

# Uso de modelos lineares e não lineares para o estudo da curva de lactação em Búfalos Murrah e seus mestiços em sistema de criação semi extensivo, no Estado de São Paulo

M. Muñoz-Berrocal<sup>1</sup>, H. Tonhati<sup>2</sup>, M. Cerón-Muñoz<sup>2</sup>, J.M.C. Duarte<sup>2</sup>, R.L. Chabariberi<sup>2</sup>

Facultad de Zootecnia, Universidad Nacional Agraria de la Selva, Tingo María, Perú.

---

## Use of some mathematical models to study the lactation curve of Murrah buffaloes and their crossbreeds under a semi-extensive system in the state of São Paulo

**ABSTRACT.** In the present study, five mathematical models, two of which were linear: linear hyperbolic (FLH) and quadratic logarithmic (FQL); and three non linear: parabolic exponential (FPE), incomplete gamma (FIG), and inverse polynomial (FIP), were used to determine which of them gave best fit to the mean lactation curve, using data from three buffalo herds of the Murrah breed and its crossbreeds, under a semi-extensive production system employing twice daily milking. Information was obtained on 3267 lactations, including 27600 test day milk weights. Milk testing was done at 30-day intervals over the period from 1990 to 2001. Lactations utilized in the analysis were based on a minimum of four and maximum of nine test days. Criteria used to verify the goodness of fit of the curve generated by each model were: adjusted coefficient of determination ( $R^2_A$ ), lack of fit test (LDF), and graphs of the distribution of residuals and of residual lag. The highest R2A 86.29%, was obtained with both FQL and FLH, which also yielded the lowest residuals and not significant results ( $P>0.05$ ) in the LOF test.

**Keywords:** Buffaloes, Lineal Hyperbolic, Quadratic Logarithmic, Parabolic Exponential, Incomplete Gamma, Inverse Polynomial.

---

© 2005 ALPA. Todos los derechos reservados

Arch. Latinoam. Prod. Anim. 2005. 13(1): 19-23

**RESUMO.** No presente estudo as funções Lineares: Linear Hiperbólica (FLH), Quadrática Logarítmica (FQL), e as não lineares: Parabólica Exponencial (FPE), a Gama Incompleta (FIG), e Polinomial Inversa (FPI), foram usadas com o objetivo de avaliar qual função ajusta melhor a curva de lactação média, usando dados de três rebanhos bubalinos da raça Murrah e seus mestiços criados baixo o sistema semi extensivo com duas ordenhas diárias. Considerou-se informações de 3267 lactações, referentes a 27600 controles de produção de leite. O controle leiteiro foi feito em intervalos de 30 dias, no período de 1990 a 2001. As lactações utilizadas continham no mínimo quatro e no máximo nove controles. Os critérios utilizados para verificar a qualidade do ajuste para cada função foram, o Coeficiente de Determinação Ajustado ( $R^2_A$ ), o Teste de Lack of Fit (LOF), o gráfico de distribuição de resíduos e o gráfico de Lag de resíduos. Os melhores coeficientes de determinação foram 86,29% para as FQL e FLH, produzindo os menores resíduos, e LOF não significativos ( $P<0,05$ ).

**Palavras-chave:** Búfalos, Linear Hiperbólica, Quadrática Logarítmica, Parabólica Exponencial, Gama Incompleta, Polinomial Inversa.

### Introdução

No Brasil, o búfalo (*Bubalus bubalis*) tem um importante papel produtivo, tanto em carne como em leite. Existem rebanhos distribuídos de norte a sul do

país, sendo que São Paulo, possui importância econômica, pela transformação do leite, em queijo «Mozzarella», o qual tem um preço diferenciado.

As funções normalmente utilizadas para descrever curvas de lactação, são as não lineares. Em muitos

---

Recibido Enero 23, 2003. Aceptado: Falta información

<sup>1</sup>Bolsista da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP. E-mail: milthon\_munoz@hotmail.com

<sup>2</sup>Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias, Universidade Estadual Paulista, Jaboticabal (UNESP) - SP, Brasil. E-mail: tonhati@fcav.unesp.br

casos as funções não lineares sofrem transformações para tornarem-se lineares e os seus parâmetros são estimados através de regressão linear múltipla. Dessa forma, são mais facilmente estimadas, muito embora os parâmetros estimados possam apresentar alguns vícios (Congleton e Everett, 1980).

