

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Využití invariantů geometrických transformací k řešení úloh

The use of invariants of geometric transformations to solving problems

Jiří Doubrava

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání (7504R015)

2021

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Využití invariantů geometrických transformací k řešení úloh potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze 12. července 2021

Rád bych poděkoval na tomto místě Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za jeho nápomocné připomínky a iniciativní nápady, které mi nejen po dobu psaní této bakalářské práce dával. Současně děkuji své rodině za podporu během studia.

## **ABSTRAKT**

Práce se zabývá rozdělením vzájemně jednoznačných kolineárních geometrických zobrazení. Zabývá se touto rozdělení odpovídajícím pohledem na zadání i řešení úloh. Hlavní částí práce je sbírka řešených úloh z oblasti rovinné geometrie, které jsou rozděleny do několika skupin. Práce může být použita jak učiteli matematiky na středních školách, tak samotnými středoškoláky. Práce je rozdělena do dvou částí; první část je teoretická a obsahuje stručné seznámení se základními pojmy týkajícími se invariantů geometrických transformací a popis struktury geometrie podle Felixe Kleina včetně jeho Erlangenského programu; druhá část obsahuje samotná zadání a řešení úloh. Řešení některých uvedených úloh jsou pro lepší názornost doplněna obrázky vytvořenými v programu GeoGebra. Obrázky hrají svou roli i v teoretické části, kde mohou napomoci k lepšímu pochopení některých složitějších pojmů. Některé z použitých úloh jsou autorské, jiné jsou převzaté z různých pramenů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

geometrické transformace, grupy, Erlangenský program, invariant, řešené úlohy

## **ABSTRACT**

This thesis deals with the division of bijective collinear geometric mappings. It deals with a corresponding view on its respective problems and their solutions. The main part of the thesis is a collection of solved problems in the field of plane geometry, which are divided into several groups. The thesis can be used by both mathematics teachers and students at the secondary schools. The thesis is divided into two parts; the first part is theoretical and it contains a brief introduction to the basic concepts concerning invariants of geometric transformations and a description of the structure of geometry according to Felix Klein including his Erlangen program; the second part contains the actual assignments and solutions of the problems. The solutions of some of the problems are supplemented by images created in GeoGebra software for better illustration. The images play an important role even in the theoretical part, where they can help improve understanding of some of the more complex concepts. Some of the problems were created by the author, other problems are taken from sources listed in the list of bibliography.

## **KEYWORDS**

geometric transformations, groups, Erlangen program, invariant, solved problems

# Obsah

Úvod .....	7
1 Teoretická část .....	9
1.1 Geometrická zobrazení a jejich klasifikace.....	9
1.1.1 Základní definice.....	9
1.1.2 Klasifikace a invarianty geometrických transformací, Erlangenský program .....	11
1.2 Dvojpoměr, kolineace .....	13
1.3 Afinita, Cèvova a Menelaova věta .....	16
1.4 Úhel a jeho velikost, vzdálenost .....	19
1.5 Podobnost.....	24
1.6 Shodnost.....	26
2 Praktická část .....	28
2.1 Zobrazení a jeho vlastnosti, rozdělení čtyřúhelníků.....	28
2.2 Řešené úlohy – dvojpoměr, harmonická čtveřice .....	31
2.3 Řešené úlohy – afinita.....	34
2.4 Řešené úlohy – podobnost .....	42
2.5 Řešené úlohy – shodnost.....	50
Závěr .....	67
Použité zdroje .....	68

# Úvod

Původním záměrem bylo (v návaznosti na práci vytvořenou na střední škole pro účely Středoškolské odborné činnosti) sepsat sbírku zajímavých úloh ze syntetické geometrie. Výchozím bodem pro tuto bakalářskou práci se stala klasifikace geometrie na základě zachování vlastností geometrických transformací, této problematice je mimo jiných věnována teoretická část této práce. Práce si klade za cíl seznámit čtenáře s možným přístupem k úlohám z rovinné geometrie, s určitým nahlížením na strukturu geometrie. Sekundárním cílem je vytvořit co nejsrozumitelnější materiál pro učitele matematiky na středních školách a pro žáky nebo studenty se zájmem o matematiku. Přínosem pro čtenáře by měla být dovednost rozpoznat ze zadání geometrické úlohy, které postupy by mohly vést k řešení a které postupy může v některých případech rovnou zavrhnout (např. pokud v zadání úlohy figurují pouze středy stran nebo poměr délek na úsečce, není pro vyřešení úlohy nutné uvažovat nad postupy pracujícími se vzdálenostmi, kterých je středoškolákům známa většina).

V první kapitole jsou uvedeny některé základní pojmy, pro další kapitoly je podstatná především tabulka na str. 12, která zachycuje invarianty čtyř významných lineárních zobrazení (kolineace, afinita, podobnost, shodnost). První část bakalářské práce obsahuje definice a věty klíčové pro invarianty geometrických transformací, které jsou následně použity v části práce s řešenými úlohami. Příklady jsou uvedeny i v teoretické části práce a mají za cíl umožnit čtenáři lépe pochopit budovanou teorii – příklady v teoretické části jsou, pokud není uvedeno jinak, autorské.

Struktura, která je také mimo jiných vyučována v předmětu Syntetická geometrie I či bude vyučována v předmětech Planimetrie a Školská matematika z pohledu vysokoškolské matematiky 1, je založena na tom, že začínáme ve zkoumání struktury geometrie od kolineace a postupně přidáváním vlastností přecházíme k dalším zobrazením, větám a pojmům. Tato práce by měla takový pohled na geometrii shrnout.

V práci se nacházejí tři typy úloh – početní, konstrukční, důkazové. V některých případech je možné příslušný typ úlohy přeměnit na jiný, a to vhodným přeformulováním zadání. V práci je věnován prostor i ukázce možnosti takového přeformulování.

Nutno ještě dodat, že práce se zabývá invarianty čtyř zobrazení – kolineace, afinita, podobnost, shodnost. My však budeme se všemi těmito zobrazeními pracovat v eukleidovské rovině a budeme pojmy používat tak, jak bylo zvykem v kurzech syntetické geometrie.

Dále dodáváme, že některé definice a věty jsou vzhledem ke konzistenci používaných pojmů, především pak ke konzistenci používaného značení, upraveny – v takovém případě je na tuto skutečnost čtenář explicitně upozorněn.



# 1 Teoretická část

## 1.1 Geometrická zobrazení a jejich klasifikace

### 1.1.1 Základní definice

Před samotným rozdělením geometrických transformací definujeme několik pojmů týkajících se zobrazení. Speciální pozornost věnujeme zobrazením geometrickým. V celé práci předpokládáme znalost středoškolských pojmů, v této kapitole navíc předpokládáme znalost pojmu binární operace a také vlastností operací.

**Definice 1** (grupa) [2, str. 16]: Necht'  $G$  je neprázdná množina a  $*$  je operace na množině  $G$ . Množina  $G$  spolu s operací  $*$  tvoří *grupu*, jestliže  $*$  je na množině  $G$  asociativní, má v množině  $G$  neutrální prvek a ke každému prvku  $G$  existuje v množině  $G$  inverzní prvek vzhledem k operaci  $*$ .

Dále nás budou zajímat grupy, kde množinou  $G$  z předchozí definice bude množina geometrických transformací, operací  $*$  bude skládání, neutrálním prvkem bude identita a inverzním prvkem bude inverzní zobrazení. S pojmy geometrická transformace, identita a inverzní zobrazení se seznámíme dále v této kapitole.

**Definice 2** (geometrické zobrazení) [11, str. 7]: *Geometrickým zobrazením* (popř. *geometrickou korespondencí* či *příbuzností*) nazýváme předpis<sup>1</sup>  $f: A \rightarrow B$ , který každému bodu  $X$  z množiny  $A$  (tzv. vzoru) přiřazuje nejvýše jeden bod  $X' = f(X)$  z množiny  $B$  (tzv. obraz).

Následující definice navazují na tu předchozí. Vyložíme je v kontextu geometrických zobrazení.

**Definice 3** (inverzní zobrazení) [11, str. 7]: Je-li rovněž přiřazení  $f^{-1}: B \rightarrow A$  geometrickým zobrazením, potom jej nazýváme *inverzním zobrazením* k zobrazení  $f$ .

---

<sup>1</sup> Zde je na místě zmínit, že předpis není nijak přesně definovaný pojem. Postačí nám však určitá představa popsaného přiřazení.

**Definice 4** (vlastnosti zobrazení) [11, str. 7–8]: Zobrazení  $f$  se nazývá *surjektivní* (zkr. *surjekce*), právě když  $f(A) = B$ . Zobrazení  $f$  se nazývá *prosté*, resp. *injektivní* (zkr. *injekce*), právě když platí  $X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$ .

Je-li ke každému prvku z množiny vzorů definován obraz a je-li současně  $f$  injektivní a surjektivní, nazýváme toto zobrazení *vzájemně jednoznačné*, resp. *bijektivní* (zkr. *bijekce*).

**Definice 5** (geometrická transformace) [11, str. 8]: Vzájemně jednoznačné zobrazení množiny  $A$  na sebe (tj.  $f: A \rightarrow A$ ) nazýváme *geometrická transformace*.

**Definice 6** (identita) [11, str. 8]: Geometrická transformace se nazývá *identická* (zkr. *identita*), právě když pro každé  $X \in A$  je  $f(X) = X$ ; identitu na množině  $A$  budeme značit  $\text{id}_A$ .

Definice následujících pojmů budeme využívat v řešených úlohách. Zvláště pojem invariant pro nás bude důležitý i v uvědomění si toho, jakým způsobem pracujeme s budováním geometrie. K pojmu involuce je potřeba rozumět tomu, jak se skládají zobrazení. To popíšeme hned v následující definici.

**Definice 7** (složené zobrazení) [1, str. 7]: Je-li  $f$  zobrazení z  $A$  do  $B$  a  $g$  zobrazení z  $B$  do  $C$ , nazývá se *složeným zobrazením* zobrazení z  $A$  do  $C$ , právě když ke každému bodu  $X$  z  $A$  existuje bod  $Y = f(X)$  z  $B$  a k němu pak bod  $Z = g(f(X))$  z  $C$ .

Jak dodávají Boček a Zhouf v [1, str. 7], složené zobrazení označíme  $g \circ f$ , kde „ $\circ$ “ je symbol pro skládání zobrazení. Zde je však nutné dát si pozor na to, v jakém pořadí jsou zobrazení složena a v jakém pořadí je složení zapsáno.

**Definice 8** (involuce) [11, str. 8]: Geometrickou transformaci  $f$  na množině  $A$ , která není identitou, nazýváme *involutorní transformace* (zkr. *involuce*), právě když pro ni platí vztah  $f \circ f = \text{id}_A$ .<sup>2</sup> Zápis  $\text{id}_A$  zde značí identitu na dané množině  $A$ .

**Definice 9** (invariant) [11, str. 8]: Geometrické vlastnosti a vztahy, které se při daném zobrazení nemění (např. velikosti úseček, velikosti úhlů, dělicí poměr, smysl obíhání

---

<sup>2</sup> Vlastnost  $f \circ f = \text{id}_A$  mj. říká, že  $f = f^{-1}$ . Důkaz této vlastnosti z definice je předmětem jedné z úloh v této práci na str. 28.

vrcholů trojúhelníka apod.) nazýváme *invarianty* geometrického zobrazení. Obdobně lze hovořit o invariantech grupy geometrických transformací.

Jak uvádí Lávička v [11, str. 9], je užitečné při studiu geometrických zobrazení určovat samodružné prvky – takové prvky, které se zobrazí samy na sebe. Samodružnými body, resp. samodružnými přímkami, tedy budeme rozumět takové body, resp. přímky, které se zobrazují samy na sebe. Je účelné zmínit, že samodružných bodů může mít zobrazení více, dokonce to mohou být všechny body přímky, pak je zřejmě taková přímka samodružná; obráceně však každá samodružná přímka nemusí být přímkou samodružných bodů (například přímky kolmé na osu souměrnosti jsou v příslušné osově souměrnosti samodružné, mají však právě jeden samodružný bod).

### **1.1.2 Klasifikace a invarianty geometrických transformací, Erlangenský program**

Problematika logického seřazení geometrických zobrazení je spojována s Fridrichem Christianem Kleinem, významným německým matematikem žijícím v 19. století. Klein již ve věku 23 let, kdy nastoupil jako profesor na filozofickou fakultu erlangenské univerzity, byl známou a významnou osobností vědy (již v této době představil během své úvodní přednášky dnes zvaný Erlangenský program, viz dále). [5]

*„Klein si všiml, že v teorii geometrických prostorů, jejichž různorodost odhalila projektivní geometrie jako dominantní disciplína 19. století, hrají vyjma základních geometrických pojmů významnou roli také operace.“* [5]

Tolik vědom si ale možná Klein nebyl dnešním pohledem jasnějšího faktu: geometrický prostor lze pojmout jako uspořádanou dvojici  $(M, G_M)$ , kde  $M$  je bodový základ (množina základních objektů, nazýváme je body [12, str. 152]) a  $G_M$  jeho charakteristická grupa transformací, přičemž na bodový základ můžeme nahlížet jako na statickou složku takového prostoru a na  $G_M$  jako na složku dynamickou. [5]

Klein nastínil program klasifikace geometrických prostorů podle charakteristických grup transformací. Sám se o klasifikaci prostorů pokusil. Nerozvinutí teorie o objektech z afinní geometrie však mělo v minulosti za následek chybějící úvahy o grupách afinních transformací. [5]

Zásadním mezníkem ve vývoji matematiky 19. století je tzv. Erlangenský program. Tento název dostala Kleinova přednáška Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních (v originále *Vergleichende Betrachtungen über neuere Forschungen*), kterou Felix Klein přednesl v Erlangenu v říjnu 1872 při příležitosti, když byl jmenován profesorem na erlangské univerzitě. Jako zásadní mezník se tato přednáška považuje proto, že zásadně ovlivnila další vývoj matematiky a také její zaměření. Erlangenský program obsahuje pojednání o významu pojmu grupa pro klasifikaci různých geometrických transformací. Text Erlangského programu je rozdělen do deseti kapitol a vyšel jako samostatná brožura. [19]

Jak bylo již zmíněno výše, Klein nahlížel na geometrický prostor jako na uspořádanou dvojici složenou z množiny základních objektů a z grupy geometrických transformací na množině základních objektů. Užitím grupové terminologie provedl klasifikaci geometrií. Tato klasifikace obsahovala všechny dosud známé geometrie, vedle eukleidovské např. i hyperbolickou. Za charakteristické vlastnosti příslušné geometrie bere Klein takové, které jsou invariantní (tj. neměnné) vůči grupě geometrických transformací. [12, str. 152]

Dále se budeme věnovat těmto čtyřem geometrickým zobrazením: shodnost, podobnost, afinita, kolineace, ačkoli poznáme, že může být výhodnější s nimi pracovat v opačném pořadí. Z následující tabulky je zřejmé, které z vlastností geometrických transformací příslušná transformace zachovává.

Jak již bylo uvedeno, vlastnosti geometrických útvarů, které určité zobrazení zachovává, jsou označovány jako invarianty tohoto zobrazení. [10, str. 38]

	kolinearita bodů	shodnost úseček	poměr velikostí úseček	dělicí poměr	dvojpoměr
kolineace	+	–	–	–	+
afinita	+	–	–	+	+
podobnost	+	–	+	+	+
shodnost	+	+	+	+	+

*Tabulka 1 – obměna tabulky na str. 38 v [10]*

Každé z těchto čtyř uvedených zobrazení tvoří grupu vzhledem ke skládání; kolineace však v projektivní rovině – více viz např. v [10, str. 34]. Vlastní bod roviny se může

v kolineaci zobrazit do nevlastního bodu a obráceně (jelikož je kolineace transformací). K zavedení nevlastního bodu potřebujeme právě projektivní rovinu (resp. projektivní rozšíření euklidovské roviny). Jak bylo zmíněno, pracovat se zobrazeními však budeme v rovině eukleidovské. Této nesrovnalosti jsme si vědomi; práce v eukleidovské rovině nám poskytuje určité zjednodušení, protože umožňuje pracovat s některými pojmy tak, jak je zvykem na střední škole, a není tedy nutné zavádět nijak formálně zmíněné projektivní rozšíření eukleidovské roviny.

## 1.2 Dvojpoměr, kolineace

Dále předpokládáme, že čtenář má povědomí o vzájemné poloze bodů a přímek v rovině a zná základní geometrické pojmy na úrovni základní a střední školy. Pojmy bod a přímka jsou pojmy základní, nezavádíme je, stejně jako vztahy „mezi“ a incidence.

Podívejme se na pojem dělicí poměr. Budeme jej potřebovat k zavedení dvojpoměru jakožto invariantu kolineárního zobrazení, byť samotný dělicí poměr je invariant afinní.

Následující definice je pozměněná. Namísto pojmu vektor používáme pojem orientovaná úsečka, jelikož teorii stavíme v kontextu syntetické geometrie. Také dodáváme do definice, že bod  $C$  je různý od bodu  $B$  (jelikož dále je uvedeno, že pro  $C = B$  číslo  $\lambda$  neexistuje).

**Definice 10** (dělicí poměr) [1, str. 129]: Mějme danu přímku  $\overleftrightarrow{AB}$  a na ní bod  $C$  různý od bodu  $B$ . Je-li splněna rovnost orientovaných úseček  $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$ , nazývá se číslo  $\lambda$  *dělicím poměrem bodu  $C$  vzhledem k bodům  $A, B$*  a značí se  $\lambda = (ABC)$ .

Jak dodávají Boček a Zhouf v [1, str. 130], je  $\lambda \in (0; 1)$  pro bod  $C$  ležící vně úsečky  $AB$  za bodem  $A$ ,  $\lambda = 0$  pro  $C = A$ ,  $\lambda < 0$  pro bod  $C$  ležící uvnitř úsečky  $AB$ , neexistující  $\lambda$  pro  $C = B$  a  $\lambda > 1$  pro bod  $C$  ležící vně úsečky  $AB$  za bodem  $B$ . Dělicí poměr nedosahuje hodnoty  $\lambda = 1$  pro žádnou polohu bodu  $C$ .

**Příklad 1:** Zvolme úsečku  $AB$  jako úsečku jednotkovou<sup>3</sup>. Úsečce  $AC$  pak přiřadíme číslo 2. Na Obr. 1 jsou dány kolineární body  $A, B$  a  $C$  tak, že platí  $(ABC) = 2$  (bod  $B$  je středem úsečky  $AC$ ).  $AC$  je dvojnásobkem  $BC$ .

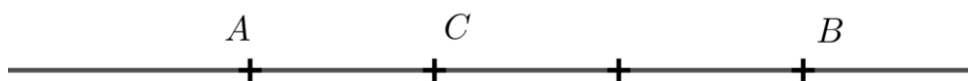
---

<sup>3</sup> Všimněme si, že zatím nepotřebujeme pojem vzdálenost. Porovnávat a sčítat úsečky lze bez využití vzdálenosti. Vzdálenost definujeme později na str. 22.



Obrázek 1 – dělicí poměr  $(ABC)$  roven 2.

**Příklad 2:** Na Obr. 2 jsou dány kolineární body  $A, B$  a  $C$  tak, že platí  $(ABC) = -\frac{1}{2}$ . Úsečka  $AC$  je poloviční oproti úsečce  $BC$ . Úsečky  $AC$  a  $BC$  mají na přímce  $\overleftrightarrow{AB}$  opačnou orientaci.



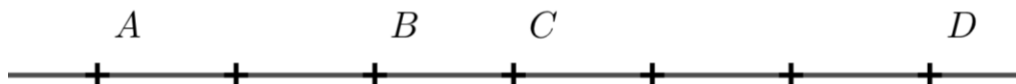
Obrázek 2 – dělicí poměr  $(ABC)$  roven  $-\frac{1}{2}$ .

**Definice 11** (dvojpoměr) [1, str. 131]: Mějme dány čtyři různé kolineární body  $A, B, C, D$ . Číslo

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$$

se nazývá *dvojpoměr bodů*  $A, B, C, D$  (v tomto pořadí).

**Příklad 3:** Na Obr. 3 jsou dány kolineární body  $A, B, C$  a  $D$  tak, že platí  $(ABCD) = 2$ .



Obrázek 3 – dvojpoměr čtyř bodů  $(ABCD)$  roven 2.

Jak uvádí Hašek v [6, str. 144], dvojpoměr je projektivní invariant, dělicí poměr je afinní invariant. Dále zjistíme, že vzdálenost je metrický (eukleidovský) invariant.

Dvojpoměr lze zavést ještě před zavedením dělicího poměru v projektivní rovině.

**Definice 12** (harmonická čtveřice) [12, str. 62]: Jestliže  $(ABCD) = -1$ , potom body  $A, B, C, D$  nazýváme *harmonická čtveřice bodů přímky*.

Ve druhé části práce jsou na str. 32–34 v rámci řešené úlohy popsány dvě možné konstrukce harmonické čtveřice.

Popišme nyní stručně, co znamená projektivní rozšíření eukleidovské roviny (projektivní rovina): ke každé přímce v eukleidovské rovině přidáme jeden nevlastní bod („bod v nekonečnu“) tak, že všechny rovnoběžné přímky se protnou v tomto „nekonečném“ bodě. Tím, že přidáme do eukleidovské roviny takto popsané nevlastní body, vzniká projektivní rozšíření.

Vyslovme nyní definici kolineace.

**Definice 13** (kolineace) [17, str. 86]: Kolineace je jakákoli geometrická transformace projektivní roviny na sebe, která zobrazuje kolineární body na kolineární body (přímky se zobrazují na přímky).

Dvojpoměr je jediným číselným invariantem projektivního prostoru vzhledem ke grupě kolineací. [5]

Z našeho pohledu (vzhledem k práci s geometrickými transformacemi a invarianty v eukleidovské rovině) je nutné si uvědomit, že definice kolineace zde platí s omezeními – nevlastní bod se totiž může zobrazit na bod vlastní a obráceně (vlastní bod se může zobrazit mimo eukleidovskou rovinu).

