.

Označíme $\gamma^{(k)}$ intenzitu a

$$d_j^{(k)} = \bar{V}_j(T^{(k)}), \quad j = 0, \dots, k$$

hustotu j -tého vnútorného objemu k -stien vytvorených procesom $T^{(k)}$ (viď definícia 25). $\mathbb{Q}^{(k)}$ označuje rozdelenie zrn $T^{(k)}$ (viď definícia 28). V zmysle tohto značenia sú $\gamma^{(d)}$ a $\mathbb{Q}^{(d)}$ intenzita a rozdelenie zrn samotného procesu častíc Φ náhodnej mozaiky.

Definícia 36. Náhodný polytop $Z^{(k)}$ s rozdelením $\mathbb{Q}^{(k)}$ nazveme typická k -stena náhodnej mozaiky.

Pre $k = d$ ju nazývame typická bunka a značíme Z miesto $Z^{(d)}$.

Poznámka. S touto terminológiou je

$$\mathbb{E} V_j(Z^{(k)}) = \frac{d_j^{(k)}}{\gamma^{(k)}}$$

priemerný j tý vnútorný objem typickej k -steny mozaiky. Hustota $d_k^{(k)}$ sa niekedy v literatúre označuje ako $\mu_k, k \in \{0, \dots, d\}$.

2.1.3 Vzťahy medzi intenzitami

Teraz zužitkujeme kótované procesy častíc. Vyrobíme proces, ktorého častice sú j -steny mozaiky a za kóty zvolíme nejaké ich vlastnosti. Označíme $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$ systém konečných množín neprázdnych konvexných telies v \mathbb{R}^d . Ďalej c značí funkciu stredu a $c(C)$ stred opísanej gule kompaktnej množiny C ako v definícii 27.

Definícia 37. Pre $j, k \in \{0, \dots, d\}$ nazveme (j, k) -stenovou hviezdnicou dvojicu $(T, \mathcal{S}) \in \mathcal{K}' \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$, kde T je j -rozmerný polytop a \mathcal{S} je konečná množina k -rozmerných polytopov splňajúca nasledujúce podmienky:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \Delta_k(T - c(T)) & \text{ak } j \geq k, \\ T - c(T) &\in \Delta_j(\mathcal{S}) \quad \text{pre všetky } S \in \mathcal{S} & \text{ak } j < k. \end{aligned}$$

Ak $T \in \mathbb{T}_f$ je mozaika a τ je j -stena T , potom

$$\begin{aligned} \Delta_k(\tau, T) &= \Delta_k(\tau - c(\tau)) & \text{pre } j \geq k, \\ \Delta_k(\tau, T) &= \{S - c(\tau) : S \in \Delta_k(T), \tau \subset S\} & \text{pre } j < k. \end{aligned}$$

Teda $(\tau, \Delta_k(\tau, T))$ je (j, k) -stenová hviezdica, ktorú nazveme (j, k) -stenová hviezdica mozaiky T . Množinu všetkých (j, k) -stenových hviezdíc mozaiky T označíme

$$\mathcal{T}_{jk}(T) = \{(\tau, \Delta_k(\tau, T)) : \tau \in \Delta_j(T)\}.$$

Pre j -stenu P je teda (j, k) -stenová hviezdica množina všetkých k -stien, ktoré obsahujú P (pre $j \geq k$) alebo k -stien, ktoré sú obsiahnuté v P . Platí užitočný vzťah medzi charakteristikami stien mozaiky. Značením \mathbb{E}_k myslíme strednú hodnotu voči rozdeleniu $\mathbb{Q}^{(k)}$.

Veta 14. Nech T je stacionárna náhodná mozaika v \mathbb{R}^d a nech f a g sú nezáporné merateľné funkcie na $(\mathbb{T}, \mathcal{S}_k)$ a $(\mathbb{T}, \mathcal{S}_j)$ (postupne), ktoré sú translačne invariantné v oboch zložkách, teda

$$\begin{aligned} f(T + y, P_k + y) &= f(T, P_k) \quad \text{pre všetky } y \in \mathbb{R}^d, T \in \mathbb{T}_f \text{ a } P_k \in \mathcal{S}_k(T), \\ g(T + y, P_j + y) &= g(T, P_j) \quad \text{pre všetky } y \in \mathbb{R}^d, T \in \mathbb{T}_f \text{ a } P_j \in \mathcal{S}_j(T), \end{aligned}$$

takzvané charakteristiky stien P_k a P_j . Potom pre $j, k \in \{0, \dots, d\}$ platí

$$\lambda^{(k)} \mathbb{E}_k \left[h(t, P_k) \sum_{P_j \in \mathcal{T}_{jk}(T)} f(T, P_j) \right] = \lambda^{(j)} \mathbb{E}_j \left[h(t, P_j) \sum_{P_k \in \mathcal{T}_{kj}(T)} f(T, P_k) \right].$$

Dôkaz. Vid Møller (1989, Veta 5.1). □

Tvrdenie 15. Zobrazenie $\varphi : \mathbb{T}_f \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{K}' \times \mathcal{F}(\mathcal{K}'))$ ktoré mozaikre T priradí množinu jej (j, k) -stenových hviezdíc $\mathcal{T}_{jk}(T)$ je merateľné, $j, l = 0, \dots, d$.

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Lemma 10.1.3). □

Ďalej sa nám zide vyrobiť bodový proces hviezdíc stacionárnej mozaiky T . Vďaka tvrdeniu o merateľnosti (tvrdenie 15) definuje množina

$$\mathcal{X}^{(j, k)} = \mathcal{T}_{jk}(T)$$

všetkých (j, k) -stenových hviezdíc mozaiky T bodový proces na $\mathcal{K}' \times \mathcal{F}(\mathcal{K}')$, ktorý je koncentrovaný na podpriestore $\mathcal{K}' \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$. Proces $\mathcal{X}^{(j, k)}$ je stacionárny kótovaný proces častíc s priestorom kót $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$. Jeho intenzita je $\gamma^{(j)}$; navyše, je prirodzené stotožniť $\mathcal{X}^{(j, j)}$ s $T^{(j)}$.

Zrnokótové rozdelenie $\mathbb{Q}^{(j, k)}$ (viď definícia 30) tvorí pravdepodobnostnú mieru na $\mathcal{K}_0 \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$. Jeho marginálne rozdelenie voči prvému členu $\mathcal{K}_0 \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$ nie je nič iné, než rozdelenie stenového procesu $T^{(j)}$. V zmysle tohto faktu môže byť veta 14 formulovaná na priestore $\mathcal{K}_0 \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$, viď Schneider a Weil (2008, Veta 10.1.1).

Pre proces $\mathcal{X}^{(j, k)}$ definujeme výrazy analogické vnútorným objemom a ich hustotám.

Definícia 38. Pre $i = 0, \dots, d$ a $\mathcal{S} \in \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')$ položíme

$$V_i(\mathcal{S}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} V_i(S)$$

a definujeme

$$\begin{aligned} v_i^{(j, k)} &= \int_{\mathcal{K}_0 \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')} V_i(\mathcal{S}) \mathbb{Q}^{(j, k)}(d(T, \mathcal{S})) \\ d_i^{(j, k)} &= \gamma^{(j)} v_i^{(j, k)}. \end{aligned}$$

Poznámka. Aj keď konečnosť parametrov $v_i^{(j, k)}$ nie je zaručená, budeme predpokladať, že platí.

Pre niektoré výrazy ešte zavedieme značenie, ktorými sa bežne označujú, dokonca naprieč väčšinou spektra dostupnej literatúry. Označíme $N_k(T, \mathcal{S}) = V_0(S)$ počet k -stien v (j, k) -stenovej hviezdici (T, \mathcal{S}) a položíme $n_{jk} = v_0^{(j, k)}$, čo je teda očakávaný počet k -stien v typickej (j, k) -stenovej hviezdici (zrejme $n_{jj} = 1$). Formálne, je to stredná hodnota N_k voči miere $\mathbb{Q}^{(j, k)}$. Pre $j > k$ je teda n_{jk} priemerný počet k -stien typickej j -stieny náhodnej mozaiky. Platí nasledujúci vzťah

Veta 16. Pre stacionárnu náhodnú mozaiku T v \mathbb{R}^d a pre $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$

$$d_i^{(j, k)} = \gamma^{(k)} \int_{\mathcal{K}_0 \times \mathcal{F}_f(\mathcal{K}')} V_i(S) N_j(S, \mathcal{T}) \mathbb{Q}^{(k, j)}(d(S, \mathcal{T})).$$

Špeciálne, pre $i = 0$

$$\gamma^{(j)} n_{jk} = \gamma^{(k)} n_{kj}. \quad (2.3)$$

Navyše,

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \gamma^{(i)} = 0$$

a pre $j \in \{0, \dots, d-1\}$

$$\sum_{i=j}^d (-1)^i d_j^{(i)} = 0.$$

Dôkaz. Viď Møller (1989, Tvrdenie 5.2) a Schneider a Weil (2008, Vety 10.1.2 a 10.1.4). □

Pre normálne mozaiky existujú ešte jednoduchšie vzťahy medzi intenzitami.

Veta 17. *Nech T je stacionárna normálna náhodná mozaika a $k \in \{1, \dots, d\}$. Potom*

$$(1 - (-1)^k) \gamma^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{d+1-j}{k-j} \gamma^{(j)}.$$

Dôkaz. Podľa (2.2) platí $n_{jk} = \binom{d+1-j}{k-j}$. Preto

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{d+1-j}{k-j} \gamma^{(j)} &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \gamma^{(j)} n_{jk} = \gamma^{(k)} \sum_{j=0}^k (-1)^j n_{kj} \\ &= \gamma^{(k)} \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{j=0}^k (-1)^j f_j(Q) \mathbb{Q}^{(k)}(dQ) = \gamma^{(k)}, \end{aligned}$$

kde druhá rovnosť platí podľa (2.3) z vety 16 a predposledná rovnosť platí podľa známeho Eulerovho vzorca pre konvexné k -rozmerné polytopy, viď napr. Lawrence (1997). □

Odvođené štatistiky teraz zozbierame a dáme im geometrický význam. Aj keď je naším hlavným záujmom prípad $d = 3$, informatívne uvedieme aj vzťahy pre mozaiky v rovine.

Začnime teda s $d = 2$. Aby sme opísali geometrický význam, dodefinujeme si ešte potrebné značenie. Položíme

$$\gamma^{(2)} a = \bar{V}_2(T) = d_2^{(2)}, \quad \frac{1}{2} \gamma^{(2)} p = \bar{V}_1(T) = d_1^{(2)}, \quad L_A = \gamma^{(1)} l_1 = \bar{V}_1(T^{(1)}) = d_1^{(1)}.$$

Významy relevantných parametrov sú spísané v tabuľke 2.1.

Veta 18 zhromažďuje základné vzťahy medzi uvažovanými charakteristikami. Tieto sa dajú vyjadriť pomocou troch parametrov: intenzít buniek a vrcholov a dĺžky typickej hrany. Nasledujúce vzťahy boli prvýkrát zozbierané v Mecke (1984).

$\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$	intenzity vrcholov, hrán a buniek
a, p	priemerná plocha a obvod typickej bunky
l_1	priemerná dĺžka typickej hrany
$n_{20} = n_{21}$	priemerný počet vrcholov (a hrán) typickej bunky
$n_{01} = n_{02}$	priemerný počet hrán typickej hranovej hviezdice (=priemerný počet buniek typickej (0,2)-hviezdice)
L_A	priemerná dĺžka hrán (značenie bežné v literatúre)

Tabuľka 2.1: Geometrický význam opisných charakteristík stacionárnej náhodnej mozaiky v \mathbb{R}^2 .

Veta 18. *Parametre stacionárnej náhodnej mozaiky T v \mathbb{R}^2 splňajú:*

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} &= \gamma^{(0)} + \gamma^{(2)}, & n_{02} &= 2 + 2\frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(0)}}, & n_{20} &= 2 + 2\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(2)}} \\ a &= \frac{1}{\gamma^{(2)}}, & p &= 2\frac{\gamma^{(1)}}{\gamma^{(2)}}l_1 = 2\frac{L_A}{\gamma^{(2)}}, & 3 &\leq n_{02}, n_{20} \leq 6. \end{aligned}$$

Ak je T navyše normálna, potom

$$n_{02} = 3, \quad n_{20} = 6 \quad a \quad \gamma^{(0)} = 2\gamma^{(2)}.$$

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Veta 10.1.6). Niektoré rovnosti sú priamym dôsledkom Viet 16 a 17. □

Teraz sa zameriame na $d = 3$. Opäť si dodefinujeme charakteristiky, ktoré nás budú zaujímať.

$$\begin{aligned} \gamma^{(3)}v &= d_3^{(3)}, & \frac{1}{2}\gamma^{(3)}s &= d_2^{(3)}, & S_V &= \gamma^{(2)}a_2 = d_2^{(2)}, & \frac{1}{2}\gamma^{(2)}p_2 &= d_1^{(2)}, \\ L_V &= \gamma^{(1)}l_1 = d_1^{(1)}, & l_{31} &= v_1^{(3,1)}, & l_{01} &= v_1^{(0,1)}, & a_{02} &= v_2^{(0,2)}, & a_{12} &= v_2^{(1,2)}. \end{aligned}$$

Ich geometrické významy sú zozbierané v tabuľke 2.2. Vo vete 19 sú zosumarizované základné vzťahy medzi týmito charakteristikami.

Veta 19. *Nech T je stacionárna náhodná mozaika v \mathbb{R}^3 . Potom jej charakteristiky splňajú*

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)} + \gamma^{(3)} &= \gamma^{(0)} + \gamma^{(2)}, & \gamma^{(0)}n_{01} &= 2\gamma^{(1)}, & \gamma^{(3)}n_{32} &= 2\gamma^{(2)}, \\ \gamma^{(0)}n_{03} &= \gamma^{(3)}n_{30}, & \gamma^{(0)}n_{02} &= \gamma^{(1)}n_{12} = \gamma^{(2)}n_{21} = \gamma^{(3)}n_{31}, \\ n_{01} - n_{02} + n_{03} &= 2, & n_{30} - n_{31} + n_{32} &= 2, & 2n_{02} &= n_{01}n_{12}, \\ 2n_{31} &= n_{21}n_{32}, & n_{02}n_{30} &= n_{03}n_{31}, & \gamma^{(0)}l_{01} &= 2\gamma^{(1)}l_1 = 2L_V, \\ \gamma^{(2)}p_2 &= \gamma^{(3)}l_{31}, & \gamma^{(0)}a_{02} &= \gamma^{(1)}a_{12}, & v &= \frac{1}{\gamma^{(3)}}, & s &= 2\frac{\gamma^{(2)}}{\gamma^{(3)}}a_2 = \frac{2S_V}{\gamma^{(3)}}. \end{aligned}$$

Navyše, ak je T normálna, potom

$$n_{01} = n_{03} = 4, \quad n_{12} = 3, \quad n_{02} = 6, \quad \gamma^{(2)} = \gamma^{(0)} + \gamma^{(3)} \quad a \quad \gamma^{(1)} = 2\gamma^{(0)}.$$

$\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)}$	intenzity vrcholov, hrán, fazet a buniek
v, s, b, l_{31}	priemerný objem, plošný obsah, šírka a celková dĺžka hrán typickej bunky
a_2, p_2	priemerný plošný obsah a obvod typickej fazety
l_1, l_{01}	priemerná dĺžka typickej hrany a hranovej hviezdice
a_{02}, a_{12}	priemerný plošný obsah typickej (0,2)-hviezdice a (1,2)-hviezdice
n_{32}, n_{02}, n_{12}	priemerný počet fazet typickej bunky, (0,2)-hviezdice a (1,2)-hviezdice
n_{31}, n_{21}, n_{01}	priemerný počet hrán typickej bunky, fazety a hranovej hviezdice
n_{30}, n_{03}	priemerný počet vrcholov typickej bunky a buniek typickej (0,3)-hviezdice
L_V, S_V	priemerná dĺžka hrán a priemerná plocha fazet (značenie bežné v literatúre)

Tabuľka 2.2: Geometrický význam opisných charakteristík stacionárnej náhodnej mozaiky v \mathbb{R}^3 .

Dôkaz. Vid' Schneider a Weil (2008, Veta 10.1.7). Niektoré rovnosti sú priamym dôsledkom Viet 16 a 17. □

Poznámka. Teória vzťahov medzi intenzitami sa dá odvodiť aj iným spôsobom. Pre každú kompaktnú množinu sa zvolí nejaké ťažisko (napr. fyzikálne ťažisko, stred opísanej gule, krajný bod v nejakom smere ale v podstate aj hocikaký iný bod; dá sa dokázať, že na tejto voľbe výsledky nezávisia). Na základe týchto sa potom uvažuje bodový proces ťažísk k -stien. Predmetom záujmu je potom jeho intenzita a na základe jeho Palmovho rozdelenia sa definuje typická k -stena. Takýto prístup používa napr. Møller (1989). Náš prístup je ale mierne prehľadnejší pri tvrdeniach o merateľnosti.

2.2 Voronoiove mozaiky

Existuje veľké množstvo modelov pre náhodné mozaiky. My sa teraz zameriame na jeden z najzákladnejších modelov, ktorý slúži ako odrazový mostík pre budovanie množstva zložitejších modelov. Na jeho vytvorenie nám postačí jednoduchý bodový proces v \mathbb{R}^d .

Koncept takýchto pravidelných mozaík vznikol ešte v 19. storočí, motivovaný štúdiom kvadratických foriem. V 20. storočí potom nezávisle na sebe našiel uplatnenie v metalurgii, kryštalografii aj ekológii. Dnes je intenzívne využívaný v materiálovom inžinierstve pri skúmaní mikroštruktúr kryštálov, ale aj v astronómii pri

modelovaní galaxií. Pre obsiahle historické okienko odporúčame čitateľovi sekciu 1.2 knihy Okabe a kol. (2000). My budeme v texte vychádzať z publikácie Møller (1994) a kapitoly 10 knihy Schneider a Weil (2008).

2.2.1 Zavedenie

Definícia 39. *Nech $A \neq \emptyset$ je lokálne konečná množina v \mathbb{R}^d . Proky množiny A nazveme jadrá. Každé jadro $x \in A$ generuje množinu*

$$C(x, A) = \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - a\| \text{ pre všetky } a \in A\},$$

ktorú nazveme Voronoiova bunka jadra x (voči A).

Voronoiova bunka $C(x, A)$ je teda množina bodov z , ktoré majú x za najbližšie jadro. Ekvivalentne môžeme Voronoiovu bunku zapísať ako

$$C(x, A) = \bigcap_{y \in A, y \neq x} H_y(x),$$

kde $H_y(x)$ označuje pre $x \neq y$ uzavretý podpriestor obsahujúci x ohraničený nadrovinou prechádzajúcou cez stred úsečky medzi bodmi x a y kolmou voči $y - x$, formálne

$$H_y(x) = \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z, y - x \rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2)\}.$$

$C(x, A)$ je teda uzavretá konvexná množina s vnútorným bodom (značenie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ používame pre štandardný skalárny súčin v \mathbb{R}^d). Nás bude zaujímať systém takýchto buniek, ktorý nazývame *Voronoiov diagram*, označíme

$$T = \{C(x, A) : x \in A\}. \quad (2.4)$$

Tento systém je lokálne konečný. Máme tak splnené podmienky (i), (ii) a (iii) definície 31 mozaiky v \mathbb{R}^d . Podmienka (iv) avšak nemusí byť splnená, pretože bunky $C(x, A)$ nie sú nutne ohraničené. Na to aby boli musíme pridať ďalšiu podmienku.