A estimação da produção total de uma búfala enquanto a lactação ainda não foi encerrada, permite ao produtor identificar antecipadamente o potencial de búfalas superiores, facilitando as decisões de descarte e de manejo, além de permitir o uso de um maior número de filhas na avaliação de reprodutores. Há duas principais aplicações para as curvas de lactação. Uma, relaciona-se à forma da curva e seus componentes, possibilitando o estabelecimento de programas de melhoramento que consideram, além da produção total, os componentes que determinaram a curva de lactação, cuja forma seria mais desejável, no sentido biológico ou econômico (Tonhati, 2001).

Os objetivos do presente estudo foram avaliar as funções lineares: quadrática logarítmica e linear hiperbólica, e as funções não lineares: polinomia inversa, gama incompleta e parabólica exponencial, para o ajuste da curva de lactação média em três rebanhos bubalinos no Estado de São Paulo.

## Material e Métodos

Os registros de produção de leite utilizados no sistema de criação semi extensivo, referem-se a 27600 controles de produção de leite, correspondente a 3267 lactações, de 840 búfalas Murrah e seus mestiços de composição genética predominando maioritariamente a raça Murrah, controladas no período de 1989 a 2001, em três fazendas localizadas nos municípios de São Carlos, Dourado, e Sarapuú no Estado de São Paulo.

Os animais alimentavam-se de Capim *Brachiaria decumbens* e *Brachiaria humidicola*, na época chuvosa. Na época seca, a alimentação é complementada com silagem de Capim do gênero *Braquiaria* e capim elefante (*Pennisetum purpureum*), milho (*Zea mays*) e cana picada (*Saccharum officinarum*). Durante todo o ano as fêmeas em lactação recebiam concentrado a base de algodão em caroço e ou farelo de soja, e cevada oriunda de cervejaria.

Cada propriedade tinha em média 120 búfalas em ordenha, animais de várias categorias de idade e a alimentação era composta de pastos como volumosos. O sal mineral é fornecido à vontade em cochos. Utiliza-se o sistema de monta natural e inseminação artificial. A ordenha é mecânica, realizada duas vezes ao dia, com bezerro ao pé.

O controle sanitário era realizado em intervalos de 4 meses, para a febre aftosa, além das vacinações contra carbúnculo sintomático e a raiva, e somente para as fêmeas, contra brucelose. O controle de

ectoparasitos e endoparasitos era feito, com 1 a 2 aplicações semestrais.

O controle leiteiro foi implantado nas fazendas no ano de 1990, com duas ordenhas ao dia. Os valores da produção de leite foram anotados em fichas, que depois eram cadastrados no sistema de informação Interherd, onde também eram feitas anotações referentes à vida reprodutiva de cada animal.

Para a análise estatística descritiva foram usados os dados colhidos nas três fazendas, que tinham o mesmo sistema de criação. Foram eliminadas as lactações que iniciaram o controle de produção 30 dias após o parto, lactações com controles maiores do que 45 dias entre eles e lactações com menos que 4 controles, de modo a ter lactações com, no mínimo, 115 dias de duração. O número máximo de controles observados numa lactação foi de 9, sendo o período máximo observado de 270 dias, onde as lactações foram truncadas. Os dados foram classificados em meses de 30 dias, de acordo com a periodicidade, com que os controles eram realizados.

### Funções usadas para o ajuste das lactações

Cinco funções matemáticas foram usadas para ajustar as lactações para a curva média. O ajuste foi feito usando-se todas as produções em cada mês.