Ze základní a střední školy známá zobrazení (např. osová souměrnost, posunutí, stejnolehlost) jsou tedy kolineací.

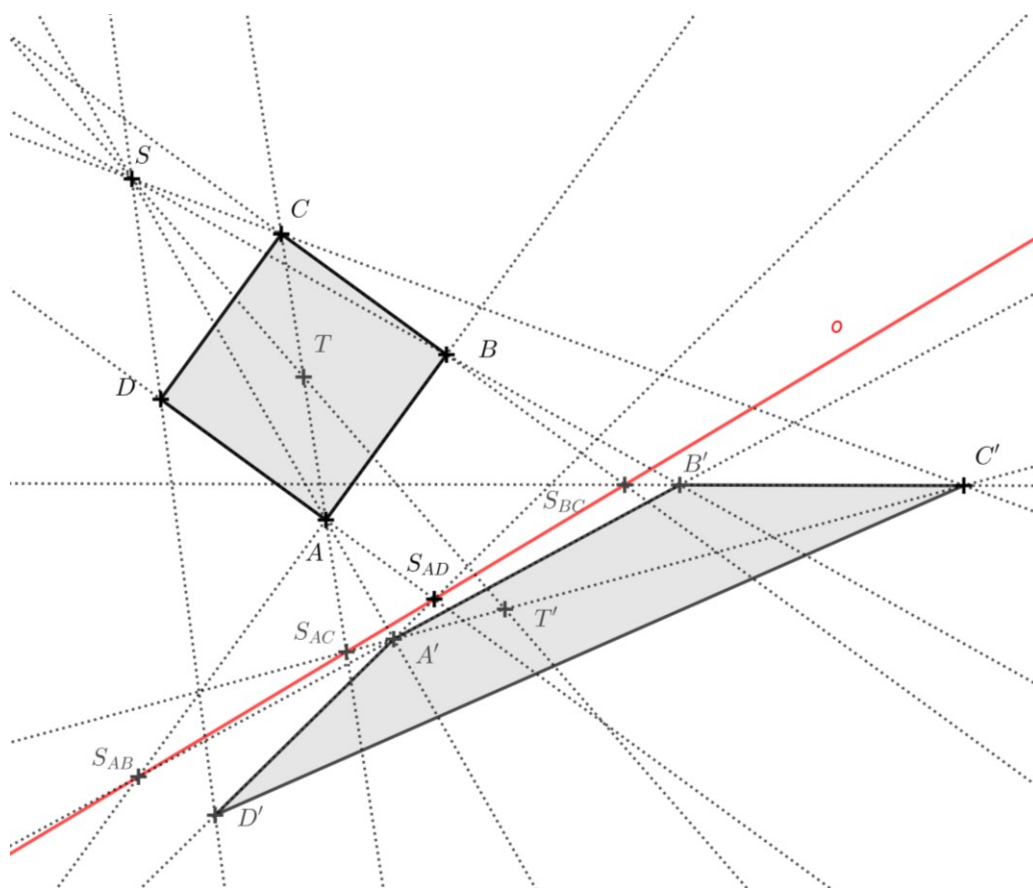
Dodejme, že kolineace, která má samodružnou přímku  $o$  a samodružný bod  $S \notin o$ , se nazývá středová kolineace. Bod  $S$  se nazývá střed kolineace, přímka  $o$  osou kolineace. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem  $S$ .

Pro ilustraci toho, které vlastnosti kolineace zachovává, uveďme příklad sestrojení obrazu čtverce ve středové kolineaci.

**Příklad 4:** Daný čtverec  $ABCD$  zobrazme ve středové kolineaci s daným středem  $S$ , osou  $o$  a párem odpovídajících si bodů  $C, C'$ . Zobrazme dále také střed  $T$  čtverce  $ABCD$ .

Konstrukci zachycuje Obr. 4. Při konstrukci dalších vrcholů čtverce využijeme toho, že body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících daným středem  $S$  a že body přímky  $o$  jsou samodružné – např. pro nalezení bodu  $A'$  určíme průsečík  $S_{AC}$  přímky  $\overleftrightarrow{AC}$  a osy  $o$ , bod  $A'$  je pak průsečíkem přímky  $\overleftrightarrow{SA}$  a přímky  $\overleftrightarrow{S_{AC}C'}$ .

Je vidět, že kolineace zachovává incidenci (obraz  $T'$  bodu  $T$  leží na obrazu přímky  $\overleftrightarrow{AC}$ ), šlo by (např. eukleidovským měřením) ověřit, že zachovává dvojpoměr. Nezachovává dělicí poměr (střed  $T$  úsečky  $AC$  se nezobrazil na střed úsečky  $A'C'$ ), velikost úhlů (je vidět, že žádný z vnitřních úhlů čtverce se nezobrazil na pravý), zjevně nezachovává ani délky úseček.



Obrázek 4 – zobrazení čtverce ve středové kolineaci (dáno  $S, o, C, C'$ )

### 1.3 Afinita, Cèvova a Menelaova věta

Začneme rovnou definicí afinity, resp. osově afinity. K ní využijeme v minulé podkapitole definovaný dělicí poměr, který je afinním invariantem.

**Definice 14** (afinita) [10, str. 37]: Zobrazení roviny  $\varrho$  na rovinu  $\varrho$  se nazývá *afinní transformací* roviny  $\varrho$  neboli *afinitou*, právě když jsou obrazy  $X', Y', Z'$  libovolných kolineárních bodů  $X, Y, Z$  rovněž kolineární a pro jejich dělicí poměry platí:

$$(XYZ) = (X'Y'Z').$$



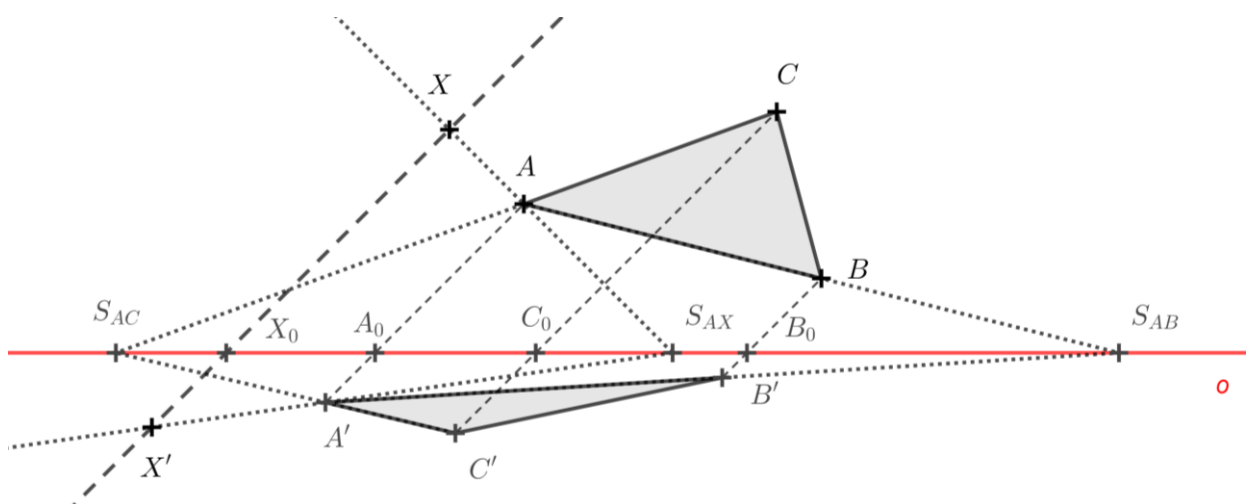
V následujícím odstavci z [12, str. 110–112] je popsána osová afinita, speciální případ afinity.

Geometrické zobrazení v rovině, pro něž platí, že zobrazuje přímku na přímku, přičemž bod a jeho obraz leží na přímce daného směru  $s$  a body odpovídající samy sobě leží na dané přímce  $o$ , se nazývá *osová afinita*. Směr v rovině  $s$  se nazývá *směr afinity*, přímka  $o$  se nazývá *osa afinity*. Je-li směr afinity rovnoběžný s osou, potom se nazývá příslušná afinita *elace*. Bez důkazu uvedme, že jsou-li  $X \neq X'$  libovolné dva odpovídající si body v osově afinitě, která není elací, a  $X_0$  je průsečík přímky  $\overleftrightarrow{XX'}$  s osou afinity, potom dělicí poměr  $k = (X'XX_0)$  je konstantní a nezávisí na volbě odpovídajících si bodů. Číslo  $k$  se nazývá *charakteristika afinity*.

Následující příklad využívá našeho značení (řešení v původním zdroji používá značení jiné).

**Příklad 5** [16, str. 33]: Afinita v rovině je určena osou  $o$  a dvojicí afinně sdružených bodů  $X, X'$ , z nichž žádný neleží na ose afinity. Sestrojme obraz daného trojúhelníku  $ABC$ .

Sledujme Obr. 5. Směr afinity je určen přímkou  $\overleftrightarrow{XX'}$ . Obrazem trojúhelníku v afinitě s osou  $o$  a směrem  $\overleftrightarrow{XX'}$  je trojúhelník  $A'B'C'$ . Bod  $A'$  leží na přímce rovnoběžné s přímkou  $\overleftrightarrow{XX'}$  procházející bodem  $A$  a přímce  $\overleftrightarrow{S_{AX}X'}$ , přitom bod  $S_{AX}$  je průsečíkem přímky  $\overleftrightarrow{AX}$  s osou  $o$ . Obdobně získáme obrazy bodů  $B, C$ . Pro jejich sestavení již můžeme využít dvojici bodů  $A, A'$ . [16, str. 33]



Obrázek 5 – zobrazení trojúhelníku v osově afinitě (dáno  $o, X, X'$ )

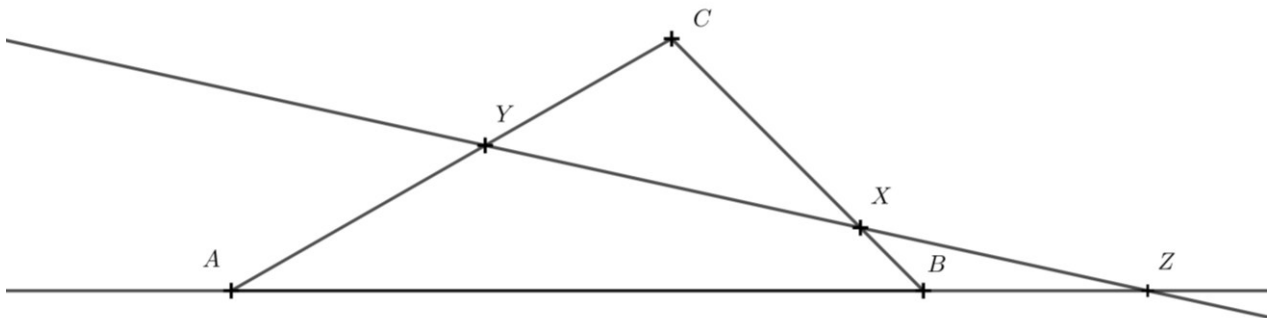
Afinita zachovává incidenci, rovnoběžnost a středy úseček. Lze ověřit i to, že zachovává také dělicí poměr (tedy i dvojpoměr). Nezachovává velikosti úhlů, délky úseček, ani obsahy.

Následující dvě věty jsou v našem kontextu uvedeny v mírně pozměněném znění (kvůli dodržení používaného značení).

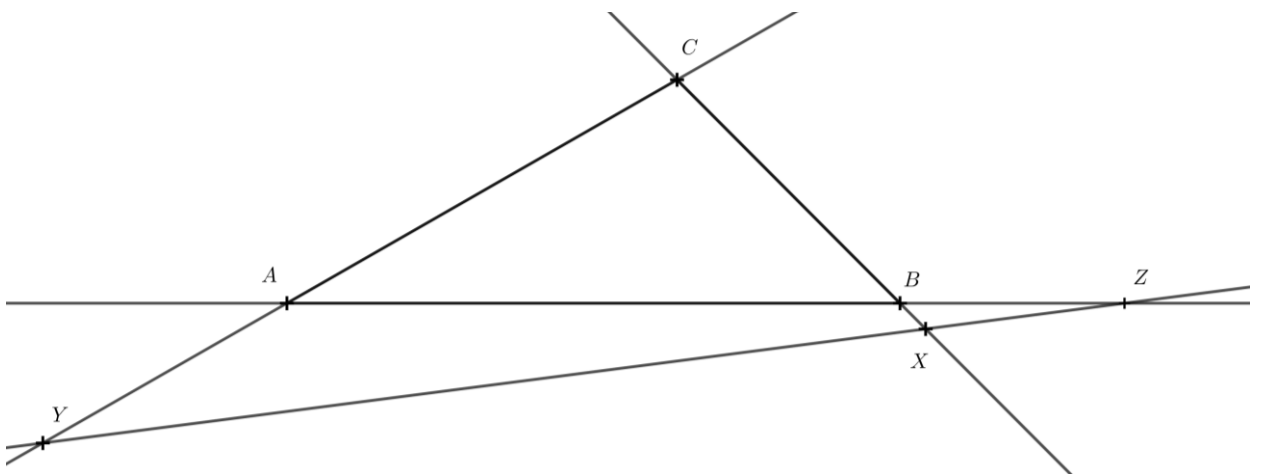
**Věta 1** (Menelaova věta) [18, str. 28]: Buď dán trojúhelník  $ABC$ . Buďte  $X, Y, Z$  postupně body na přímkách  $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$ , které nesplývají s žádným vrcholem trojúhelníku. Potom body  $X, Y, Z$  leží na přímce právě tehdy, když platí

$$(BCX) \cdot (CAY) \cdot (ABZ) = 1.$$

Obr. 6 a 7 zachycují tři kolineární body  $X, Y, Z$  na přímkách, jejichž částmi jsou strany trojúhelníku.



Obrázek 6 – k Menelaově větě (dva ze tří bodů leží na stranách trojúhelníku)

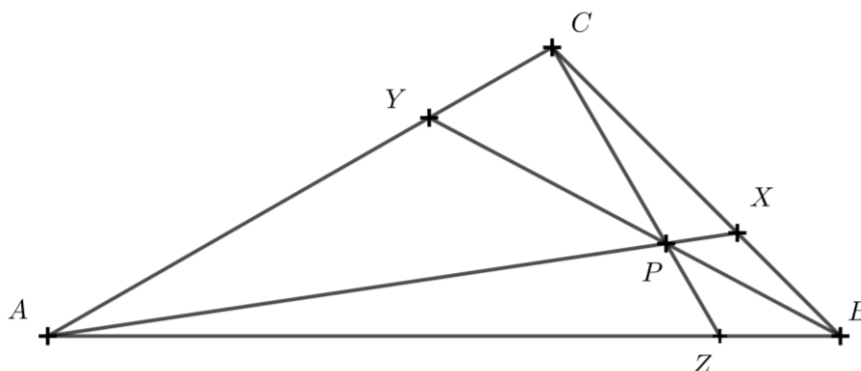


Obrázek 7 – k Menelaově větě (žádný ze tří bodů neleží na stranách trojúhelníku)

**Věta 2** (Cèvova věta) [18, str. 29–30]: Buď dán trojúhelník  $ABC$ . Buďte  $X, Y, Z$  postupně body na přímkách  $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{AB}$ , které nesplývají s žádným vrcholem trojúhelníku. Potom přímky  $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BY}, \overleftrightarrow{CZ}$  procházejí týmž bodem nebo jsou rovnoběžné právě tehdy, když platí

$$(BCX) \cdot (CAY) \cdot (ABZ) = -1.$$

Na Obr. 8 je znázorněn trojúhelník  $ABC$ , body  $X, Y, Z$  na jeho stranách a průsečík  $P$  přímek  $\overleftrightarrow{AX}, \overleftrightarrow{BY}, \overleftrightarrow{CZ}$ .



Obrázek 8 – k Cèvově větě

Obě výše uvedené věty uvádíme bez důkazu. Více než techniky důkazů nás bude zajímat využití v úlohách (v nichž typicky nevystupují žádné velikosti úhlů, úseček, ani obsahů, avšak např. dělicí poměry, rovnoběžnost, těžiště). Důkaz obou implikací je zpracován v [18].

S využitím dosud nadefinovaných pojmů a uvedených vět lze řešit několik typů úloh. Pro vyřešení většiny těch, které se vyskytují v Matematické olympiádě, si však s dosud popsány vlastnostmi nevystačíme. Následující tři podkapitoly shrnují základní teorii potřebnou pro řešení úloh ze syntetické geometrie, v nichž se vyskytují úhly, vzdálenosti či obsahy, ale třeba také kružnice.

## 1.4 Úhel a jeho velikost, vzdálenost

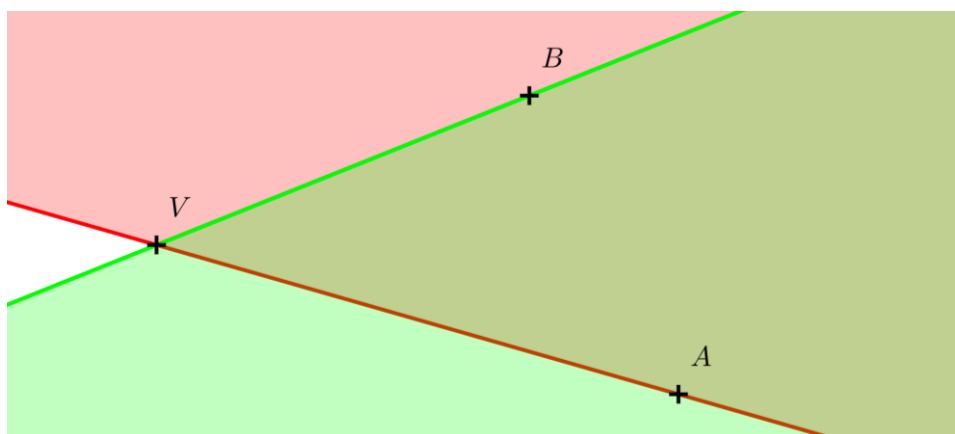
Před zavedením podobnosti, resp. poměru délek, budeme potřebovat vzdálenost (obdobně jako jsme pro zavedení dvojpoměru jako projektivního invariantu potřebovali nejprve definovat afinní invariant, totiž dělicí poměr – při budování struktury geometrie se této nerosvnalosti nevyhneme). Z tohoto důvodu vkládáme do teoretické části ještě před podkapitolu týkající se podobnosti tuto podkapitolu, která má za cíl seznámit čtenáře

s invarianty podobnosti a shodnosti. Očekáváme, že čtenář zná goniometrické funkce a umí s nimi pracovat.

Podobnost zachovává velikost úhlů. Úhel je možné zavést několika způsoby. Zde zavedme úhel tak, jak jej zavádí Lávička v [12, str. 57–58], tedy rozlišíme úhel konvexní a konkávní. Používáme zde jiné značení.

**Definice 15** (konvexní úhel): Konvexním úhlem  $AVB$  rozumíme:

1. průnik polorovin  $\mapsto AVB$  a  $\mapsto BVA$  v případě, že body  $A, V, B$  jsou tři nekolineární body; tento úhel se rovněž označuje jako tzv. *dutý úhel* (viz Obr. 9);
2. každou z polorovin s hraniční přímkou  $\overleftrightarrow{AB}$  v případě, že body  $A, V, B$  jsou tři různé kolineární body a bod  $V$  leží mezi body  $A, B$ ; tento úhel se rovněž označuje jako *přímý úhel*;
3. v případě, že body  $A, V, B$  jsou tři různé kolineární body a bod  $V$  neleží mezi body  $A, B$ ,
  - a) každou rovinu obsahující přímkou  $\overleftrightarrow{AB}$ ; tento úhel se rovněž označuje jako tzv. *plný úhel*;
  - b) polopřímku  $\overrightarrow{VA}$  (resp.  $\overrightarrow{VB}$ ); tento úhel se rovněž označuje jako tzv. *nulový úhel*.



Obrázek 9 – konvexní úhel jako průnik polorovin

**Definice 16** (nekonvexní úhel) [12, str. 58]: Jestliže jsou  $A, V, B$  tři nekolineární body, potom se sjednocení polorovin opačných k polorovinám  $\mapsto AVB$  a  $\mapsto BVA$  nazývá *nekonvexní úhel AVB*.

**Definice 17** (pravý úhel) [12, str. 60]: Úhel shodný se svým vedlejším úhlem se nazývá *pravý*.

Klíčovým pojmem je velikost úhlu, jelikož je invariantem podobnosti. Vyslovme nyní větu, která dává do souvislosti úhel a jeho velikost. Je vidět, že i takový intuitivní pojem jako velikost úhlu nelze příliš stručně formálně popsat. Použité značení je opět oproti zdroji upraveno. Lávička zavádí velikost úhlu pouze pro úhel dutý, proto bezprostředně po následující větě přichází doplnění.

**Věta 3** (velikost úhlu) [12, str. 35–36]: Existuje jediné zobrazení  $\sphericalangle A \rightarrow |\sphericalangle A|$  (úhel  $\rightarrow$  velikost úhlu) mající následující vlastnosti:

1.  $|\sphericalangle A| = 90^\circ$  právě tehdy, když  $\sphericalangle A$  je pravý úhel.
2.  $|\sphericalangle A|$  je kladné reálné číslo takové, že  $0^\circ < |\sphericalangle A| < 180^\circ$ .
3.  $|\sphericalangle A| = |\sphericalangle B|$  právě tehdy, když  $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ .
4.  $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ABD|$  právě tehdy, když  $\overrightarrow{AC}$  je vnitřní polopřímka úhlu  $\sphericalangle ABD$ .
5.  $|\sphericalangle A| < |\sphericalangle B|$  právě tehdy, když  $\sphericalangle A < \sphericalangle B$ .
6. Pro každé reálné číslo  $x \in (0; 180)$  existuje úhel  $\sphericalangle A$  takový, že  $|\sphericalangle A| = x^\circ$ .
7. Jestliže úhly  $\sphericalangle A$  a  $\sphericalangle B$  jsou vedlejší, potom  $|\sphericalangle A| + |\sphericalangle B| = 180^\circ$ .

