

22 AVR. 1996

**MODÉLISATION DYNAMIQUE DE SYSTEMES MÉCANIQUES
SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES**

Romano M. DeSantis

JANVIER 1996

gratuit

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

**Dépôt légal, Janvier 1996
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada**

**Modélisation dynamique de systèmes mécaniques
sous contraintes holonomes et nonholonomes**

**Romano M. DeSantis
Département de Génie Électrique et
Génie Informatique**

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

**Service des Éditions
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3A7
Téléphone: (514) 340-4473
Télécopie: (514) 340-3734**

Compter 0,10\$ par page et ajouter 3,00\$ pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

MODELISATION DYNAMIQUE DE SYSTÈMES MÉCANIQUES

SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES

DeSantis, R.M., Professeur
Département de génie électrique et génie informatique
École Polytechnique de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit, C.P. 6079-A
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7

Table des matières

- 0. Sommaire
 - 1. Introduction
 - 2. Concepts de cinématique
 - 3. Les équations de Newton-Euler
 - 4. Le modèle dynamique
 - 5. La méthode de modélisation
 - 6. Le cas du robot manipulateur
 - 7. Application à la modélisation d'un manipulateur planaire à deux degrés de liberté
 - 8. Application à la modélisation d'un camion avec semi-remorque
- Conclusions
- Remerciements
- Références
- Symboles
- Figures

mercredi, janvier 03, 1996

MODELISATION DYNAMIQUE DE SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES

**DeSantis, R.M., Professeur,
Département de génie électrique et génie informatique
École Polytechnique de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit, C.P. 6079-A
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7**

0. Sommaire

Une méthode pour la modélisation de la dynamique de systèmes mécaniques composés de corps rigides soumis à des contraintes holonomes et nonholonomes est présentée. Basée sur l'approche de Kane et sur les notions de coordonnées, vitesses et forces généralisées, cette méthode est applicable à de nombreux systèmes qui doivent être pris en ligne de compte lors de l'automatisation industrielle avancée. Parmi ces systèmes l'on retrouve, par exemple, les manipulateurs à chaîne ouverte ou à chaîne fermée, les robots mobiles et les ponts roulants. La modélisation de la dynamique d'un camion à remorque et d'un manipulateur planaire à deux degrés de liberté illustre la théorie.

1. Introduction

L'automatisation avancée de machines industrielles, telles que les robots manipulateurs, les ponts roulants, les véhicules de transport et les véhicules de chargement-transport-déchargement, exige que divers problèmes soient résolus. L'on peut penser, par exemple, au problème de la détermination des forces qui sont nécessaires pour qu'une machine exécute une commande assignée, au problème de faire qu'un véhicule suive un chemin désiré, à la planification des tâches et à d'autres problèmes semblables. A son tour, une solution efficace à ces problèmes exige une solide compréhension des relations qui existent entre les forces et les couples appliqués à la machine, et les accélérations, vitesses, positions et orientations qui s'en suivent (voir par exemple, DeSantis et al. (1994, 1995)).

Ces relations sont étudiées en détail dans différents livres d'introduction à la robotique (par exemple, Kane et Levinson (1983), Spong et Vidyasagar (1987), et Craig (1989)), ainsi que dans des articles spécialisés (par exemple, Kane et Levinson (1985), Nikravesh et al. (1985), et Saha et Angeles (1991)). Il n'est cependant pas toujours facile d'extraire de cette documentation une réponse à certaines questions fondamentales soulevées par l'automatisation de machines industrielles. Comment peut-on formuler le modèle dynamique d'une machine industrielle?

Comment les contraintes holonomes et nonholonomes interviennent-elles dans la description de ce modèle? Pourquoi la dynamique d'un robot manipulateur possède-t-elle les propriétés structurelles que nous leur tenons pour acquis (telle une forme spéciale pour le modèle d'état, la propriété positive définie de la matrice d'inertie, la relation spéciale entre la dérivée de la matrice d'inertie et la matrice de Coriolis et les forces centripètes)? Dans quelle mesure la dynamique d'autres systèmes mécaniques d'intérêt partage-t-elle ces propriétés, par exemple les ponts roulants, les véhicules de transport et les véhicules de chargement-transport-déchargement? Dans quelle mesure les méthodes de modélisation et les techniques de contrôle hautement raffinées mises au point pour les robots manipulateurs peuvent-elles être appliquées à d'autres types de mécanismes? En présence de quelles modifications et différences au niveau de l'efficacité de calcul, des hypothèses physiques et des outils conceptuels?