Tvrdenie 20. *Voronoiova bunka $C(x, A)$ je ohraničená vtedy a len vtedy, keď*

$$\forall z \in S^{d-1} \exists x_1 \in A \setminus \{x\} : \langle x_1 - x, z \rangle > 0, \quad (2.5)$$

kde $S^{d-1} = \{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| = 1\}$ je jednotková sféra v \mathbb{R}^d . Ak $C(x, A)$ je ohraničená, potom má konečný počet susediacich buniek (označme $C(x_1, A), \dots, C(x_n, A)$), a potom

$$C(x, A) = \bigcap_{i=1}^n H_{x_i}(x).$$

Dôkaz. Vid' Møller (1994, Tvrdenie 2.1.3). □

Poznámka. Za podmienky (2.5) platí, že konvexný obal množiny A je celé \mathbb{R}^d . Toto sa niekedy uvádza ako postačujúca podmienka pre ohraničenosť $C(x, A)$.

Spolu s podmienkou ohraničenosti Voronoiovej bunky teda Voronoiov diagram (2.4) spĺňa všetky podmienky definície 31, a tvorí teda mozaiku v nám známom zmysle. Ako hovorí nasledujúce tvrdenie, táto mozaika je dokonca face-to-face.

Tvrdenie 21. *Nech $A \subset \mathbb{R}^d$ je lokálne konečná neprázdna množina taká, že jej príslušné Voronoiove bunky $C(x, A)$, $x \in A$ sú ohraničené. Potom $T = \{C(x, A) : x \in A\}$ je face-to-face mozaika.*

Dôkaz. Ostáva dokázať, že mozaika je face-to-face. Predpokladajme pre spor, že to neplatí, a teda existujú dve bunky $C_1 = C(x_1, A)$ a $C_2 = C(x_2, A)$ také, že $S = C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, ale S nie je stenou C_1 . Potom afinný obal S obsahuje bod $z \in C_1$ taký, že $z \notin S$. Tento afinný obal aj množina S ležia v nadrovine $H_{x_2}(x_1) \cap H_{x_1}(x_2)$, a teda

$$\langle z, x_2 - x_1 \rangle = \frac{1}{2}(\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2).$$

Keďže $z \notin C_2$, tak existuje $y \in A$ také, že $z \notin H_y(x_2)$, teda

$$\langle z, y - x_2 \rangle > \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x_2\|^2).$$

Keďže $z \in C_1$

$$\langle z, y - x_1 \rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x_1\|^2).$$

Tieto dve nerovnosti sú ale v spore s rovnosťou nad nimi, a teda T je face-to-face mozaika. □

Z takto vyrobenej mozaiky vyrobíme náhodnú mozaiku jednoducho – množinu A získame ako nosič bodového procesu. Budeme predpokladať iba bodové procesy so skoro iste neprázdny nosičom.

Veta 22. *Nech Φ je stacionárny bodový proces v \mathbb{R}^d a*

$$T = \{C(x, \Phi) : x \in \text{supp } \Phi\}$$

je systém príslušných Voronoiových buniek. Ak T má lokálne konečnú mieru intenzity, potom T je stacionárna face-to-face náhodná mozaika.

Dôkaz. Keďže neuvažujeme prázdny nosič Φ , platí podľa vety 9, že konvexný obal Φ je celé \mathbb{R}^d . Z poznámky za tvrdením 20 sú teda príslušné Voronoiove bunky neprázdne pre skoro všetky realizácie Φ . Podľa tvrdenia 21 je teda T face-to-face náhodná mozaika. Stacionarita mozaiky je zrejmá zo stacionarity Φ . □

Definícia 40. *Mozaiku $T = \{C(x, \text{supp } \Phi) : x \in \Phi\}$ definovanú vo vete 22 nazveme Voronoiovou mozaikou s generujúcim bodovým procesom Φ .*

2.2.2 Poissonova-Voronoiova mozaika

Vo vete 22 je predpoklad lokálne konečnej miery intenzity dôležitý a nie je automaticky splnený ani z predpokladu lokálne konečnej miery intenzity Φ . Takisto, normalita mozaiky tiež nie je pre všeobecnú Voronoiovu mozaiku zaručená. Tieto podmienky sú však splnené, ak je generujúcim bodovým procesom jednoduchý Poissonov bodový proces.

Definícia 41. *Povieme, že body $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ sú vo všeobecnej kvadratickej pozícii, ak spĺňajú nasledujúce podmienky:*

(VKP1) *neexistuje kombinácia $k+1$ bodov tak, že všetky ležia v $(k-1)$ -rozmernom afinnom podpriestore \mathbb{R}^d , $k \in \{2, \dots, d\}$,*

(VKP2) *žiadnych $d+2$ bodov neleží na hranici nejakej d -rozmernej sféry.*

Definícia 42. *Voronoiovu mozaiku, ktorej generujúci bodový proces je Poissonov bodový proces (viď definícia 14), ktorého body sú skoro iste vo všeobecnej kvadratickej pozícii nazývame Poissonova-Voronoiova mozaika.*

Budeme predpokladať, že body stacionárneho Poissonovho bodového procesu sú vo všeobecnej kvadratickej pozícii. Ak to spĺňa $m+1$ bodov $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ pre $m \in \{1, \dots, d\}$, existuje jednoznačne určená m -rozmerná sféra $B^m(x_0, \dots, x_m)$ obsahujúca tieto body na relatívnej hranici. Označme $z(x_0, \dots, x_m)$ stred tejto sféry a $F(x_0, \dots, x_m)$ $(d-m)$ -rozmerný afinný podpriestor prechádzajúci stredom ortogonálny voči $B^m(x_0, \dots, x_m)$. Ak $A \subset \mathbb{R}^d$ a $x_0, \dots, x_m \in A$ sú body ležiace vo všeobecnej kvadratickej pozícii, definujeme

$$S(x_0, \dots, x_m; A) = \{y \in F(x_0, \dots, x_m) : B_0(y, \|y - x_0\|) \cap A \neq \emptyset\},$$

kde $B_0(y, r)$ je otvorená guľa so stredom y a polomerom r . Inak definujeme $z(x_0, \dots, x_m) = 0$ a $S(x_0, \dots, x_m; A) = \emptyset$.

Ak je T Poissonova-Voronoiova mozaika generovaná bodovým procesom Φ a (x_0, \dots, x_m) sú po dvoch disjunktné body z jeho nosiča, potom afinný podpriestor $F(x_0, \dots, x_m)$ je afinný obal nejakej $(d-m)$ -steny S mozaiky T práve vtedy, keď $S(x_0, \dots, x_m; \text{supp } \Phi) \neq \emptyset$. V tomto prípade $S = S(x_0, \dots, x_m; \text{supp } \Phi)$ a každú $(d-m)$ -stenu vieme takto vyrobiť.

Tvrdenie 23. *Každá Poissonova-Voronoiova mozaika T v \mathbb{R}^d je normálna.*

Dôkaz. Nech S je k -stena T , $k \in \{0, \dots, d-2\}$, ktorá je ohraničením práve buniek $C(x_0, \text{supp } \Phi), \dots, C(x_m, \text{supp } \Phi)$. Potom afinný obal S je množina bodov $y \in \mathbb{R}^d$ takých, ktoré ležia v rovnakej vzdialenosti od x_0, \dots, x_m . Vďaka všeobecnej kvadratickej pozícii neleží skoro iste žiadnych $d+2$ bodov $\text{supp } \Phi$ na jednej sfére, a preto nutne $m \leq d$. Afinný obal S teda musí byť rovný $F(x_0, \dots, x_m)$, preto $k = d - m$. □

Rozdelenie stacionárneho Poissonovho procesu je jednoznačne určené intenzitou λ . Všetky parametre rozdelenia Poissonovej-Voronoiovej mozaiky teda vieme vyjadriť v závislosti na λ . Podobne ako v sekcii 2.1 sa pozrieme na hustoty $d_k^{(j,k)}$, ktorých tvar explicitne vyjadríme. Ich konečnosť spolu s lokálnou konečnosťou mier intenzity procesov stien teraz plynie z konečnosti intenzity λ .

Veta 24. *Nech T je Poissonova-Voronioiva mozaika v \mathbb{R}^d generovaná stacionárnym Poissonovým bodovým procesom s intenzitou λ . Potom pre $k \in \{0, \dots, d\}$ a $j \in \{k, \dots, d\}$*

$$d_k^{(k)} = \frac{2^{d-k+1} \pi^{\frac{d-k}{2}} \Gamma\left(\frac{d^2-kd+k+1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)^{d-k+\frac{k}{d}} \Gamma\left(d-k + \frac{k}{d}\right)}{d(d-k+1)! \Gamma\left(\frac{d^2-kd+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \lambda^{1-\frac{k}{d}},$$

$$d_k^{(j,k)} = \binom{d-k+1}{j-k} d_k^{(k)}.$$

Dôkaz. Vid Schneider a Weil (2008, Veta 10.2.4). □

Pre $k = 0$ dostávame z vety 24

$$\gamma^{(0)} = \frac{2^{d+1} \pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{d^2+1}{2}\right)}{d^2(d+1) \Gamma\left(\frac{d^2}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \right]^d \lambda$$

$$\gamma^{(j)} n_{j0} = \binom{d+1}{j} \gamma^{(0)} \quad \text{pre } j \in \{1, \dots, d\}.$$

Podobne ako vo vetách 18 a 19 si zosumarizujeme vzťahy pre charakteristiky Poissonovej-Voronioovej mozaiky v prípade $d = 2$ a $d = 3$. Ich geometrické významy ostávajú rovnaké, ako v tabuľkách 2.1 a 2.2.

Veta 25. *Nech T je Poissonova-Voronioiva mozaika v \mathbb{R}^d generovaná stacionárnym Poissonovým bodovým procesom s intenzitou λ . Potom pre $d = 2$:*

$$\gamma^{(0)} = 2\lambda, \quad \gamma^{(1)} = 3\lambda, \quad \gamma^{(2)} = \lambda,$$

$$n_{02} = 3, \quad n_{20} = 6,$$

$$l_1 = \frac{2}{3\sqrt{\lambda}}, \quad a = \frac{1}{\lambda}, \quad p = \frac{4}{\sqrt{\lambda}}$$

a pre $d = 3$

$$\gamma^{(0)} = \frac{24\pi^2}{35} \lambda, \quad \gamma^{(1)} = \frac{48\pi^2}{35} \lambda, \quad \gamma^{(2)} = \left(\frac{24\pi^2}{35} + 1\right) \lambda, \quad \gamma^{(3)} = \lambda,$$

$$n_{01} = n_{03} = 4, \quad n_{02} = 6, \quad n_{12} = 3, \quad n_{21} = \frac{144\pi^2}{24\pi^2 + 35} \approx 5.23,$$

$$n_{30} = \frac{96\pi^2}{35} \approx 27.07, \quad n_{31} = \frac{144\pi^2}{35} \approx 40.61, \quad n_{32} = \frac{48\pi^2}{35} + 2 \approx 15.54,$$

$$l_1 = \frac{7\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{9(36\pi\lambda)^{\frac{1}{3}}}, \quad a_2 = \frac{35 \cdot 2^{\frac{8}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \pi^{\frac{1}{3}}}{(24\pi^2 + 35)(9\lambda)^{\frac{2}{3}}}, \quad p_2 = \frac{7 \cdot 2^{\frac{10}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pi^{\frac{5}{3}}}{(24\pi^2 + 35)(9\lambda)^{\frac{1}{3}}},$$

$$v = \frac{1}{\lambda}, \quad s = \frac{2^{\frac{11}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \pi^{\frac{1}{3}}}{(9\lambda)^{\frac{2}{3}}}, \quad b = \frac{2^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \pi^{\frac{5}{3}}}{5(243\lambda)^{\frac{1}{3}}}.$$

Dôkaz. Vid Møller (1994, sekcia 4.2) a Schneider a Weil (2008, Veta 10.2.5). □

Poznámka. Okrem Voronoiovej mozaiky sa často skúma *Delaunayova* mozaika, ktorá je v istom zmysle duál k Voronoiovej mozaike. Za jej jadrá sa vezmú vrcholy (0-steny) Voronoiovej mozaiky a ako bunky sa zvolia ich konvexné obaly. Takto definovaná mozaika má tiež široké praktické využitie a vďaka dualite s Voronoiovou mozaikou vieme tiež odvodiť jej charakteristiky. My sa však ďalej v tejto práci Delaunayovým mozaikám venovať nebudeme.

2.3 Laguerrove mozaiky

Jedným z užitočných rozšírení modelu Voronoiových mozaík sú takzvané *vážené* Voronoiove mozaiky. Ich princíp je založený na tom, že euklidovská vzdialenosť v definícii 39 sa nahradí inou, váženou definíciou vzdialenosti. Takýto koncept opíšeme pomocou kótovaných bodových procesov. Namiesto jadier $x \in \text{supp } \Phi$ budeme uvažovať dvojice (x, w) , kde $w \in \mathbb{R}$ je kóta (ktorú tiež nazývame váha). V tejto sekcii vychádzame prioritne z článku Lautensack a Zuyev (2008).

2.3.1 Zavedenie

Definícia 43. Pre $y, x \in \mathbb{R}^d$ a $w \in \mathbb{R}$ definujeme mocnosť bodu y voči dvojici (x, w) ako

$$\text{pow}(y, (x, w)) = \|y - x\|^2 - w.$$

Nech $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ je spočítateľná množina taká, že $\min_{(x, w) \in A} \text{pow}(y, (x, w))$ existuje pre každé $y \in \mathbb{R}^d$. Potom Laguerrovu bunku príslušnú k $(x, w) \in A$ definujeme ako

$$C((x, w), A) = \{y \in \mathbb{R}^d : \text{pow}(y, (x, w)) \leq \text{pow}(y, (x', w')), (x', w') \in A\}.$$

Bod x nazveme jadro bunky $C((x, w), A)$. Laguerrov diagram $L(A)$ je množina neprázdnych Laguerrových buniek, t.j.

$$L(A) = \{C((x, w), A) : (x, w) \in A, C((x, w), A) \neq \emptyset\}.$$

Ak uvažujeme nezáporné váhy w a označíme $r = \sqrt{w} \geq 0$, potom prvky $(x, r) \in A$ môžeme interpretovať ako d -rozmerné sféry s polomerom r so stredom v bode x . Označme teda $s(x, r)$ sféru v \mathbb{R}^d so stredom x a polomerom r

$$s(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| = r\}, \quad x \in \mathbb{R}^d, r \geq 0.$$

Mocnosť bodu y voči sfére $s(x, r)$ je teda

$$\text{pow}(y, s(x, r)) = \|y - x\|^2 - r^2.$$

V tomto prípade má mocnosť jednoduchú geometrickú interpretáciu. Pre každý bod $y \in \mathbb{R}^d$ ležiaci mimo sféry $s(x, r)$ je mocnosť $\text{pow}(y, s(x, r))$ rovná druhej mocnine vzdialenosti medzi bodom y a bodom dotyku dotyčnice ku $s(x, r)$ vedenej bodom y . Pre bod y ležiaci vo vnútri sféry je jeho mocnosť voči nej záporná, ak leží na sfére, tak je rovná 0 a je kladná, ak je bod mimo sféry. Dvojicu (x, r) v značení stotožníme so sférou $s(x, r)$ a ak nebude hroziť zámena, použijeme iba označenie s , prípadne indexovanú verziu $s_i = s(x_i, r_i)$.

Na rozdiel od Voronoiovej bunky nemusí Laguerrova bunka obsahovať svoje jadro a takisto každé jadro nemusí nutne vytvoriť (neprázdnu) bunku. Nutná (nie však postačujúca) podmienka pre generovanie prázdnej bunky je, že sféra generujúceho bodu x je celá pokrytá zjednotením okolitých sfér.

Pre dve sféry $s_1 = s(x_1, r_1)$ a $s_2 = s(x_2, r_2)$ v \mathbb{R}^d tvoria body, ktorých mocnosť k oboj sféram je rovnaká, nadrovinu (tzv. chordálu s_1 a s_2)

$$\text{Ch}(s_1, s_2) = \{z \in \mathbb{R}^d : 2\langle z, x_1 - x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + r_2^2 - r_1^2\}$$

kolmú na spojnicu x_1 a x_2 . Potom uzavretý podpriestor dominovaný sférou s_1 ohraničený $\text{Ch}(s_1, s_2)$ označíme

$$H(s_1, s_2) = \{z \in \mathbb{R}^d : 2\langle z, x_1 - x_2 \rangle \geq \|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 + r_2^2 - r_1^2\}.$$

Laguerrove bunky môžeme takto reprezentovať ako

$$C(s_0, A) = \bigcap_{s \in A, s \neq s_0} C(s, A), \quad s_0 \in A. \quad (2.6)$$

Každá k -stena $S \in \mathcal{S}_k(L(A))$ sa teda dá zapísať ako

$$S = S(s_0, \dots, s_n; A) = \bigcap_{i=0}^n C(s_i, A), \quad s_0, \dots, s_n \in A$$

pre vhodný počet buniek n .

Poznámky.

- (i) Ak sú polomery všetkých sfér v A rovnaké, tak je Laguerrov diagram $L(A)$ zhodný s Voronoiovým diagramom tvoreným bunkami $\{x : (x, r) \in A\}$.
- (ii) Keďže bunky $L(A)$ sú určené nerovnosťou

$$\|x_1 - y\|^2 - r_1^2 \leq \|x_2 - y\|^2 - r_2^2, \quad y \in \mathbb{R}^d, (x_1, r_1), (x_2, r_2) \in A,$$

pričítanie konštanty k oboj stranám nerovnosti nezmení bunky diagramu. Laguerrov diagram je teda invariantný voči transformáciám v tvare $r \mapsto (r^2 + t)^{\frac{1}{2}}$ s pevným $t \in \mathbb{R}$ a zachovaním nezápornosti polomeru r .

Teraz nás bude zaujímať kedy Laguerrov diagram tvorený množinou sfér v \mathbb{R}^d tvorí mozaiku v zmysle definície 31. Z vyjadrenia 2.6 máme, že Laguerrove bunky sú uzavreté konvexné množiny. Prienik dvoch buniek je zahrnutý v ich chordále, bunky majú teda zjavne disjunktné vnútra. Tým máme splnený bod (i) a časť bodu (iv) definície 31 Aby diagram bol mozaikou, musia Laguerrove bunky byť ešte ohraničené a tvoriť lokálne konečný systém pokrývajúci celé \mathbb{R}^d .

Zavedieme si dve dvojice doplňujúcich podmienok.

Definícia 44. *Povieme, že $A \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ spĺňa podmienky regularity, ak:*

(R1) *pre každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in \mathbb{R}$ iba konečne mnoho prvkov $(x, r) \in A$ spĺňa $\|y - x\|^2 - r^2 \leq t$,*

(R2) *konvexný obal množiny $\{x : (x, r) \in A\}$ je celé \mathbb{R}^d .*

Ak je množina polomerov ohraničená, (R1) implikuje lokálnu konečnosť množiny $\{x : (x, r) \in A\}$. Aj pre Laguerrove bunky máme podmienky všeobecnej kvadratickej pozície.

Definícia 45. *Povieme, že body množiny A sú vo všeobecnej váženej kvadratickej pozícii, ak spĺňajú nasledujúce podmienky:*

(VVKP1) *neexistuje kombinácia $k + 1$ bodov taká, že všetky ležia v $(k - 1)$ -rozmernom afinnom podpriestore \mathbb{R}^d , $k \in \{2, \dots, d\}$,*

(VVKP2) *žiadnych $d + 2$ bodov nemá rovnakú mocnosť voči nejakému bodu \mathbb{R}^d .*

V prípade rovnakých polomerov (čiže prípade Voronoiovhho diagramu; viď poznámku vyššie) sú podmienky definície 45 zhodné s podmienkami všeobecnej kvadratickej pozície z definície 41.