Podívejme se na to, jak je to s velikostí dalších typů úhlu – přímého, nulového, plného a nekonvexního. Přímému úhlu přiřadíme velikost  $180^\circ$ , nulovému úhlu velikost  $0^\circ$ , plnému úhlu  $360^\circ$ . U nekonvexního úhlu  $AVB$  je velikost rovna  $360^\circ - |\sphericalangle A|$ , kde  $|\sphericalangle A|$  je velikost konvexního úhlu, který je průnikem polorovin  $\mapsto AVB$  a  $\mapsto BVA$ .

Jak dodává Lávička v [12, str. 36], pro měření úhlu není nutné (na rozdíl od měření úsečky, viz dále) stanovit si jednotkovou úsečku. Je vhodné odvozovat velikosti úhlů od úhlu pravého. Jednotlivé systémy měření úhlů (např. míra stupňová, oblouková, setinná, ...) se liší pouze tím, jakou velikost pravému úhlu přiřadíme.

Směřujeme k definici vzdálenosti dvou bodů tak, jak je uvedena v [12, str. 35]. K tomu však popíšeme délku úsečky. Původní formulace používá značení, které jsme nezavedli, proto je následující věta upravená.

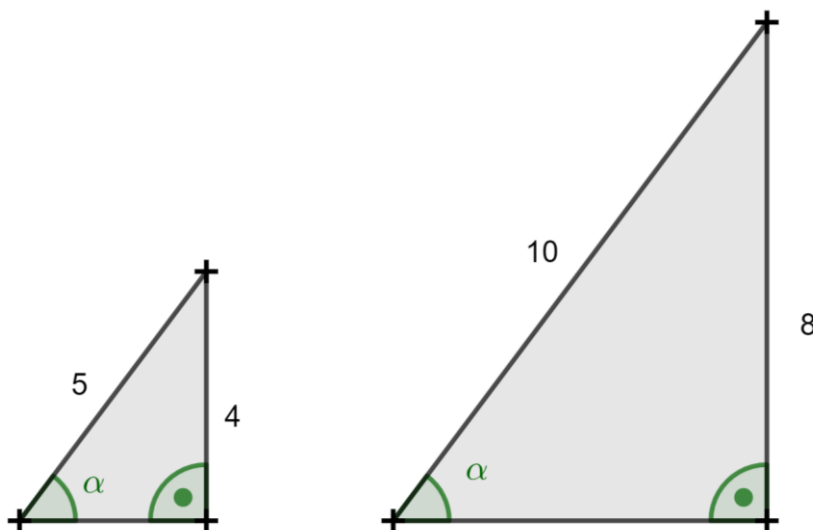
**Věta 4** (délka úsečky) [12, str. 35]: Necht' je dána jednotková úsečka  $OI$  nazývaná jednotková úsečka. Potom existuje jediné zobrazení  $AB \rightarrow |AB|$  (úsečka  $\rightarrow$  délka úsečky) mající následující vlastnosti:

1.  $|AB|$  je kladné reálné číslo a  $|OI| = 1$ .
2.  $|AB| = |CD|$  právě tehdy, když  $AB \cong CD$ .
3.  $|AB| + |BC| = |AC|$  právě tehdy, když  $B$  leží mezi  $A, C$ .
4.  $|AB| < |CD|$  právě tehdy, když  $AB < CD$ .
5. Pro každé kladné reálné číslo  $x$  existuje úsečka  $AB$  taková, že  $|AB| = x$ .<sup>4</sup>

**Definice 18** (vzdálenost dvou bodů) [12, str. 61]: *Vzdáleností dvou bodů  $A, B$  rozumíme velikost úsečky  $AB$ .*

Podobnostním invariantem je kromě velikosti úhlu také poměr délek úseček. Takový poměr lze zavést pomocí goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku.

Jak je patrné z Obr. 10, sinus jako poměr délek protilehlé odvěsny a přepony je v obou pravoúhlých trojúhelnících (dokonce ve všech s nimi podobných) stejný.



Obrázek 10 – sinus úhlu  $\alpha$  je roven 0,8

Následující věta propojuje velikost úsečky a úhel, resp. poměr velikostí úseček a poměr sinů úhlů, a proto považujeme za účelné ji zde uvést, resp. připomenout. Věta je upravena

<sup>4</sup> Pokud bychom připustili  $x = 0$ , body  $A, B$  by splynuly a úsečka by se „degenerovala“ do bodu.

v našem kontextu (rovnost poměrů délky strany a sinu je nahrazena rovností poměru délek stran a poměru sinů). V důkazu je použito jiné značení.

**Věta 5** (sinová věta) [14, str. 104]: Pro každý trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti  $\alpha, \beta$  a příslušné protější strany  $a, b$  platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

**Důkaz** [14, str. 104–105]: Důkaz provedeme v trojúhelníku  $ABC$  pro případ, že je úhel  $\alpha$  ostrý (bod  $A$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{BP}$  vně úsečky  $PB$ , kde  $P$  je pata výšky  $v_c$ ). Objekty použité v důkazu zachycuje Obr. 11. Platí:

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b},$$
$$\sin \beta = \frac{v_c}{a},$$

a tedy po jednoduché úpravě máme:

$$v_c = b \cdot \sin \alpha,$$

$$v_c = a \cdot \sin \beta.$$

Porovnáním pravých stran těchto vztahů dostáváme:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta,$$

čili

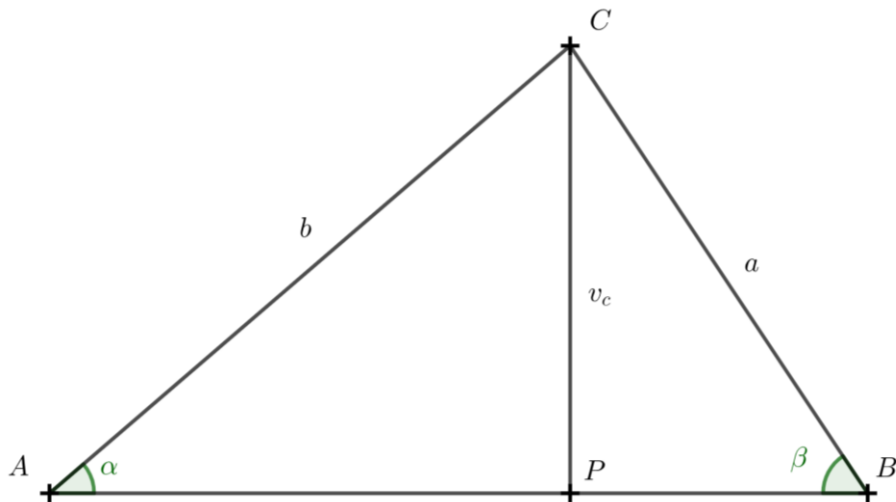
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Jestliže provedeme cyklickou záměnu písmen, dostaneme

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma},$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Zbývající dvě části důkazu, kde  $A = P$  (úhel  $\alpha$  je pravý) nebo  $A$  leží uvnitř úsečky  $BP$  (úhel  $\alpha$  je tupý), je možné najít v [14, str. 105].



Obrázek 11 – k důkazu sinové věty

## 1.5 Podobnost

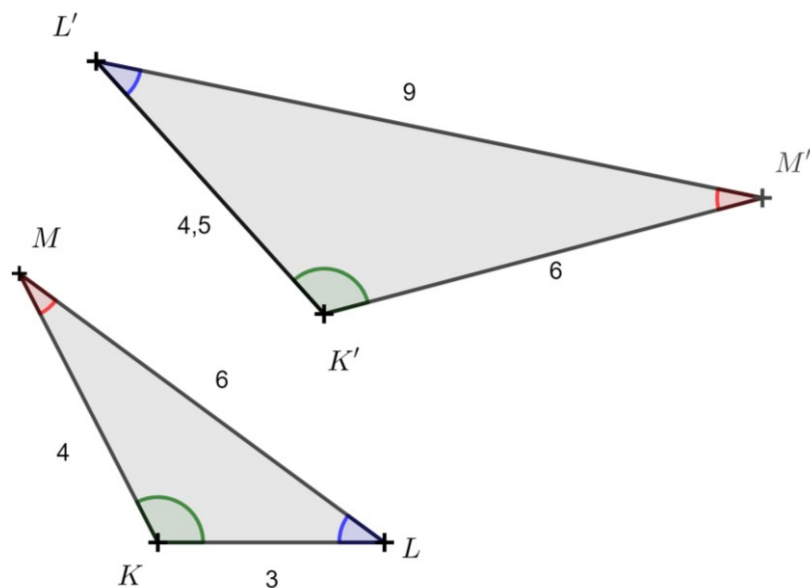
**Definice 19** (podobnost) [1, str. 34]: Říkáme, že zobrazení roviny na sebe je *podobné zobrazení (podobnost)*, jestliže existuje kladné číslo  $k$  (tzv. *koeficient podobnosti*) tak, že pro každé dva body  $A, B$  roviny a jejich obrazy  $A', B'$  platí

$$|A'B'| = k \cdot |AB|.$$

Jelikož se tato práce zabývá především invarianty geometrických transformací, uveďme příklad podobných útvarů a všimněme si, které vlastnosti zobrazení zachovává.

**Příklad 6:** Na Obr. 12 jsou zobrazeny dva trojúhelníky  $KLM, K'L'M'$ , které jsou si podobné – existuje podobnost, která zobrazí jeden trojúhelník na druhý. Koeficient podobnosti je  $k = 1,5$  (délky stran trojúhelníku  $K'L'M'$  jsou 1,5krát větší než délky stran trojúhelníku  $KLM$ ).





Obrázek 12 – podobné trojúhelníky

Podobnost zachovává např. incidenci, uspořádání, dvojpoměr, středy úseček a dělicí poměr, dále zachovává poměry úseček a velikosti úhlů. Nezachovává např. délky úseček ani obsahy, obecně ani orientaci.

Následující definice popisuje důležitý speciální typ podobnosti. Uvedená definice využívá orientovaných úseček, vyhneme se tak nutnosti rozzebrat případy, kdy  $k > 0$  a kdy  $k < 0$ . Takového rozdělení na případy využívají např. Boček a Zhouf v [1, str. 30] či Pomykalová v gymnaziální učebnici planimetrie [14, str. 161], tito autoři také připouštějí  $k$  rovno 1.

**Definice 20** (stejnolehlost) [10, str. 129]: Je dáno reálné číslo  $k$  různé od 0 a 1 a bod  $S$ . Zobrazení, které libovolnému bodu  $X$  roviny přiřazuje bod  $X'$  tak, že platí

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX},$$

se nazývá *stejnolehlost se středem  $S$  a koeficientem  $k$* .

Pokud bychom připustili, že  $k = 1$ , pak by byla stejnolehlost definovaná výše uvedeným vztahem identita. Pro koeficient  $k = 0$  by se zřejmě každý bod  $X$  roviny zobrazil do bodu  $S$  (pravá strana by byla nulová a celá rovina by se zobrazila do bodu  $S$ ). [10, str. 131]

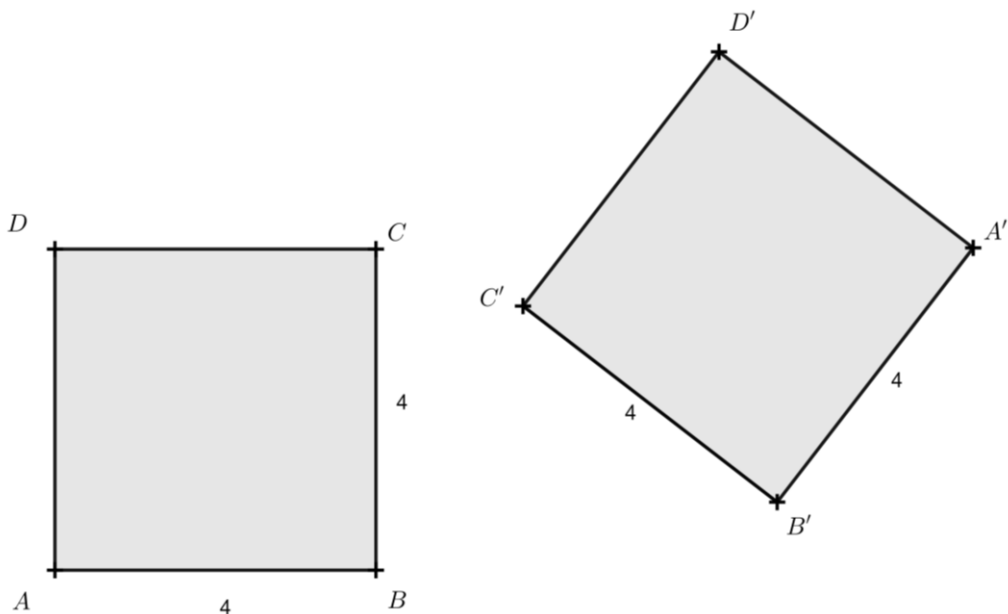
## 1.6 Shodnost

Podívejme se nyní blíže právě na shodnost, jejíž invariantem je na str. 22 definovaná vzdálenost. Také se zaměříme na jednotlivé druhy shodnosti.

**Definice 21** (shodnost) [15, str. 124]: Zobrazení (v rovině) je *shodné zobrazení* nebo také *shodnost*, právě když obrazem každé úsečky  $AB$  je úsečka  $A'B'$  shodná s úsečkou  $AB$ .

Stejně jako v předchozí podkapitole uveďme po definici také příklad.

**Příklad 7:** Čtverce  $ABCD$  a  $A'B'C'D'$  zobrazené na Obr. 13 jsou shodné. Shodnost zachovává incidenci, uspořádání, dvojpoměr, středy úseček (a dělicí poměr), poměry úseček a velikosti úhlů, zachovává také délky úseček a obsahy (všechny odpovídající si strany jsou shodné, uvedené čtverce mají tedy zřejmě shodné obsahy). Obecně nezachovává např. směry přímek či orientaci.



Obrázek 13 – shodné čtverce

Zaměříme se nyní blíže na jednotlivé shodnosti.

**Definice 22** (osová souměrnost) [12, str. 99]: Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu  $A \in o$ , kde  $o$  je pevně zvolená přímka, přiřazuje též bod  $A$  a každému bodu  $X \notin o$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že přímka  $o$  je osou úsečky  $XX'$ , se nazývá *osová souměrnost* (*souměrnost podle osy*).

Jak dodává Lávička v [12, str. 99], osová souměrnost je involutorní zobrazení.

**Definice 23** (posunutí) [12, str. 102]: Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu  $X$  přiřazuje bod  $X' \neq X$  tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů  $Y, Y'$  platí, že úsečky  $XY'$  a  $X'Y$  mají společný střed, se nazývá *posunutí (translace)*. Směr, který je určen odpovídajícími si body  $X, X'$  se nazývá *směr posunutí*, velikost úsečky  $XX'$  *velikost posunutí* a pořadí bodů  $X, X'$  *smysl posunutí*.

Následující definice je upravena vzhledem k používanému značení.

**Definice 24** (otočení) [12, str. 103–104]: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu  $S$  přiřazuje též bod  $S$  a každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že platí vztahy  $XS \cong X'S$  a  $|\sphericalangle X'SX| = \varphi$ , kde  $\varphi$  je daný orientovaný úhel<sup>5</sup>, se nazývá *otočení (rotace) kolem bodu  $S$  o orientovaný úhel  $\varphi$* .

Středová souměrnost lze zavést jako speciální případ otočení. Uvedme však definici užitím středu úsečky.

**Definice 25** (středová souměrnost) [12, str. 100]: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu  $S$  přiřazuje též bod  $S$  a každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ , se nazývá *středová souměrnost (souměrnost podle středu)*.

Mezi shodnosti se zařazuje i jedno zobrazení, nazývané posunutá (osová) souměrnost. Ve skriptech [12] mezi výše uvedenými shodnostmi není, je popsána např. ve středoškolské učebnici [15, str. 156–157]. My však použijme definici z [1].

**Definice 26** (posunutá osová souměrnost) [1, str. 15]: Osovou souměrnost složenou s posunutím ve směru osy nazýváme *posunutá osová souměrnost*.

Lávička v [12, str. 98] uvádí mezi shodnostmi ještě identitu, tu jsme definovali již na str. 10.

---

<sup>5</sup> Orientovaný úhel v rovině je uspořádaná dvojice polopřímek  $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$  se společným počátkem  $V$ , přičemž polopřímka  $\overrightarrow{VA}$ , resp.  $\overrightarrow{VB}$  se nazývá počáteční, resp. koncové rameno a bod  $V$  se nazývá vrchol orientovaného úhlu. Velikostí orientovaného úhlu rozumíme velikost neorientovaného úhlu, jehož všemi body proběhne počáteční rameno  $\overrightarrow{VA}$  při otočení do polohy koncového ramena  $\overrightarrow{VB}$ . Děje-li se otáčení proti směru hodinových ručiček (v kladném smyslu), je velikost orientovaného úhlu kladná, v opačném případě je záporná. [12, str. 61]

## 2 Praktická část

Úlohy vybrané do praktické části jsou převzaté či inspirované úlohami z několika zdrojů (příslušný zdroj je uveden u zadání úlohy), některé úlohy jsou autorské. Byly voleny tak, abychom v řešení ukázali použití nástrojů využívajících invarianty příslušného zobrazení a také příslušná zobrazení nebo jejich důležité typy v konstrukčních úlohách či důkazových úlohách.

Řešení úloh jsou, pokud není řečeno jinak, autorská.

### 2.1 Zobrazení a jeho vlastnosti, rozdělení čtyřúhelníků

Začneme úlohou, která využívá pojem involuce. Úloha 1 byla zadána v teoretické části varianty N testu ze Syntetické geometrie I v roce 2021.

**Úloha 1:** Uveďte právě dvě involutorní geometrická zobrazení.

Řešením je např. osová souměrnost a středová souměrnost. Z definice je zřejmé, že složení osové souměrnosti s tou samou osovou souměrností zobrazí všechny body na body původní (a tedy je identitou). Analogicky se středovou souměrností.

Následující úloha je upravena, používá jiné značení.

**Úloha 2** [7, str. 13]: Dokažte, že pro každou involuci platí:  $f = f^{-1}$ .

Z definice 8 víme, že  $\forall x \in A: f \circ f = \text{id}_A$ . Ke každé involuci  $f$  existuje inverzní zobrazení  $f^{-1}$  ( $f$  je totiž jakožto geometrická transformace bijektivní zobrazení). Složením zleva s  $f^{-1}$  dostáváme:

$$f^{-1} \circ (f \circ f) = f^{-1} \circ \text{id}.$$

S využitím asociativity skládání (kterou zde nedokazujeme) pak:

$$(f^{-1} \circ f) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}.$$

Jelikož  $f^{-1} \circ f = \text{id}$ , můžeme psát:

$$\text{id} \circ f = f^{-1} \circ \text{id}$$

Identita je na množina  $A$  neutrálním prvkem vzhledem ke skládání, a tedy dostáváme:

$$f = f^{-1}.$$

Následující úloha je zaměřena na rozřazení pojmů do jednotlivých kategorií. Zadáání je inspirované úkolem v [Moodle kurzu](#) předmětu Školská matematika z pohledu vysokoškolské matematiky 1.

**Úloha 3:** Zařadte následující pojmy a vlastnosti k zobrazením, u nichž je definujeme: dvojpoměr, těžiště, střed úsečky, kosodélník, trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník.

Využijeme invariantních vlastností jednotlivých zobrazení. Dvojpoměr zavádíme již při zavedení kolineace. Těžiště společně se středem úsečky lze zavést užitím dělicího poměru jako invariantu afinity v kapitole o afinitě. Kosodélník je typ rovnoběžníku (ten lze zavést užitím rovnoběžnosti, která je invariantem afinním), pro určení kosodélníku potřebujeme úhel a jeho velikost (tedy je možné zavést jej v kapitole o podobnosti) – žádný vnitřní úhel není pravý a současně odchylka úhlopříček není pravý úhel. Trojúhelník lze definovat jako průnik polorovin již při zavedení kolineace. Rovnoramenný trojúhelník lze charakterizovat pomocí délky úsečky jako invariantu shodnosti, avšak lze to „ještě dříve“ bez použití vzdálenosti – pomocí úhlu jako invariantu podobnosti – řekneme, že trojúhelník je rovnoramenný, pokud má dva vnitřní úhly shodné.

V návaznosti na popis rovnoramenného trojúhelníku bez použití vzdálenosti lze obdobně definovat trojúhelník rovnostranný (všechny vnitřní úhly jsou shodné, tj. mají stejnou velikost) a trojúhelník různostranný (žádné dva vnitřní úhly nejsou shodné).

Předchozí úvaha o zařazení některých druhů čtyřúhelníku pomocí invariantů nás vede k diskusi klasifikace těchto útvarů. Stejně jako obě předchozí řešení, tak také následující řádky zabývající se rozdělením čtyřúhelníků podle invariantů geometrických transformací jsou autorské. Využíváme obecně známých druhů čtyřúhelníků a jejich obecně známých vlastností. Detailní popis čtyřúhelníků a jejich vlastností zde však neuvádíme, pokládáme je za středoškolské znalosti.

Z afinního pohledu (bez použití velikostí úhlů či úseček) lze rozdělit čtyřúhelníky podle rovnoběžnosti jakožto afinního invariantu na:

1. rovnoběžníky (obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné),
2. lichoběžníky (právě dvě strany jsou rovnoběžné),
3. různoběžníky (žádné dvě strany nejsou rovnoběžné).

Chceme-li dále klasifikovat rovnoběžníky, musíme využít alespoň úhlu – podobnostního invariantu. Lze je rozdělit na pravoúhelníky (takové rovnoběžníky, které mají všechny vnitřní úhly pravé) a takové, které pravoúhelníky nejsou. Podrobnější rozdělení je následující:

1. Čtverec je takový rovnoběžník, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, pravý je rovněž každý z vnitřních úhlů. Jde o pravoúhelník.
2. Kosočtverec je takový rovnoběžník, jehož úhlopříčky svírají pravý úhel, avšak žádný z vnitřních úhlů není pravý.
3. Obdélník je takový rovnoběžník, jehož úhlopříčky nesyvrají pravý úhel, avšak každý z vnitřních úhlů je pravý. Jde o pravoúhelník.
4. Kosodélník je takový rovnoběžník, jehož úhlopříčky nesyvrají pravý úhel a pravý není žádný z vnitřních úhlů.