L'étude ci-après a pour but de contribuer à répondre à ces questions en présentant une méthode de modélisation systématique et unifiée applicable à divers systèmes mécaniques (dont ceux mentionnés ci-dessus). Fondées sur l'approche bien connue de Kane et fortement influencées par le récent ouvrage de Saha et Angeles (1991), les étapes de cette méthode sont élaborées de façon à accentuer l'intuition et l'importance physique de même que sa valeur du point de vue pédagogique. En plus de concepts

élémentaires que l'on retrouve, par exemple, dans les chapitres 1 à 3 de Spong et Vidyasagar (1987), nous nous appuyerons sur les notions de matrices jacobiennes, les vitesses admissibles dans l'espace opérationnel et dans l'espace de configuration, les forces généralisées et les coordonnées généralisées, les contraintes holonomes et nonholonomes.

2. Concepts de cinématique

Une machine industrielle peut être considérée comme étant un système mécanique formé de n corps rigides dans un espace tridimensionnel. Nous associons à chacun de ces corps un trièdre de référence et décrivons la position et l'orientation du i -ème corps à l'aide du vecteur $\chi_i := [c_i' \ \xi_i']$, $i=1,2..n$, où c_i fournit les coordonnées de l'origine du trièdre du corps par rapport à l'espace opérationnel (souvent appelé également espace Cartésien ou espace de travail) et ξ_i décrit l'orientation du corps. ξ_i peut correspondre à une matrice de rotation, un vecteur Euler, un triplet d'angles d'Euler, un quaternion ou toute autre description appropriée de l'orientation (voir Spong et Vidyasagar 1987).

Nous décrivons la vitesse du i -ème corps par rapport à l'espace opérationnel par un vecteur $v_i := [v_i' \ \Omega_i']$, où v_i représente la mesure, par rapport au trièdre du corps, de la vitesse du centre de masse du corps et Ω_i la mesure de la vitesse

angulaire. Nous associons la matrice de vitesse angulaire à la
vitesse angulaire Ω_i :

$$S(\Omega_i) := \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{iz} & \Omega_{ix} \\ \Omega_{iz} & 0 & -\Omega_{iy} \\ -\Omega_{ix} & \Omega_{iy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

L'ensemble des positions et des orientations des n corps du
système est décrit par le vecteur composé

$$\chi := [\chi_1' \ \chi_2' \ \dots \ \chi_n']'; \quad (2)$$

l'ensemble des vitesses par le vecteur

$$v := [v_1' \ v_2' \ \dots \ v_n']'. \quad (3)$$

Dans la plupart des applications, les corps du système
mécanique sont soumis à un ensemble de contraintes de positions et
d'orientation. Ces contraintes (appelées contraintes holonomes)
peuvent souvent être modélisées au moyen d'un ensemble d'équations
scalaires de la forme suivante :

$$h_i(\chi) = 0, \quad i=1, \dots, p_1. \quad (4)$$

En supposant ces équations indépendantes, il s'ensuit que les
valeurs admissibles de χ peuvent être décrites en tant que fonction
d'un vecteur de coordonnées généralisées (vecteur de configuration)
 $q \in \mathbb{R}^p$,

$$\chi = f(q). \quad (5)$$

La dimension de q correspond généralement au nombre de degrés de
liberté du système mécanique et est égale à $6n - p_1$.