Tvrdenie 26. *Nech A spĺňa (R1) a (R2) z definície 44. Potom každá bunka $L(A)$ je kompaktná.*

Dôkaz. Uzavretosť buniek sme už vyriešili, ostáva nám ohraničenosť. Vezmime pevné $(x_0, r_0) \in A$ a jednotkový vektor $u \in S^{d-1}$. Podľa podmienky (R2) nájdeme $(x, r) \in A$ také, že $0 < \langle u, x - x_0 \rangle$. Pre vhodné $\delta > 0$ všetky u' v okolí u na jednotkovej sfére spĺňajú $\delta \|x_0 - x\|^2 < \langle u', x - x_0 \rangle$. Potom pre ľubovoľné $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|x_0 + \lambda u' - x\|^2 - r^2 &= \|x_0 - x\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle u', x - x_0 \rangle - r^2 \\ &< \|x_0 - x\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda\delta \|x_0 - x\| - r^2. \end{aligned}$$

Kedže $\|x_0 + \lambda u' - x_0\|^2 - r_0^2 = \lambda^2 - r_0^2$, máme

$$\|x_0 + \lambda u' - x_0\|^2 - r_0^2 > \|x_0 + \lambda u' - x\|^2 - r^2 \quad \text{pre } \lambda > \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{r^2 - r_0^2}{\|x_0 - x\|^2} \right| \frac{\|x_0 - x\|}{\delta},$$

teda $x_0 + \lambda u' \notin C((x_0, r_0), A)$. Tým sme ukázali, že

$$u \mapsto \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda = 0 \text{ alebo } x_0 + \lambda u \in C((x_0, r_0), A)\}$$

je lokálne ohraničené, a teda ohraničené na jednotkovej sfére. Dokázali sme teda ohraničenosť $C((x_0, r_0), A)$. □

Lemma 27. *Nech A spĺňa (R1) a (R2) z definície 44. Pre každú ohraničenú podmnožinu $B \subset \mathbb{R}^d$ a všetky $t \in \mathbb{R}$ iba konečne mnoho $(x, r) \in A$ spĺňa $\|y - x\|^2 - r^2 \leq t$ pre aspoň jeden bod $y \in B$. Inými slovami, B patrí do prieniku najviac konečne mnoho gúl $B(x, \sqrt{\max(t + r^2, 0)})$, $(x, r) \in A$.*

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že tvrdenie neplatí. Našli by sme teda ohraničenú množinu B , číslo $t \in \mathbb{R}$, postupnosť $((x_n, r_n))_n$ po dvoch disjunktných bodov z A a postupnosť $(y_n)_n$, $y_n \in B$ také, že $\|y_n - x_n\|^2 - r_n^2 \leq t$. Kedže uzáver B je kompaktný, môžeme zvoliť vhodnú podpostupnosť tak, že $\|y_n - y_0\| < \frac{1}{2}$ pre všetky n . Ďalej, opäť výberom podpostupnosti, môžeme predpokladať, že

$\langle y_0 - x_n, u \rangle \geq \frac{1}{2} \|y_0 - x_n\|$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a vhodný jednotkový vektor u . Potom pre všetky n

$$\begin{aligned} \|y_0 - u - x_n\|^2 - r_n^2 &= \|y_0 - x_n\|^2 + 1 - 2\langle y_0 - x_n, u \rangle - r_n^2 \\ &\leq \|y_0 - y_n\|^2 + \|y_n - x_n\|^2 + 2\|y_0 - y_n\| \|y_n - x_n\| + 1 - \|y_0 - x_n\| - r_n^2 \\ &\leq t + \frac{5}{4} + \| \|y_n - x_n\| - \|y_0 - x_n\| \| \leq t + \frac{5}{4} + \|y_n - y_0\| \\ &\leq t + \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

čo je spor s (R1). □

Tvrdenie 28. *Nech A splňa (R1) a (R2) z definície 44. Potom množina buniek $L(A)$ je lokálne konečná, pokrývajúca celý priestor.*

Dôkaz. Vyberme $y_0 \in \mathbb{R}^d$ a $(x_0, r_0) \in A$. Z (R1) máme, že existuje najviac konečne mnoho prvkov $(x, r) \in A$ takých, že

$$\|y_0 - x\|^2 - r^2 \leq \|y_0 - x_0\|^2 - r_0^2.$$

Preto aspoň jedno (x', r') minimalizuje tento rozdiel, t.j. $y_0 \in C((x', r'), A)$.

Ďalej nech K je kompaktná podmnožina \mathbb{R}^d . Existuje $R > 0$ také, že pre všetky $y \in K$ platí $\|y - x_0\|^2 - r_0^2 \leq R$. Podľa lemy 27 je množina A' dvojíc $(x, r) \in A$ splňajúcich pre aspoň jedno $y \in K$ nerovnosť $\|y - x\|^2 - r^2 \leq R$ konečná. Preto každá z buniek $C((x, r), A)$ pre $(x, r) \in A \setminus A'$ má prázdny prienik s K . Množina Laguerrových buniek je teda lokálne konečná. □

Tvrdenie 29. *Nech A splňa (R1) a (R2) z definície 44. Potom Laguerrov diagram je face-to-face.*

Dôkaz. Predpokladajme pre spor, že diagram nie je face-to-face. Potom existujú bunky $C_i = C((x_i, r_i), A)$ $i = 1, \dots, n$ také, že $F = \bigcap_i C_i \neq \emptyset$ nie je stenou C_1 . Afínny obal G množiny F teda obsahuje bod $z \in C_1$, ktorý nepatrí do F , označme $z \notin C_2$. Keďže G patrí do chordály $s(x_1, x_2)$ a $s(x_2, r_2)$, máme

$$\langle z, x_2 - x_1 \rangle = \frac{1}{2} (\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 + r_1^2 - r_2^2). \quad (2.7)$$

Keďže $z \notin C_2$, existuje bod $(x, r) \in A$ rozdielny od bodov (x_i, r_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$ taký, že

$$\langle z, x - x_2 \rangle > \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|x_2\|^2 + r_2^2 - r^2).$$

Vďaka $z \in C_1$ platí

$$\langle z, x - x_1 \rangle \leq \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|x_1\|^2 + r_1^2 - r^2).$$

Spojením oboch nerovností dostávame

$$\langle z, x_2 - x_1 \rangle < \frac{1}{2} (\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 + r_1^2 - r_2^2),$$

čo je spor s (2.7). □

Tvrdenie 30. *Predpokladajme, že A spĺňa podmienky regularity z definície 44 a jej body sú vo všeobecnej váženej kvadratickej pozícii podľa definície 45. Potom Laguerrov diagram generovaný A je normálny.*

Dôkaz. Nech $F \in \mathcal{S}_k(L(A))$, $0 \leq k \leq d$ je k -stena $L(A)$. Riešením sústavy rovníc, ktoré definujú chordály sfér s_0, \dots, s_k zistíme, že F môžeme reprezentovať ako $F(s_0, \dots, s_{d-k+1}; A)$ a že F patrí do práve $d - k + 1$ buniek $L(A)$ pre $1 \leq k \leq d$. Pre $k = 0$ je to dôsledkom podmienky (VVKP2). □

Predchádzajúce výsledky môžeme zhrnúť do vety, ktorá nám určí Laguerrovu mozaiku.

Veta 31. *Nech množina $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ spĺňa podmienky regularity z definície 44, potom množina neprázdnych Laguerrových buniek $C((x, r), A)$, $(x, r) \in A$ tvorí face-to-face teseláciu \mathbb{R}^d .*

Ak sú navyše body množiny A vo všeobecnej kvadratickej pozícii podľa definície 45, potom všetky bunky $L(A)$ sú d -rozmerné a generovaná teselácia $L(A)$ je normálna.

Definícia 46. *Teseláciu z vety 31 nazývame Laguerrova mozaika.*

Zaujímavým (a aj pre prax užitočným) výsledkom je fakt, že pre $d \geq 3$ pojmy normálnej a Laguerrovej mozaiky spĺývajú. Pozor, pre $d = 2$ toto tvrdenie neplatí; protipríklad viď napr. v Aurenhammer (1987).

Veta 32. *Kazdá normálna mozaika v \mathbb{R}^d pre $d \geq 3$ je Laguerrovou mozaikou.*

Dôkaz. Vid Lautensack a Zuyev (2008, Veta 3.2). □

2.3.2 Poissonova-Laguerrova mozaika

V tejto podsekcii zhrnieme výsledky pre Laguerrove mozaiky generované kótovaným bodovým procesom, ktorého podkladovým procesom je stacionárny Poissonov bodový proces s intenzitou λ . Takúto mozaiku nazveme *Poissonova-Laguerrova mozaika*.

Pripomeňme, že rozdelenie kót (v našom prípade váh alebo polomerov sfér) značíme \mathbb{Q} . Definícia bodového procesu implikuje, že pracujeme s lokálne konečnou množinou generátorov. Toto stačilo pre existenciu Poissonovej-Voronioiovej mozaiky, pre Poissonovú-Laguerrovú mozaiku však naviac potrebujeme obmedzenie na rozdelenie polomerov.

Tvrdenie 33. *Nech Φ je stacionárny kótovaný Poissonov proces s intenzitou $\lambda > 0$ a rozdelením kót \mathbb{Q} . Predpokladajme, že R je náhodná veličina s rozdelením \mathbb{Q} . Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

- (i) *Laguerrova mozika generovaná $\text{supp } \Phi$ existuje, t.j. $\min_{(x,r) \in \text{supp } \Phi} \text{pow}(y, (x, r))$ existuje skoro iste pre všetky $y \in \mathbb{R}^d$.*
- (ii) *Platí $\mathbb{E}[R^d] < \infty$.*

Dôkaz. Vid' Lautensack a Zuyev (2008, Veta 4.1). □

Odvodzovanie explicitných vzorcov pre intenzity ako pri Poisson-Voroniových mozaikách je však v prípade Poissonových-Laguerrových mozaík oveľa náročnejší oriešok. Na základe Palmovho rozdelenia sa o to pokúsili autori článku Lautensack a Zuyev (2008), avšak vzorce stále obsahujú integrály, ktoré je potrebné riešiť numericky, a takisto vnútorné objemy, pre ktoré nepoznáme explicitný vzorec. My si sem zhrnieme výsledky pre $d_k^{(k)}$ a $\gamma^{(k)}$.

Definícia 47. *Pre $m \in \mathbb{N}$ a $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}^m$ označme $\Delta_m(x_0, \dots, x_m)$ m -rozmerný objem konvexného obalu bodov x_0, \dots, x_m v \mathbb{R}^m . Značením \mathbb{S} označujeme plošnú mieru jednotkovej sféry S^{m-1} .*

Pre $w_0, \dots, w_m \geq 0$ definujeme

$$V_{m,k}(w_0, \dots, w_m) = (m!)^{k+1} \int_{S^{m-1}} \dots \int_{S^{m-1}} \Delta_m^{k+1}(w_0 u_0, \dots, w_m u_m) \mathbb{S}(du_0) \dots \mathbb{S}(du_m).$$

Veta 34. *Nech Φ je stacionárny kótovaný Poissonov proces s intenzitou $\lambda > 0$ a rozdelením kót \mathbb{Q} spĺňajúcim podmienku z časti (ii) tvrdenia 33. Intenzity $d_k^{(k)}$, $0 < k < d$ sú dané vzorcom*

$$d_k^{(k)} = \frac{\lambda^{m+1}}{4(m+1)!} c_{dm} \sigma_k \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_{-\min_i r_i^2}^\infty \prod_{i=0}^m (t + r_i^2)^{\frac{m-2}{2}} \int_0^\infty p(s+t) s^{\frac{k-2}{2}} ds \cdot \\ \cdot V_{m,k} \left((t + r_0^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (t + r_m^2)^{\frac{1}{2}} \right) dt \mathbb{Q}(dr_0) \dots \mathbb{Q}(dr_m),$$

kde $m = d - k$, $\sigma_k = \mathbb{S}(S^{k-1})$ je povrch k -rozmernej gule v \mathbb{R}^k , t.j. $\sigma_k = 2 \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ a $c_{dm} = \sigma_{d-m+1} \dots \sigma_d / \sigma_1 \dots \sigma_m$. Pre $k = d$ máme $d_d^{(d)} = 1$ a pre $k = 0$

$$d_0^{(0)} = \frac{\lambda^{d+1}}{2(d+1)!} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_{-\min_i r_i^2}^\infty \prod_{i=0}^m (t + r_i^2)^{\frac{d-2}{d}} \int_0^\infty p(t) V_{d,0} \left((t + r_0^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (t + r_d^2)^{\frac{1}{2}} \right) dt \\ \mathbb{Q}(dr_0) \dots \mathbb{Q}(dr_d).$$

Dôkaz. Vid' Lautensack a Zuyev (2008, Veta 4.3). □

Poznámka. Tieto vzorce pre μ_k už ďalej upraviť nevieme, keďže nám chýba explicitný vzorec pre $V_{m,k}(w_0, \dots, w_m)$. Avšak, Miles (1971) ukázal, že

$$V_{m,k}(1, \dots, 1) = 2^{m+1} \pi^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)(d+1) - m\right)}{\Gamma\left(\frac{md}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{m+1}} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(k+1-i)\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}.$$

Použitím tohto do znenia vety 34 dostaneme tvar $d_k^{(k)}$ pre degenerované rozdelenie kót, čo je presne tvar $d_k^{(k)}$ pre Poissonovu-Voronioivu mozaiku z vety 24.

Vzorec existuje aj pre intenzitu procesu k -stien.

Veta 35. *Pre $0 < k < d$ je intenzita k -stien γ_k daná vzorcom*

$$\begin{aligned} \gamma^{(k)} &= \frac{\lambda^{m+1}}{4(m+1)!} c_{dm} \sigma_k \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_{-\min_i r_i^2}^\infty \int_0^\infty \prod_{i=0}^m (t+r_i^2)^{\frac{m-2}{2}} p(t+s) s^{\frac{k-2}{2}} \\ &\cdot V_{m,k}\left((t+r_0^2)^{\frac{1}{2}}, \dots, (t+r_m^2)^{\frac{1}{2}}\right) \mathbb{E}\left[A_{L^\perp}(t, s, \Phi^{s+t})^{-1}\right] ds dt \mathbb{Q}(dr_0) \dots \mathbb{Q}(dr_m), \end{aligned}$$

kde $\Phi^t = \text{supp } \Phi \cap \{(x, r) : \text{pow}(0, (x, r)) > t\}$, L je pevný m -rozmerný lineárny podpriestor \mathbb{R}^d ,

$$A_{L^\perp}(t, s, \eta) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \mathbb{1}_{[\tau(l, t, s, v, u) \leq \text{pow}(lv, (x, r)), (x, r) \in \eta]} l^{k-1} \mathbb{S}_{L^\perp}(dv) dl,$$

kde $\tau(l, t, s, u, v) = l^2 + t + s - 2ls^{\frac{1}{2}} \langle u, v \rangle$ pre $u \in S^{d-1} \cap L^\perp$ pevné a \mathbb{S}_{L^\perp} je povrchová miera na $(d-m)$ -rozmernej sfére $S^{d-1} \cap L^\perp$.

Vzorec pre intenzitu buniek $\gamma^{(d)}$ má tvar

$$\gamma^{(d)} = \frac{\lambda \sigma_d}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (t+r_0^2)^{\frac{d-2}{2}} p(t) \mathbb{E}\left[A(t, r_0, u, \Phi^t)^{-1}\right] dt \mathbb{Q}(dx_0)$$

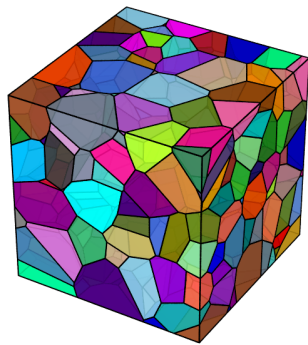
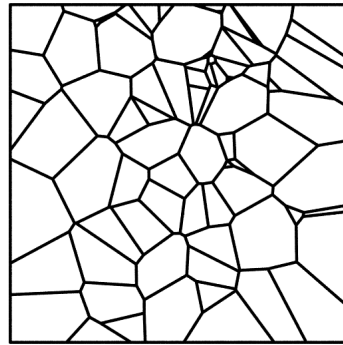
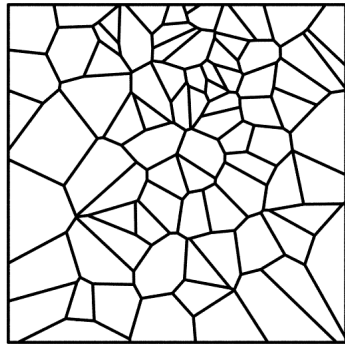
pre pevné $u \in S^{d-1}$ a

$$A(t, r_0, u, \eta) = \int_0^\infty l^{d-1} \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_{[\zeta(l, t, r_0, v, u) \leq \text{pow}(lv, (x, r)), (x, r) \in \eta]} \mathbb{S}(dv) dl,$$

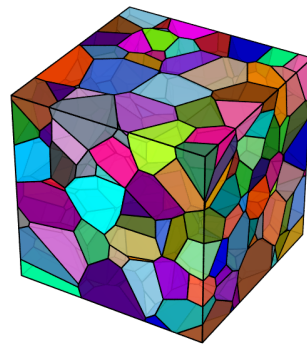
kde $\zeta(l, t, r_0, u, v) = l^2 + t - 2l \left(\max(0, t+r_0^2)\right)^{\frac{1}{2}} \langle u, v \rangle$.

Dôkaz. Viď Lautensack a Zuyev (2008, Veta 4.4). □

Na obrázku 2.1 sú porovnané realizácie Poissonovej-Voronioiovej a Poissonovej-Laguerrovej mozaiky s rovnakou množinou generátorov v dvoch aj troch rozmeroch. V prípade Laguerrovej mozaiky si môžeme všimnúť väčšiu nepravidelnosť vo veľkosti buniek.



(a) Poisson-Voronoi



(b) Poisson-Laguerre

Obr. 2.1: Porovnanie realizácií Voronoiovej a Laguerrovej mozaiky v dvoch aj troch dimenziách s rovnakou množinou generátorov danou Poissonovým bodovým procesom. Váhy generátorov Laguerrovej mozaiky sú rozdelené rovnomerne.

3. Štatistika na náhodných mozaikách

Výsledky druhej kapitoly sa teraz pokúsime aplikovať pri odhadoch parametrov náhodných mozaík. Naším primárnym zameraním sú Poissonove-Voroniove mozaiky v \mathbb{R}^3 , viď sekcia 2.2.2.

Motivácia odhadovania parametrov mozaík pochádza z ich aplikácie v materiálovom inžinierstve. Stacionárne mozaiky sa používajú na modelovanie tzv. jednofázových mnohostenných mikroštruktúr, napr. kovov alebo kryštálov, pri ktorých nás zaujímajú veľkosti ich zŕn a ich rozdelenie. Keďže je náročné pozorovať celú trojrozmernú štruktúru matierálu, v prvej časti sa zameriame na stereologické odhady parametrov, a teda odhady parametrov mozaiky v \mathbb{R}^3 na základne informácií získaných rezmi mozaiky nejakou rovinou. Aplikovane si to môžeme predstaviť ako analýzu vzorky (napr. kovu) na umelo vytvorenom reze. S rozvojom pokročilých techník ako napr. mikrotomografia (μ CT) sme schopný, i keď komplikovanejšie, pozorovať celú štruktúru vzorky, preto sa v druhej sekcii zameriame na odhady na základe pozorovania v \mathbb{R}^3 .