Pojďme se v závěru podobnostního pohledu na čtyřúhelníky podívat na rozdělení lichoběžníků. Lichoběžníky lze rozdělit na:

1. rovnoramenné lichoběžníky (vnitřní úhly přilehlé k základně jsou shodné),
2. pravoúhlé lichoběžníky (mají právě dva úhly pravé),
3. lichoběžníky, který nejsou ani rovnoramenné, ani pravoúhlé.

Doplňme, že další typy (inspirováno [15, str. 49–50]) čtyřúhelníků jsou např. čtyřúhelníky:

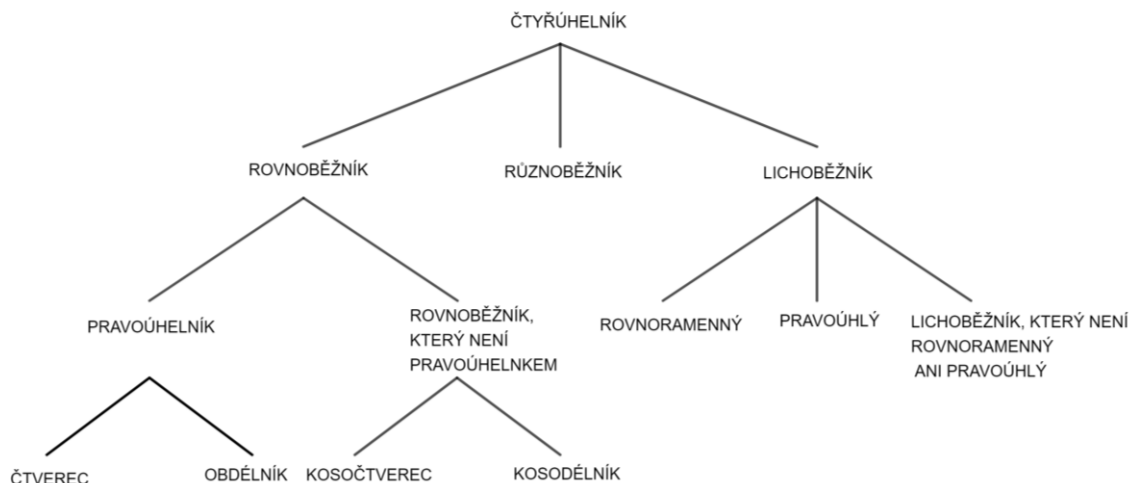
1. tětiové (ty lze definovat pomocí vnitřních úhlů, tedy již u podobnosti – řekneme, že čtyřúhelník je tětiový, pokud součet velikostí protějších vnitřních úhlů je velikost úhlu přímého),
2. tečnové (ty je možné definovat pomocí délky, u shodnosti – řekneme, že čtyřúhelník je tečnový, pokud je konvexní<sup>6</sup> a pokud součty délek dvojic protějších stran jsou si rovny),
3. deltoid (úhlopříčky jsou na sebe kolmé a jedna z nich prochází středem druhé – střed úsečky je afinní invariant, kolmost podobnostní, tedy deltoid je možné zavést u podobnosti).

---

<sup>6</sup> Konvexní čtyřúhelník zde nezavádíme.

Poznamenejme, že deltoid je tečnový čtyřúhelník.

Detailnější představu o základních typech čtyřúhelníků nabízí schéma na Obr. 14.



Obrázek 14 – jedna z možných klasifikací čtyřúhelníků

## 2.2 Řešené úlohy – dvojpoměr, harmonická čtveřice

Uvedme dále zadání a řešení úloh zabývajících se dvojpoměrem jako projektivním invariantem (invariantem kolineárního zobrazení) a také harmonickou čtveřicí.

Následující úlohy dvě úlohy se věnují dvojpoměru. Poslední úloha v této podkapitole je zaměřena na harmonickou čtveřici a její konstrukci.

**Úloha 4** [6, str. 145]: Dokažte, že pro dvojpoměr čtyř bodů platí:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Rozepišme každý z uvedených čtyř dvojpoměrů a ukažme, že se rovná témuž výrazu.

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}}{\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

$$(BADC) = \frac{(BAD)}{(BAC)} = \frac{\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}}{\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}}} = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

$$(CDAB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DA}}}{\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{DB}}} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

$$(DCBA) = \frac{(DCB)}{(DCA)} = \frac{\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}}}{\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{CA}}} = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA}} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

Dokázali jsme dané tvrzení.

**Úloha 5** [6, str. 145]: Dokažte, že vyměníme-li poslední dva body mezi sebou, změní se hodnota dvojpoměru v hodnotu převrácenou, tj. platí:

$$(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}.$$

Důkaz provedeme odlišným způsobem než v předchozím případě, tentokrát si všimneme, že je:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{1}{\frac{(ABD)}{(ABC)}} = \frac{1}{(ABDC)}.$$

Čímž je i dokázán další vztah mezi dvojpoměry.

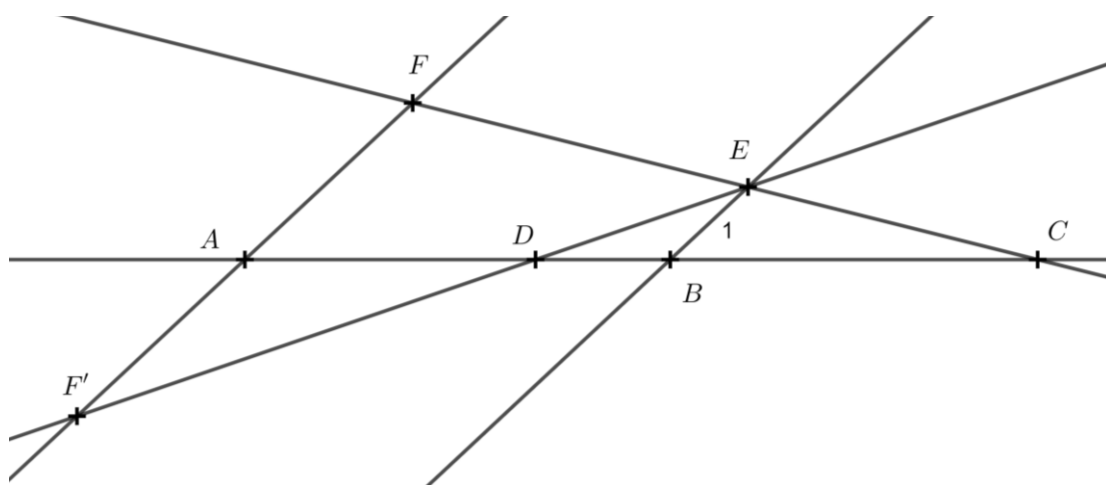
**Úloha 6:** K daným třem bodů  $A, B, C$  takovým, že bod  $C$  leží mimo úsečku  $AB$  za bodem  $B$ , sestrojte bod  $D$  takový, že  $(ABCD) = -1$ , tj., že body  $A, B, C, D$  v tomto pořadí tvoří harmonickou čtveřici.

Text zadání i řešení je inspirovaný odstavcem z [1, str. 131] – používáme však jiné značení a konstruujeme bod mezi body  $A, B$ , nikoli mimo úsečku  $AB$ , tak jak v [1] konstruují Boček a Zhouf. Graficky se ke třem bodům najde čtvrtý harmonický bod následovně (viz Obr. 15): veďme body  $A, B$  libovolné (navzájem různé) rovnoběžky<sup>7</sup>. Na rovnoběžku procházející bodem  $B$  se zakreslí jednotková úsečka. Její koncový bod  $E$  se spojí s bodem  $C$  a kde tato přímka protne rovnoběžku jdoucí bodem  $A$ , získáme bod  $F$ . Ten ve středové souměrnosti se středem  $A$  převedeme na bod  $F'$ , který spojíme se získaným bodem  $E$ .

<sup>7</sup> Jak poukazuje Hašek v [6, str. 145], rovnoběžnost je „až“ afinní invariant. Způsob konstrukce by neměl být založen na rovnoběžnosti.



Tato spojnice protne přímku  $AB$  v bodě  $D$ , který je tím hledaným bodem. Pro dvojpoměr platí  $(ABCD) = -1$ .



Obrázek 15 – jedna z možných konstrukcí harmonické čtveřice (dáno  $A, B, C$ )

V eukleidovské rovině lze vysvětlit správnost výše popsané konstrukce, a to užitím podobných<sup>8</sup> trojúhelníků. Následující popis vznikl na základě vlastních výpisků.

Z Obr. 15 je zřejmé, že úhly  $\sphericalangle CBE$  a  $\sphericalangle CAF$  jsou shodné (jsou totiž souhlasné), a tedy trojúhelníky  $BCE$  a  $ACF$  jsou si podle věty  $uu$  podobné. Platí tedy:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{1}$$

Všimněme si dále, že úhly  $\sphericalangle BDE$  a  $\sphericalangle ADF'$  jsou vrcholové, a tedy jsou shodné. Shodné jsou také střídavé úhly  $\sphericalangle F'AD$  a  $\sphericalangle EBD$  – trojúhelníky  $F'AD$  a  $EBD$  jsou si podobné podle věty  $uu$ . Platí tedy:

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{\overrightarrow{AF'}}$$

Jelikož (přímo z konstrukce) plyne  $\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AF'}$ , lze psát:

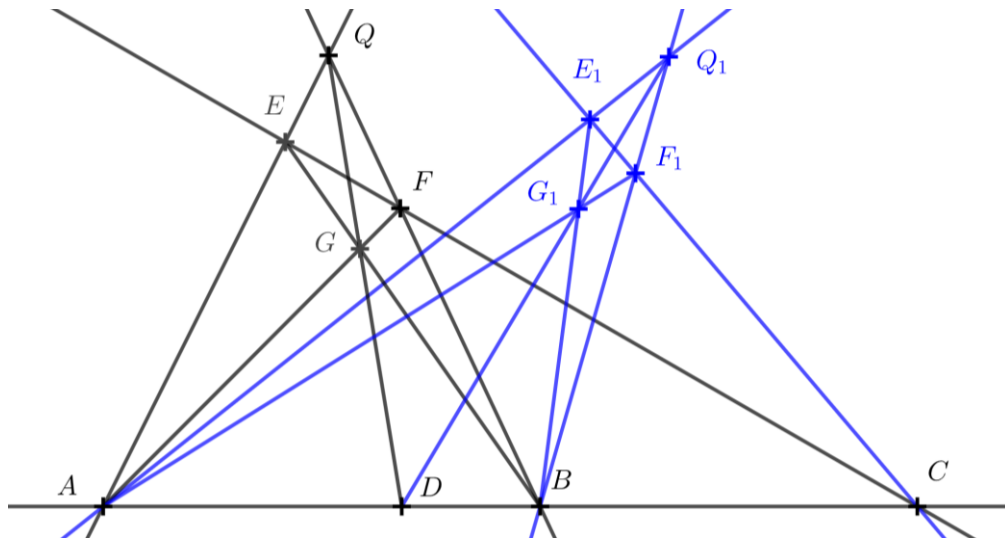
$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{1} \cdot \frac{1}{\overrightarrow{AF'}} = \frac{-\overrightarrow{AF'}}{1} \cdot \frac{1}{\overrightarrow{AF'}} = -1.$$

<sup>8</sup> Uvědomme si, že v kapitole o kolineaci jsme podobnost nezavedli. Je nutné mít na paměti, že zde používáme něco, co není v daném kontextu budování geometrie zcela korektní.

Odůvodnili jsme správnost výše uvedené konstrukce čtvrtého bodu ke třem zadaným s tím, že vzniklé čtyři body tvoří v předepsaném pořadí harmonickou čtveřici.

Ukažme si nyní jinou konstrukci, která nebude využívat jiných než projektivních invariantů (tedy těch vlastností, které zachovává kolineace). Konstrukce je zachycena na Obr. 16; pro ukázkou toho, že lze zvolit přímku procházející bodem  $C$  libovolně (ovšem různou od  $\overline{AB}$ ), je na Obr. 16 zachycena modrou barvou jiná poloha popsanych přímek a bodů potřebných v konstrukci.

Veďme bodem  $C$  libovolnou přímku různou od  $\overline{AB}$ , na ní zvolíme dva různé body  $E, F$  a vedeme jimi přímky  $\overline{AE}$  a  $\overline{BF}$ , jejich průsečík<sup>9</sup> nazveme  $Q$ . Bod  $D$  je potom průsečíkem přímek  $\overline{AB}$  a  $\overline{QG}$ , kde  $G$  je průsečíkem přímek  $\overline{AF}$  a  $\overline{BE}$ . [6, str. 146]



Obrázek 16 – alternativní konstrukce harmonické čtveřice (dáno  $A, B, C$ )

### 2.3 Řešené úlohy – afinita

Začněme úlohami zaměřenými na dělicí poměr jako na jeden z invariantů afinity. Úloha 7 je autorská.

**Úloha 7:** Jsou dány dva různé body  $K, M$ . Nalezněte na přímce  $\overline{KM}$  bod  $L$  tak, aby platilo  $(KLM) : (MLK) = -3$ .

<sup>9</sup> Jsou-li přímky  $\overline{AE}$  a  $\overline{BF}$  rovnoběžné, průsečík  $Q$  v eukleidovské rovině neexistuje (v projektivní rovině je nevlastním bodem). V eukleidovské rovině v takovém případě bod  $D$  nalezneme jako průsečík rovnoběžky s  $\overline{AE}$ , resp.  $\overline{BF}$  procházející průsečíkem  $G$  přímek  $\overline{AF}$  a  $\overline{BE}$ ; byť jsme si vědomi, že použití rovnoběžnosti v kontextu budování geometrie není korektní.

Číslo  $(KLM) = \lambda_1$  splňuje podle definice  $\overrightarrow{KM} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{LM}$ . Lze přejít k zápisu:

$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{KM}}{\overrightarrow{LM}}.$$

Podobně pro číslo  $(MLK) = \lambda_2$  je:

$$\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{MK}}{\overrightarrow{LK}}.$$

Pro podíl  $(KLM) : (MLK)$  dostáváme:

$$\frac{(KLM)}{(MLK)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{\overrightarrow{KM}}{\overrightarrow{LM}}}{\frac{\overrightarrow{MK}}{\overrightarrow{LK}}} = \frac{\overrightarrow{KM}}{\overrightarrow{LM}} \cdot \frac{\overrightarrow{LK}}{\overrightarrow{MK}} = -\frac{\overrightarrow{LK}}{\overrightarrow{LM}} = -\frac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{ML}} = -3.$$

Po úpravě:

$$\frac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{ML}} = 3.$$

Podíl na levé straně je však roven  $(KML)$ . Jinými slovy máme za úkol najít na přímce  $\overrightarrow{KM}$  bod  $L$  takový, že  $(KML) = 3$ . Takový bod je právě jeden a nachází se mezi body  $K, L$  tak, že úsečka  $KM$  je dvojnásobná oproti úsečce  $ML$  (viz Obr. 17).



Obrázek 17 – k úloze 7

**Úloha 8** [18, str. 11]: Necht'  $A, B, C$  jsou tři různé kolineární body. Dokažte, že potom platí  $(ACB) = 1 - (ABC)$ .

Rozepišme dělicí poměry do tvaru podílu obdobně jako v předchozí úloze:

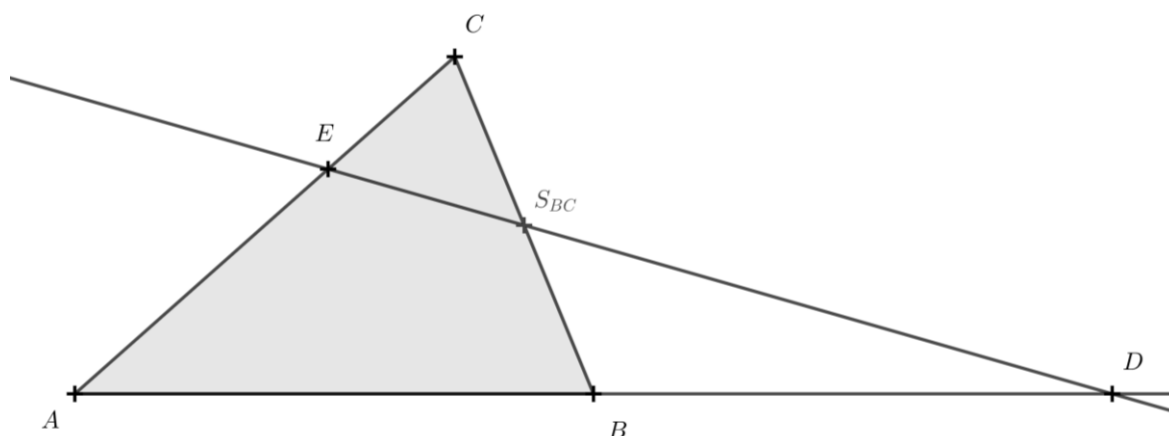
$$1 - (ABC) = 1 - \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = (ACB).$$

A tedy opravdu  $(ACB) = 1 - (ABC)$ .

Pokračujme úlohou z [4], využitou také ve variantě K testu ze Syntetické geometrie I v roce 2021. Zadání je upraveno tak, aby odpovídalo současnému jazyku.

**Úloha 9** [4, str. 197]: Je dán trojúhelník  $ABC$ . Jednu z jeho stran prodloužíme o její délku a koncový bod spojíme se středem druhé strany. Určete, v jakém poměru dělí průsečík této spojnice s třetí stranou tuto stranu.

Začněme rovnou obrázkem situace popsané v zadání (viz Obr. 18). Bez újmy na obecnosti prodloužíme popsáním způsobem stranu  $AB$ , koncový bod označme  $D$ . Jako „druhou stranu“ volíme stranu  $BC$ . Průsečík třetí strany (strany  $AC$ ) s přímkou  $\overleftrightarrow{DS_{BC}}$  označme  $E$ .



Obrázek 18 – k úloze 9

Všimněme si, že se v zadání píše o straně trojúhelníku. Nikoli však v tom smyslu, že by byla dána její délka či by bylo nutné pro vyřešení úlohy jakoukoli ze stran trojúhelníku znát<sup>10</sup>, stejně jako se v zadání nemluví o žádných úhlech či jiných poměrech než poměrech úseček na téže přímce. V zadání jsou dále pojmy „střed strany“ a „úseky“ – pojmy napovídající, že by úlohu mělo být možné vyřešit nástroji zařazenými nejpozději v kapitole afinita. Úlohu vyřešíme užitím Menelaovy věty (viz str. 18).

Vzhledem k tomu, že body  $E, S_{BC}$  a  $D$  leží na přímkách, na nichž leží strany trojúhelníku, platí podle Menelaovy věty:

$$(ABD) \cdot (BCS_{BC}) \cdot (CAE) = 1.$$

<sup>10</sup> Jak již bylo předesláno, s rovností úseček je možné pracovat korektně bez zavedení délky úsečky či vzdálenosti.

Některé dělicí poměry na levé straně jsme schopni přímo vyčíslit. Platí:

$$(ABD) = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = 2$$

$$(BCS_{BC}) = \frac{\overrightarrow{BS_{BC}}}{\overrightarrow{CS_{BC}}} = -1$$

Po dosazení dostáváme:

$$2 \cdot (-1) \cdot (CAE) = 1.$$

Z čehož snadnou úpravou dostaneme:

$$(CAE) = -\frac{1}{2}.$$

Po přepsání dostáváme hledaný poměr:

$$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{AE}} = -\frac{1}{2}.$$

Dělicí poměr je záporný, a tedy bod  $E$  leží uvnitř úsečky  $AC$ .

Následující úloha byla inspirována úlohou z [4, str. 197].

**Úloha 10:** Přímky  $p, q$  procházející vrcholy  $A, B$  trojúhelníku  $ABC$  protínají strany  $BC, AC$  v bodech  $P, Q$  tak, že  $(BCP) = (ACQ) = -2$ . Průsečík přímek  $p, q$  označme  $R$ , průsečík přímky  $\overleftrightarrow{CR}$  se stranou  $AB$  označme  $S$ . Dokažte, že bod  $S$  je středem strany  $AB$ .

Sledujme Obr. 19. Tvrzení je snadným důsledkem Cèvy vëty (viz str. 19). Bod  $R$  je průsečíkem přímek  $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BQ}, \overleftrightarrow{CS}$ . Můžeme tedy psát:

$$(ABS) \cdot (BCP) \cdot (CAQ) = -1.$$

Známe hodnotu  $(BCP) = -2$ . Ze vztahu  $(ACQ) = -2$  lze odvodit<sup>11</sup>, že  $(CAQ) = -\frac{1}{2}$ .

Po dosazení za příslušné dělicí poměry na levé straně a postupnými úpravami máme:

$$(ABS) \cdot (BCP) \cdot (CAQ) = -1,$$

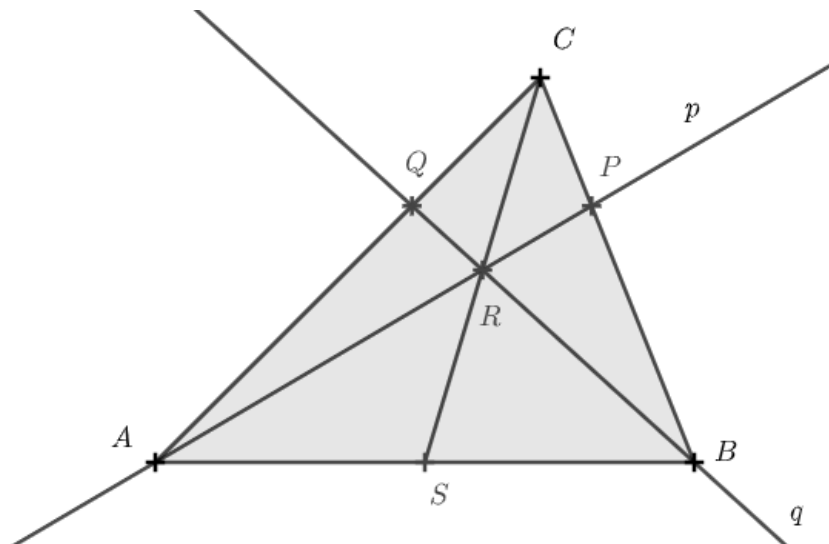
---

<sup>11</sup> Odvození využívá rozepsání dělicího poměru do tvaru podílu a převrácené hodnoty.

$$\begin{aligned}
 (ABS) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &= -1, \\
 (ABS) &= -1, \\
 \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{BS}} &= -1, \\
 \overrightarrow{AS} &= -\overrightarrow{BS},
 \end{aligned}$$

a tedy bod  $S$  je zřejmě středem úsečky  $AB$ , což jsme chtěli ukázat.