La présence de contraintes holonomes induit la présence de contraintes de vitesse. De fait, à partir des équations 4 et 5 (en se servant des formules de propagation établissant la relation de Ω_i à la dérivée temporelle de ξ_i), il s'ensuit que les vecteurs v_i peuvent être exprimés comme suit :

$$v_i = J_{hi}(q) \dot{q}, \quad i=1, \dots, n. \quad (6)$$

Dans ce cas, \dot{q} est la vitesse dans l'espace des configurations; $J_{hi}(q)$ est une matrice $6 \times p$ (la matrice jacobienne du i -ème corps), dont les colonnes sous-tendent le sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel, compatibles avec les contraintes holonomes. Introduisant la matrice composée (de dimension $6n \times p$) :

$$J_h := [J_{h1}' \quad J_{h2}' \quad \dots \quad J_{hn}']' \quad (7)$$

nous pouvons réécrire l'équation 6 sous la forme plus concise suivante :

$$v = J_h(q) \dot{q}. \quad (8)$$

Dans certains systèmes (comme par exemple les véhicules de transport, les robots mobiles avec roues et les ponts roulants), le vecteur de vitesse v est soumis à des contraintes dont l'origine est indépendante de la présence des contraintes holonomes. Ces contraintes additionnelles (appelées contraintes nonholonomes) sont souvent décrites par un ensemble d'équations de la forme suivante :

$$g_i(\chi)v=0, \quad i=1, \dots, \ell_1. \quad (9)$$

En se servant des équations 5 et 8, il s'ensuit que l'équation 9 peut être reformulée comme suit :

$$H(q)\dot{q} = 0 \quad (10)$$

où

$$H(q) := g(f(q))J_h(q) \quad (11)$$

et

$$g(f(q)) := [g_1(q)' \ g_2(q)' \ \dots \ g_{\ell_1}(q)']'.$$

En supposant que $H(q)$ soit une matrice de plein rang, l'équation 10 suggère que q peut être représenté comme suit :

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\ell}, \quad \ell = p - \ell_1, \quad (12)$$

où α est souvent désigné comme étant le vecteur des vitesses généralisées, et J_{nh} est une matrice de plein rang $p \times \ell$ (matrice orthogonale complémentaire de $H(q)$, Saha et Angeles 1991) telle que

$$HJ_{nh} = 0. \quad (13)$$

Avec l'introduction de la matrice (avec dimension $6n \times \ell$)

$$J := J_h J_{nh} \quad (14)$$

des équations 8 et 12, il s'ensuit que

$$v = J\alpha \quad (15)$$

et, conséquemment,

$$\dot{v} = J\dot{\alpha} + \dot{J}\alpha. \quad (16)$$

Remarque 2.1. Les vecteurs des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées α ne sont pas définis d'une façon unique. Comme il sera illustré dans les exemples à suivre, un choix approprié de ces vecteurs émerge généralement, à partir de considérations physiques.

Remarque 2.2. Par analogie à J_h , les colonnes de J_{nh} sous-tendent le sous-espace des vitesses au sein de l'espace de configuration qui sont compatibles avec les contraintes nonholonomes. Les colonnes de J sous-tendent le sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel qui sont admissibles en vertu de l'imposition simultanée des contraintes holonomes et nonholonomes.

3. Les équations de Newton-Euler

Afin de décrire la dynamique, nous dénotons par f_i la mesure relative au trièdre du i -ème corps de la résultante des forces appliquées au i -ème corps; nous dénotons par n_i la mesure du moment résultant de ces forces autour du centre de masse du corps. En supposant que l'espace opérationnel soit un système inertiel, le mouvement du i -ème corps assujetti à l'application de f_i et de n_i peut être décrit à l'aide des équations de Newton-Euler

$$f_i = S(\Omega_i) m_i \dot{v}_i + m_i \ddot{v}_i \quad (1)$$

$$n_i = S(\Omega_i) j_i \dot{\Omega}_i + j_i \ddot{\Omega}_i \quad (2)$$

où m_i est la masse du corps; j_i est la matrice d'inertie massique relative au trièdre du corps translaté dans le centre de masse (voir, par exemple, le chapitre 6 de Craig 1989).