V literatúre sa často stretávame s alternatívnym značením vybraných intenzít, ktoré sme si zaviedli v tabuľkách 2.1 a 2.2. Značením P, N, L, S sa postupne myslia intenzity vrcholov, buniek a hustoty hrán a fazet (tieto len v \mathbb{R}^3) a indexy A, V sa používajú pre mozaiky v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 (postupne). Táto korešpondencia so značením v kapitole 2 je zhrnutá v nasledujúcej tabuľke

stereologické značenie	značenie kapitoly 2	referencia
P_A	$\gamma^{(0)}$ v \mathbb{R}^2	Tabuľka 2.1
N_A	$\gamma^{(2)}$ v \mathbb{R}^2	
L_A	$\gamma^{(1)}l_1$ v \mathbb{R}^2	
P_V	$\gamma^{(0)}$ v \mathbb{R}^3	Tabuľka 2.2
N_V	$\gamma^{(3)}$ v \mathbb{R}^3	
L_V	$\gamma^{(1)}l_1$ v \mathbb{R}^3	
S_V	$\gamma^{(2)}a_2$ v \mathbb{R}^3	

Tabuľka 3.1: Vzťahy medzi našim a značením používaným vo vybranej literatúre.

3.1 Stereologické odhady

Predmetom stereológie je získavať geometrické vlastnosti d -rozmerného objektu z menejrozmernej informácie, napr. z rovinného rezu. My sa zameriame na rezy priestorových (\mathbb{R}^3) mozaík rovinou v \mathbb{R}^2 . Geometrické vlastnosti sa samozrejme dajú odvodiť aj pre rez mozaiky v \mathbb{R}^d s -rozmerným afinným podpriestorom, kde $0 < s < d$. Čitateľovi k tejto téme odporúčame 6. kapitolu článku Møller (1989).

Rez rovinou trojrozmernej mozaiky vytvorí dvojrozmernú mozaiku (tzv. rezovú mozaiku), teda vzťahy odvodené pre všeobecnú mozaiku v \mathbb{R}^2 pre ňu môžeme

uplatniť. Je však dôležité uvedomiť si, že rez Poissonovou-Voronoiovou mozaikou nevytvorí Voronoiovu mozaiku. Dôkaz pre s -rozmerný rez d -rozmernou mozaikou, $2 \leq s < d$ nájdeme v článku Chiu a kol. (1996). Pre 2D rez 3D mozaikou stačí heuristický náhľad, že pre rezovú mozaiku Poissonovej-Voroniovej mozaiky $L_A^2/\gamma^{(0)} \approx 1.79$ (na základe vzorcov, ktoré si odvodíme neskôr), zatiaľ čo pre 2D Poissonovu-Voronoiovu mozaiku je tento výraz podľa vety 25 rovný 2. Zároveň však platí, že rezová mozaika je Laguerrovou mozaikou.

3.1.1 Stereologické vzťahy

Prvým krokom k odvodeniu odhadov charakteristík trojrozmernej mozaiky na základe jej rezovej mozaiky je získanie základných stereologických vzťahov, ktoré nám spájajú parametre trojrozmernej množiny s jej rezom. Tie si teraz formulujeme v reči parametrov mozaík.

Tvrdenie 36. Označme charakteristiky stacionárnej trojrozmernej mozaiky T_V (viď tabuľka 2.2) dolným indexom V a charakteristiky dvojrozmernej mozaiky T_A , ktorá vznikla rovinným rezom mozaiky T , t.j.

$$T_A = T_V \cap A, \quad A \text{ rovina v } \mathbb{R}^3,$$

dolným indexom A . Potom pre tieto charakteristiky platia nasledujúce vzájomné vzťahy:

$$\begin{aligned} L_A &= \frac{\pi}{4} S_V, \\ \gamma_A^{(0)} &= \frac{1}{2} L_V, \\ \gamma_A^{(2)} &= \gamma_V^{(3)} b_V. \end{aligned}$$

Dôkaz. Viď Stoyan (1979) a Chiu a kol. (2013, Veta 10.1). □

Poznámka. Motiváciou stereologických vzťahov z tejto vety je skúmanie vzťahu medzi stacionárnou náhodnou uzavretou množinou v \mathbb{R}^3 a jej rezmi. Tento model by nám stačil pre prvý z trojice stereologických vzťahov. Zvyšné 2 potrebujú predpoklad konvexity výsledných množín. Tento máme v našom modeli náhodných mozaík splnený, a preto môžeme uvedené tvrdenia použiť.

3.1.2 Odhady intenzity generujúceho procesu

Teraz sa obmedzíme na trojrozmerné Poissonove-Voroniove mozaiky. Z vety 24 vieme, že jej charakteristiky vieme vyjadriť v závislosti na intenzite generujúceho Poissonovho bodového procesu λ . Ak teda túto intenzitu dobre odhadneme, poznáme hneď mnoho geometrických vlastností celej mozaiky. Na základe odhadov charakteristík rezovej mozaiky T_A vieme vytvoriť nasledujúce odhady λ .

Veta 37. Nech T_V je Poissonova-Voroniova mozaika v \mathbb{R}^3 generovaná stacionárnym bodovým procesom s intenzitou λ a T_A mozaika ktorá vznikla rovinným

rezom T_V . Ak sú $\hat{\gamma}_A^{(0)}$, $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ a \hat{L}_A konzistentné odhady geometrických charakteristík $\gamma_A^{(0)}$, $\gamma_A^{(2)}$ a L_A , tak sú odhady

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_0 &= \frac{45}{8} \sqrt{\frac{15}{2}} \pi^{-\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} (\hat{\gamma}_A^{(0)})^{\frac{3}{2}} \approx 0.20083 \cdot (\hat{\gamma}_A^{(0)})^{\frac{3}{2}}, \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{45\sqrt{15}}{4} \pi^{-\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} (\hat{\gamma}_A^{(2)})^{\frac{3}{2}} \approx 0.56804 \cdot (\hat{\gamma}_A^{(2)})^{\frac{3}{2}}, \\ \hat{\lambda}_{L_A} &= \frac{6}{\pi^4 \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)^3} \hat{L}_A^3 \approx 0.08373 \cdot \hat{L}_A^3\end{aligned}$$

konzistentnými odhadmi intenzity λ .

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned}\gamma_A^{(0)} &= \frac{1}{2} L_V &= \frac{1}{2} \gamma_V^{(1)} l_{1V} &= \frac{8}{15(36)^{\frac{1}{3}}} \pi^{\frac{5}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \lambda^{\frac{2}{3}}, \\ \gamma_A^{(2)} &= \gamma_V^{(3)} b_V &&= \left(\frac{16}{125 \cdot 243}\right)^{\frac{1}{3}} \pi^{\frac{5}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \lambda^{\frac{2}{3}}, \\ L_A &= \frac{\pi}{4} S_V &= \frac{\pi}{4} \gamma_V^{(2)} a_{2V} &= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \pi^{\frac{4}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \lambda^{\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

kde prvá rovnosť je z tvrdenia 36, ďalšia rozpis L_V a S_V podľa definície a nakoniec úprava pomocou vzťahov pre priestorovú Poissonovu-Voronoiovu mozaiku podľa vety 25. Po úprave dostávame tvar odhadov λ . Konzistencia vychádza z konzistencie odhadov geometrických charakteristík a zo spojitosti použitých transformácií. \square

3.1.3 Odhady charakteristík rovinnej mozaiky

Ďalším krokom k úspechu stereologických odhadov je teda vytvorenie nestraných odhadov pre všeobecnú mozaiku v \mathbb{R}^2 na základe pozorovania v ohraničenom okne. Odhadom na dvojrozmerných mozaikách je venované veľké množstvo literatúry, my sa inšpirujeme knihou Ohser a Mücklich (2000, kap. 10.2).

Pozorovanie v ohraničenom okne

Náhodnú teseláciu ako zobrazenie $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{T}, \mathcal{T})$ samozrejme nemôžeme pozorovať. V praxi vieme sledovať iba jej realizáciu (pre ktorú sme si definovali výhradne slovo mozaika) v konvexnom ohraničenom okne W . V prípade pozorovania rezov ide teda o pozorovacie okno nachádzajúce sa v rovine rezu, $W_A \subset A \subset \mathbb{R}^2$. Pozorovanú mozaiku v \mathbb{R}^2 označíme

$$T_A^o = \{C_{A,j}^o \subset \mathbb{R}^2 : C_{A,j}^o = C_{A,j} \cap W_A, C_{A,j} \in T_A = T_V \cap A; C_{A,j} \cap W_A \neq \emptyset\}.$$

Prvky T_A^o sú konvexné kompaktné množiny, pretože pozorovacie okno aj prvky T_A sú konvexné kompaktné množiny (pre W_A viď vyššie, T_A je mozaika, a teda to platí podľa bodu (iv) definície 31). Ohraničenosť okna nám však môže spôsobiť problémy v podobe vychyľovania vytvorených odhadov. Pri niektorých odhadoch teda musíme dávať pozor na okrajové efekty.

Odhady bez okrajových korekcií

Medzi odhady ktoré vieme pomerne priamočiaro odhadnúť bez potreby korekcie patria odhady $\hat{\gamma}_A^{(0)}$ a \hat{L}_A .

Charakteristika $\gamma_A^{(0)}$ je priemerný počet vrcholov na jednotkovú plochu. Odhadnúť ho môžeme pomocou prirodzeného odhadu

$$\hat{\gamma}_A^{(0)} = \frac{n_{0A}}{|W_A|},$$

kde n_{0A} je počet vrcholov T_A^o pozorovaných vo vnútri okna W_A .

Charakteristika L_A je priemerná dĺžka hrán vo vnútri jednotkového okna. To nám ponúka prirodzený odhad

$$\hat{L}_A = \frac{l(W_A)}{|W_A|},$$

kde $l(W_A)$ je celková dĺžka hrán mozaiky T_A v okne W_A .

Ohser a Mücklich (2000, odhad (10.11)) navrhli aj odhad L_A založený na jednorozmernej analýze rezu, pre ktorý je potrebné iba spočítať počet prienikov hrán T_A s hranicou okna W_A . Takýto odhad je užitočný, ak je v praxi náročné merať dĺžky hrán, nevýhodou je jeho vyšší rozptyl. My v simuláciách budeme schopní určiť dĺžky hrán, a preto nebudeme tento odhad používať.

Tvrdenie 38. *Odhady $\hat{\gamma}_A^{(0)}$ a \hat{L}_A sú nestrannými odhadmi $\gamma_A^{(0)}$ a L_A .*

Dôkaz. Plyní priamo z definície $\gamma^{(0)}$ a L_A a spôsobu odhadu. □

Odhady s okrajovými korekciami

Teraz nasmerujeme svoju pozornosť na odhad $\hat{\gamma}_A^{(2)}$, čo je odhad priemerného počtu buniek na jednotkovú plochu. U tohto odhadu dochádza k problému, že v pozorovacom okne sa nám skoro iste vyskytnú bunky, ktoré nebudú celé vo W_A . Tieto bunky nemôžeme zahrnúť celé, avšak ich ani úplne ignorovať, pretože by vzniknuté odhady boli vychýlené. Odhady $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ teda musíme vyrobiť trochu sofistikovanejšie, než doteraz.

Zavedieme odhad

$$\hat{\gamma}_A^{(2)} = \frac{1}{|W_A|} \left(n_2(W_A) - \frac{n_1^e(W_A)}{2} - 1 \right),$$

kde $n_2(W_A)$ je počet buniek, ktoré sa aspoň čiastočne v pozorovacom okne a $n_1^e(W_A)$ je počet hrán, ktoré majú neprázdny prienik s hranicou okna ∂W_A .

Alternatívny odhad navrhol Saltykov (1974). Zatiaľ čo odhad $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ môžeme použiť pre konvexné ohraničené okno ľubovoľného tvaru, tento odhad má za predpoklad obdĺžnikové pozorovacie okno W_A . Takisto, bunky mozaiky musia byť dostatočne malé natolko, aby

$$\text{card} \{ \partial W_A \cup \partial C_{A,j} \} \leq 2 \quad \forall C_{A,j} \in T_A^o, \quad (3.1)$$

teda aby každá pretla hranicu okna najviac dvakrát. Za týchto predpokladov môžeme zadefinovať nasledujúci odhad.

$$\tilde{\gamma}_A^{(2)} = \frac{1}{|W_A|} \left(n_2^A(W_A) + \frac{n_2^B(W_A)}{2} + 1 \right), \quad (3.2)$$

kde $n_2^A(W_A)$ je počet buniek, ktoré sú kompletne zahrnuté v pozorovacom okne a $n_2^B(W_A)$ je počet buniek, ktoré majú neprázdny prienik so stranami obdĺžnika W_A ale nie s jeho rohmi. Platí nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 39. *Odhady $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ a $\tilde{\gamma}_A^{(2)}$ (za splnenia príslušných predpokladov) sú oba nestrannými odhadmi $\gamma^{(2)}$.*

Dôkaz. Pre $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ viď Stoyan a Hermann (1986, kap. 2) alebo Chiu a kol. (2013, str. 392). Ide o aplikovanie vzorca pre náhodné uzavreté množiny s konvexnými zrnami, kde sa použije stereologický vzorec.

Myšlienka nestrannosti $\tilde{\gamma}_A^{(2)}$ spočíva v tom, že celé \mathbb{R}^2 pokryjeme kópiami obdĺžnikového pozorovacieho okna W_A a na každom napočítame odhad $\gamma_A^{(2)}$. Bunky, ktoré spočítame do $n_2^A(W_A)$ sa nachádzajú iba v tomto okne, bunky, ktoré pretína hrana ale nie roh W_A sa započítajú v dvoch oknách, preto musíme vydeliť $n_2^B(W_A)$ dvomi, a nakoniec každá zo 4 buniek pokrývajúcich 4 rohy W_A sa vyskytne v štyroch oknách, čo vysvetľuje člen $4/4 = 1$.

□

Dostali sme teda nestranné odhady pre všetky charakteristiky, ktoré potrebujeme do vety 37. Máme teda hotové stereologické odhady z rezu trojrozmernej Poissonovej-Voroniovej mozaiky. Tieto si neskôr vyskúšame aplikovať v simulačnej štúdií.

3.1.4 Testy Poissonovskosti

Ďalej by nás mohlo zaujímať, či je pozorovaná realizáciu rezu mozaiky v \mathbb{R}^3 vhodné opísať ako rez Poissonovej-Voroniovej mozaiky. Hahn a Lorz (1993) a Hahn a Lorz (1994) navrhli niekoľko testov s rôznymi testovými štatistikami. My si predstavíme tri, ktoré majú zmysel pre náš model.

Testujeme teda hypotézu H_0 proti alternatíve $H_A = \neg H_0$, kde

$H_0 : T_V$ patrí do triedy Poissonových-Voronioivých mozaík.

Prvé dva testy budú založené na rozdelení počtu vrcholov buniek $C_{A,j}^o$ rezovej mozaiky. Toto rozdelenie je samozrejme nezávislé na intenzite generujúceho procesu λ . Z vety 18 vieme, že pre širokú triedu normálnych mozaík $n_{20} = 6$. Z empirickej analýzy však vyplýva, že rôzne modely mozaík sa líšia hlavne v rozptyle rozdelenia počtu vrcholov bunky $n_{A,20}$. Teoretická hodnota rozptylu nie je známa.

Za testovú štatistiku teda zvolíme výberový rozptyl napozorovaného počtu $n_{A,20}^o$

$$S_{A,n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(n_{A,20,i}^o - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_{A,20,i}^o \right)^2.$$

Test budeme zamietat pre príliš veľké aj príliš malé hodnoty testovej štatistiky. Test vie fungovať ako jednostranný test – malé hodnoty rozptylu značia väčšiu

regularitu buniek než pri Poissonovom-Voronoiovom modeli, veľké hodnoty zas menšiu.

Teoretické rozdelenie testovej štatistiky za nulovej hypotézy nie je známe, budeme teda pracovať s empirickým rozdelením testovej štatistiky, ktoré získame na základe simulácie rezov za nulovej hypotézy. Tomu sa budeme venovať v kapitole 4, kde aj porovnáme naše výsledky s výsledkami v literatúre.

Ďalším možným testom je χ^2 -test dobrej zhody na rozdelenie $n_{A,20}$. Formálne teda testujeme, či dáta pochádzajú z konkrétneho multinomického rozdelenia s K kategóriami. Pravdepodobnosť, že náhodná rezová mozaika vytvorená rezom Poissonovej-Voronoiovej mozaiky má k vrcholov označíme $\hat{p}_k, k \geq 3$. Zo známeho predpokladu, aby očakávaná početnosť $np_k^0 \geq 5$ pre všetkých K kategórií, zvolíme $K = 7$ a $k \in \{3, 4, \dots, 9\}$. Položíme $p_k = \hat{p}_k, k = 3, \dots, 8$ a $p_9 = \sum_{i=3}^{\infty} \hat{p}_i$. Kategória $k = 9$ teda zahŕňa bunky, ktoré majú 9 alebo viac vrcholov. Táto definícia nám zaručí, že $\sum_{k=3}^9 p_k = 1$, čo je predpoklad testu dobrej zhody na multinomické rozdelenie.

Formálne teda testujeme $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A^0$, kde $\mathbf{p} = (p_3, \dots, p_9)$ sú pravdepodobnosti jednotlivých kategórií a $\mathbf{p}_A^0 = (p_3^0, \dots, p_9^0)$ sú predom stanovené hypotetické pravdepodobnosti jednotlivých kategórií. Tieto nie sú teoreticky známe, preto sa použijú ich odhady na základe simulácie. Tomu sa budeme venovať v kapitole 4. Testová štatistika má potom tvar

$$\chi_A^2 = \sum_{k=3}^9 \frac{(H_k - np_k^0)^2}{np_k^0},$$

kde H_k je pozorovaná početnosť buniek v k -tej kategórii. Táto testová štatistika má asymptotické rozdelenie χ_6^2 . Proti nulovej hypotéze nám svedčia veľké hodnoty testovej štatistiky, teda

$$\text{zamietame } H_0 \text{ na hladine } \alpha \Leftrightarrow \chi_A^2 \geq \chi_6^2(1 - \alpha),$$

kde $\chi_6^2(1 - \alpha)$ značí $(1 - \alpha)$ -kvantil rozdelenia χ_6^2 .

Hahn a Lorz (1994) navrhli aj test založený na rozptyle plošných obsahov buniek rezovej mozaiky. Pri tomto teste ale musíme byť opatrný vo výbere buniek, ktoré vezmeme do úvahy a zväžiť korekciu prípadného okrajového efektu. Tomu sa budeme venovať pri mozaikách v \mathbb{R}^3 v sekcii 3.2, kde si odvodíme analogický test založený na objemoch pozorovaných buniek.

3.2 Štatistika na priestorovej mozaike

Teraz sa budeme venovať odhadom charakteristík náhodnej mozaiky v troj-rozmernom priestore, na základe pozorovania v pozorovacom okne $W_V \subset \mathbb{R}^3$. Teória v kapitole 2 nám poskytla veľké množstvo vzorcov o stredných hodnotách charakteristík mozaiky a jej typickej bunky. My sa na ich základe pokúsime opäť odhadnúť intenzitu generujúceho Poissonovho procesu. Nakoniec skúsime podobne ako pre rezovú mozaiku odvodiť testy toho, či pozorovaná realizácia pochádza z Poissonovej-Voronoiovej mozaiky.

3.2.1 Odhady parametrov

Opäť sa zameriame na Poissonovu-Voronoiovu mozaiku v \mathbb{R}^3 . Veta 25 nám poskytla hojné množstvo vzťahov, ktoré na rozdiel od rezovej mozaiky použiť môžeme. Musíme ale zvoliť také charakteristiky, ktoré budeme vedieť vhodne odhadnúť na základe pozorovania realizácie v ohraničenom okne.