Na závěr poznamenejme, že v zadání se píše o tom, že je úkolem cosi dokázat. V tomto případě však lze snadno zadání změnit na takové, kde se bude požadovat určit, v jakém poměru dělí bod  $S$  stranu  $AB$ , nebo např. bude úkolem určit dělicí poměr  $(ABS)$ .



Obrázek 19 – k úloze 10

V úloze 11 došlo k přeformulování zadání úlohy tak, aby odpovídalo současnému jazyku. Část zadání úlohy v původním zdroji [4] byla použita již v zadání úlohy předchozí.

**Úloha 11** [4, str. 197]: Dokažte, že bod  $R$  z předchozí úlohy je středem úsečky  $CS$ .

Využijeme Menelaovu větu pro trojúhelník  $SBC$  a přímku  $p = \overrightarrow{AP}$ :

$$\begin{aligned}
 (SBA) \cdot (BCP) \cdot (CSR) &= 1 \\
 \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot (CSR) &= 1
 \end{aligned}$$

$$(CSR) = -1$$

$$\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{SR}} = -1$$

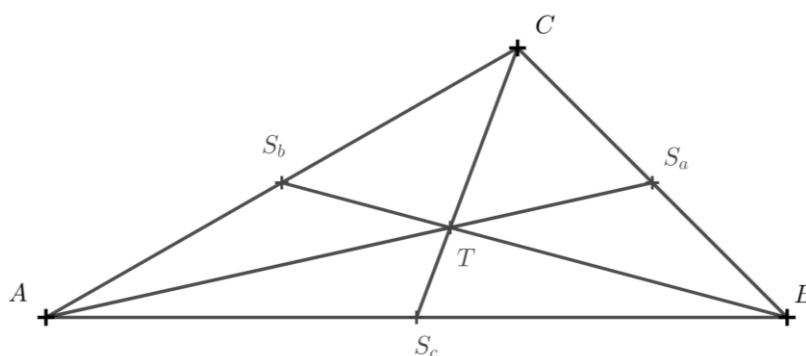
$$\overrightarrow{CR} = -\overrightarrow{SR}.$$

Bod  $R$  je proto středem úsečky  $CS$ .

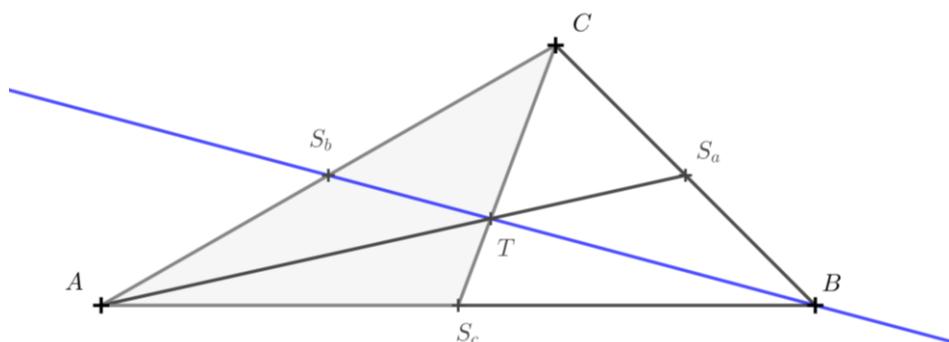
Pokračujme dále důkazem známé vlastnosti těžnic.

**Úloha 12:** Dokažte, že těžnice trojúhelníku se protínají v právě jednom bodě, který rozděljuje těžnice v poměru 1 : 2.

Jednotlivé části důkazu ilustrují Obr. 20, 21.



Obrázek 20 – k první části důkazu v úloze 12



Obrázek 21 – ke druhé části důkazu v úloze 12

V první části důkazu ukážeme, že se těžnice protnou v jednom bodě. K tomu se přímo nabízí věta Cèvova, která dává nutnou a postačující podmínku pro to, aby se uvedené úsečky protínaly v jednom bodě. Ověříme, že platí rovnost součinu příslušných dělicích poměrů a čísla  $-1$ . Označme v trojúhelníku  $ABC$  středy stran  $BC, CA, AB$  postupně  $S_a, S_b, S_c$ . Chceme dokázat, že platí:

$$(ABS_c) \cdot (BCS_a) \cdot (CAS_b) = -1.$$

Středy stran jsou různé od vrcholů trojúhelníka a leží na příslušných přímkách, což nám umožňuje Cèvovu větu využít. Navíc můžeme přejít k zápisu:

$$\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{BS_c}} \cdot \frac{\overrightarrow{BS_a}}{\overrightarrow{CS_a}} \cdot \frac{\overrightarrow{CS_b}}{\overrightarrow{AS_b}} = -1.$$

Zřejmě platí  $\overrightarrow{AS_c} = -\overrightarrow{BS_c}$ ,  $\overrightarrow{BS_a} = -\overrightarrow{CS_a}$ ,  $\overrightarrow{CS_b} = -\overrightarrow{AS_b}$ . Každý z činitelů součinu na levé straně je proto roven  $-1$ . Rovnost tak lze přepsat do tvaru:

$$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$$

Tato rovnost platí. Všechny úpravy byly ekvivalentní. Dokázali jsme, že se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Ve druhé části důkazu ukážeme, že těžiště dělí těžnici v poměru  $1 : 2$ . Ukážeme, že těžiště  $T$  dělí těžnici  $CS_c$  v uvedeném poměru, úvahu lze analogicky provést pro libovolnou těžnici. Použijeme k tomu větu Menelaovu pro trojúhelník  $AS_cC$  a přímkou  $\overrightarrow{BS_b}$  (viz Obr. 21). Body  $S_b, T, B$  leží v přímce, proto platí:

$$(AS_cB) \cdot (S_cCT) \cdot (CAS_b) = 1.$$

Můžeme psát:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{S_cB}} \cdot \frac{\overrightarrow{S_cT}}{\overrightarrow{CT}} \cdot \frac{\overrightarrow{CS_b}}{\overrightarrow{AS_b}} = 1.$$

Jelikož  $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{S_cB}$  a  $\overrightarrow{CS_b} = -\overrightarrow{AS_b}$ , lze přejít k zápisu:

$$2 \cdot \frac{\overrightarrow{S_cT}}{\overrightarrow{CT}} \cdot (-1) = 1.$$

Z čehož snadnou úpravou plyne, že:

$$\frac{\overrightarrow{S_cT}}{\overrightarrow{CT}} = -\frac{1}{2},$$

a tedy bod  $T$  leží uvnitř úsečky  $CS_c$  (tedy i uvnitř trojúhelníku) a navíc platí rovnost  $(S_cCT) = -\frac{1}{2}$ , tedy bod  $T$  dělí těžnici  $CS_c$  v poměru  $1 : 2$ .



Následující úloha je převzata z varianty R testu ze Syntetické geometrie I z roku 2021.

**Úloha 13:** Ověřte, že krajní body těžnice, její střed a těžiště příslušného trojúhelníku tvoří harmonickou čtveřici. Určete, v jakém pořadí.

Označme krajní body těžnice  $C, S_c$ , její střed  $S$  a těžiště  $T$ . Vzhledem k předchozím úvahám, které se týkají konstrukce harmonické čtveřice v kapitole 2.2, lze snadno uhadnout, že pokud tvoří uvedené čtyři body harmonickou čtveřici, pak jistě v pořadí  $C, T, S_c, S$ . Chceme ověřit, že platí:

$$(CTS_cS) = -1.$$

Rozepišme dvojpoměr:

$$(CTS_cS) = \frac{(CTS_c)}{(CTS)} = \frac{\overrightarrow{CS_c}}{\overrightarrow{TS_c}} \cdot \frac{\overrightarrow{TS}}{\overrightarrow{CS}}.$$

Považujeme-li orientovanou úsečku  $\overrightarrow{CS_c}$  za jednotkovou, přiřadíme dalším použitým orientovaným úsečkám čísla pomocí vlastností, že těžiště dělí těžnici na dva úseky v poměru  $1 : 2$  a že  $S$  je středem těžnice. Platí:

$$(CTS_cS) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2} \cdot (-6)} = -1.$$

Zjistili jsme, že platí:

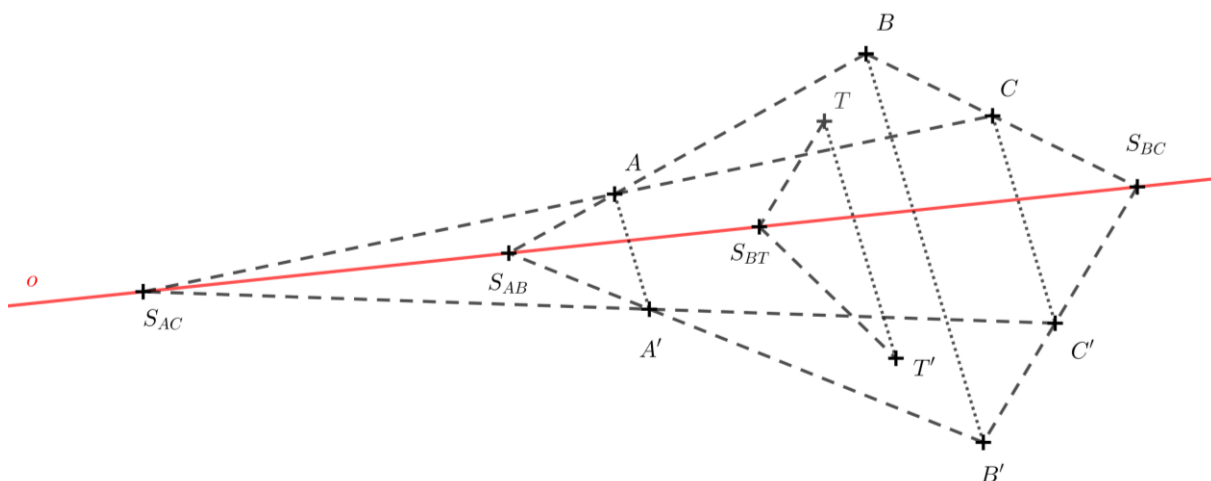
$$(CTS_cS) = -1.$$

Ověřili jsme, že krajní body těžnice, její střed a těžiště příslušného trojúhelníku tvoří harmonickou čtveřici, a to v pořadí  $C, T, S_c, S$ . Není to však jediné řešení – dalším řešením je např. pořadí  $C, T, S, S_c$  (plyne z věty, jejíž důkaz je předmětem úlohy 5 na str. 32).

Následující úloha je inspirována úlohou v [16, str. 34], použité značení v řešení je přizpůsobeno našemu.

**Úloha 14:** V rovině je dána trojice afinně sdružených bodů  $A, A'; B, B'; C, C'$ . Určete osu afinity, zobrazte v této afinitě těžiště  $T$  trojúhelníku  $ABC$  a ověřte konstrukcí, zda je jeho obraz těžištěm trojúhelníku  $A'B'C'$ .

Aby měla úloha řešení, musí být přímky  $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$  rovnoběžné. Afinně sdružené přímky se v afinitě protínají na ose afinity. Osa afinity  $o$  je proto určena např. průsečíky  $S_{AB}, S_{BC}$  přímek  $\overleftrightarrow{AB}$  a  $\overleftrightarrow{A'B'}$ ,  $\overleftrightarrow{BC}$  a  $\overleftrightarrow{B'C'}$ . Dále sestrojíme těžiště  $T$  trojúhelníku  $ABC$ , nalezneme bod  $S_{BT}$  jako průsečík osy afinity a přímky  $\overleftrightarrow{BT}$ . Obraz  $T'$  bodu  $T$  pak nalezneme jako průsečík rovnoběžky např. s  $\overleftrightarrow{AA'}$  procházející bodem  $T$  a přímky  $\overleftrightarrow{B'S_{BT}}$ . Bod  $T'$  je těžištěm trojúhelníku  $A'B'C'$  (těžiště trojúhelníku určeného vzory se v afinitě zobrazí na těžiště trojúhelníku určeného obrazy). Konstrukce je zachycena na Obr. 22.



Obrázek 22 – k úloze 14

## 2.4 Řešené úlohy – podobnost

Zaměřme se nyní na úlohy pracující s poměry délek úseček a také s úhly. V některých úlohách budeme pracovat s poměrem podobnosti. První úloha v této podkapitole, úloha 15, v sobě obsahuje důkaz známého tvrzení.

**Úloha 15** [7, str. 72]: Dokažte, že každá podobnost s koeficientem  $k \neq 1$  má nejvýše jeden<sup>12</sup> samodružný bod.

<sup>12</sup> Platí však „silnější“ věta – každá podobnost s koeficientem  $k \neq 1$  (tedy taková podobnost, která není shodností) má právě jeden samodružný bod.

Ve výsledcích v [7, str. 112] najdeme náznak řešení. Následující rozepsané řešení je autorské.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že má podobnost s koeficientem  $k \neq 1$  ale spoň dva samodružné body. Označme je  $X, Y$ . Podobnost zobrazuje takové body na ty samé, a tedy  $X \rightarrow X' = X, Y \rightarrow Y' = Y$ . A tedy zřejmě  $|XY| = |X'Y'|$ .

Z definice podobnosti musí platit:

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|.$$

Po dosazení  $|XY|$  za  $|X'Y'|$  máme:

$$|XY| = k \cdot |XY|.$$

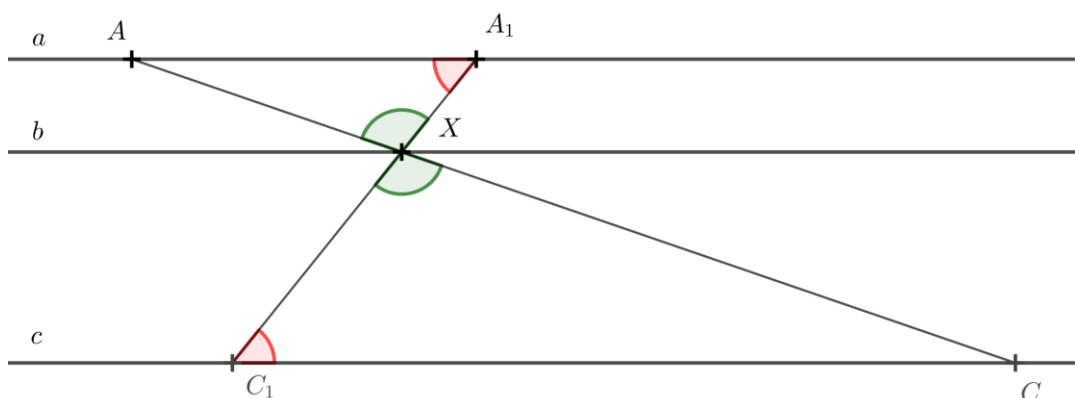
Z čehož snadnou úpravou je:

$$k = 1.$$

To je však spor s předpokladem, že  $k \neq 1$ . Dokázali jsme, že má každá podobnost různá od shodnosti nejvýše jeden samodružný bod.

Následující úloha je autorská a byla inspirována úlohou zadanou ve variantě I testu ze Syntetické geometrie I v roce 2021.

**Úloha 16:** Jsou dány tři rovnoběžné navzájem různé přímky  $a, b, c$  a na přímce  $b$  je pevně daný bod  $X$ . Bod  $A$  leží na přímce  $a$ , bod  $C$  je průsečík přímek  $\overleftrightarrow{AX}, c$ . Dokažte, že pro libovolný bod  $A \in a$  je poměr  $|AX| : |XC|$  konstantní.



Obrázek 23 – k úloze 16

Zvolme na přímce  $a$  další bod  $A_1$  různý od bodu  $A$  a dohledejme bod  $C_1$  jako průsečík přímek  $\overleftrightarrow{A_1X}$ ,  $c$ .

Všimněme si, že úhly  $\sphericalangle C_1XC$  a  $\sphericalangle A_1XA$  jsou vrcholové, a tedy jsou shodné. Úhly  $\sphericalangle CC_1A_1$  a  $\sphericalangle AA_1C_1$  jsou střídavé, a tedy shodné. Na Obr. 23 jsou takové dvojice úhlů barevně odlišeny. Trojúhelníky  $C_1CX$  a  $A_1AX$  jsou si podobné (podle věty  $uu$ ), a tedy platí:

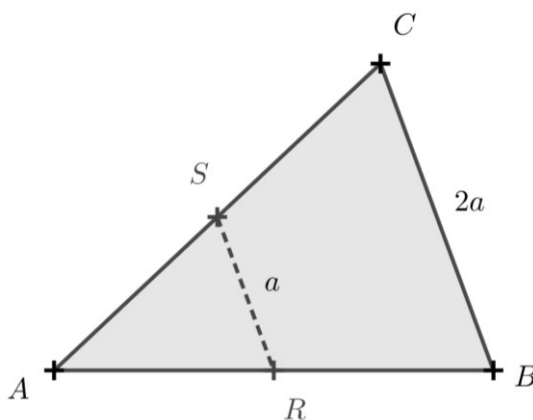
$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|A_1X|}{|C_1X|}.$$

Bod  $A_1$  je možné volit libovolně, a proto platí pro všechny body  $A$  přímky  $a$ , že je poměr  $|AX| : |XC|$  konstantní.

Následující úloha je převzata z [7, str. 69], zadání je v našem kontextu upraveno.

**Úloha 17:** V rovině je dán trojúhelník  $ABC$ . Body  $R, S$  jsou středy stran  $AB, AC$ . Necht'  $f$  je podobné zobrazení, v němž  $B = f(R), C = f(S)$ . Určete koeficient podobnosti zobrazení  $f$ .

Proveďme náčrtek daného trojúhelníku (Obr. 24).



Obrázek 24 – k úloze 17

Označme  $|RS| = a$ . Jak si čtenář snadno rozmyslí, jsou trojúhelníky  $ARS$  a  $ABC$  podobné, přičemž  $|AB| = 2|RS|$ ,  $|AC| = 2|AS|$ . Platí proto  $|BC| = 2a$  (případně lze využít přímo vlastnosti střední příčky trojúhelníku, tu jsme zde však nedefinovali). Zobrazení  $f$  je podobnost, body  $B, C$  jsou obrazy bodů  $R, S$ , a tudíž z definice podobnosti platí:

$$|BC| = k \cdot |RS|,$$

kde  $k$  je hledaný koeficient.

Po dosazení:

$$2a = k \cdot a$$

A po snadné úpravě ( $a > 0$ ) dostáváme kýžené:

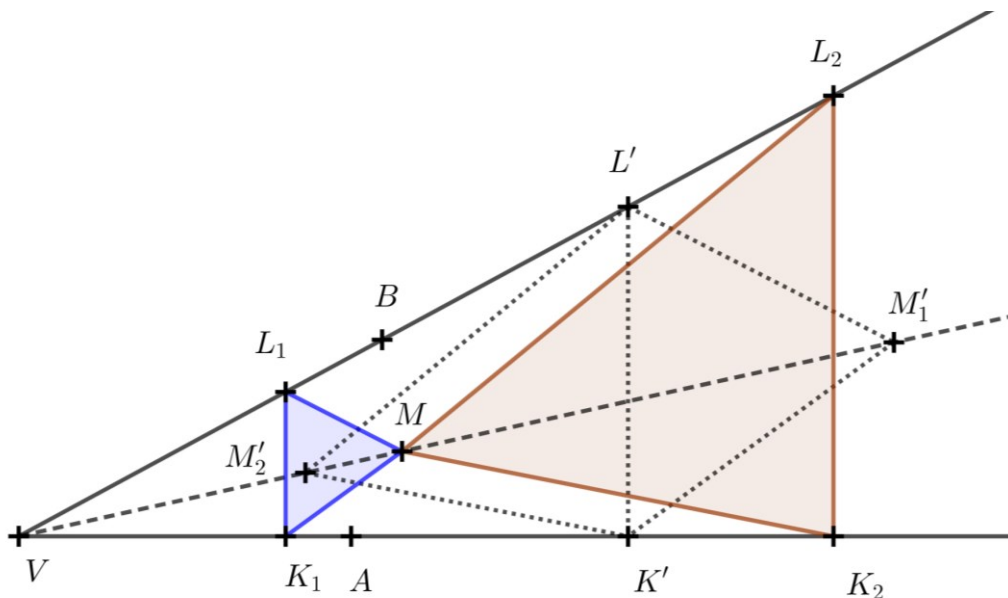
$$k = 2.$$

Následující úloha je převzata z [3, str. 345]. Namísto původního „ $|LK| = |KM|$ “ jsme v zadání uvedli, že je trojúhelník  $KLM$  rovnoramenný se základnou  $LM$  – vzdálenost jsme sice definovali ještě před zavedením podobnosti, je však účelné si uvědomit, že vzdálenost je invariant shodnosti, a tedy v úloze na využití podobnosti není nutné ji použít.

**Úloha 18:** Je dán ostrý úhel  $\sphericalangle AVB$  a bod  $M$ , který leží uvnitř úhlu  $\sphericalangle AVB$ . Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky  $KLM$ , pro něž platí: vrchol  $L$  leží na polopřímce  $\overrightarrow{VB}$ , vrchol  $K$  na polopřímce  $\overrightarrow{VA}$ , přičemž trojúhelník  $KLM$  je rovnoramenný se základnou  $LM$  a  $\overrightarrow{LK} \perp \overrightarrow{VA}$ .