Funções Lineares:

- Função Linear Hiperbólica (FLH)

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^{-1}$$

- Função Quadrática Logarítmica (FQL)

$$y = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3LnX$$

Funções não Lineares:

- Função Parabólica Exponencial (FPE)

$$y = b_0e^{b_1x + b_2x^2}$$

- Função Gama Incompleta (FGI)

$$y = b_0x^{b_1}e^{b_2x}$$

- Função Polinomial Inversa (FPI)

$$y = x(b_0 + b_1x + b_2x^2)^{-1}$$

Nos modelos descritos,  $y$  é a produção de leite diária,  $X$  é o mês da lactação,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  são parâmetros de cada função.

Para obter os valores iniciais destas funções, em relação aos parâmetros em estudo foi utilizado o PROC REG (SAS, 1995), estimados os valores iniciais, estes foram usados como parâmetros no NLIN (SAS, 1995).

### Estatística Usada para a escolha da Melhor Função

Quando compara-se modelos com diferentes números de parâmetros, é adequado utilizar o coeficiente de determinação ajustado ao número de parâmetros de cada modelo, para que estes sejam comparados em iguais condições. Segundo DRAPER e SMITH (1981) a fórmula

$$R_a^2 = \frac{(n-1)R^2 - p}{n-p-1}$$

onde:

$p$  = Número de parâmetros do modelo de regressão

$n$  = Número de observações

$R^2$  = Coeficiente de Determinação

O coeficiente de determinação mede a proporção da variação da variável dependente (produção de leite), que é explicada pelo modelo de regressão. Quando diversos modelos com números de parâmetros diferentes são comparados, é usual ajustar o  $R^2$  ao número de parâmetros de cada modelo. Assim, o aumento do  $R^2$  só ocorre quando a perda no número de graus de liberdade do resíduo é compensada pelo aumento da soma de quadrados do modelo de regressão, em consequência da inclusão do maior número de variáveis no modelo.

#### Gráfico de Distribuição dos Resíduos

Foram utilizados dois tipos de gráficos de distribuição de resíduos para mostrar a qualidade do ajuste proporcionado para cada função e a presença de autocorrelação residual para a curva média. O primeiro, mostra a dispersão dos resíduos em função do tempo. Se os resíduos apresentam-se distribuídos aleatoriamente em relação à variável classificatória  $X$ , é indicativo de bom ajuste. O segundo tipo é o gráfico de *lag* de resíduo (DRAPER e SMITH, 1981). O gráfico mostra a existência ou não de autocorrelação serial e relaciona o (i) ésimo com o (i-1) ésimo resíduo, o que permite a constatação da presença ou não de autocorrelação entre os resíduos sucessivos. Quando ocorre autocorrelação positiva, o gráfico apresenta uma reta ascendente, e se negativa, apresenta uma reta descendente. Se estes se apresentam dispersos sem mostrar alguma tendência, é indicativo de bom ajuste.

#### Teste do «Lack of Fit»

Searle (1971) e Draper e Smith (1981), indicam que o teste baseia-se na suposição de que para um conjunto de dados onde há medidas repetidas da variável independente  $X$ , para diferentes medidas da variável dependente  $Y$ , é possível particionar a soma de quadrados do resíduo em dois termos. Um é o chamado «Erro Puro» e o outro «Lack of Fit» do modelo (Apêndice: Quadro 1).

Para um determinado conjunto de dados, onde  $X$

é o dia da lactação e  $Y$  a produção de leite correspondente, tem-se que  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , são os  $p$  valores distintos de  $X$ , onde cada  $X_i$  ocorre  $n_i$  vezes, com  $n_i$  valores correspondentes de  $Y$ , denominados então  $Y_{ij}$ , para  $j=1, 2, \dots, n_i$  e para  $i=1, 2, \dots, p$ . Para todo  $i$ , desde

$$n_i = \sum_{j=1}^{n_i} 1 = N$$

= número total de observações

$$SQE = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \hat{Y}_{ij}^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \hat{b}' X' Y$$

com  $(N-p)$  graus de liberdade, a qual pode ser particionada em soma de quadrados do erro puro (SQEP) e soma de quadrados do «Lack of Fit» (SQLOF), dadas por:

$$SQEP = \sum_{i=1}^p \left[ \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - n_i (\bar{Y}_i)^2 \right]$$

$$SQLOF = SQE - SQEP$$

com  $(N-p)$  e  $(p-r)$  graus de liberdade, respectivamente.