Odhady intenzity

Naším cieľom je odhadnúť intenzitu λ generujúceho Poissonovho bodového procesu. Na základe geometrických charakteristík vytvoríme niekoľko odhadov

Veta 40. *Nech T_V je Poissonova-Voronoiova mozaika v \mathbb{R}^3 generovaná stacionárnym Poissonovým bodovým procesom s intenzitou λ . Nech $\hat{\gamma}_V^{(0)}, \hat{\gamma}_V^{(3)}, \hat{L}_V, \hat{v}$ a \hat{s} sú postupne konzistentné odhady charakteristík $\gamma^{(0)}, \gamma^{(3)}, L_V, v$ a s opísaných v tabuľke 2.2. Potom sú odhady*

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_p &= \frac{35}{24\pi^2} \hat{\gamma}_V^{(0)} \approx 0.14776 \hat{\gamma}_V^{(0)}, \\ \hat{\lambda}_n &= \hat{\gamma}_V^{(3)}, \\ \hat{\lambda}_l &= \frac{45\sqrt{15}}{32} \pi^{-\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} \hat{L}_V^{\frac{3}{2}} \approx 0.07101 \hat{L}_V^{\frac{3}{2}}, \\ \hat{\lambda}_v &= \frac{1}{\hat{v}}, \\ \hat{\lambda}_s &= \frac{32\sqrt{2\pi}}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\hat{s}^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{14.04372}{\hat{s}^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

konzistentnými odhadmi intenzity λ .

Dôkaz. Plynie po úprave z vety 25 s využitím vzťahu $L_V = \gamma^{(1)}l_1$. Konzistencia vychádza z konzistencie odhadov geometrických charakteristík a spojitosti použitých transformácií. □

Odhady geometrických charakteristík z celého pozorovacieho okna

Budeme postupovať podobne ako v sekcii 3.1.3. Najprv skúsime odhadnúť intenzity, na ktoré nepotrebujeme žiadnu okrajovú korekciu. Ďalej odvodíme odhad podobný odhadu $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ pre rovinné mozaiky a nakoniec sa zameriame na korekciu odhadov charakteristík typickej bunky.

Realizáciu náhodnej teselácie tentokrát pozorujeme v konvexnom ohraničenom okne $W_V \subset \mathbb{R}^3$. Pozorovanú mozaiku a jej bunky označíme

$$T_V^o = \{C_{V,j}^o \subset \mathbb{R}^3 : C_{V,j}^o = C_{V,j} \cap W_V, C_{V,j} \in T_V; C_{V,j} \cap W_V \neq \emptyset\}.$$

Bunky $C_{V,j}^o$ sú konvexné kompaktné množiny.

Niektoré odhady budeme vedieť podobne ako v rovine odhadnúť bez potreby okrajovej korekcie. Sem patria odhady $\hat{\gamma}_V^{(0)}$ a \hat{L}_V .

Intenzita $\gamma_V^{(0)}$ opisuje priemerný počet vrcholov na jednotkový objem. Odhadnúť ho môžeme jednoducho pomocou prirodzeného odhadu

$$\hat{\gamma}_V^{(0)} = \frac{n_{0V}}{|W_V|},$$

kde n_{0V} je počet vrcholov T_V^o pozorovaných vo vnútri okna W_V .

Hustotu L_V vieme vyjadriť ako priemernú dĺžku hrán v jednotkovom objeme. Tú môžeme takisto odhadnúť jednoducho pomocou celkovej dĺžky hrán v okne W_V , ktorú označíme $l(W_V)$ ako

$$\hat{L}_V = \frac{l(W_V)}{|W_V|}.$$

Na odhad intenzity buniek nám už takýto jednoduchý odhad stačiť nebude. My v tejto práci vyrobíme odhad $\gamma_V^{(3)}$ inšpirovaný odhadom (3.2) v \mathbb{R}^2 . Musíme teda zaviesť dodatočné podmienky; pozorovacím oknom W_V musí byť kváder v \mathbb{R}^3 a podmienku (3.1) môžeme v \mathbb{R}^3 formulovať tak, že požadujeme aby $\partial W_V \cup C_{V,j}^o$ bola pre všetky bunky $C_{V,j}^o \in T_V^o$ súvislá množina. S týmito podmienkami zadefinujeme odhad

$$\hat{\gamma}_V^{(3)} = \frac{1}{|W_V|} \left(n_V^A(W_V) + \frac{n_V^B(W_V)}{2} + \frac{n_V^C(W_V)}{4} + 1 \right), \quad (3.3)$$

kde $n_V^A(W_V)$ je počet buniek, ktoré ležia kompletne vo vnútri W_V , $n_V^B(W_V)$ je počet buniek, ktoré majú neprázdny prienik s bočnými stenami okna W_V , ale nie jeho hranami a $n_V^C(W_V)$ počet buniek, ktoré majú neprázdny prienik s hranami okna W_V , ale nie s jeho rohmi.

Tvrdenie 41. *Za splnenia príslušných predpokladov sú odhady $\hat{\gamma}_V^{(0)}$, \hat{L}_V a $\hat{\gamma}_V^{(3)}$ nestrannými odhadmi parametrov $\gamma^{(0)}$, L_V a $\gamma^{(3)}$.*

Dôkaz. Pre odhady $\hat{\gamma}_V^{(0)}$ a \hat{L}_V plynie priamo z definície charakteristík a spôsobu odhadovania.

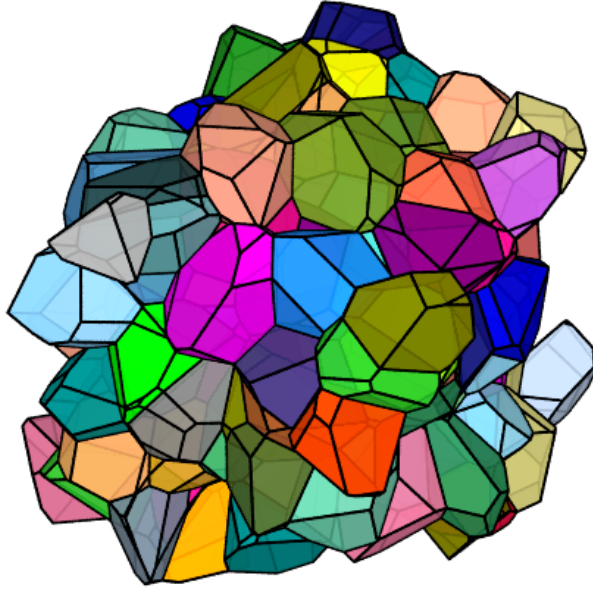
Myšlienka nestrannosti (3.3) spočíva v tom, že keď si kópiami pozorovacieho okna W_V pokryjeme celú realizáciu T_V v \mathbb{R}^3 , tak bunky celé vnútri jedného pozorovacieho okna prispievajú počtom iba do tohto okna, bunky, ktoré delí stena dvoch okien, ale nie hrana, budú započítané v dvoch oknách, ktoré tá stena delí, bunky, cez ktoré prechádza hrana okna prispievajú do 4 okien a každá z 8 buniek, ktoré v sebe obsahujú roh pozorovacieho okna prispieje do 8 okien, ktoré sa v danom rohu stretávajú. □

Odhady charakteristík typickej bunky

Pri odhade intenzít sme mohli postupovať viacmenej priamočiaro. Nestrannosť odhadov spočívala v tom, že išlo o intenzity stacionárneho procesu častíc k -stien mozaiky a ich realizáciu sme mohli pozorovať v celom W_V . Pri odhade charakteristík typickej bunky už však musíme postupovať sofistikovanejšie. Nevieme totiž ako celá taká bunka vyzerá a ako veľmi by sme museli škálovať odhad

napočítaný len na tej jej časti, ktorá sa nachádza vnútri pozorovacieho okna. Preto do odhadu použijeme iba také bunky $C_{V,j}^o \in T_V^o$, ktoré spĺňajú $C_{V,j}^o \subseteq W_V$. Ich počet označíme $N_V^-(W_V) = \sum_{C_{V,j}^o \in T_V^o} \mathbb{1}_{[C_{V,j}^o \subseteq W_V]}$ a tento zmenšený výber* označíme $T_V^- = \{C_{V,j}^o \in T_V^o : C_{V,j}^o \subseteq W_V\}$.

Takto zmenšený výber máme ilustrovaný na obrázku 3.1. Ide o realizáciu Poissonovej-Voroniovej mozaiky s intenzitou $\lambda = 300$, avšak zameriavame sa len na bunky, ktoré sú celé v pozorovacom okne.



Obr. 3.1: Ilustrácia zmenšeného výberu T_V^- na Poissonovej-Voroniovej mozaike s intenzitou generujúceho procesu $\lambda = 300$.

Ak chceme odhadovať $\mathbb{E} f(Z)$ pre nejakú translačne invariantú funkciu f typickej bunky Z , t.j. $f(K+x) = f(K)$ pre všetky konvexné kompaktné K a $x \in \mathbb{R}^3$, mohlo by nás napadnúť použiť

$$\frac{1}{N_V^-(W_V)} \sum_{C_{V,j}^o \in T_V^o} f(C_{V,j}^o) \mathbb{1}_{[C_{V,j}^o \subseteq W_V]}.$$

Tento odhad ale bude vychýlený, a to z dôvodu, že väčšie bunky majú menšiu šancu byť zahrnuté do výberu. Tento problém, tzv. vychýlenie pri priestorovom vzorkovaní[†] je sprievodným javom pri modeloch, kde pravdepodobnosť pozorovania objektu závisí na jeho veľkosti. Toto vychýlenie sa dá napraviť tak, že sa zavedie tzv. Horvitzov-Thompsonov odhad, kde sa každý pozorovaný objekt váži kvantitou analogickou k prevrátenej pravdepodobnosti výberu

$$\widehat{HT}(f) = \frac{\sum_{C_{V,j}^o \in T_V^o} \frac{f(C_{V,j}^o)}{|W_V \ominus C_{V,j}^o|} \mathbb{1}_{[C_{V,j}^o \subseteq W_V]}}{\sum_{C_{V,j}^o \in T_V^o} \frac{1}{|W_V \ominus C_{V,j}^o|} \mathbb{1}_{[C_{V,j}^o \subseteq W_V]}}, \quad (3.4)$$

kde $W \ominus C = \{x : x + C \subseteq W\}$ je tzv. *erózia*[‡] okna W bunkou C .

* anglicky je proces takéhoto výberu označovaný ako *minus-sampling* † anglicky *spatial sampling bias* ‡ anglicky *erosion*

Tvrdenie 42. *Nech f je translačne invariantná funkcia, ako je uvedené vyššie. Potom $\widehat{HT}(f)$ je podielovo nestranný odhad $\mathbb{E}f(Z)$, teda hodnoty funkcie f na typickej bunke Z (t.j. bunka s rozdelením $\mathbb{Q}^{(3)}$; používame značenie definície 36).*

Dôkaz. Vid Flimmel a kol. (2020, Veta 2.1). □

S takto zadefinovaným odhadom už nemáme problém zvoliť odhady \hat{v} a \hat{s} vo vete 40. Na objem aj povrch každej bunky, ktorá bude vstupovať do výpočtu, aplikujeme korekciu Horvitzovým-Thompsonovým odhadom.

3.2.2 Testy Poissonovskosti

Posledný krok štatistickej analýzy na priestorových mozaikách ktorý spravíme, bude odvodenie testov, či je pozorovaná mozaika realizáciou Poissonovej-Voroniovej mozaiky v \mathbb{R}^3 . Navrhujeme tri rôzne testy, ktoré potom vyskúšame v simulačnej štúdií.

Opäť teda testujeme hypotézu H_0 proti alternatíve $H_A = \neg H_0$, kde

$H_0 : T_V$ patrí do triedy Poissonových-Voronioivých mozaík.

Prvé dva testy budú založené na počte $n_{V,32}^o$ faziet buniek $C_{V,j}^o$. Rozdelenie tohto počtu je nezávislé na intenzite λ . Teoretické rozdelenie tohto počtu známe nie je, skúma sa len empiricky. Prvá testová štatistika bude založená na jeho rozptyle; postavíme ju ako výberový rozptyl napozorovaného počtu $n_{V,32}^o$

$$S_{V,n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(n_{V,32,i}^o - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_{V,32,i}^o \right)^2.$$

Teoretické rozdelenie testovej štatistiky za nulovej hypotézy nie je známe, budeme pracovať s jeho empirickým rozdelením, ktoré získame simuláciou.

Test zamietame pre príliš malé aj príliš veľké hodnoty testovej štatistiky. Jej malé hodnoty svedčia o mozaike, ktorej bunky sú regulárnejšie, než za nulovej hypotézy, veľké hodnoty zas o menšej regularite. Takto môže test fungovať aj ako jednostranný test na regularitu buniek zachytenú počtom ich faziet.

Ďalším kandidátom je χ^2 -test dobrej zhody na rozdelenie $n_{V,32}$, ktoré predpokladáme ako multinomické s vopred danými pravdepodobnosťami jednotlivých K kategórií. Pravdepodobnosť, že bunka náhodnej Poissonovej-Voroniovej mozaiky má k fazet označíme $\hat{p}_{V,k}$, $k \geq 4$. Z predpokladu χ^2 -testu na očakávané početnosti $np_{V,k}^0 \geq 5$ pre všetky kategórie niektoré kategórie zlúčime. Zvolíme $K = 11$, $k \in \{10, 11, \dots, 20\}$ a položíme

$$p_{V,k} = \hat{p}_{V,k}, k = 11, \dots, 19, \quad p_{V,10} = \sum_{k=4}^{10} \hat{p}_{V,k}, \quad p_{V,20} = \sum_{k=20}^{\infty} \hat{p}_{V,k}.$$

Táto voľba nám zaručí korektne definované pravdepodobnosti $p_{V,k}$ pre χ^2 -test aj splnenie jeho predpokladov.

Formálne teda ide o test $\mathbf{p} = \mathbf{p}_V^0$, kde $\mathbf{p} = (p_{10}, \dots, p_{20})$ a $\mathbf{p}_V^0 = (p_{10}^0, \dots, p_{20}^0)$ sú predom stanovené pravdepodobnosti jednotlivých kategórií. Tieto nepoznáme teoreticky, ale získame ich simuláciou. Testová štatistika má tvar

$$\chi_V^2 = \sum_{k=10}^{20} \frac{(H_k - np_{V,k}^0)^2}{np_k^0},$$

kde H_k je pozorovaná početnosť buniek v k -tej kategórii. Asymptotické rozdelenie χ_V^2 je χ_{10}^2 . Tento test nevieme na rozdiel od testu s testovou štatistikou $S_{V,n}^2$ vyrobiť ako jednostranný test. Proti nulovej hypotéze nám svedčia veľké hodnoty χ_V^2 , zamietame ju práve vtedy, keď $\chi_V^2 \geq \chi_{10}^2(1 - \alpha)$, čo značí $(1 - \alpha)$ -kvantil rozdelenia χ_{10}^2 .

Posledný test, ktorý navrhne, je založený na rozptyle objemov uvažovaných buniek. Pre jeho praktickú realizáciu je dôležité, aby sme boli schopní merať tento objem, čo však pri našej simulácii nebude problém. Hahn a Lorz (1994) navrhli obdobný stereologický test založený na plošných obsahoch buniek s nasimulovaným empirickým rozdelením testovej štatistiky, avšak nevenovali pozornosť prípadným okrajovým korekciám. My sme si v sekcii 3.2.1 predstavili užitočný spôsob takejto korekcie, preto si takýto test odvodíme teraz. Budeme predpokladať, že pracujeme s už zmenšeným výberom T_V^- .

Testovou štatistikou bude variačný koeficient objemov typickej bunky Z , ktorý je rovný

$$\frac{\sqrt{\text{var } |Z|}}{\mathbb{E} |Z|} = \sqrt{\frac{\mathbb{E} |Z|^2}{(\mathbb{E} |Z|)^2} - 1}.$$

Označme $\hat{\mu}_1$ Horvitzov-Thompsonov odhad (3.4) pre $f(C) = |C|$ a $\hat{\mu}_2$ odhad (3.4) pre $f(C) = |C|^2$ založený na pozorovaní $N_V^- = n$ buniek mozaiky vo výbere T_V^- . Potom môžeme odhadnúť variačný koeficient $|Z|$ ako

$$\sqrt{\frac{\hat{\mu}_2}{(\hat{\mu}_1)^2} - 1}.$$

Toto vyjadrenie použijeme ako testovú štatistiku C_n .

Jej rozdelenie za nulovej hypotézy nie je známe, budeme pracovať s empirickým rozdelením, ktoré získame simuláciou v kapitole 4. Test budeme zamietat pre príliš veľké aj malé hodnoty testovej štatistiky. Podobne ako test s testovou štatistikou $S_{V,n}^2$ vie poslúžiť ako jednostranný test na regularitu buniek mozaiky.

Množstvo štatistických výsledkov ktoré sme získali na priestorových mozaikách, sa pokúsime overiť na simulačnej štúdii v poslednej kapitole.

4. Simulačná štúdia

V poslednej kapitole práce si vyskúšame štatistické metódy predstavené v tretej kapitole. Najprv si zhrnieme výsledky v už existujúcej literatúre, predstavíme si spôsob realizácie našej simulácie a nakoniec sa pozrieme na výsledky pre rezové mozaiky aj pre mozaiky v \mathbb{R}^3 .

4.1 Doterajšie výsledky

Z teoretického hľadiska existuje množstvo prác, ktoré sa venujú geometrickým charakteristikám Poissonovej-Voroniovej mozaiky. Väčšina týchto výsledkov sa však dotýka iba stredných hodnôt, prípadne druhých momentov jednotlivých charakteristík. Pre štatistickú inferenciu na bunkách mozaík je však žiadúce poznať viac vlastností, a to hlavne pre Poissonovu-Voroniovu mozaiku, súc základným modelom medzi mozaikami. Na to je ale nutné zvoliť prístup počítačovej simulácie. Spomenieme tie najvýznamnejšie práce z tejto oblasti.

Pre rovinné mozaiky je významný článok Hinde a Miles (1980). Autori simulovali 2 000 000 rovinných Poissonových-Voronioových buniek a skúmali ich rozdelenie. Pre mozaiky v \mathbb{R}^3 je prvým mílnikom štúdia v článku Kumar a kol. (1992), kde sa skúmali štatistické vlastnosti týchto mozaík na vzorku 358 000 buniek.

Najnovšou veľkou štúdiou, z ktorej výsledkami budeme niektoré naše výsledky porovnávať, je práca v článku Tanemura (2003). Autor simuloval 10 000 000 rovinných a 5 000 000 priestorových Poisson-Voronioových buniek. Ako hodnoty hyperparametru intenzity generujúceho Poissonovho procesu zvolil 200 pre rovinný a 500 pre priestorový prípad. Analyzované bunky boli vytvárané ako Voroniova bunka centrálného bodu nagenovaného realizáciou stacionárneho Poissonovho bodového procesu. Po vzoru autorov Hinde a Miles (1980) sa rozdelenie veľkosti buniek pokúsil autor aproximovať zovšeobecneným gamma rozdelením, t.j. odhadoval parametre $a, b, c > 0$ hustoty tohto rozdelenia

$$f(x|a, b, c) = \frac{ab^{c/a}}{\Gamma(c/a)} x^{c-1} \exp\{-bx^a\}.$$

Čo sa týka výsledkov na rezoch trojrozmerných mozaík, významné výsledky sú prezentované v článku Hahn a Lorz (1994), kde je zhrnutá práca z niekoľkých predchádzajúcich článkov oboch autorov. Autori zvolili okno tak, aby mali v reze priemerne počty napozorovaných buniek rovné (postupne) 50, 100, 150, 200. Na takto nasimulovaných realizáciach postupne testujú odhady intenzity λ a skúmajú rozdelenie testových štatistík testov Poissonovskosti.

4.2 Realizácia simulácie

Na generovanie mozaík používame slobodný program Neper (Quey a kol. (2011)), šíriteľný pod podmienkami licencie GNU GPL. Na stránke softvéru* je dostupná verzia 4.2.0 tohto programu. Pri generovaní Poissonových-Laguerrových

* <https://neper.info/index.html>

mozaík z vopred určených váh generátorov sme ale narazili na chybu v programe pri orezávaní týchto buniek, s čím sme autora kontaktovali, na čo on následne vydal opravenú verziu programu. Pre správne generovanie orezaných Poissonových-Laguerrových mozaík podľa skriptu, ktorý je prílohou práce, je teda potrebná aspoň verzia 4.2.1-5, ktorá je zatiaľ zverejnená iba na GitHubu autora*.