Úlohu vyřešíme užitím stejnolehlosti se středem ve vrcholu  $V$  úhlu  $\sphericalangle AVB$ . Sestrojíme libovolný rovnoramenný trojúhelník  $K'L'M'$  se základnou  $L'M'$  takový, že pro jeho vrcholy platí  $L' \in \overrightarrow{VB}$ ,  $K' \in \overrightarrow{VA}$ ,  $\overrightarrow{K'L'} \perp \overrightarrow{VA}$ ,  $M' \in \overrightarrow{VM}$ . Takový trojúhelník je podobný hledanému trojúhelníku  $KLM$ . Vedme bodem  $M$  rovnoběžku s  $\overrightarrow{K'M'}$ . Její průsečík s polopřímkou  $\overrightarrow{VA}$  je hledaný bod  $K$ . Užitím kolmice vztyčené v bodě  $K$  k polopřímce  $\overrightarrow{VB}$  sestrojíme bod  $L$ , který je průsečíkem této kolmice s polopřímkou  $\overrightarrow{VB}$  (lze ověřit, že trojúhelník  $KLM$  je rovnoramenný se základnou  $LM$ ).

Úloha má dvě řešení pro  $0^\circ < |\sphericalangle AVB| < 45^\circ$  a jedno řešení pro  $45^\circ \leq |\sphericalangle AVB| < 90^\circ$ . Na Obr. 25 jsou znázorněna a barevně odlišena obě řešení (trojúhelníky  $K_1L_1M$ ,  $K_2L_2M$ ), ostrý úhel  $\sphericalangle AVB$  je menší než  $45^\circ$ .



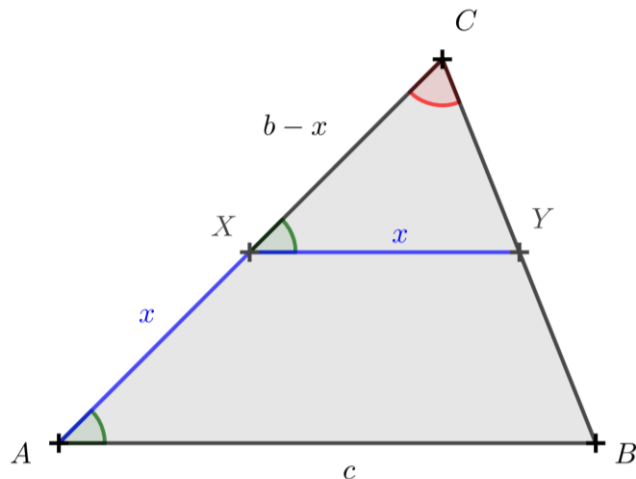
Obrázek 25 – užití stejnolehlosti v úloze 18

Další úloha je převzata z [3, str. 335], z původních pěti „podúloh“ vybíráme první tři. Každá z nich je zaměřená na podobnost, byť každá z trochu odlišného úhlu pohledu. V zadání se sice vyskytují délky, vztah  $|AX| = |XY|$  však lze snadno zapsat užitím poměru délek (jako invariantu podobnosti) jako  $\frac{|AX|}{|XY|} = 1$ .

**Úloha 19:** Narýsujte libovolný trojúhelník  $ABC$ . Uvnitř strany  $AC$  je dán bod  $X$  a uvnitř strany  $BC$  bod  $Y$  tak, že  $|AX| = |XY|$  a  $XY \parallel AB$ .

- Vyjádřete délku  $x$  úsečky  $AX$  pomocí délek  $b, c$  stran  $AC, AB$ .
- Sestrojte úsečku délky  $x$  a pak ve zvoleném trojúhelníku  $ABC$  sestrojte požadované body  $X, Y$ .
- Řešte danou konstrukční úlohu bez předchozího výpočtu užitím stejnolehlosti se středem v bodě  $A$ .

Podívejme se na řešení části a). Ze zadání je zřejmé, jak úsečka  $XY$  bude umístěna, ilustrujme však situaci obrázkem (předpokládejme, že jsou body  $X, Y$  sestrojeny) – viz Obr. 26.



Obrázek 26 – k úloze 19, části a)

Všimněme si, že úhly  $\sphericalangle BAC$  a  $\sphericalangle YXC$  jsou shodné, a tedy trojúhelníky  $ABC$  a  $XYC$  jsou si podobné podle věty  $uu$ . Proto platí:

$$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{b}.$$

Po snadném vyjádření  $x$  máme hledané:

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

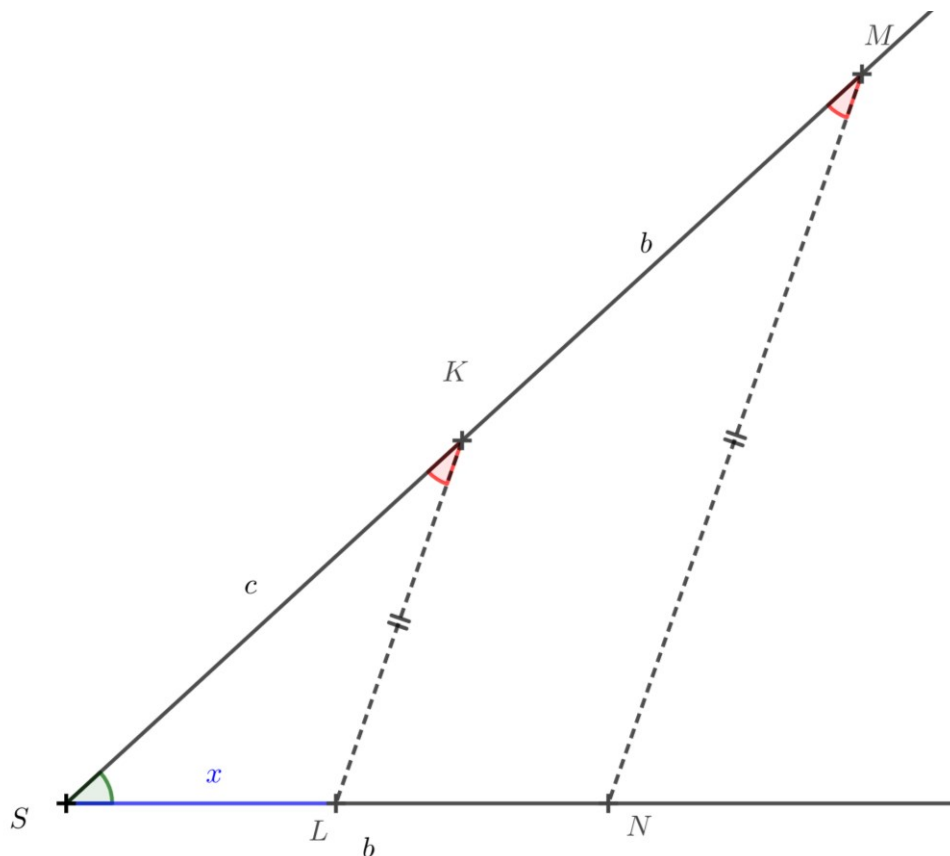
V řešení úlohy b) naznačme, jak sestrojít úsečku délky  $x$ . Pomůžeme si úpravou výše uvedeného vztahu

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

Vydělme obě strany rovnice (kladným) číslem  $c$ :

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{b+c}.$$

Nyní stačí využít podobnosti trojúhelníků (na Obr. 27 trojúhelníků  $SLK, SNM$ ), postup konstrukce a její správnost jsou zřejmé z Obr. 27 (je  $|SK| = c, |SM| = c + b, |SN| = b$ , kde  $b, c$  jsou délky stran trojúhelníku  $ABC$ ). Platí  $|SL| = x$ .

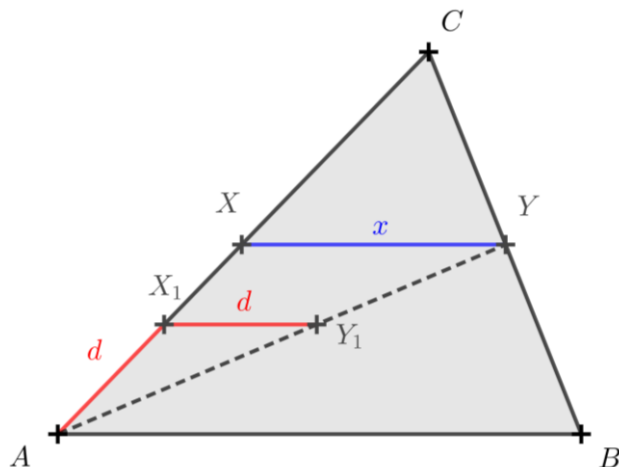


Obrázek 27 – k úloze 19, části b)

Samotné sestrojení bodů  $X, Y$  je zřejmé – bod  $X$  leží na straně  $AC$  a platí  $|AX| = x$ , bod  $Y$  nalezneme jako průsečík strany  $BC$  s přímkou rovnoběžnou s  $\overrightarrow{AB}$  procházející bodem  $X$  (viz Obr. 26).

V části c) bychom chtěli v trojúhelníku  $ABC$  sestrojiti body  $X, Y$  bez předchozího výpočtu. Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník  $AX_1Y_1$  takový, že platí  $|AX_1| = |X_1Y_1|$ , přičemž  $X_1$  je vnitřním bodem úsečky  $AC$ ,  $Y_1$  je vnitřním bodem polopřímky  $\overrightarrow{ACB}$  a přímky  $\overrightarrow{X_1Y_1}$  a  $\overrightarrow{AB}$  jsou rovnoběžné. Využijme stejnohlost se středem v bodě  $A$  a koeficientem  $\overrightarrow{AX} : \overrightarrow{AX_1}$ , která zobrazí bod  $Y_1$  na bod  $Y$  a bod  $X_1$  na bod  $X$ . Obrazem přímky  $\overrightarrow{X_1Y_1}$  v uvedené stejnohlosti je přímka  $\overrightarrow{XY}$  rovnoběžná s  $\overrightarrow{X_1Y_1}$  (resp. s  $\overrightarrow{AB}$ ). Bod  $Y$  je zřejmě průsečíkem úsečky  $BC$  a polopřímky  $\overrightarrow{AY_1}$ . Bod  $X$  získáme jako průsečík  $AC$  a rovnoběžky s přímkou  $\overrightarrow{AB}$  vedené bodem  $Y$ . Úloha má jediné řešení (viz Obr. 28).





Obrázek 28 – k úloze 19, části c)

Následující úloha byla zadána ve školním roce 2014/2015 jako úloha domácího kola kategorie C Matematické olympiády.

**Úloha 20** [20, úloha 4]: Označme  $E$  střed základny  $AB$  lichoběžníku  $ABCD$ , v němž platí  $|AB| : |CD| = 3 : 1$ . Úhlopříčka  $AC$  protíná úsečky  $ED, BD$  po řadě v bodech  $F, G$ . Určete postupný poměr  $|AF| : |FG| : |GC|$ .

První věta v oficiálním řešení je: „Jelikož v zadání i v otázce úlohy jsou jen poměry, můžeme si délky stran lichoběžníku zvolit jako vhodná konkrétní čísla.“ Zvolme tedy např.  $|AB| = 6$ . Jelikož  $E$  je středem základny  $AB$ , platí pak  $|AE| = |EB| = 3$ , a jelikož  $|AB| : |CD| = 3 : 1$ , je zřejmě  $|CD| = 2$ . Hledané délky označíme následujícím způsobem:  $|AF| = x, |FG| = y, |GC| = z$ . V Obr. 29 jsou zaznačeny a barevně odlišeny tři dvojice shodných úhlů (úhly  $\sphericalangle BAC$  a  $\sphericalangle DCB$  jsou střídavé, stejně jako úhly  $\sphericalangle AED$  a  $\sphericalangle CDE$ ; dále si můžeme všimnout, že úhly  $\sphericalangle AGB$  a  $\sphericalangle CGD$  jsou vrcholové).

Trojúhelníky  $ABG$  a  $CDG$  jsou si podle věty  $uu$  podobné, a proto:

$$\frac{x + y}{z} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}.$$

Také trojúhelníky  $AEF$  a  $CDF$  jsou si podle věty  $uu$  podobné, a tedy:

$$\frac{x}{y + z} = \frac{3}{2}.$$

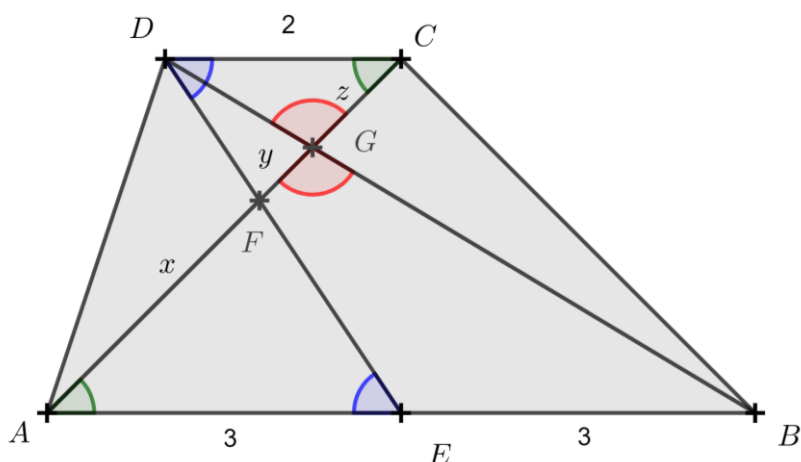
Zapišeme-li uvedené rovnosti (po úpravách) jako soustavu rovnic, máme:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 2x - 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

Jejich odečtením dostáváme  $x = 4y$  neboli  $x : y = 4 : 1 = 12 : 3$ . Dosazením  $4y$  za  $x$  do první rovnice dostaneme  $5y = 3z$ , neboli  $y : z = 3 : 5$ . Spojením obou poměrů dostáváme  $x : y : z = 12 : 3 : 5$ . Sepišme výsledek užitím poměru uvedeném v zadání:

$$|AF| : |FG| : |GC| = 12 : 3 : 5.$$

Určili jsme hledaný poměr pouze užitím podobnosti a pomocí algebraických úprav.



Obrázek 29 – k úloze 20

## 2.5 Řešené úlohy – shodnost

V této podkapitole jsou zařazeny úlohy, v nichž bude hlavní roli hrát vzdálenost – totiž invariant shodného zobrazení. Úlohy vybíráme tak, aby byly v jejich řešení předvedeny různé postupy – např. takové, které využívají shodnosti trojúhelníků či množin bodů daných vlastností popsaných pomocí vzdálenosti; jsou zde zařazeny úlohy na aplikaci Pythagorovy věty a Eukleidových vět, úlohy využívající obvod nebo obsah, v neposlední řadě úlohy zaměřené na konstrukci rovinných útvarů pomocí shodných zobrazení. Končeme budeme moci použít kružnici, k jejíž definici<sup>13</sup> využíváme délku – zde vycházíme ze standardní středoškolské definice, kde je kružnice množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu.

<sup>13</sup> Poznamenejme však, že existuje kružnice popsaná jako množina všech bodů splňujících určitou rovnost, kde je na jedné straně podíl délek úseček a na druhé straně kladné číslo. Více o tzv. Apolloniově kružnici např. v [1, str. 87–89].

Začneme úlohou z [1, str. 20], zaměřenou na shodnost trojúhelníků.

**Úloha 21:** Nad stranami  $AC$  a  $BC$  ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  jsou sestrojeny rovnostranné trojúhelníky  $ACD$  a  $BCE$  tak, že každý z nich leží vně trojúhelníku  $ABC$ . Dokažte, že  $\triangle AEC \cong \triangle DBC$ .

Ve výsledcích úloh v [1, str. 149] se dočteme, že máme otočit trojúhelník  $DBC$  kolem bodu  $C$  o úhel  $60^\circ$ . V našem řešení však využijeme přímo věty *sus*, bez využití otočení (viz Obr. 30).

Je zřejmé, že platí  $|CD| = |AC| = b$ ,  $|BC| = |CE| = a$ . Zbývá ukázat, že vnitřní úhly v obou trojúhelnících při vrcholu  $C$  jsou si rovny, tj. že  $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle DCB|$ .

Jelikož jsou trojúhelníky  $ACD$  a  $BCE$  rovnostranné, mají všechny jejich vnitřní úhly stejnou velikost (přesněji řečeno  $60^\circ$ , to však pro vyřešení úlohy nepotřebujeme). Platí tedy:

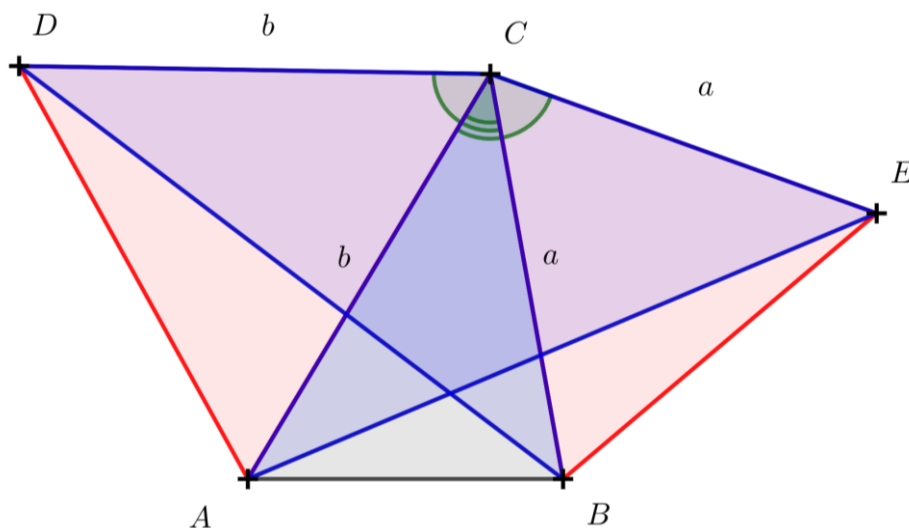
$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCE|.$$

Přičtíme k oběma stranám velikost vnitřního úhlu  $\sphericalangle ACB$  trojúhelníku  $ABC$ :

$$|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle ACB|,$$

$$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ACE|.$$

A tedy  $\triangle AEC \cong \triangle DBC$  podle věty *sus*.

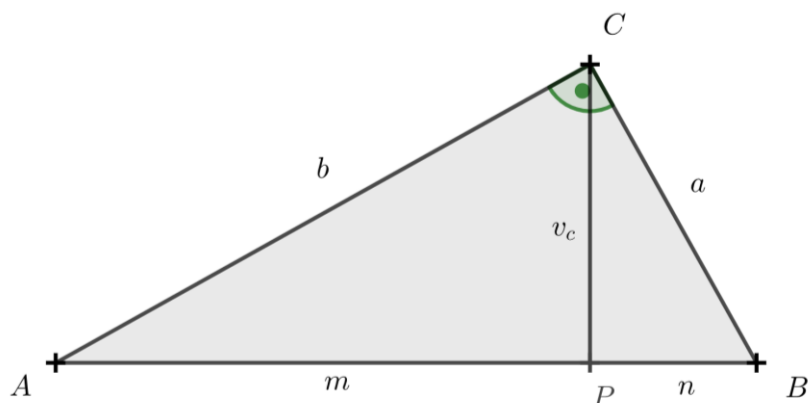


Obrázek 30 – k úloze 21

Následující úloha je převzata (a přeložena) z [9, str. 160]. Pro větší přehlednost jsme pojmenovali původně nepojmenované vrcholy trojúhelníku  $A, B, C$ .

**Úloha 22:** Pata  $P$  výšky  $v_c$  spuštěné na přeponu  $c$  pravoúhlého trojúhelníku  $ABC$  dělí tuto přeponu na dva úseky o délkách  $m, n$ . Vyjádřete užitím  $m, n$  délky odvěsen trojúhelníku  $ABC$ .

Využijeme Eukleidovy věty o odvěsně. Situace je znázorněna na Obr. 31, přičemž platí  $|AP| = m, |PB| = n$ .



Obrázek 31 – k úlohám 22 a 23

Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí:

$$a^2 = c \cdot n,$$

$$b^2 = c \cdot m.$$

Protože je však  $c = m + n$ , dostáváme:

$$a^2 = (m + n) \cdot n,$$

$$b^2 = (m + n) \cdot m.$$

A tedy:

$$a = \sqrt{n(m + n)},$$

$$b = \sqrt{m(m + n)}.$$

Zjistili jsme, že odvěsny mají délky  $\sqrt{m(m + n)}$  a  $\sqrt{n(m + n)}$ .

Poznamenejme, že předchozí úlohu jsme mohli vyřešit i bez využití Eukleidovy věty o odvěsně již v kapitole týkající se podobnosti – právě pomocí podobnosti je totiž možné Eukleidovu větu dokázat, pro vyřešení by nám stačilo využít vhodné podobnosti trojúhelníků. Znalost Eukleidovy věty zde však řešení zjednodušuje. Navíc zadání pracuje přímo s délkou a v obvyklém tvaru zápisu Eukleidovy věty se vyskytuje součin vzdáleností.

Následující úloha je autorská a navazuje na právě dokončenou.

**Úloha 23:** Užitím  $m, n$  vyjádřete obvod a obsah trojúhelníku  $ABC$  z předchozí úlohy.

Obvod je součtem délek všech tří stran  $a, b, c$  trojúhelníku  $ABC$ , a tedy s využitím výsledku z předchozí úlohy máme:

$$o = a + b + c,$$

po dosazení (a prohození prvních dvou sčítanců) dostáváme konečně:

$$o = \sqrt{m(m+n)} + \sqrt{n(m+n)} + m + n.$$

Obsah<sup>14</sup> pravoúhlého trojúhelníku je možné spočítat jako polovina součinu délek odvěsen, a tedy:

$$S = \frac{ab}{2}.$$

Po dosazení máme:

$$S = \frac{\sqrt{m(m+n)} \cdot \sqrt{n(m+n)}}{2}.$$

Po úpravě dostáváme kýžené:

$$S = \frac{(m+n)\sqrt{mn}}{2}.$$

Vztahy, v nichž vystupuje délka, lze velmi často využít v úlohách z Matematické olympiády. Jako příklad uvádíme šestou úlohu z domácího kola kategorie C ze školního

---

<sup>14</sup> Obsah je možné spočítat i jako  $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ , přičemž podle Eukleidovy věty o výšce platí  $v_c = \sqrt{mn}$ . Po dosazení do uvedeného vztahu pro výpočet obsahu dostáváme stejný výsledek.

roku 2015/2016, v níž použijeme Eukleidovu větu o výšce. Namísto původního „na přímce  $AB$ “ uvádíme „na přímce  $\overleftrightarrow{AB}$ “.