## Resultados e Discussão

A curva de lactação média observada para os rebanhos em estudo pode ser observada na Figura 1. A produção média inicia-se com 7,44 kg; o pico é alcançado no segundo mês de lactação com produção de 8,16 kg. A produção total de leite da lactação, estimada para a curva média é de 2281,50 kg, em 270 dias de lactação. Para estes rebanhos o pico de lactação ocorreu no segundo mês de lactação.

Uma característica interessante dessa curva é que ela não apresenta um declínio brusco da produção de leite, podendo-se observar persistência da lactação, que pode ser devido que os animais recebem uma suplementação na alimentação ao momento da ordenha. De maneira geral, as curvas observadas, apresentam-se muito semelhantes à curva de lactação de búfalas Mestiças (Murrah x Mediterrâneo), as quais, também atingiram o pico de produção no segundo mês da lactação e após, há tendência de queda contínua durante a lactação (Bremner Gaona *et*

Quadro 1. Apêndice: O quadro de análise de variância do Teste do Lack of Fit, representado por:

Fonte de Variação	G.L.*	Soma de Quadrados	Quadrado Médio	$F_c$
Modelo de Regressão	$r-1$	SQR	$QMR=SQR/r-1$	
Erro Puro	$N-p$	SQEP	$QMEP=SQEP/N-p$	
Lack of Fit	$p-r$	SQLOF	$QMLOF=SQLOF/p-r$	$QMLOF/QMEP$

\*  $n$ =número total de observações;  $r$ =número de parâmetros do modelo de regressão;  $p$ =número de classes da variável classificatória  $X$ ;  $QMEP$ = quadrado médio do erro puro, estimado por  $SQEP/(N-p)$ , o qual é um estimador da variância residual ( $s^2$ );  $QMLOF$ = quadrado médio devido ao «Lack of Fit», representado por  $SQLOF/(p-r)$ , que estima  $s^2$  se o modelo é correto; caso contrário, estima  $s^2+vício$ , se o modelo é inadequado (DRAPER e SMITH, 1981).

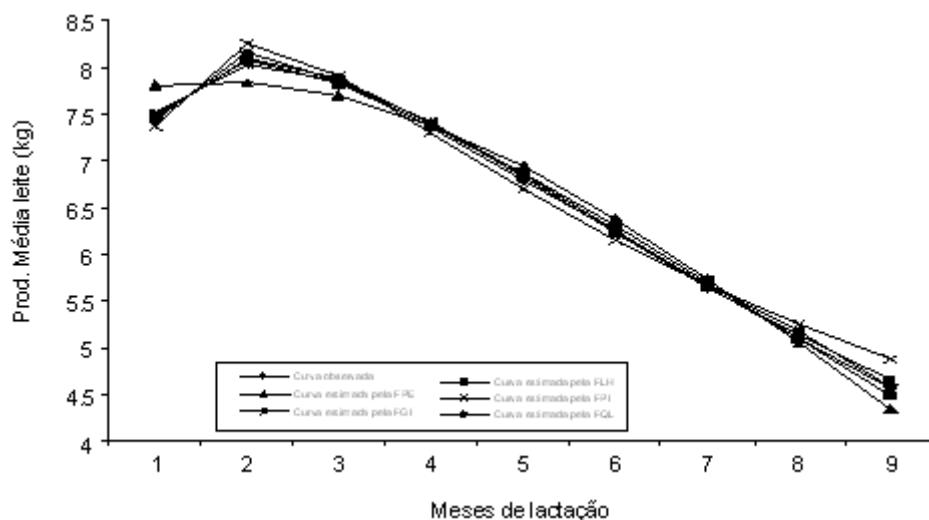


Figura 1. Curvas de lactação observadas e estimadas pelas Funções: Linear Hiperbólica, Quadrática Logarítmica, Parabólica Exponencial, Gama Incompleta e Polinomial Inversa, para búfalas Murrah e seus mestiços.

*al.*, 1985).