Remarque 3.1. Les équations 1 et 2 représentent le modèle dynamique du système qui est nécessaire afin de concevoir un éventuel contrôleur. En fait, elles permettent de calculer la force f_i et le couple n_i requis pour imposer au i -ème corps une accélération linéaire et angulaire spécifiée. Ces équations permettent aussi de calculer la position et l'orientation résultant de l'application d'une fonction-temps spécifiée de f_i et n_i . Tout particulièrement, avec le vecteur c_i dénotant les coordonnées relatives à l'espace opérationnel du centre de masse du corps, et avec $\xi_i := R_i$ dénotant la matrice de rotation décrivant l'orientation du corps, nous obtenons (le modèle utilisé en simulation)

$$\dot{v}_i = \frac{f_i}{m_i} - S(\Omega_i)v_i \quad (3)$$

$$\dot{\Omega}_i = j_i^{-1}\{n_i - S(\Omega_i)j_i\Omega_i\} \quad (4)$$

$$\dot{R}_i = S(R_i\Omega_i)R_i \quad (5)$$

$$\dot{c}_i = R_i v_i. \quad (6)$$

Remarque 3.2. Pour des raisons qui deviendront claires dans la prochaine section, nous récrivons les équations 1 et 2 sous la forme plus concise :

$$\dot{M}_i v_i = -W_i M_i v_i + \omega_i \quad (7)$$

où M_i est la matrice de masse étendue,

$$M_i := \begin{pmatrix} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_i \end{pmatrix} ; \quad (8)$$

W_i est la matrice de vitesse angulaire étendue,

$$W_i := \begin{pmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{pmatrix} ; \quad (9)$$

ω_i , le vecteur force-couple appliqué au corps, est défini comme suit :

$$\omega_i := [f_i' \ n_i']'. \quad (10)$$

4. Le modèle dynamique

Introduisant les notations

$$M := \text{diag}(M_i) \quad (1)$$

$$W := \text{diag}(W_i) \quad (2)$$

$$\omega := [\omega_1' \ \omega_2' \ \dots \ \omega_n']', \quad (3)$$

où M_i et W_i et ω_i sont définis par les équations 3.8 à 3.10, et notant que l'équation 3.7 est valide pour $i=1, \dots, n$, nous pouvons écrire

$$\dot{M}v = -W M v + \omega. \quad (4)$$

En se servant des équations 2.16, il s'ensuit que

$$MJ\dot{\alpha} = -M\dot{J}\alpha - WMJ\alpha + \omega. \quad (5)$$

La pré-multiplication par J' des deux membres de cette équation donne

$$J'MJ\dot{\alpha} = -J'M\dot{J}\alpha - J'WMJ\alpha + J'\omega. \quad (6)$$

En introduisant la matrice d'inertie

$$D(q) := J'MJ, \quad (7)$$

la matrice des forces de Coriolis et centripètes

$$C(q, \alpha) := J'(MJ + WMJ), \quad (8)$$

et le vecteur des forces généralisées

$$\tau := J'\omega, \quad (9)$$

nous obtenons le modèle dynamique

$$D(q)\dot{\alpha} = -C(q, \alpha)\alpha + \tau. \quad (10)$$

La relation entre les forces généralisées, les accélérations, les vitesses et les positions et orientations peut se résumer par les équations suivantes :

$$\dot{\alpha} = g_0 + g_w\tau \quad (11)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha \quad (12)$$

$$\chi = f(q) \quad (13)$$

où

$$g_0 := -D(q)^{-1}C(q, \alpha)\alpha \quad (14)$$

et

$$g_w := D(q)^{-1}. \quad (15)$$

Ces équations représentent le modèle d'état du système; le vecteur $[\alpha' \ q']$ est appelé l'état du système; τ est souvent pris comme étant le contrôle.