**Úloha 24** [21, úloha 6]: Je dána kružnice  $k_1(A; 4 \text{ cm})$ , její bod  $B$  a kružnice  $k_2(B; 2 \text{ cm})$ . Bod  $C$  je středem úsečky  $AB$  a bod  $K$  je středem úsečky  $AC$ . Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku  $KLM$ , jehož vrchol  $L$  je jeden z průsečíků kružnic  $k_1, k_2$  a jehož přepona  $KM$  leží na přímce  $\overleftrightarrow{AB}$ .

Poznamenejme, že v postupu řešení budeme pro zjednodušení počítat s délkami úseček bez jednotek. Jednotku zapíšeme až do výsledku.

Jak je uvedeno hned na začátku oficiálního řešení, s ohledem na osovou souměrnost podle přímky  $\overleftrightarrow{AB}$  je jedno, který z obou průsečíků kružnic  $k_1, k_2$  vybereme za bod  $L$ . Obsah pravoúhlého trojúhelníku  $KLM$  vyjádříme jako:

$$S_{KLM} = \frac{|KM| \cdot |LD|}{2},$$

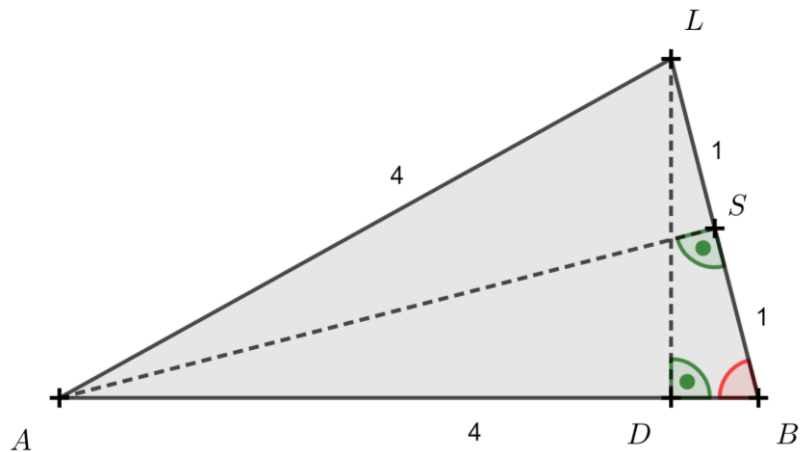
kde bod  $D$  je patou výšky na přeponu trojúhelníku  $KLM$ .

Označme  $S$  střed úsečky  $BL$  a sledujme Obr. 32. Trojúhelníky  $ASB$  a  $LDB$  jsou oba pravoúhlé se společným ostrým úhlem při vrcholu  $B$ , a tedy jsou podle věty  $uu$  podobné. Podle zadání platí  $|AB| = 4$ ,  $|BL| = 2$ , a proto  $|BS| = 1$  (polovina délky úsečky  $BL$ ). Platí:

$$\frac{|BD|}{|BS|} = \frac{|BL|}{|BA|} = \frac{2}{4},$$

odkud dostáváme:

$$|BD| = \frac{1}{2}.$$



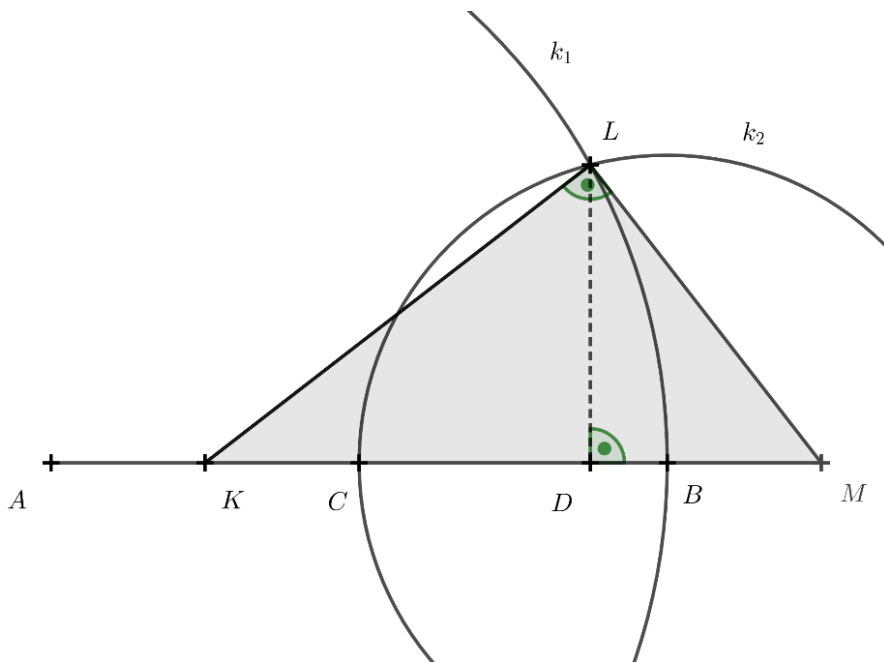
Obrázek 32 – trojúhelník ABL k úloze 24

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník LDB plyne pro délku LD:

$$|LD| = \sqrt{|BL|^2 - |BD|^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Sledujme dále Obr. 33. Z rovnosti  $|BD| = \frac{1}{2}$  také odvodíme délku úseku KD přepony KM pravoúhlého trojúhelníku KLM, je totiž:

$$|KD| = |AB| - |AK| - |BD| = 4 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$



Obrázek 33 – trojúhelník KLM k úloze 24

Délku druhého úseku  $DM$  určíme z Eukleidovy věty o výšce. Platí:

$$|LD|^2 = |KD| \cdot |DM|,$$

z čehož vyjádříme:

$$|DM| = \frac{|LD|^2}{|KD|}.$$

A po dosazení dopočteme:

$$|DM| = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Celá přepona  $KM$  má tedy délku:

$$|KM| = |KD| + |DM| = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku  $KLM$  tedy je:

$$S_{KLM} = \frac{|KM| \cdot |LD|}{2} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}}{2}.$$

Pro hledaný obsah tedy platí:

$$S_{KLM} = \sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

Pokračujme autorskou úlohou zaměřenou na eukleidovské konstrukce.

**Úloha 25:** Je dána úsečka délky 1. Popište, jak sestrojít úsečku délky:

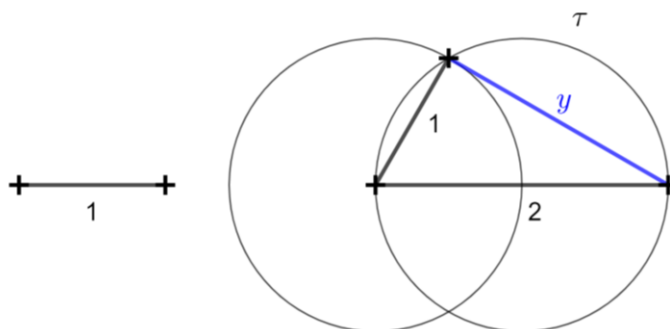
$$x = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{6} - 1)^2}.$$

V úloze využíváme zadané jednotkové délky. Úloha by měla přiblížit/zopakovat jiné než početní využití Pythagorovy věty a Eukleidových vět.

Označme  $y = \sqrt{3}$ ,  $z = (\sqrt{6} - 1)^2$ .

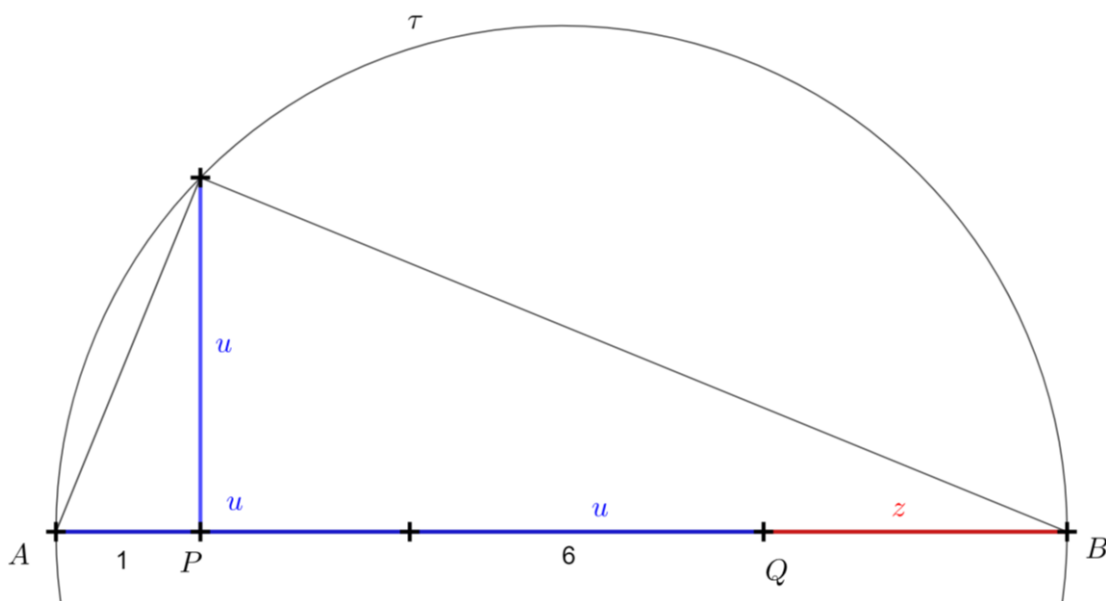


Úsečku délky  $y$  zkonstruujeme např. užitím Thalétovy a Pythagorovy věty jako odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku (viz Obr. 34, kde je zobrazena také zadaná jednotková úsečka), jehož další odvěsna má délku 1 a přepona délku 2 (tu snadno sestrojíme jako dvojnásobek zadané jednotkové délky). Platí totiž  $y = \sqrt{2^2 - 1^2}$ .



Obrázek 34 – jednotková úsečka a konstrukce úsečky délky  $y = \sqrt{3}$

Upravíme  $z = (\sqrt{6} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{6} + 1 = 7 - 2\sqrt{6}$ . Úsečku délky  $u = \sqrt{6}$  zkonstruujeme např. užitím Eukleidovy věty o výšce (jako výšku na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku, jehož úseky přepony mají délky 1 a 6, platí totiž rovnost  $u = \sqrt{6 \cdot 1}$ ). Konstrukce úsečky o velikosti  $7 - 2\sqrt{6}$  využívá sčítání, resp. odčítání úseček (viz Obr. 35, na přeponu délky 7 jsou nanесeny dvě úsečky délky  $u$  a navíc platí  $|AP| = 1$ ,  $|PB| = 6$ ,  $|QB| = z$ ).

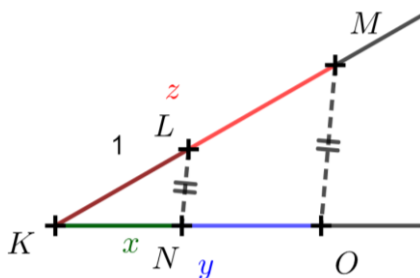


Obrázek 35 – konstrukce úseček délek  $u = \sqrt{6}$ ,  $z = 7 - 2\sqrt{6}$

Konečně sestrojíme úsečku délky  $x$ . Délka  $x$  splňuje (dle zadání a zvoleného označení):

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{z}.$$

Konstrukce úsečky délky  $x$  je založena na podobnosti<sup>15</sup> trojúhelníků a je zachycena na Obr. 36 (platí  $|KO| = y = \sqrt{3}$ ,  $|KM| = z = 7 - 2\sqrt{6}$ ,  $|KL| = 1$ ,  $|KN| = x$ ,  $\overrightarrow{LN} \parallel \overrightarrow{MO}$ ).



Obrázek 36 – konstrukce úsečky délky  $x$

Následující úloha je převzata z [8]. Některé části uvedeného řešení jsou upraveny vzhledem k zachování jednotného značení.

**Úloha 26:** Jsou dány různé body  $A, B$ . Najděte všechny přímky  $p$ , jejichž vzdálenost od  $A$  je stejná jako od  $B$ .

V první řadě si můžeme všimnout, že mezi hledané přímky zřejmě budou patřit všechny přímky rovnoběžné s přímkou  $\overleftrightarrow{AB}$ . Dále je snadné zjistit, že hledanou přímkou bude i osa úsečky  $AB$ .

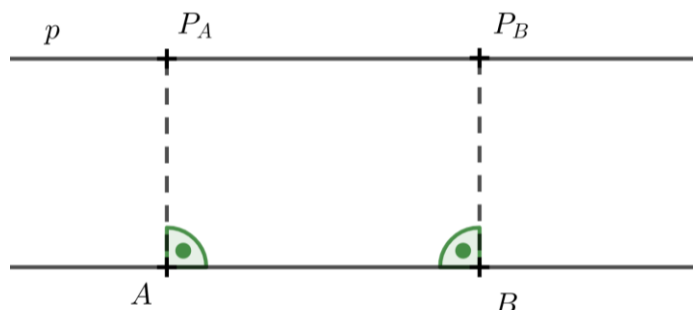
Označme  $P_A, P_B$  po řadě paty kolmic na  $p$  vedených body  $A$  a  $B$ . Daná podmínka je pak zřejmě ekvivalentní rovnosti  $|AP_A| = |BP_B|$ .

Rozeberme dále jednotlivé případy.

Prochází-li přímka  $p$  alespoň jedním z daných bodů  $A, B$ , musí to být už samotná přímka  $\overleftrightarrow{AB}$ , aby splňovala danou podmínku.

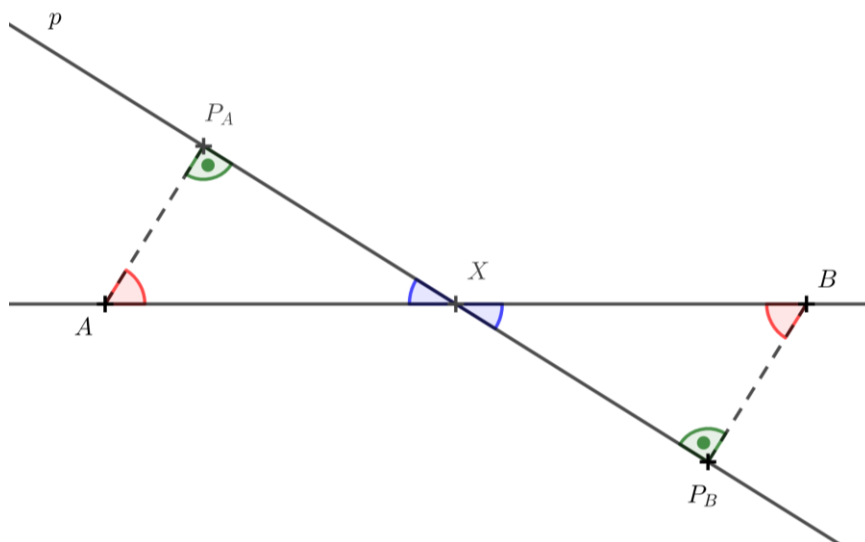
<sup>15</sup> Podobné jsou trojúhelníky  $KNL$  a  $KOM$ .

Leží-li  $A$  i  $B$  ve stejné polorovině určené přímkou  $p$ , pak jelikož jsou úhly  $\sphericalangle AP_A P_B$ ,  $\sphericalangle BP_B P_A$  pravé a  $|AP_A| = |BP_B|$ , musí být čtyřúhelník  $ABP_B P_A$  obdélník, a tedy  $p$  musí být rovnoběžná s  $\overleftrightarrow{AB}$  (viz Obr. 37).



Obrázek 37 – k úloze 26 ( $A, B$  leží v téže polorovině určené  $p$ )

Pokud  $A$  a  $B$  leží v různých polorovinách určených přímkou  $p$ , označme průsečík přímky  $p$  a úsečky  $AB$  jako  $X$ . Ze shodnosti pravých a vrcholových úhlů dostáváme společně s  $|AP_A| = |BP_B|$  shodnost trojúhelníků  $XP_A A$  a  $XP_B B$  (viz Obr. 38), a tedy  $|AX| = |BX|$ , z čehož plyne, že  $p$  musí procházet středem úsečky  $AB$ . Jednou takovou přímkou je zmiňovaná osa úsečky  $AB$ , ale zřejmě i všechny ostatní takové přímky splňují zadání.



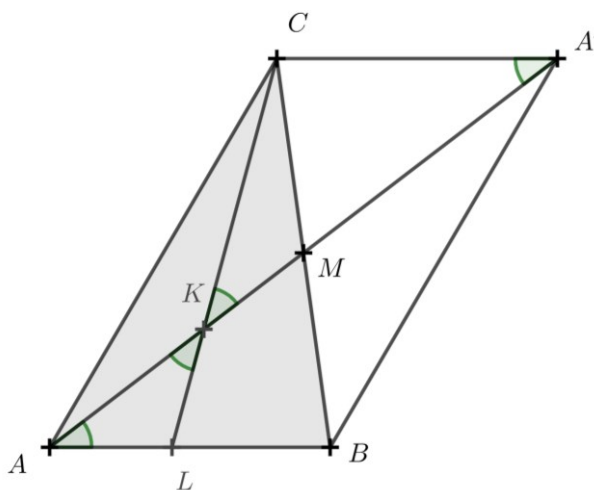
Obrázek 38 – K úloze 26 ( $A, B$  leží v opačných polorovinách určených  $p$ )

Nyní již můžeme s jistotou prohlásit, že všechny hledané přímky jsou rovnoběžky s  $\overleftrightarrow{AB}$  spolu se všemi přímkami procházejícími středem úsečky  $AB$ .

Shodná zobrazení mohou být využita i v některých důkazových úlohách. Uvedme jako příklad úlohu převzatou z [13], kde využijeme středovou souměrnost. Značení v zadání i v řešení je upraveno.

**Úloha 27:** V trojúhelníku  $ABC$  označme  $M$  střed strany  $BC$ . Uvnitř těžnice  $AM$  je dán bod  $K$  splňující  $|CK| = |AB|$ . Přímka  $\overleftrightarrow{CK}$  dále protíná stranu  $AB$  v bodě  $L$ . Dokažte, že trojúhelník  $LAK$  je rovnoramenný.

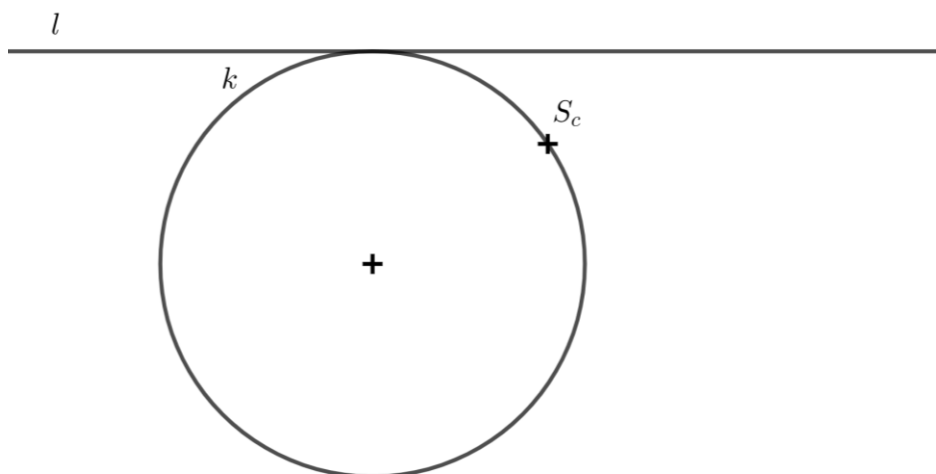
Úloha je zařazena v článku týkajícím se rovnoběžníků. Löwit uvádí na začátku řešení, že není na první pohled vůbec jasné, odkud začít – jediný náznak rovnoběžníku lze spatřit v bodě  $M$ , který pólí úsečku  $BC$ . Zobrazme bod  $A$  ve středové souměrnosti podle středu  $M$ , získáme tak bod  $A'$ . Čtyřúhelník  $ABA'C$  je rovnoběžník, jelikož bod  $M$  pólí jeho úhlopříčky. Protože platí  $|CK| = |AB|$  a  $|AB| = |CA'|$ , je také  $|CK| = |CA'|$ , takže trojúhelník  $KA'C$  je rovnoramenný se základnou  $KA'$ . Máme tedy  $|\sphericalangle A'KC| = |\sphericalangle KA'C|$ . Úhly  $\sphericalangle CA'A$  a  $\sphericalangle BAA'$  jsou střídavé, a tedy shodné. Stejně tak jsou shodné vrcholové úhly  $\sphericalangle A'KC$  a  $\sphericalangle AKL$ . Celkem jsme tedy našli dva shodné úhly v trojúhelníku  $KAL$ , tento trojúhelník je proto skutečně rovnoramenný. Řešení úlohy ilustruje Obr. 39.



Obrázek 39 – k úloze 27

Další úloha (také na využití středové souměrnosti) je převzata z varianty U testu ze Syntetické geometrie I z roku 2021 (zadání bylo přeformulováno, namísto původního „sestrojte pravoúhlý trojúhelník“ uvádíme „sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky“).

**Úloha 28:** V rovině je dána kružnice  $k$ , její tečna  $l$  a bod  $S_c \in k$  podle Obr. 40. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$ , jejichž vrchol  $A$  leží na  $l$  a vrcholy  $B, C$  leží na  $k$ , přičemž  $S_c$  je střed přepony.