#### Comparação entre as Funções

Ao comparar os modelos em função dos testes estatísticos utilizados para medir a qualidade do ajuste proporcionado pelas funções estudadas para a curva média (Quadro 1), observa-se que as funções lineares FQL e FLH apresentaram valores de  $R_A^2$  de 86,29% e foram não significativas em relação ao teste de Lack of Fit, indicando que estes modelos foram os mais adequados (Draper e Smith, 1981). Muitas vezes, modelos que apresentaram teste de *Lack of Fit* não significativo, mostraram resíduos correlacionados, podendo indicar falta de ajuste. Dessa maneira deve-se usar, além do coeficiente de determinação ajustado e teste de *Lack of Fit*, uma análise de resíduos (Ribeiro, 1997).

As funções FQL e FLH representaram bem a curva de lactação observada (Figura 1), seguidas da FGI, em comparação as funções FPE e FPI, que subestimaram e superestimaram a produção em diversos segmentos da curva, não acompanhando as

oscilações que ocorreram na produção ao longo da lactação. Além disto, as funções FQL e FLH estimaram resíduos menores ao longo de toda a lactação, os quais, variaram entre -0,08 e 0,09 kg. As funções FQL e FLH, apresentaram ausência de autocorrelação residual, por mostrar (indicar, exibir) a distribuição dos resíduos próximos da linha média.

Para as funções FPE e FPI, os resíduos foram de -0,40 até 0,32 kg, e -0,30 até 0,09 kg, respectivamente (Figuras 2 e 3). Segundo Glasbey (1988), isto ocorre quando os resíduos estimados apresentam-se correlacionados ou quando o modelo é inadequado. As funções FQL, FLH e FGI, apresentaram ausência de autocorrelação residual, observando-se a distribuição dos resíduos, os quais estão próximos da linha média, em comparação das funções FPE e FPI, cujos resíduos estão muito dispersos.

Os resultados encontrados neste estudo, coincidem com o trabalho publicado por Kumar e Bhat (1979) que utilizando as mesmas funções, e búfalas da raça Murrah e seus mestiços, obtiveram os maiores coeficientes de determinação para a função FGI, seguida da FPI e FPE.

Quadro 1. Testes estatísticos utilizados para medir a qualidade de ajuste de cada função estudada

Função	<i>Lack of fit</i>	$R_A^2$ %
FLH	2,12 NS	86,29
FQL	1,25 NS	86,29
FPE	25,80 *	86,22
FGI	2,62 *	86,29
FPI	5,70 *	86,28

\*significativo, NS=Não significativo

## Conclusões

Entre as funções estudadas, as funções lineares quadrática logarítmica e linear hiperbólica foram aquelas que apresentaram melhor ajuste à curva média de lactação.

O coeficiente de determinação ajustado, o gráfico de resíduos, desvios entre as produções totais observadas e estimadas e o teste de Lack of Fit podem contribuir na tomada de decisão quanto à qualidade de ajuste proporcionado por uma função.

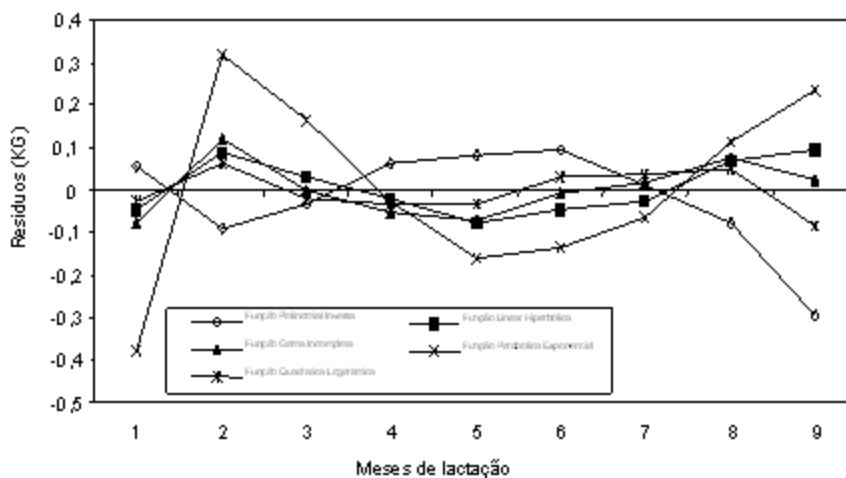


Figura 2. Distribuição dos resíduos estimados pelas funções: Linear Hiperbólica, Quadrática Logarítmica, Parabólica Exponencial, Gama Incompleta e Polinomial Inversa, para búfalas Murrah e seus mestiços.