4.2.1 Voľba hyperparametrov

Programom sme generovali trojrozmerné mozaiky s intenzitami generujúceho Poissonovho procesu λ postupne $\lambda = 200, 300, 500$. Pre každú z intenzít sme nagenerovali tisíc mozaík.

Zo spôsobu generovania mozaiky plynie, že body mimo pozorovacieho okna ovplyvňujú tvar buniek vo vnútri. Na korekciu tohto okrajového efektu sme zvolili nasledujúci postup. Mozaiku sme nagenerovali v kocke $[0, 1.2] \times [0, 1.2] \times [0, 1.2]$ a následne jej okraje odrezali a uvažovali iba kocku $[0.1, 1.1] \times [0.1, 1.1] \times [0.1, 1.1]$. To nám dalo $|W_V| = 1$ a následne pre rezy tohto pozorovania tiež $|W_A| = 1$. Samotný program Neper vie pre každú nagenerovanú bunku posúdiť, či môže byť ovplyvnená bunkami, ktoré by boli generované mimo pozorovacieho okna. Na toto je zvolené kritérium, aby vzdialenosť medzi generátorom bunky a jej ľubovoľným vrcholom bola menšia než najmenšia vzdialenosť medzi vrcholom bunky a ∂W_V . Pri sledovaní rozdelení trojrozmerných buniek sme sa zamerali aj na bunky spĺňajúce práve toto kritérium, avšak dostali sme menej robustné výsledky. Navyše táto korekcia mení charakter pozorovacieho okna a je tak ťažšie určiť korekciu (3.4).

Rezy sme vytvárali pre 100 buniek pre každú z intenzít λ . Na každej rezanej mozaike sme vytvorili 10 rovnobežných rezov v rovnakej vzdialenosti od seba, rovnobežných aj so stenou pozorovacieho okna.

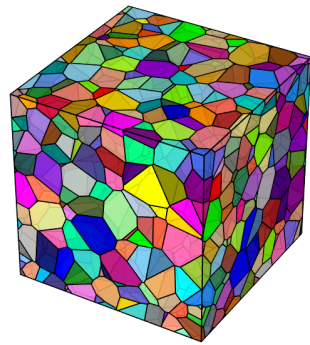
Samozrejme, nagenerované bunky v rámci jednej mozaiky (celej aj rezovej) sú vzájomne závislé. Z dôvodu stacionarity podkladového Poissonového bodového procesu je však táto závislosť zanedbateľná, viď aj diskusia v Hinde a Miles (1980).

Na overenie sily testov modelu Poissonovej-Voroniovej mozaiky sme ako alternatívu použili Poissonove-Laguerrove mozaiky s intenzitou generujúceho procesu $\lambda \in \{500, 1000\}$, kde sme zvolili dve rozdelenia váh:

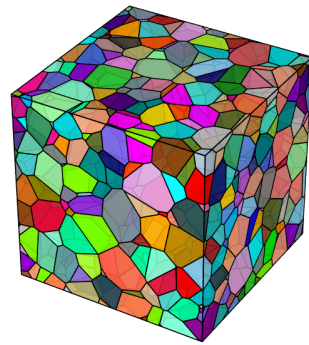
1. dvojatómové rozdelenie $A(s_1, s_2, p)$, t.j. pravdepodobnostné rozdelenie, ktorého nosič miery je iba dvojprvková množina $\{s_1, s_2\}$ a kde sa hodnota s_1 nadobúda s pravdepodobnosťou p a hodnota s_2 s pravdepodobnosťou $1 - p$, a to pre $s_1 = 0.01, s_2 \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ a $p \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$,
2. rovnomerné rozdelenie $U(a, b)$, kde $a = 0.01$ a $b \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$.

Váhy sme nagenerovali s využitím softvéru R(R Core Team (2021)) a predali sme ich programom Neper ako argument. Váhy z rozdelenia $U(0.01, 0.1)$ a $A(0.01, 0.1, p)$ slúžia ako model Laguerrových mozaík, ktorý sa veľmi nelíši od Poissonovej-Voroniovej mozaiky. Rozdelenia $U(0.01, 0.3)$ a $A(0.01, 0.3, p)$ však už vytvoria bunky markantne rôznych veľkostí. Na obrázku 4.1 si porovnáme niekoľko realizácií Poissonovej-Laguerrovej mozaiky pre viacero z uvedených rozdelení.

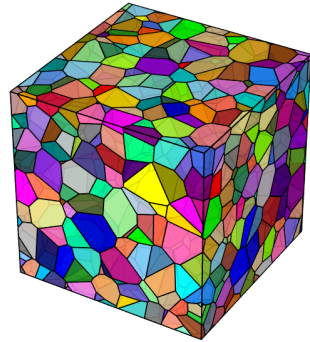
* <https://github.com/rquey/neper>



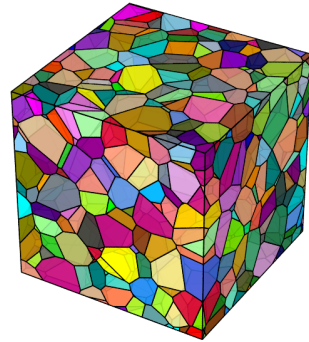
(a) $U(0.01, 0.1)$



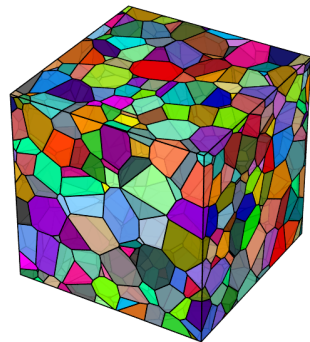
(b) $U(0.01, 0.3)$



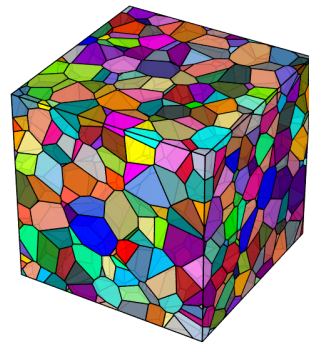
(c) $A(0.01, 0.1, 0.1)$



(d) $A(0.01, 0.3, 0.1)$



(e) $A(0.01, 0.3, 0.5)$



(f) $A(0.01, 0.3, 0.9)$

Obr. 4.1: Realizácia Poissonovej-Laguerrovej mozaiky pre rôzne rozdelenia váh generátorov. Pre $s_2 = 0.03$ aj $b = 0.03$ si môžeme všimnúť väčšiu nepravidelnosť buniek aj rôzny výskyt malých zrn.

4.2.2 Spôsohy výpočtu

Pomocou programu Neper sme pre každú nagerovanú mozaiku vytvorili súbor so štatistikami pre vrcholy, bunky, hrany a fazety. Na základe týchto súborov sme potom prostredníctvom skriptu v programovacom jazyku Python (Van Rossum a Drake (2009)) napočítali jednotlivé odhady a testové štatistiky.

Pozorovacie okno bolo vždy zvolené tak, aby bolo kvádom (konkrétne kockou) a aby boli jeho steny rovnobežné s karteziánskymi osami súradníc v \mathbb{R}^3 . Vďaka takejto realizácii sme jednak mohli použiť odhady (3.2) a (3.3), a takisto nám to umožnilo jednoduchý výpočet váh $|W_V \ominus C|$ pre odhad (3.4). Vďaka tomu, že W_V je kváder, tak aj erózia $W_V \ominus C$ bude kváder, kde veľkosť jednotlivých strán bude veľkosť príslušnej strany W_V zmenšená o šírku bunky C v príslušnej osi. Keďže nás zaujíma veľkosť $|W_V \ominus C|$, táto je potom jednoducho súčinom veľkosti jednotlivých strán.

Všetky skripty použité na generovanie mozaík v programe Neper a na výpočty pomocou jazyka Python sú prílohou tejto práce. Príloha obsahuje aj krátke vysvetlenie funkcionality jednotlivých skriptov.

4.3 Výsledky simulácie

4.3.1 Stereologické výsledky

Najprv sa pozrieme na výsledky simulácii na mozaikách, ktoré vznikli rezom priestorovej Poissonovej-Voroniovej mozaiky. Začneme skúmaním rozdelenia počtu vrcholov rezovej bunky, keďže toto potrebujeme neskôr pri χ^2 -teste.

Rozdelenie počtu vrcholov rezovej mozaiky

Pri výbere buniek zvolíme konzervatívny prístup a rozdelenie odhadneme iba z tých buniek orezaného pozorovacieho okna, ktoré majú prázdny prienik s jeho hranicou. Z 265 785 rezových buniek nám tak ostane 151 433 na analýzu rozdelenia počtu vrcholov. Kumulatívne počty a príslušné relatívne početnosti sú zhrnuté v tabulke 4.1. Rozdelenie je znázornené aj na histograme na obrázku 4.2.

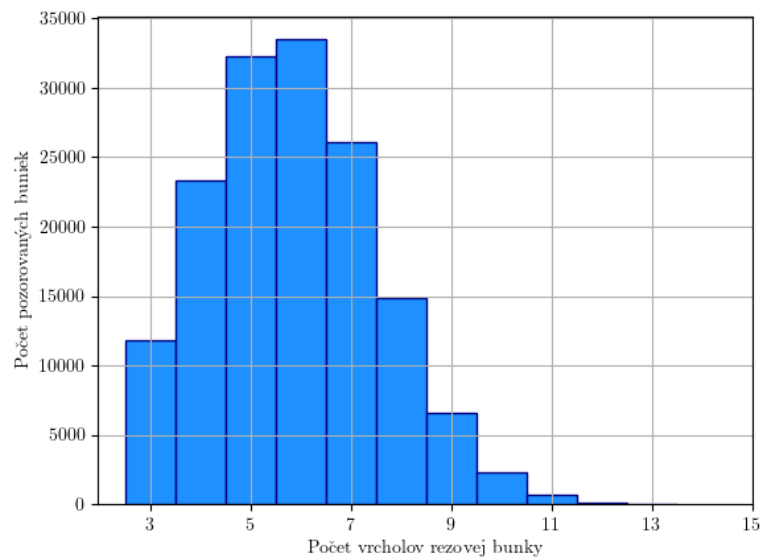
Ak napočítame priemerný počet vrcholov buniek a upravíme ho korekciou Horvitzovho-Thompsonovho odhadu, dostaneme hodnotu 5.99, čo je v zhode s tvrdením vety 18, že $n_{20} = 6$ pre normálne mozaiky (pre pripomenutie, rezová mozaika spĺňa podmienku normality). Bez použitia korekcie by sme dostali hodnotu 5.83.

Na základe získaného rozdelenia môžeme vytvoriť \mathbf{p}_A^0 pre test s testovou štatistikou χ_A^2 . Pripomínáme, že bunky s viac než deviatimi vrcholmi sa zbierajú do spoločnej kategórie. Tento výsledok porovnáme s hodnotami, ktoré dostali autori článku Hahn a Lorz (1994).

Vidíme podobné, ale nie úplne rovnaké čísla. Pre test dobrej zhody budeme používať čísla z našej simulácie.

Počet vrcholov	Počet pozorovaní	Relatívna početnosť
3	11 775	0.07776
4	23 338	0.15411
5	32 248	0.21295
6	33 486	0.22113
7	26 068	0.17214
8	14 826	0.09790
9	6 616	0.04369
10	2 257	0.01490
11	639	0.00422
12	150	0.00099
13	23	0.00015
14	6	0.00004
15	1	< 0.00001

Tabuľka 4.1: Kumulatívne a relatívne početnosti pozorovaní rezových buniek podľa počtu vrcholov.



Obr. 4.2: Histogram rozdelenia počtu vrcholov buniek v nasimulovaných rezových mozaikách. Priemerná hodnota upravená korekciou odhadu (3.4) vyšla 5.99. Teoretická hodnota tohto priemeru je rovná 6.

Odhady intenzity

Teraz si porovnáme jednotlivé odhady $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_{L_A}$. Odhad parametru λ_2 založený na odhade $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ budeme označovať $\hat{\lambda}_2$ a ten vychádzajúci z odhadu $\tilde{\gamma}_A^{(2)}$ zas $\tilde{\lambda}_2$. Výberové priemery, smerodajné odchýlky (označované SSD) a stredné štvorcové chyby (označované MSE) odhadov sú zosumarizované v tabuľke 4.3.

Môžeme pozorovať vcelku rovnomerné výsledky medzi jednotlivými odhadmi. Odhad na základe dĺžky úsečiek dáva najpresnejšie, no mierne rozptýlenejšie výsledky. Odhad založený na $\hat{\gamma}_A^{(2)}$ je hlavne pre väčšie intenzity kladne vychýlený.

Počet vrcholov	Nasimulované pravdepodobnosti pre χ^2 -test	
	z našej simulácie	z literatúry
3	0.0778	0.0631
4	0.1541	0.1358
5	0.2130	0.2047
6	0.2211	0.2273
7	0.1721	0.1837
8	0.0979	0.1104
≥ 9	0.0640	0.0750

Tabuľka 4.2: Odhady teoretických pravdepodobností kategórií počtov vrcholov rezových buniek a ich porovnanie s článkom Hahn a Lorz (1994).

Odhad	Intenzita generujúceho bodového procesu					
	$\lambda = 200$			$\lambda = 300$		
	Priemer	SSD	MSE	Priemer	SSD	MSE
$\hat{\lambda}_0$	190.21	28.43	903.36	296.51	39.38	1 561.65
$\hat{\lambda}_2$	204.06	29.03	858.48	312.39	39.94	1 747.26
$\tilde{\lambda}_2$	192.09	28.45	871.26	298.55	39.34	1 548.45
$\hat{\lambda}_{L_A}$	194.59	29.78	915.72	299.15	41.12	1 690.08

$\lambda = 500$			
Odhad	Priemer	SSD	MSE
$\hat{\lambda}_0$	501.10	52.59	2 764.92
$\hat{\lambda}_2$	520.13	53.21	3 234.92
$\tilde{\lambda}_2$	503.69	52.65	2 783.21
$\hat{\lambda}_{L_A}$	503.42	55.43	3 080.56

Tabuľka 4.3: Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík rezovej mozaiky z hľadiska výberového priemeru, smerodajnej odchýlky (SSD) a strednej štvorcovej chyby (MSE).

V praxi by sme preto volili odhad na základe toho, ktorú geometrickú charakteristiku vieme z rezu najľahšie odhadnúť. Ak vieme prakticky zmerať dĺžky hrán dnu v pozorovacom okne, zvolili by sme odhad $\hat{\lambda}_{L_A}$. Ak máme obmedzené možnosti, je samozrejme vhodný odhad $\hat{\lambda}_0$, pretože naň stačí počítať vrcholy. Ak by sme si mali vybrať spomedzi dvoch odhadov, pri ktorých musíme korigovať okrajové efekty, zvolili by sme odhad $\tilde{\lambda}_2$ založený na odhade $\tilde{\gamma}_A^{(2)}$ podľa knihy Saltykov (1974). Celkovo pozorujeme relatívne vysoké hodnoty strednej štvorcovej chyby. To súhlasí s intuíciou, že odhadujeme intenzitu v \mathbb{R}^3 na základe pozorovania v \mathbb{R}^2 , preto sú odhady intenzity značne rozptýlené.

Testové štatistiky

Na koniec stereologickej časti nám ostáva pozrieť sa na testové štatistiky navrhnutých testov Poissonovskosti. Pozrieme sa na empirické rozdelenia testových štatistík, tie porovnáme s literatúrou a pri teste dobrej zhody s teoretickým asymptotickým rozdelením. V tabuľke 4.4 sa pozrieme na odhadnuté kvantily testovej štatistiky $S_{A,n}^2$. Tieto si porovnáme s výsledkami z článku Hahn a Lorz (1994).

		α								
		n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
naša simulácia	33		1.403	1.599	1.776	1.992	3.903	4.354	4.617	4.960
	47		1.591	1.735	1.915	2.091	3.727	4.031	4.207	4.554
	70		1.828	1.967	2.077	2.200	3.569	3.756	3.922	4.257
výsledky článku	50		1.586	1.760	1.923	2.121	3.786	4.073	4.322	4.706
	100		1.912	2.042	2.174	2.314	3.504	3.695	3.872	4.116
	150		2.068	2.209	2.301	2.415	3.376	3.534	3.682	3.843
	200		2.180	2.287	2.372	2.472	3.300	3.441	3.556	3.703

Tabuľka 4.4: Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky $S_{A,n}^2$ a ich porovnanie s výsledkami článku Hahn a Lorz (1994).

Vidíme podobné výsledky. Na základe týchto kvantilov môžeme potom rozhodnúť o zamietnutí hypotézy Poissonovskosti.

Teraz sa pozrieme na test dobrej zhody s testovou štatistikou χ_A^2 . V tabuľke 4.5 sa pozrieme na porovnanie nami dosiahnutých empirických kvantilov s kvantilmi teoretického asymptotického rozdelenia. Na obrázku 4.3 porovnáваме konvergenciu empirickej distribučnej funkcie hodnôt našej testovej štatistiky s distribučnou funkciou rozdelenia χ_6^2 .

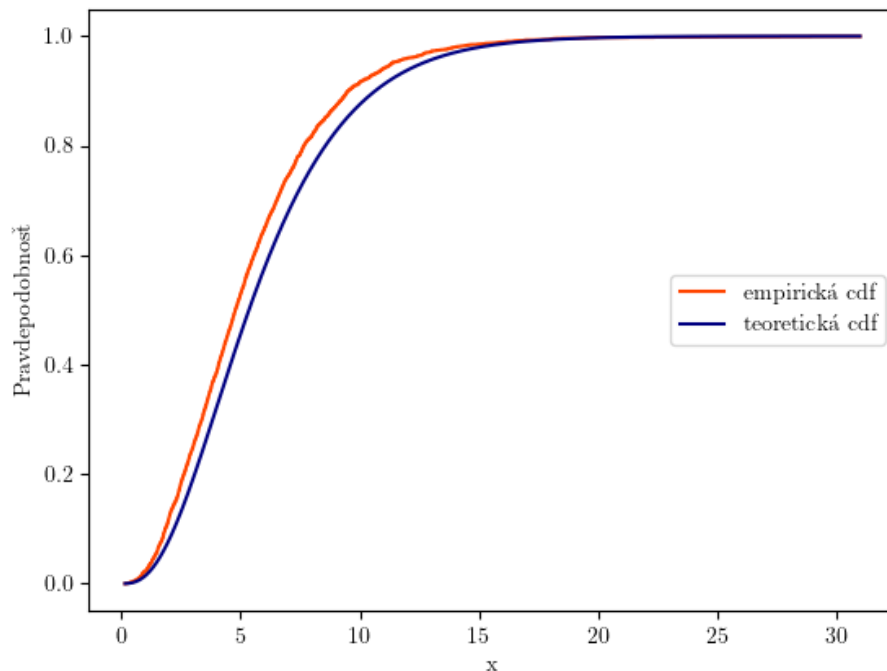
		α							
		0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
empirické kvantily		0.73	1.05	1.38	1.83	9.50	11.35	13.36	16.14
kvantily χ_6^2		0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81

Tabuľka 4.5: Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky χ_A^2 a ich porovnanie s teoretickými kvantilmi asymptotického rozdelenia.

Vidíme mierny posun oproti distribučnej funkcii asymptotického rozdelenia. S rastúcim počtom pozorovaní buniek sa však ale tento rozdiel znižoval.

4.3.2 Výsledky na priestorovej mozaike

Na úplný koniec sa pozrieme na kvalitu odhadov a testov, ktoré sme sami odvodili v tretej kapitole pre pozorovanie trojrozmernej mozaiky.