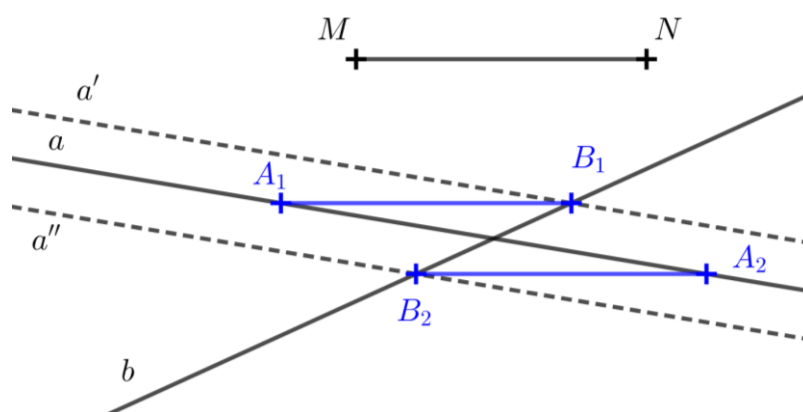
Obrázek 40 – k zadání úlohy 28

Existuje středová souměrnost se středem  $S_c$ , která převádí vrchol  $A$  trojúhelníku na vrchol  $B$ . O vrcholu  $A$  víme, že leží na přímce  $l$  a současně jeho obraz ve středové souměrnosti leží na kružnici  $k$ . Zobrazme tedy celou přímku  $l$  ve středové souměrnosti se středem  $S_c$  na přímku  $l'$  (lze využít toho, že obraz a vzor přímky ve středové souměrnosti jsou vzájemně rovnoběžné). Průsečík přímky  $l'$  a kružnice  $k$  je zřejmě bod  $B$ . Bod  $A$  pak dohledáme snadno jako průsečík polopřímky  $\overrightarrow{BS_c}$  a přímky  $l$  (resp. jako obraz bodu  $B$  ve středové souměrnosti se středem  $S_c$ ).

Na kružnici  $k$  má ležet také vrchol  $C$  trojúhelníku. Nalezneme jej jako průsečík (různý od bodu  $B$ ) kružnice  $k$  a Thalétovy kružnice  $\tau(AB)$  sestrojené nad úsečkou  $AB$ .

Jelikož přímka  $l'$  protne kružnici  $k$  ve dvou bodech, má úloha dvě řešení. Výsledné trojúhelníky  $A_1B_1C_1$  a  $A_2B_2C_2$  zachycuje Obr. 41.

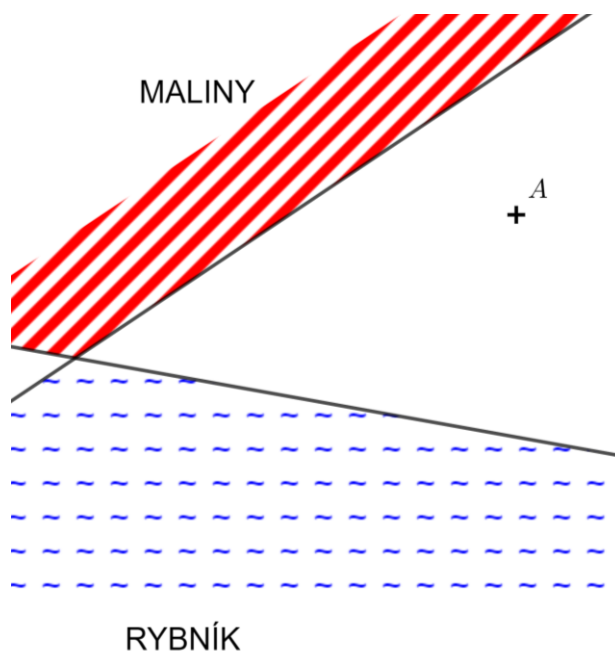




Obrázek 42 – řešení úlohy 29 (dáno  $a, b, MN$ )

Následující úloha je převzata z [7, str. 28] a ilustruje využití shodných zobrazení v reálné situaci. Zadání je upraveno.

**Úloha 30:** Čtyři kamarádi tábořili na louce v místě  $A$  a měli přesně nakreslený plán okolí (viz Obr. 43). Hledali takovou cestu z tábora  $A$  k malinám, potom k rybníku a zpět do tábora tak, aby byla tato cesta co nejkratší. Nalezněte takovou cestu.



Obrázek 43 – k zadání úlohy 30

V řešení v [7, str. 107] je možné se dočíst, že máme sestrojít bod  $A$  ve dvou osových souměrnostech, a to podle přímk  $\vec{VX}, \vec{VY}$ , kde  $X, Y$  jsou body na ramenech vzniklého úhlu a  $V$  je jeho vrchol. Podívejme se na takový postup podrobněji.

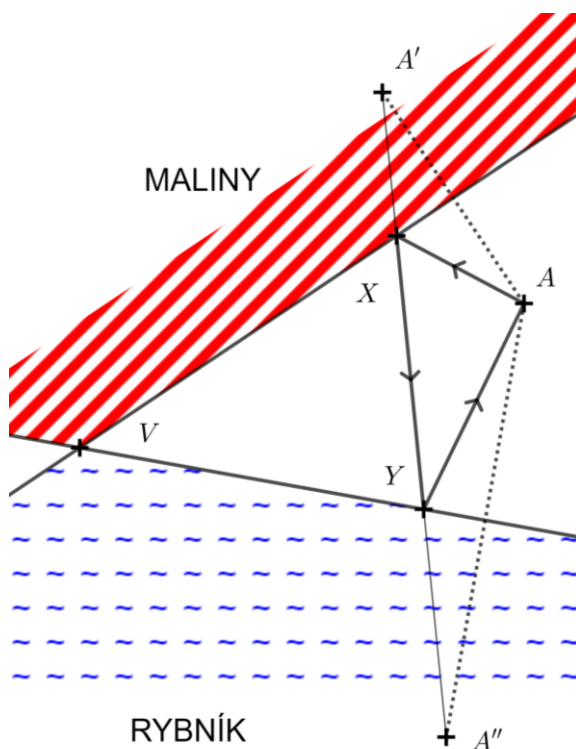
Zadání úlohy můžeme přeformulovat. Označíme-li  $X$  místo, kam by kamarádi došli na maliny a  $Y$  místo, kam by kamarádi došli na hráz rybníka, pak je daná podmínka ekvivalentní tomu, že má trojúhelník  $AXY$  minimální obvod. Označíme-li dále  $A'$  obraz bodu  $A$  v osové souměrnosti s osou  $\overleftrightarrow{VX}$ <sup>16</sup> a  $A''$  obraz bodu  $A$  v osové souměrnosti s osou  $\overleftrightarrow{VY}$ , platí  $|AX| = |A'X|$ ,  $|A''Y| = |AY|$ . Hledáme minimum součtu

$$|AX| + |XY| + |YA|,$$

což lze ekvivalentně zapsat jako

$$|A'X| + |XY| + |YA''|.$$

Tento součet však bude zřejmě minimální tehdy, když budou body  $A', X, Y, A''$  ležet v přímce. Body  $X, Y$  najdeme tedy jako průsečíky příslušných ramen s přímkou  $\overleftrightarrow{A'A''}$ . Konstrukce je ilustrována na Obr. 44 a je zaznačeno užitím šipek na příslušných úsečkách, kterým směrem by kamarádi šli.



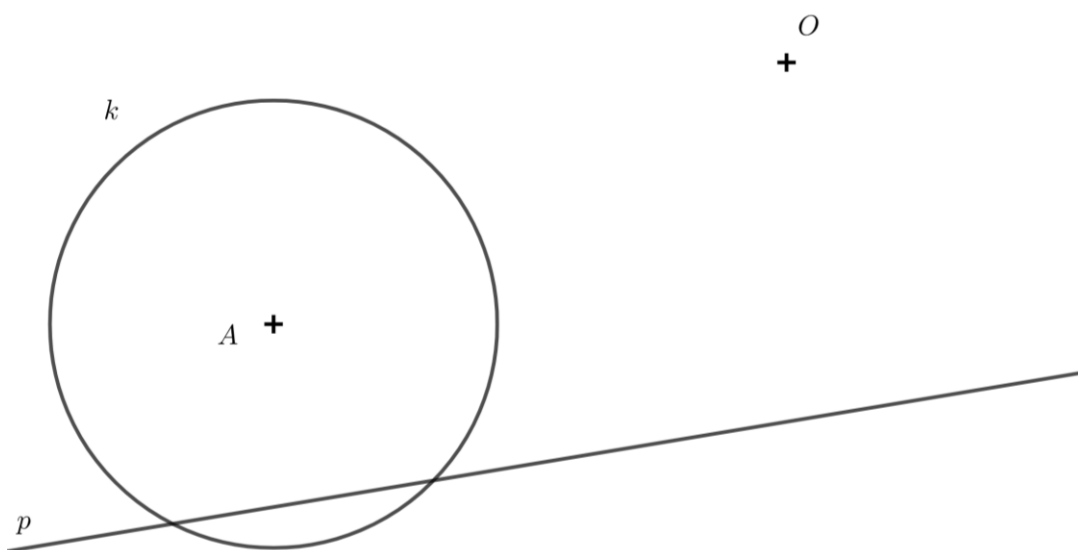
Obrázek 44 – k úloze 30

<sup>16</sup> Skutečnost je však taková, že bod  $X$ , resp.  $Y$  při konstrukci bodu  $A'$ , resp.  $A''$ , ještě nemáme zkonstruovaný. Toto označení nám však dává určité zjednodušení popisu toho, které osové souměrnosti využíváme.



Poslední úloha je zaměřena na množiny bodů daných vlastností a využívá také vlastnosti otočení. Úloha je autorská.

**Úloha 31:** V rovině je dána přímka  $p$ , kružnice  $k(A; r)$  a bod  $O$  podle Obr. 45. Sestrojte všechny pětiúhelníky  $SOPKA$  tak, aby vrchol  $P$  ležel na přímce  $p$ , vrchol  $K$  ležel na kružnici  $k$ , úsečka  $OS$  měla délku  $r$  (poloměr kružnice  $k$ ), vnitřní úhel  $\sphericalangle OSA$  měl velikost  $135^\circ$  a aby trojúhelník  $KPO$  byl rovnoramenný a současně pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu  $O$ .



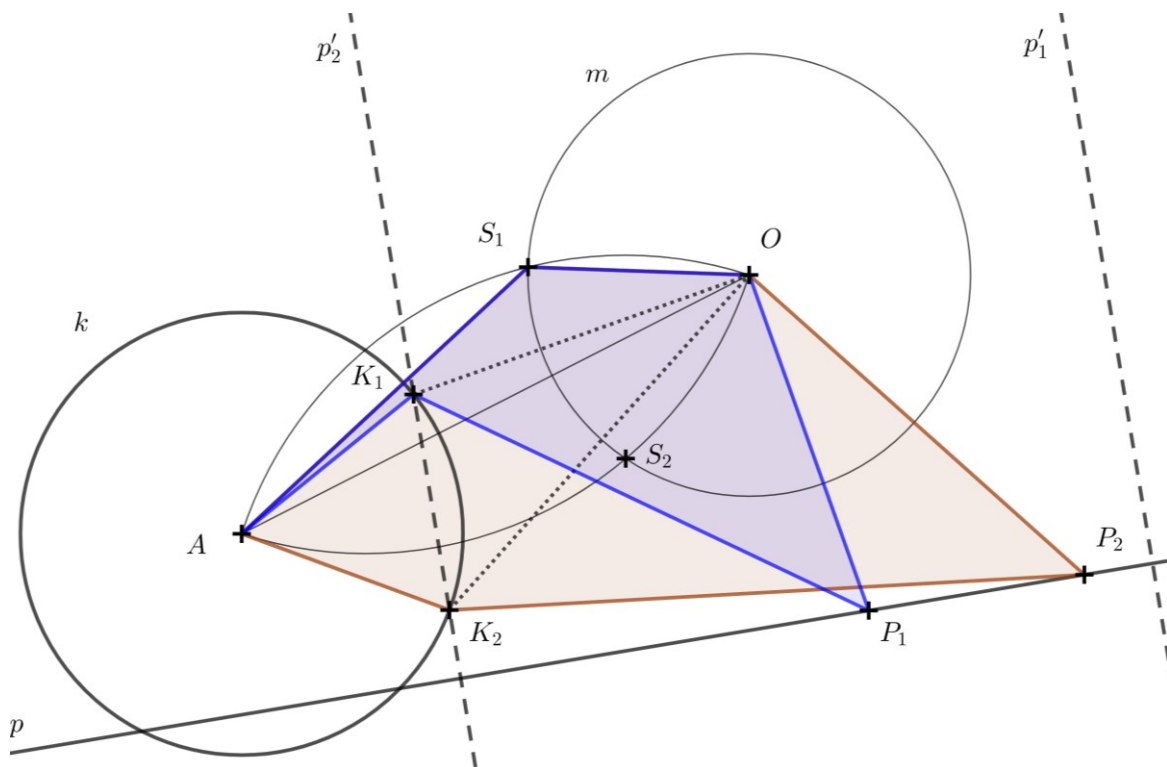
Obrázek 45 – k zadání úlohy 31

Trojúhelník  $KPO$  je rovnoramenný se základnou  $KP$  a platí, že  $K \in k, P \in p$ , úhel  $\sphericalangle KOP$  je pravý. Všechny vyhovující body  $K$  tedy získáme jako průsečík obrazů přímky  $p$  ve dvojici otočení kolem bodu  $O$  o úhel  $+90^\circ$ , resp.  $-90^\circ$ , a kružnice  $k$ . Bod  $P$  pak dohledáme jako průsečík přímky  $p$  a kolmice k přímce  $\overleftrightarrow{KO}$  procházející bodem  $O$  (resp. jako obraz bodu  $K$  v otočení  $-90^\circ$ , resp.  $+90^\circ$ ).

Všechny body  $S$  (na Obr. 46 označeny  $S_1, S_2$ ), které by mohly vést k řešení, jsou průsečíkem kružnice  $m(O; r)$  a kružnicového oblouku, který je množinou všech takových bodů, pod kterými je vidět úsečka  $AO$  pod úhlem  $135^\circ$  (známá konstrukce této množiny bodů, využívající shodnosti úsekového a obvodového úhlu příslušného témuž oblouku). Konstrukce je zobrazena na Obr. 46 (na obrázku jsou pro větší přehlednost zachyceny jen základní objekty konstrukce).

Bod  $S_2$  nevyhovuje zadání, neboť by vnitřní úhel  $OS_2A$  pětiúhelníku neměl velikost  $135^\circ$ .  
 Přímka  $p'_1$ , která je obrazem přímky  $p$  v otočení kolem bodu  $O$  o  $+90^\circ$ , nemá s kružnicí  $k$  společný bod.

Úloha má dvě řešení (pětiúhelníky  $S_1OP_1K_1A$ ,  $S_1OP_2K_2A$ ).



Obrázek 46 – konstrukce pětiúhelníků v úloze 31

## Závěr

Cílem práce bylo sepsat sbírku řešených úloh z planimetrie, v níž by byly úlohy rozděleny do jednotlivých kapitol podle charakteristických vlastností, které zachovávají čtyři popsaná zobrazení, a seznámit čtenáře s invarianty vybraných geometrických transformací. Tento cíl se dle našeho názoru podařilo naplnit, a to sepsáním série úloh v návaznosti na teoretickou část práce a zařazením úloh do jednotlivých skupin.

Práce obsahuje teoretickou a praktickou část, teoretická část se zabývá jednotlivými invarianty a s nimi souvisejícími definicemi a větami, praktická část je kromě řešení zařazených úloh věnována popisu čtyřúhelníků a jejich klasifikaci podle invariantů geometrických transformací.

Domníváme se, že práce by ve stávající formě mohla posloužit velmi dobře středoškolákům, mohli by se skrz ni seznámit s invarianty popsaných transformací, stejně jako si vyzkoušet řešit úlohy různé obtížnosti. Práce by mohla být využita také učiteli matematiky na středních školách, jelikož popsaný pohled na zadání úloh a jejich řešení může být přínosem jak pro jejich žáky, tak pro ně. Jsme toho názoru, že využití vlastních obrázků vytvořených v programu GeoGebra může napomoci čtenářům lépe pochopit a osvojit si popisovanou látku (nejen) nad úrovní středoškolské matematiky, či jednotlivé (méně intuitivní) kroky použité v řešení úloh v praktické části.

Na základě napsané práce se domníváme, že znalost pohledu na klasifikaci geometrie pomocí invariantů transformací může v řešení geometrických úloh třeba i na úrovni střední školy v mnohém napomoci – např. není-li v zadání uvedena žádná délka strany, pak nebude řešení úlohy začínat využitím Pythagorovy věty. Je však třeba mít na paměti, že často existuje více způsobů, jak se dostat k řešení.

V práci by samozřejmě bylo možné zmínit i středoškolskou teorii, která vesměs není v teoretické části uvedena. Zamýšleným přínosem práce však nebylo sepsat učebnici nebo skripta pro středoškoláky či vysokoškoláky, jako hlavní přínos pro čtenáře vidíme seznámení se s popsaným rozdělením geometrických zobrazení a budováním geometrie pomocí invariantů, rovněž jako seznámení se s použitím jednotlivých invariantů v řešených úlohách z geometrie.

## Použité zdroje

- [1] BOČEK, Leo a ZHOUF, Jaroslav. *Planimetrie*. 2. rozšířené vydání. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.
- [2] BUREŠ, Jiří a NOVOTNÁ, Jarmila. *Pre-algebra – pracovní text pro studenty*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky, 2014 [online]. [cit. 27. 6. 2021]. Dostupné z: <https://d11.cuni.cz/pluginfile.php/192838/course/section/39724/Prealgebra.pdf>
- [3] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3., přepracované vydání. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-140-6.
- [4] BYDŽOVSKÝ, Bohumil a VOJTĚCH, Jan: *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol*. Praha: Jednota českých matematiků, 1912.
- [5] ČIŽMÁR, Ján. *Grupy geometrických transformací v systéme vzdelávania učiteľov matematiky*. In: BEČVÁŘOVÁ, Martina a BEČVÁŘ, Jindřich: *Matematika v proměnách věků. V*. Praha: Matfyzpress, 2007, str. 56–65. ISBN 978-80-7378-017-3 [online]. [cit. 8. 6. 2021] Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400886/DejinyMat\\_33-2007-1\\_5.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400886/DejinyMat_33-2007-1_5.pdf)
- [6] HAŠEK, Roman. *Učební text k předmětu KMA/GEO2*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2018 [online]. [cit. 9. 7. 2021]. Dostupné z: [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/GEO2\\_ver2018\(new\)\\_4.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/GEO2/GEO2_ver2018(new)_4.pdf)
- [7] HEJNÝ, Milan, HANULA, Marián a DEKRÉT, Anton. *Matematika pro gymnázia, sešit 4, I. část*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. ISBN 14-449-79.
- [8] HRUŠKA, David a ROKYTA, Mirko. *Úlohy na množiny bodů daných vlastností*. In: ŠÍR, Zbyněk a HALAS, Zdeněk: *Rozvíjení matematických talentů na středních školách I*. Praha: Matfyzpress, 2019, str. 33–40. ISBN 978-80-7378-399-0.

- [9] KISELEV, Andrei Petrovich. *Kiselev's geometry: Book I, Planimetry*. Přeložil Alexander Givental. El Cerrito: Sumizdat, 2006. ISBN 0-9779852-0-2.
- [10] KUŘINA, František. *10 geometrických transformací*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-231-7.
- [11] LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 2 – pomocný učební text k předmětu KMA/G2*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2006 [online]. [cit. 9. 7. 2021]. Dostupné z [https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/Lavicka\\_G2.pdf](https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/Lavicka_G2.pdf)
- [12] LÁVIČKA, Miroslav. *Syntetická geometrie – pomocný učební text k předmětu KMA/SG*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007 [online]. [cit. 9. 7. 2021]. Dostupné z: [http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/M\\_opakovaci\\_seminar/02\\_studijni\\_texty/sg.pdf](http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/M_opakovaci_seminar/02_studijni_texty/sg.pdf)
- [13] LÖWIT, Jakub. *Rovnoběžníky a kosočtverce*. In: ŠÍR, Zbyněk a HALAS, Zdeněk: *Rozvíjení matematických talentů na středních školách I*. Praha: Matfyzpress, 2019, str. 107–112. ISBN 978-80-7378-399-0.
- [14] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-359-2.
- [15] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7169-358-5.
- [16] POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-400-1.
- [17] RICHTER-GEBERT, Jürgen. *Perspectives on Projective Geometry – A Guided Tour through Real and Complex Geometry*. Springer, 2010 [online]. [cit. 29. 6. 2021]. Dostupné z: <https://www-m10.ma.tum.de/foswiki/pub/Lehre/WS0910/ProjektiveGeometrieWS0910/GeomBook.pdf>

- [18] ŠVRČEK, Jaroslav a VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1988. ISBN 04-01788.
- [19] TRKOVSKÁ, Dana. *Erlangenský program*. In: BEČVÁŘOVÁ, Martina a BEČVÁŘ, Jindřich: *Matematika v proměných věků. V*. Praha: Matfyzpress, 2007, str. 66–82. ISBN 978-80-7378-017-3 [online]. [cit. 8. 6. 2021]. Dostupné z: [https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400887/DejinyMat\\_33-2007-1\\_6.pdf](https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400887/DejinyMat_33-2007-1_6.pdf)

Seznam sérií úloh zadaných v rámci Matematické olympiády:

- [20] Matematická olympiáda pro střední školy, kategorie C, školní kolo, 2014/2015 [online]. [cit. 9. 7. 2021]. Dostupné z: <http://www.matematickaolympiada.cz/media/1681758/c64i.pdf>
- [21] Matematická olympiáda pro střední školy, kategorie C, školní kolo, 2015/2016 [online]. [cit. 9. 7. 2021]. Dostupné z: <http://www.matematickaolympiada.cz/media/2602804/c65i.pdf>