Remarque 4.1. Le vecteur force-couple ω peut être perçu comme décomposable en

$$\omega = \omega_c + \omega_a \quad (16)$$

où ω_c (force-couple de contrainte) représente le résultant des forces de contact et des couples engendrés par les contraintes holonomes et nonholonomes, et ω_a (force-couple actif) représente le résultant des forces et des couples qui ne sont pas générés par ces contraintes. En supposant que les force-couples relatives aux contraintes n'effectuent aucun travail, ω_c est orthogonal aux valeurs admissibles du vecteur de vitesse v , à savoir,

$$v' \omega_c = 0. \quad (17)$$

À l'aide de l'équation 2.15, il s'ensuit que

$$\alpha' J' \omega_c = 0 \quad (18)$$

et, par conséquent, puisque cette dernière équation doit être valable pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{\ell}$,

$$J' \omega_c = 0. \quad (19)$$

Cette dernière équation signifie que pour calculer le vecteur de forces généralisées, il n'est pas nécessaire de calculer ω_c . Il suffit de ne tenir compte que de ω_a .

Remarque 4.2. Tel que l'illustre la figure 1, le modèle d'état du système est formé d'un composant dynamique (équation 11) où un contrôle τ peut toujours être déterminé de sorte que $\dot{\alpha}$ ait une valeur arbitrairement spécifiée, suivi d'un composant cinétique, donnant la position et l'orientation en fonction des vitesses généralisées (équations 12 et 13). Cette structure suggère que le problème de faire que χ suive une trajectoire désirée puisse être résolu en deux étapes. Premièrement, concevoir $\dot{\alpha}$ ou α comme étant un vecteur de contrôle auxiliaire et déterminer des valeurs de ce vecteur permettant d'atteindre l'objectif désiré. Deuxièmement, déterminer le vecteur des forces généralisées requis pour obtenir le contrôle auxiliaire. Lorsque $\dot{\alpha}$ est choisi comme contrôle auxiliaire, cette méthode correspond à la méthode qui va sous le nom de « approche par régulation d'accélération (formalisée par Luh, Walker et Paul, 1980). Lorsque l'attention se porte plutôt sur α , elle correspond à la méthode qui va sous le nom de « approche par régulation de vitesse » (formalisée par Whitney, 1982).

Remarque 4.3. Il est clair, depuis l'équation 7, que la matrice d'inertie $D(q)$ est symétrique, positive-définie et inversible. Une autre propriété de cette matrice est représentée par sa relation spéciale avec la matrice $C(q, \alpha)$. Pour illustrer cette propriété, notons que pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{\ell}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha' J' WMJ \alpha &= v' WMv = \sum v_i' W_i M_i v_i = \sum v_i' S(\Omega_i) m_i v_i + \sum \Omega_i' S(\Omega_i) j_i \Omega_i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \alpha' C(q, \alpha) \alpha &= \alpha' J' (MJ + WMJ) \alpha = \alpha' J' (MJ) \alpha = \frac{1}{2} \alpha' \left\{ \frac{d}{dt} J' MJ \right\} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \alpha' D(q, \alpha) \alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

et, par conséquent, la propriété recherchée

$$\alpha' (D(q) - 2 C(q, \alpha)) \alpha = 0. \quad (22)$$

Notons que cette équation joue un rôle important dans la conception et analyse des systèmes de contrôle des manipulateurs robotiques (voir, par exemple la remarque 6.8, voir aussi Li-Slotine 1991)

Remarque 4.4. Lorsque le mouvement du système mécanique est limité à un espace bidimensionnel (comme c'est le cas d'un manipulateur planaire ou d'un robot mobile planaire), le développement des équations 1 à 10 est considérablement simplifié. En particulier, les dimensions des valeurs χ_i , v_i , Ω_i , v_i , et ω_i se réduisent à 3,

2, 1, 3, et 3 respectivement. De plus, en associant à l'espace bidimensionnel, le plan xy du trièdre de référence de l'espace opérationnel, nous obtenons également la simplification des matrices M_i et W_i comme suit :

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_{zzi} \end{pmatrix} \quad (23)$$

et

$$W_i = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{zi} & 0 \\ \Omega_{zi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

5. La méthode de modélisation

Le développement des sections précédentes suggère que le modèle de la dynamique d'un système mécanique formé de n corps rigides soit développé en adoptant les étapes suivantes:

1. Joindre un trièdre à chacun des n corps; représenter la position et l'orientation de ce trièdre par un vecteur approprié $\chi_i := [c_i' \xi_i']$.
2. En dénotant avec p le nombre de degrés de liberté du système, sélectionner un vecteur de coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^p$ (cette étape tient compte des contraintes holonomes).
3. Identifier la fonction (cinématique directe) $f(q)$ de sorte que

$$\chi := [\chi_1' \ \chi_2' \ \dots \ \chi_n']' = f(q). \quad (1)$$

4. Déterminer les matrices jacobiennes $J_{hi}(q)$ qui nous permettent d'obtenir les vitesses dans l'espace opérationnel à partir des vitesses dans l'espace des configurations. Plus particulièrement, $J_{hi}(q)$ doit être tel que

$$v_i := [v_i' \ \Omega_i']' = J_{hi}(q) \dot{q} \quad (2)$$

où v_i est mesuré par rapport au trièdre du i -ème corps. Bâtir $J_h(q) := [J_{h1}(q)' \ J_{h2}(q)' \ \dots \ J_{hn}(q)']'$.

5. Sélectionner un vecteur de vitesses généralisées $\alpha \in \mathbb{R}^{\ell}$, où ℓ est le nombre de variables indépendantes requises pour spécifier les vitesses \dot{q} (les contraintes nonholonomes entrent en jeu); déterminer la matrice jacobienne $J_{nh}(q)$ qui nous permet de calculer les vitesses dans l'espace des configurations en tant que fonction des vitesses généralisées :

$$\dot{q} = J_{nh}(q) \alpha. \quad (3)$$

6. Calculer

$$J = J_h J_{nh} \quad (4)$$

et

$$\dot{J} = \frac{dJ}{dt} \quad (5)$$

7. Déterminer

$$M := \text{diag}(M_i) \quad (6)$$

$$W := \text{diag}(W_i) \quad (7)$$

où

$$M_i := \begin{pmatrix} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_i \end{pmatrix} \quad (8)$$

et

$$W_i := \begin{pmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{pmatrix} \quad (9)$$

8. Déterminer

$$\omega_a := [\omega_{a1}' \ \omega_{a2}' \ \dots \ \omega_{an}']', \quad (10)$$

où ω_{ai} est le résultant des forces-couples actifs appliqués au i -ème corps :

$$\omega_{ai} := [f_{ai}' \ n_{ai}']'. \quad (11)$$

9. Calculer $D(q)$, $C(q, \alpha)$, g_0 , g_w et τ :

$$D(q) := J' M J \quad (12)$$

$$C(q, \alpha) := J' (MJ + WMJ) \quad (13)$$

$$g_0 := -D(q)^{-1} C(q, \alpha) \alpha \quad (14)$$

$$g_w := D(q)^{-1} \quad (15)$$

$$\tau := J' \omega. \quad (16)$$

10. Le modèle d'état désiré de la dynamique du système est exprimé par

$$\dot{\alpha} = g_0 + g_w \tau \quad (17)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q) \alpha \quad (18)$$

$$\chi = f(q). \quad (19)$$

6. Le cas du robot manipulateur

Un robot manipulateur peut être vu comme étant un système mécanique formé d'un ensemble ordonné de n corps rigides (segments). Il en découle donc que l'étude d'un robot manipulateur peut directement bénéficier du développement des sections antérieures. Lorsqu'elle est appliquée à cette classe de systèmes, notre méthode de modélisation peut être rendue plus efficace en tenant compte des observations suivantes.

Remarque 6.1 Dans un manipulateur, chaque segments a deux segments adjacents, sauf pour le dernier qui n'en a qu'un. Le mouvement relatif de deux segments adjacents est une rotation autour d'un axe (ou une translation le long d'un axe) qui demeure invariant par rapport à chacun des deux segments. Il s'ensuit que le nombre de degrés de liberté du système mécanique est égal au nombre de segments n .

Remarque 6.2. Les entrées du vecteur de configuration q sont généralement représentées soit par l'angle ou la distance (variable d'articulation, coordonnée généralisée) qui décrit le déplacement relatif de deux segments adjacents. En général, les entrées du

vecteur de forces généralisées τ coïncident avec la mesure des forces actives ou des couples transmis par les actionneurs aux axes d'articulation plus la mesure des forces et des couples attribuables à la gravité, le long de ces axes.