Obr. 4.3: Porovnanie konvergenzie empirickej distribučnej funkcie nasimulovaných hodnôt testovej štatistiky χ_A^2 a distribučnej funkcie rozdelenia χ_6^2 .

Rozdelenie vybraných charakteristík

Skúmali sme rozdelenie počtu faziet bunky, jej objem a povrch. Podobne ako pri rezových bunkách sme zvolili konzervatívny prístup a uvažovali iba bunky, ktoré sa celé nachádzajú v orezanom pozorovacom okne $C_{V,j}^o \subseteq W_V$. Takto nám z pôvodných 1 619 186 buniek ostalo 496 406 na analýzu rozdelenia.

Kumulatívne počty napozorovaných buniek podľa počtu faziet a im príslušné relatívne početnosti sú zosumarizované v tabuľke 4.6. V poslednom stĺpci pre porovnanie uvádzame výsledky relatívnej početnosti z článku Tanemura (2003). Rozdelenie tohto počtu pre nami nasimulované bunky je zobrazené aj v histograme na obrázku 4.4.

Ak napočítame priemerný počet faziet v pozorovaných bunkách a upravíme ho pomocou korekcie Horvitzovho-Thompsonovho odhadu (3.4), dostaneme hodnotu 15.49. Bez použitia korekcie je výberový priemer rovný 15.29. Očakávaná hodnota tohto počtu je podľa vety 25 rovná približne 15.54, preto považujeme výsledky za dobré.

Na základe napočítaných relatívnych početností môžeme teraz vytvoriť vektor \mathbf{p}_V^0 pre test Poissonovskosti s testovou štatistikou χ_V^2 . Hodnoty pre príslušné kategórie sú uvedené v tabuľke 4.7. Pripomínáme, že počty faziet ≤ 10 a ≥ 20 sa zgrupujú do dvoch samostatných kategórií.

Počet faziet	Počet pozorovaní	Rel. početnosť	Rel. početnosť (Tanemura (2003))
4	0	0	0.000001
5	25	0.000050	0.000040
6	208	0.000419	0.000345
7	1051	0.002117	0.001726
8	3428	0.006906	0.005917
9	8766	0.017659	0.014979
10	17189	0.034627	0.030806
11	28821	0.058059	0.052465
12	41363	0.083325	0.077278
13	52377	0.105512	0.099579
14	58679	0.118389	0.115061
15	60203	0.121278	0.120151
16	56142	0.113097	0.114984
17	48299	0.097297	0.100989
18	38742	0.078045	0.082702
19	28707	0.057830	0.063011
20	20049	0.040388	0.045003
21	13254	0.026700	0.030148
22	8203	0.016525	0.019170
23	4938	0.009948	0.011629
24	2848	0.005737	0.006697
25	1604	0.003231	0.003616
26	778	0.001567	0.001906
27	338	0.000681	0.000958
28	161	0.000324	0.000471
29	90	0.000181	0.000206
30	27	0.000054	0.000092
31	19	0.000038	0.000046
32	2	0.000004	0.000016
33	3	0.000006	0.000006
34	2	0.000004	0.000003
35	0	0	0.000001
36	0	0	0.000001

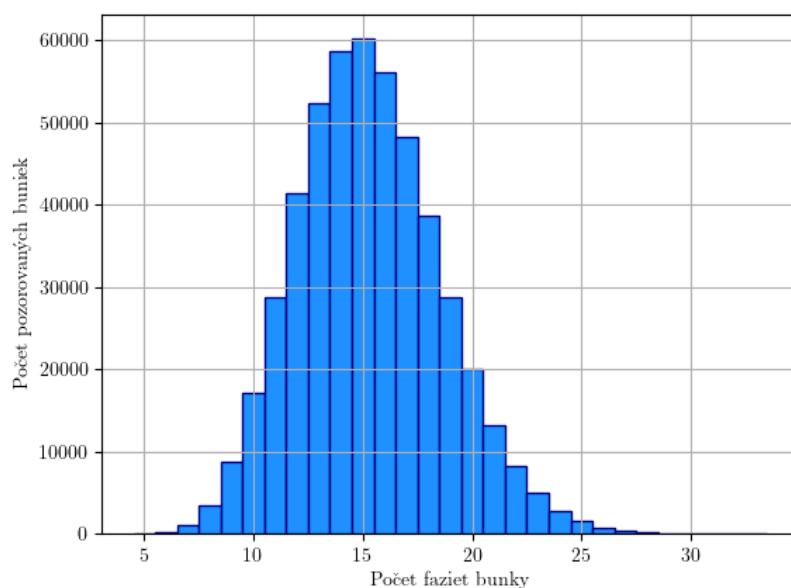
Tabuľka 4.6: Kumulatívne a relatívne početnosti pozorovaní priestorových buniek podľa počtu ich faziet.

V ďalšom kroku sa zameriame na rozdelenie objemov a povrchov buniek. Budeme skúmať tzv. redukovaný objem a redukovaný povrch, t.j. štatistiky

$$v_r = \lambda v^o,$$

$$s_r = \lambda^{\frac{2}{3}} s^o,$$

kde v^o a s^o sú napozorovaný objem a povrch bunky. Podľa vety 25 totiž platí $\mathbb{E}[v_r] = 1$ a $\mathbb{E}[s_r] \approx 5.821$. Výberové priemery redukovaných objemov a povrchov našich buniek vyšli rovné 0.961 a 5.678. Ak sme však redukovaný objem a povrch



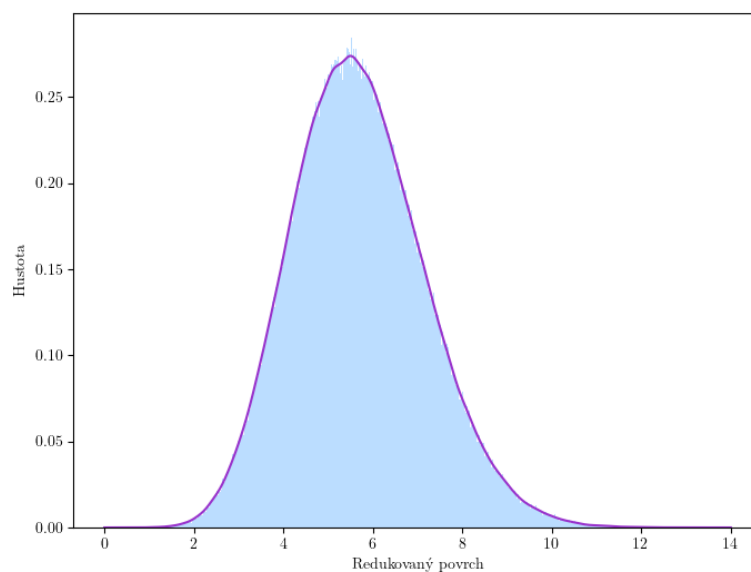
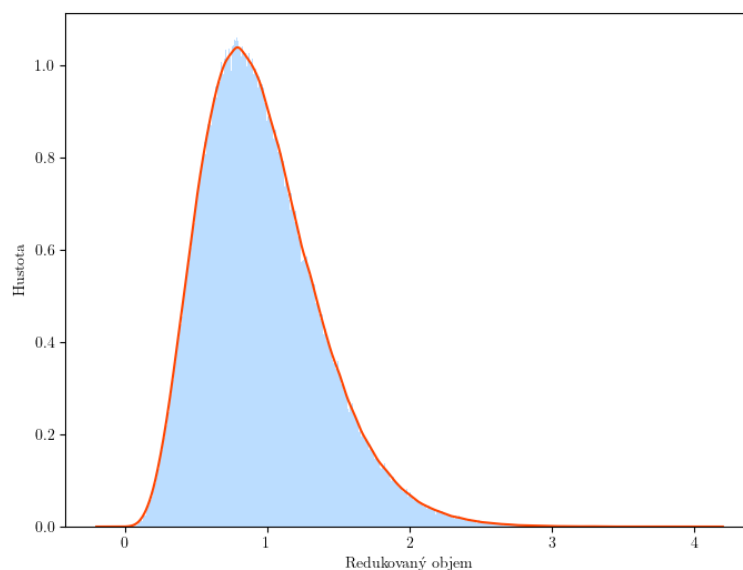
Obr. 4.4: Histogram rozdelenia počtu faziet buniek v nasimulovaných priestorových mozaikách. Priemerná hodnota upravená korekciou odhadu (3.4) vyšla 15.49. Teoretická hodnota tohto priemeru je rovná 15.54.

Počet faziet	Nasimulované pravdepodobnosti pre χ^2 -test
≤ 10	0.0618
11	0.0580
12	0.0833
13	0.1055
14	0.1184
15	0.1213
16	0.1131
17	0.0973
18	0.0780
19	0.0578
≥ 20	0.1054

Tabulka 4.7: Odhad teoretických pravdepodobností kategórií počtu faziet priestorových buniek. Vidíme, že zoskupenie buniek s počtom faziet do 10 a od 20 nám zabezpečilo dostatočne veľké hodnoty pravdepodobnosti prvej a poslednej kategórie.

odhadli pomocou odhadu (3.4), dostali sme hodnoty 0.997 a 5.813. Výsledky teda považujeme za dobré a vidíme, že korekcia prípadu, pri ktorom sa zameriavame iba na bunky cele vnútri pozorovacieho okna, dáva zmysel.

Rozdelenie redukovaného objemu a redukovaného povrchu je zobrazené aj na histogramoch na obrázku 4.5. Pri oboch histogramoch je zobrazený aj jadrový odhad hustoty.



Obr. 4.5: Rozdelenie redukovaného objemu a redukovaného povrchu nasimulovaných priestorových buniek spolu s jadrovým odhadom hustoty.

Odhady intenzity

Teraz si porovnáme jednotlivé odhady $\hat{\lambda}_p, \hat{\lambda}_n, \hat{\lambda}_l, \hat{\lambda}_v, \hat{\lambda}_s$ z vety 40. Výberové priemery a smerodajné odchýlky (označované SSD) jednotlivých odhadov sú zosumarizované v tabuľke 4.8.

Pozorujeme vcelku dobré výsledky odhadov. Kvalita odhadov, hlavne tých založených na geometrických charakteristikách pozorovaných v celom pozorovacom okne, sa zlepšuje s rastúcim počtom analyzovaných buniek, pre menšie počty sú tieto odhady mierne záporne vychýlené. Najpresnejšie, i keď trochu rozptýlenejšie odhady sú založené na odhadoch charakteristík typickej bunky. Na presnosti

Intenzita generujúceho bodového procesu						
$\lambda = 200$				$\lambda = 300$		
Odhad	Priemer	SSD	MSE	Priemer	SSD	MSE
$\hat{\lambda}_p$	186.43	12.26	334.37	289.36	14.89	334.67
$\hat{\lambda}_n$	188.85	12.18	272.49	294.08	14.72	251.61
$\hat{\lambda}_l$	190.30	12.17	242.12	293.15	14.68	262.44
$\hat{\lambda}_v$	201.97	18.05	329.27	301.25	20.54	422.90
$\hat{\lambda}_s$	201.39	17.69	314.37	300.83	20.16	406.78

$\lambda = 500$			
Odhad	Priemer	SSD	MSE
$\hat{\lambda}_p$	493.34	20.43	461.56
$\hat{\lambda}_n$	501.50	20.17	408.84
$\hat{\lambda}_l$	496.11	20.50	434.82
$\hat{\lambda}_v$	500.52	27.78	771.35
$\hat{\lambda}_s$	500.10	27.47	753.81

Tabuľka 4.8: Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík mozaiky v \mathbb{R}^3 z hľadiska výberového priemeru, smerodajnej odchýlky (SSD) a strednej štvorcovej chyby (MSE).

odhadov vidíme, že voľba korekcie pomocou Horvitzovho-Thompsonovho odhadu (3.4) bola vhodná. V porovnaní s tabuľkou 4.3 vidíme podstatne menšie hodnoty strednej štvorcovej chyby. To súhlasí s intuíciou, že odhad parametru mozaiky v \mathbb{R}^3 na základe trojrozmerného pozorovania je presnejší a menej rozptýlený, než jeho odhad založený na pozorovaní na dvojrozmernom reze.

V praxi by sme zvolili odhad podľa spôsobu prevedenia experimentu. Ak by sme z analýzy (napr. pomocou μ CT) nemali problém merať objemy alebo povrchy vnútorných buniek, zvolili by sme odhad $\hat{\lambda}_v$ alebo $\hat{\lambda}_s$. Ak by sme vedeli samotné bunky iba rozlišovať, použiť by sme samozrejme mohli iba odhady $\hat{\lambda}_p$ alebo $\hat{\lambda}_n$. Pre presnosť týchto odhadov by však bolo ideálne, aby sme pozorovali aspoň 500 buniek na jednotkový objem.

Kvalitu odhadov si ešte vyskúšame na dátach, ktoré nie sú vygenerované z Poissonovho-Voroniovho modelu. Vytvorili Laguerrove mozaiky, kde sme zvolili rozdelenie váh generátorov buď dvojatomové alebo rovnomerné s rôznymi parametrami, kde intenzity generujúceho procesu boli postupne 500 a 1000. Pre konkrétnu voľbu hyperparametrov viď sekcia 4.2.1. Výberové priemery odhadov sú zhrnuté v tabuľkách 4.9 a 4.10.

Vidíme, že pre tie Laguerrove mozaiky, ktoré stále môžeme považovať za celkom regulárne, vychádzajú odhady celkom presne. Až pre mozaiky s veľkými rozdielmi vo veľkosti buniek, čo je napr. pre rozdelenie váh $A(0.01, 0.3, p)$ sa kvalita odhadov podstatne zhoršuje. S klesajúcou regularitou mozaiky teda skutočne pozorujeme klesajúcu kvalitu odhadov.

Vrchná hranica pre rovnomerné rozdelenie							
		$b = 0.1$		$b = 0.2$		$b = 0.3$	
Intenzita generujúceho procesu							
Odhad	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$	
$\hat{\lambda}_p$	494.65	997.88	494.12	995.52	475.45	916.99	
$\hat{\lambda}_n$	502.72	1 012.30	502.52	1 012.81	495.03	973.39	
$\hat{\lambda}_l$	497.43	999.11	496.05	993.61	468.03	873.42	
$\hat{\lambda}_v$	502.78	997.27	499.49	1 000.91	496.16	964.17	
$\hat{\lambda}_s$	502.70	997.05	501.09	1 006.56	521.15	1 072.65	

Tabuľka 4.9: Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík Laguerrovej mozaiky s rovnomerným rozdelením váh $U(0.01, b)$, teda iného modelu, než bol použitý pri odvodzovaní odhadov.

Hodnota atómu dvojatómového rozdelenia							
		$s = 0.1$		$s = 0.2$		$s = 0.3$	
Intenzita generujúceho procesu λ							
p	Odhad	500	1 000	500	1 000	500	1 000
0.1	$\hat{\lambda}_p$	494.92	998.78	492.38	994.60	472.31	903.26
	$\hat{\lambda}_n$	501.99	1 012.98	502.17	1 012.03	494.35	964.98
	$\hat{\lambda}_l$	496.66	999.48	495.06	992.26	463.61	852.57
	$\hat{\lambda}_v$	500.94	1 001.23	499.96	1 003.03	493.44	956.18
	$\hat{\lambda}_s$	500.20	1 001.17	501.34	1 010.14	525.37	1 089.07
0.5	$\hat{\lambda}_p$	494.02	997.45	492.07	985.92	435.32	754.96
	$\hat{\lambda}_n$	502.38	1 011.93	502.04	1 009.6	466.59	821.18
	$\hat{\lambda}_l$	496.45	998.08	493.10	979.16	413.41	691.96
	$\hat{\lambda}_v$	501.58	999.82	500.29	995.13	469.96	814.74
	$\hat{\lambda}_s$	501.28	999.41	504.36	1 014.73	522.53	930.05
0.9	$\hat{\lambda}_p$	493.61	1 001.23	492.65	993.87	473.23	922.76
	$\hat{\lambda}_n$	502.18	1 014.33	501.53	1 011.33	487.15	943.31
	$\hat{\lambda}_l$	496.82	1 001.66	494.65	991.76	469.56	915.12
	$\hat{\lambda}_v$	500.38	1 001.87	500.58	1 001.00	484.63	931.13
	$\hat{\lambda}_s$	500.09	1 001.57	501.37	1 008.00	494.59	942.96

Tabuľka 4.10: Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík Laguerrovej mozaiky s dvojatómovým rozdelením váh $A(0.01, s, p)$, teda iného modelu, než bol použitý pri odvodzovaní odhadov.

Testy Poissonovskosti

Na úplný koniec sa pozrieme na kvalitu testov odvodených v sekcii 3.2.2. Pozrieme sa na empirické rozdelenia testových štatistík a pri teste dobrej zhody si jeho empirické rozdelenie χ_V^2 porovnáme s asymptotickým rozdelením. Začneme empirickými kvantilmi testovej štatistiky $S_{V,n}^2$. Tie sú zozbierané v tabuľke 4.11.

		α								
		n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
naša simulácia	83	7.378	7.833	8.209	8.649	12.801	13.435	13.918	14.870	
	142	8.119	8.411	8.897	9.334	12.615	13.169	13.734	14.462	
	270	8.855	9.243	9.416	9.861	12.280	12.796	13.031	13.439	

Tabuľka 4.11: Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky $S_{V,n}^2$.

Ďalej si porovnáme empirické kvantily testovej štatistiky χ_V^2 s teoretickými kvantilmi asymptotického rozdelenia χ_{10}^2 . V tabuľke 4.12 si číselne porovnáme vybrané kvantily a na obrázku 4.6 si v grafe zobrazíme empirickú distribučnú funkciu χ_V^2 s distribučnou funkciou χ_{10}^2 . Pripomíname, že test zamietame iba pre veľké hodnoty testovej štatistiky.

		α							
		0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
empirické kvantily		2.57	3.19	3.87	4.73	15.30	17.71	19.69	22.46
kvantily χ_{10}^2		2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21

Tabuľka 4.12: Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky χ_V^2 a ich porovnanie s teoretickými kvantilmi asymptotického rozdelenia.

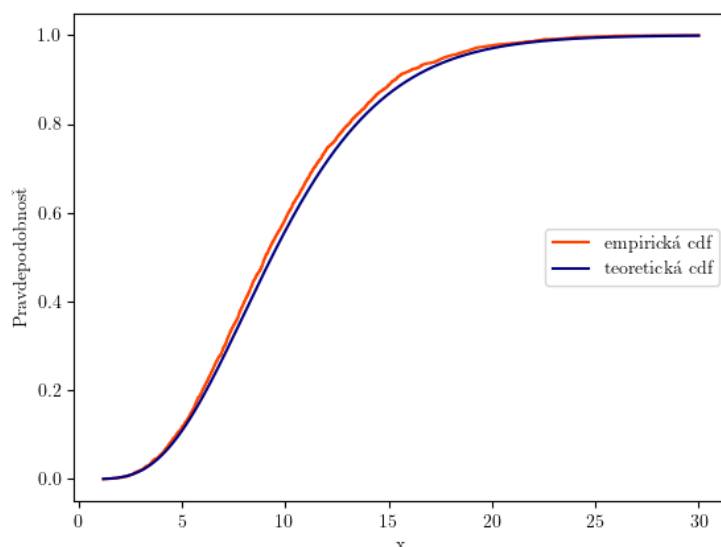
Opäť vidíme pekné výsledky. Už pri našom počte pozorovaní je asymptotické rozdelenie χ_{10}^2 dobrou aproximáciou empirického rozdelenia zo simulácie.

Na koniec nám ostáva spočítať empirické kvantily testovej štatistiky C_n , ktorá je Horvitzovým-Thompsonovým odhadom koeficientu variácie objemov buniek. Vybrané kvantily sú zozbierané v tabuľke 4.13.