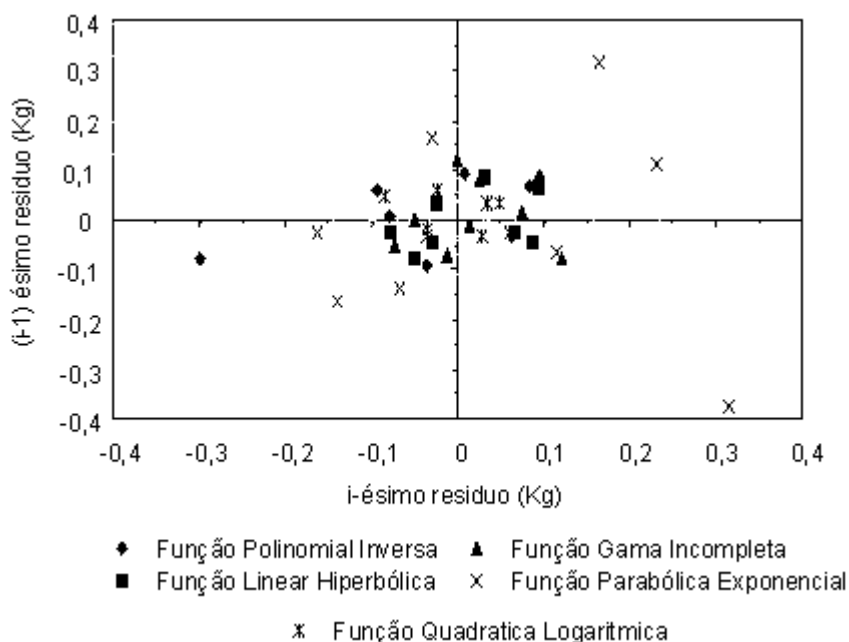


Figura 3. Gráfico de *lag* de resíduos, pelo ajuste médio das Funções: Linear Hiperbólica, Quadrática Logarítmica, Parabólica Exponencial, Gama Incompleta e Polinomial Inversa, para búfalas Murrah e seus mestiços.

## Literatura Citada

- Bremner-Gaona, J. H., C. S. Pereira, V. J. Andrade, I. B. M. Sampaio, C. Silva-Pereira, S. I. Machado, 1985. Estudo da Curva de Lactação em Búfalas da Raça Mediterrânea e seus Mestiços. *Arq. Bras. Med. Vet. Zootec.*, 37:477-495.
- Congleton, W. R. J., R. W. Everett. 1980. Error and bias in using the Incomplete Gamma Function to describe lactation curves. *J. Dairy Sci.*, 63:101-108.
- Draper, N. M., H. Smith. 1981. *Applied Regression Analysis*, 2.ed., New York, Wiley.
- Glasbey, C. A. Examples of regression with serially correlated errors. *The Statistician*. Edinburgh, v.37, p.277-291, 1988.
- Kumar, R., P. N. Bhat. 1979. Lactation curve in Indian buffaloes. *Indian J. Dairy Sci.*, 32(2):156-160.
- Ribeiro, M.N. 1997. Estudo da curva de lactação de um rebanho caprino no Estado da Paraíba. Tese (Doutorado em Zootecnia), UNESP - FCAVJ, SP. 91 pp.
- SAS. 1995. SAS system for regression. SAS Institute Inc., Cary, North Carolina.
- Searle, S. R. 1971. *Linear Models*, New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Tonhati, H. 2001. Resultados do controle leiteiro em bubalinos. In: II Simpósio Paulista de Bubalinocultura, 2, 2001, Pirassununga. Anais... Pirassununga, ABCB