		α								
		n	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99
naša simulácia	83	0.317	0.329	0.343	0.356	0.464	0.481	0.499	0.533	
	142	0.346	0.356	0.361	0.372	0.461	0.479	0.493	0.509	
	270	0.362	0.371	0.379	0.389	0.451	0.462	0.474	0.489	

Tabuľka 4.13: Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky C_n .

Kvalitu testov sme sa pokúsili vyskúšať aj pomocou odhadov ich sily. Pre všetky nagenované Laguerrove mozaiky sme spočítali testové štatistiky jednotlivých testov a určili sme, či pre ne zamietame hypotézu Poissonovskosti. Keďže



Obr. 4.6: Porovnanie empirickej distribučnej funkcie nasimulovaných hodnôt testovej štatistiky χ_V^2 a distribučnej funkcie rozdelenia χ_{10}^2 .

dáta boli vygenerované za alternatívy, silu testu sme odhadli ako relatívny počet testovaní, ktoré sme správne zamietli. Pri testoch, ktoré to umožňujú, sme skúsili testovať aj proti jednostrannej alternatíve, čomu sme prispôbili kritický obor. Iba pri 3 z 2 400 nagenovaných mozaík sme zamietli voči alternatíve väčšej regularity (teda príliš nízka hodnota testovej štatistiky). Silu tohto jednostranného testu teda v tabuľkách uvádzať nebudeme. Testy budeme v tabuľke rozlišovať podľa ich testovej štatistiky; navyše, jednostranné testy označíme dolným indexom \geq . Odhadnuté sily testov sú zozbierané v tabuľkách 4.14 a 4.15.

Vidíme, že voči takmer regulárnym mozaikám majú naše testy malú silu. Jediný, ktorý bol schopný detekovať ich aspoň zopár, bol test dobrej zhody, ktorý navyše nevieme použiť jednostranne. Vidíme však aj všeobecnú tendenciu sily testu rásť so znižujúcou sa regularitou analyzovaných mozaík; proti slabým regulárnym mozaikám, ako napr. s rozdelením váh $U(0.01, 0.3)$ alebo $A(0.01, 0.3, p)$ majú však testy veľkú silu. Ak očakávame regulárne bunky, zvolili by sme test dobrej zhody s testovou štatistikou χ_V^2 . Ak však predpokladáme, že bunky budú vykazovať veľkú iregularitu, sú lepšou voľbou zvyšné testy, ktoré navyše vieme použiť ako jednostranné testy. Pri dátach vygenerovaných za hypotézy takto nastavené testy zamietali priemerne v 5 percentách prípadov.

Môžeme pozorovať ešte jeden zaujímavý jav. Pri zachovaní ostatných parametrov hlavne pri slabých regulárnym mozaikách s dvojatomovým rozdelením váh ($s = 0.3$) vidíme, že nám pri zvýšení intenzity generujúceho procesu klesla odhadovaná sila testu. Keď sme sa pozreli na prípady, ktoré to spôsobovali, tak z porovnania objemov neregulárnym buniek vyplynulo, že síce sme zachovali pozorovacie okno a rozdelenie váh (nadobúdajúce iba 2 hodnoty), ale zvýšenie počtu nagenovaných buniek vo vnútri okna spôsobilo, že sa bunky javili vzájomne podobnejšie a tým celá mozaika ako regulárnejšia.

Vrchná hranica pre rovnomerné rozdelenie						
	$b = 0.1$		$b = 0.2$		$b = 0.3$	
Intenzita generujúceho procesu						
Test	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$	$\lambda = 500$	$\lambda = 1\,000$
χ_V^2	0.11	0.06	0.09	0.16	1	1
S_V^2	0.02	0	0.02	0.02	1	1
C	0.01	0	0.03	0	1	1
$S_{V,\geq}^2$	0.04	0	0.07	0.04	1	1
C_{\geq}	0.04	0.01	0.07	0.09	1	1

Tabuľka 4.14: Odhadnuté sily jednotlivých testov pre testovanie Laguerrových mozaík s rovnomerným rozdelením váh $U(0.01, b)$.

Hodnota atómu dvojatómového rozdelenia							
		$s = 0.1$		$s = 0.2$		$s = 0.3$	
Intenzita generujúceho procesu λ							
p	Test	500	1 000	500	1 000	500	1 000
0.1	χ_V^2	0.06	0.07	0.1	0.27	0.99	1
	S_V^2	0	0	0.06	0.01	1	1
	C	0	0	0.02	0.07	1	1
	$S_{V,\geq}^2$	0.01	0	0.1	0.12	1	1
	C_{\geq}	0.02	0.01	0.08	0.27	1	1
0.5	χ_V^2	0.06	0.1	0.12	0.98	1	1
	S_V^2	0.01	0	0.09	0.86	1	1
	C	0	0	0.13	0.84	1	1
	$S_{V,\geq}^2$	0.02	0	0.25	0.94	1	1
	C_{\geq}	0.01	0	0.29	0.97	1	1
0.9	χ_V^2	0.02	0.07	0.07	0.19	0.7	0.67
	S_V^2	0	0	0.02	0.03	0.89	0.71
	C	0	0	0.04	0	0.45	0.09
	$S_{V,\geq}^2$	0.01	0	0.1	0.08	0.95	0.81
	C_{\geq}	0	0	0.06	0.06	0.73	0.31

Tabuľka 4.15: Odhadnuté sily jednotlivých testov pre testovanie Laguerrových mozaík s dvojatómovým rozdelením váh $A(0.01, s, p)$.

4.4 Zhrnutie výsledkov

V simulačnej štúdií sme overovali kvalitu odhadov a testov odvodených v kapitole 3. Najprv sme sa zamerali na výsledky odhadov na mozaikách vytvorených rezom trojrozmernej mozaiky, a potom na výsledky pozorovania v trojrozmernom okne.

Výsledky pozorovania na rezoch potvrdili našu intuíciu, že pri odhadoch v \mathbb{R}^3 založených na pozorovaní v \mathbb{R}^2 budú výsledky menej presné a budú vykazovať väčší rozptyl. Toto je vidieť na porovnaní strednej štvorcovej chyby medzi tabuľkami 4.3 a 4.8. Pri analýzach, ktoré sme mohli porovnať s existujúcim výskumom v literatúre, sme dostali dobré výsledky. Najlepší odhady boli založené na počítaní vrcholov vo vnútri pozorovacieho okna a na odhade intenzity buniek 3.2.

Pri priestorovom pozorovaní sme dostávali kvalitné výsledky odhadov intenzity. Najpresnejšie odhady boli založené na odhade parametrov typickej bunky, tieto však boli viac rozptýlené. Odhadom s najmenšou štvorcovou chybou bol odhad $\hat{\lambda}_n$ založený na našom odhade 3.3, tento však kladie dodatočné podmienky na mozaiku. Pri všetkých výsledkoch založených na parametroch typickej bunky sa nám ukázala korekcia pomocou Horvitzovho-Thompsonovho odhadu (3.4) ako vhodná, pretože zlepšila získané odhady.

Kvalitu odhadov a testov sme vyskúšali aj na dátach, ktoré boli vygenerované mimo modelu použitého pri odvodzovaní týchto odhadov. S klesajúcou regularitou analyzovaných mozaík nám klesala presnosť odhadov, no rástla sila testov Poissonovskosti modelu. Takéto výsledky sme očakávali.

Záver

V práci sme sa zaoberali štatistickými aspektami náhodných mozaík. Po zavedení potrebných pojmov sme zozbierali potrebné výsledky o geometrických charakteristikách mozaík. V tejto časti sme vychádzali predovšetkým z knihy Schneider a Weil (2008).

Dôležitým krokom bolo zameranie sa na model Voronoiových mozaík, a to konkrétne takých, ktorých generátor je realizácia Poissonovho bodového procesu na \mathbb{R}^d . Na opis tohto modelu nám stačí poznať intenzitu príslušného bodového procesu. Pri štatistickej analýze sme sa preto zamerali na odhadovanie tejto intenzity. Hlavným zameraním našej práce boli mozaiky v \mathbb{R}^3 , no pre niektoré výsledky sme museli siahnuť aj do dvojrozmernej analýzy. Tieto dva prípady sa nám stretli v časti stereologickej analýzy, ktorá má veľmi jasnú praktickú motiváciu – spoznať štruktúru trojrozmerného objektu na základe jeho plošných rezov.

Odvodili sme si aj kľúčové geometrické výsledky pre zložitejší model mozaík, tzv. Laguerrove mozaiky. Tieto sú neoceniteľné pri skúmaní polykryštalických látok. Nosným dielom v oblasti Laguerrových mozaík je článok Lautensack a Zuyev (2008). Prácu s týmto modelom sme si vyskúšali aj v simulačnej štúdii, kde sme pomocou neho budovali alternatívu voči Poissonovmu-Voronoiovmu modelu. Pre ten sme zas odvodili vlastné štatistické odhady a testy Poissonovskosti.

Odhad intenzity funguje v dvoch krokoch, najprv potrebujeme vhodný odhad geometrickej charakteristiky a na základe predstavenej teórie potom odvodíme odhad samotnej intenzity. Pri odvodzovaní však nesmieme zanedbať, že realizáciu náhodnej mozaiky vieme pozorovať iba v ohraničenom okne, a teda svoju rolu hrajú aj okrajové efekty. Tieto sme použili pri niektorých odhadoch geometrických charakteristík. Pre odhady charakteristík typickej bunky sme zas zaviedli Horvitzov-Thompsonov odhad, ktorý koriguje to, že pri analýze môžeme brať do úvahy iba niektoré pozorované body.

Kvalitu odvodených odhadov a testov sme nakoniec vyskúšali v simulačnej štúdii. Odhady dali spoľahlivé výsledky, dokonca aj pre mozaiky mimo základného modelu. Testy boli schopné rozlíšiť až vyššiu mieru iregularity buniek, voči mozaikám iba mierne mimo základného modelu mali nižšiu silu.

Na túto prácu sa dá naviazať hneď v niekoľkých smeroch. Rozdelenie buniek sa dá skúmať aj z pohľadu aproximácie nejakým iným, známym rozdelením. Do úvahy prichádza aj skúmať ďalšie momenty tohto rozdelenia. Takisto, množina modelov alternatívnych k Poissonovmu-Voronoiovmu modelu je tak široká, že vieme skúmať citlivosť testov voči rôznym jej členom (napr. voči modelu, ktorý vytvára regulárnejšie bunky), alebo odhadovať charakteristiky pre ľubovoľnú inú triedu mozaík. Všetky spomenuté rozšírenia ale predstavujú novú sadu implementačných aj teoretických výziev, ktoré sú nad rámec tejto diplomovej práce.

Zoznam použitej literatúry

- AURENHAMMER, F. (1987). A criterion for the affine equivalence of cell complexes in \mathbb{R}^d and convex polyhedra in \mathbb{R}^{d+1} . *Discrete & Computational Geometry*, **2**, 49–64.
- CHIU, S. N., WEYGAERT, R. V. D. a STOYAN, D. (1996). The sectional Poisson Voronoi tessellation is not a Voronoi tessellation. *Advances in Applied Probability*, **28**(2), 356–376.
- CHIU, S. N., STOYAN, D., KENDALL, W. S. a MECKE, J. (2013). *Stochastic Geometry and its Applications*. Third Edition. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester. ISBN 978-0-470-66481-0.
- COEURJOLLY, J.-F., MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. (2017). A tutorial on Palm distributions for spatial point processes. *International Statistical Review*, **83**(5), 404–420.
- DALEY, D. a VERE-JONES, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume I: Elementary Theory and Methods*. Second Edition. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-95541-4.
- DALEY, D. a VERE-JONES, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes. Volume II: General Theory and Structure*. Second Edition. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-21337-8.
- FLIMMEL, D., PAWLAS, Z. a YUKICH, J. E. (2020). Limit theory for unbiased and consistent estimators of statistics of random tessellations. *Journal of Applied Probability*, **57**(2), 679–702.
- HAHN, U. a LORZ, U. (1993). Stereological model tests for the spatial Poisson-Voronoi tessellation II. *Acta Stereologica*, **12**(2), 131–140.
- HAHN, U. a LORZ, U. (1994). Stereological analysis of the spatial Poisson-Voronoi tessellation. *Journal of Microscopy*, **175**(3), 176–185.
- HINDE, A. L. a MILES, R. E. (1980). Monte Carlo estimates of the distributions of the random polygons of the Voronoi tessellation with respect to a Poisson process. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **10**(3-4), 205–223.
- KENDALL, D. G. (1974). Foundations of a theory of random sets. In HARDING, E. a KENDALL, D. G., editors, *Stochastic Geometry*, pages 322–376. John Wiley & Sons, Ltd, London.
- KUMAR, S., KURTZ, S. K., BANAVAR, J. R. a SHARMA, M. G. (1992). Properties of a three-dimensional Poisson-Voronoi tessellation: A Monte Carlo study. *Journal of Statistical Physics*, **67**(3-4), 523–551.
- LAUTENSACK, C. a ZUYEV, S. (2008). Random Laguerre tessellations. *Advances in Applied Probability*, **40**(3), 630–650.

- LAWRENCE, J. (1997). A short proof of Euler's relation for convex polytopes. *Canadian Mathematical Bulletin*, **40**(4), 471–474.
- MECKE, J. (1984). Parametric representation of mean values for stationary random mosaics. *Series Statistics*, **15**(3), 437–442.
- MILES, R. E. (1971). Isotropic random simplices. *Advances in Applied Probability*, **3**(2), 353–382.
- MØLLER, J. (1989). Random tessellations in \mathbb{R}^d . *Advances in Applied Probability*, **21**(1), 37–73.
- MØLLER, J. (1994). *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-94264-3.
- MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. P. (2004). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Second Edition. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton. ISBN 978-1-58488-265-4.
- MRKVIČKA, T. a RATAJ, J. (2008). On the estimation of intrinsic volume densities of stationary random closed sets. *Stochastic Processes and their Applications*, **118**(2), 213–231.
- OHSEER, J. a MÜCKLICH, F. (2000). *Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science*. First Edition. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester. ISBN 978-0-471-97486-2.
- OKABE, A., BOOTS, B., SUGIHARA, K. a CHIU, S. N. (2000). *Stochastic and Integral Geometry*. Second Edition. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester. ISBN 978-0-471-98635-5.
- QUEY, R., DAWSON, P. a BARBE, F. (2011). Large-scale 3d random polycrystals for the finite element method: Generation, meshing and remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**, 1729–1745.
- R CORE TEAM (2021). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- RATAJ, J. (2006). *Bodové procesy*. 2. opravené vydanie. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-1182-1.
- SALTYKOV, S. A. (1974). *Stereometrische Metallographie*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig.
- SCHNEIDER, R. a WEIL, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 978-3-540-78858-4.
- STOYAN, D. (1979). Proofs of some fundamental formulas of stereology for non-Poisson grain models. *Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization*, **10**(4), 575–583.
- STOYAN, D. a HERMANN, H. (1986). Some methods for statistical analysis of planar random tessellations. *Statistics*, **17**(3), 407–420.

TANEMURA, M. (2003). Statistical distributions of Poisson Voronoi cells in two and three dimensions. *Forma*, **18**, 221–247.

VAN ROSSUM, G. a DRAKE, F. L. (2009). *Python 3 Reference Manual*. CreateSpace, Scotts Valley, CA. ISBN 1441412697.

Zoznam obrázkov

2.1	Porovnanie realizácií Voronoiovej a Laguerrovej mozaiky v dvoch aj troch dimenziách s rovnakou množinou generátorov danou Poissonovým bodovým procesom. Váhy generátorov Laguerrovej mozaiky sú rozdelené rovnomerne.	35
3.1	Ilustrácia zmenšeného výberu T_V^- na Poissonovej-Voronoiovej mozaike s intenzitou generujúceho procesu $\lambda = 300$	44
4.1	Realizácia Poissonovej-Laguerrovej mozaiky pre rôzne rozdelenia váh generátorov. Pre $s_2 = 0.03$ aj $b = 0.03$ si môžeme všimnúť väčšiu nepravidelnosť buniek aj rôzny výskyt malých zrn.	49
4.2	Histogram rozdelenia počtu vrcholov buniek v nasimulovaných rezových mozaikách. Priemerná hodnota upravená korekciou odhadu (3.4) vyšla 5.99. Teoretická hodnota tohto prímeru je rovná 6. . .	51
4.3	Porovnanie konvergenzie empirickej distribučnej funkcie nasimulovaných hodnôt testovej štatistiky χ_A^2 a distribučnej funkcie rozdelenia χ_6^2	54
4.4	Histogram rozdelenia počtu faziet buniek v nasimulovaných priestorových mozaikách. Priemerná hodnota upravená korekciou odhadu (3.4) vyšla 15.49. Teoretická hodnota tohto prímeru je rovná 15.54.	56
4.5	Rozdelenie redukovaného objemu a redukovaného povrchu nasimulovaných priestorových buniek spolu s jadrovým odhadom hustoty.	57
4.6	Porovnanie empirickej distribučnej funkcie nasimulovaných hodnôt testovej štatistiky χ_V^2 a distribučnej funkcie rozdelenia χ_{10}^2	61

Zoznam tabuliek

1.1	Geometrický význam vnútorného objemu V_j v \mathbb{R}^3	13
2.1	Geometrický význam opisných charakteristík stacionárnej náhodnej mozaiky v \mathbb{R}^2	22
2.2	Geometrický význam opisných charakteristík stacionárnej náhodnej mozaiky v \mathbb{R}^3	23
3.1	Vzťahy medzi naším a značením používaným vo vybranej literatúre.	36
4.1	Kumulatívne a relatívne početnosti pozorovaní rezových buniek podľa počtu vrcholov.	51
4.2	Odhady teoretických pravdepodobností kategórií počtov vrcholov rezových buniek a ich porovnanie s článkom Hahn a Lorz (1994).	52
4.3	Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík rezovej mozaiky z hľadiska výberového priemeru, smerodajnej odchýlky (SSD) a strednej štvorcovej chyby (MSE).	52
4.4	Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky $S_{A,n}^2$ a ich porovnanie s výsledkami článku Hahn a Lorz (1994).	53
4.5	Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky χ_A^2 a ich porovnanie s teoretickými kvantilmi asymptotického rozdelenia.	53
4.6	Kumulatívne a relatívne početnosti pozorovaní priestorových buniek podľa počtu ich faziet.	55
4.7	Odhad teoretických pravdepodobností kategórií počtu faziet priestorových buniek. Vidíme, že zoskupenie buniek s počtom faziet do 10 a od 20 nám zabezpečilo dostatočne veľké hodnoty pravdepodobnosti prvej a poslednej kategórie.	56
4.8	Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík mozaiky v \mathbb{R}^3 z hľadiska výberového priemeru, smerodajnej odchýlky (SSD) a strednej štvorcovej chyby (MSE).	58
4.9	Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík Laguerrovej mozaiky s rovnomerným rozdelením váh $U(0.01, b)$, teda iného modelu, než bol použitý pri odvodzovaní odhadov.	59
4.10	Porovnanie odhadov intenzity λ na základe geometrických charakteristík Laguerrovej mozaiky s dvojatómovým rozdelením váh $A(0.01, s, p)$, teda iného modelu, než bol použitý pri odvodzovaní odhadov.	59
4.11	Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky $S_{V,n}^2$	60
4.12	Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky χ_V^2 a ich porovnanie s teoretickými kvantilmi asymptotického rozdelenia.	60
4.13	Simuláciou odhadnuté kvantily testovej štatistiky C_n	60
4.14	Odhadnuté sily jednotlivých testov pre testovanie Laguerrových mozaík s rovnomerným rozdelením váh $U(0.01, b)$	62
4.15	Odhadnuté sily jednotlivých testov pre testovanie Laguerrových mozaík s dvojatómovým rozdelením váh $A(0.01, s, p)$	62