Remarque 6.3. Étant donné que les robots manipulateurs sont généralement exempts de contraintes nonholonomes, nous obtenons $\alpha := \dot{q}$. Il s'ensuit que le modèle d'état du robot manipulateur se présente souvent comme suit :

$$D(q) \dot{\alpha} + C(q, \alpha) \alpha = \tau. \quad (1)$$

$$\dot{q} = \alpha.$$

Remarque 6.4. Lors de l'exécution de l'étape 1 de notre méthode de modélisation, les trièdres à associer à chaque segment sont choisis en observant un ensemble de règles cinétiques bien établies (formalisme de Denavit Hartenberg, Craig 1989, p. 77); les entrées de vecteur c_i correspondent aux coordonnées de l'origine du i -ème trièdre; le vecteur ξ_i correspond généralement à la matrice de rotation décrivant l'orientation du trièdre par rapport à l'espace opérationnel.

Remarque 6.5. En sélectionnant les trièdres avec le formalisme de Denavit Hartenberg, l'exécution de l'étape 3 s'en trouve grandement simplifiée étant donné que la fonction cinétique directe $f(q)$ peut

être facilement décrite en termes des paramètres de Denavit-Hartenberg (Craig 1989, p.76).

Remarque 6.6. L'exécution des étapes 4 et 7 est aussi grandement simplifiée du fait que le calcul des matrices jacobiennes peut être effectué à l'aide de formules de propagation des vitesses (Craig 1989, p. 166).

Remarque 6.7. Dénnotant par v_n la vélocité de l'n-ième corps (souvent appelé organ terminal, effecteur ou outil du manipulateur) et par J_n sa matrice jacobienne, nous obtenons

$$v_n = J_n \dot{q} \quad (2)$$

et

$$\dot{v}_n = \dot{J}_n \dot{q} + J_n \ddot{q}. \quad (3)$$

En supposant que J_n soit une matrice inversable (comme c'est le cas pour des manipulateurs maniables), il s'ensuit que

$$\dot{q} = J_n^{-1} \dot{v}_n \quad (4)$$

$$\ddot{q} = J_n^{-1} (\dot{v}_n - \dot{J}_n \dot{q}) \quad (5)$$

conséquemment

$$J_n^{-1} D J_n^{-1} \dot{v}_n = J_n^{-1} \{-C(q, \dot{q}) J_n^{-1} \dot{v}_n - D J_n^{-1} \dot{J}_n J_n^{-1} \dot{v}_n + \tau\}. \quad (6)$$

En établissant

$$M_\chi := J_n^{-1} D J_n^{-1} \quad (7)$$

$$V_\chi := -J_n^{-1} \{C(q, \dot{q}) J_n^{-1} + D J_n^{-1} \dot{J}_n J_n^{-1}\} \dot{v}_n \quad (8)$$

$$F_\chi := J_n^{-1} \tau, \quad (9)$$

nous obtenons

$$F_x := M_x \dot{v}_n + V_x. \quad (10)$$

Les équations 7 à 10 représentent ce que l'on appelle généralement le modèle cartésien du manipulateur (voir Craig, 1989, p. 211). Dans ce modèle, le contrôle de l' n -ième segment du manipulateur (et par conséquent de l'outil du manipulateur) peut être considéré comme équivalent au contrôle d'un corps rigide avec une matrice de masse variable dans le temps M_x , soumis à l'influence du vecteur des forces de Coriolis et centripète V_x et au force-couple F_x .

Remarque 6.8. En prenant pour hypothèse une compensation parfaite de la gravité, l'application de la loi de contrôle «PD»,

$$\tau = -K_p e - K_D \dot{q}, \quad (11)$$

où $e := q - q_D$, q_D est un vecteur assigné de R^n ; K_p et K_D sont des matrices positives définies, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_D. \quad (12)$$

Pour vérifier ce résultat, considérons la fonction de Lyapunov

$$V := \frac{1}{2} \{ e' K_p e + \dot{q}' D \dot{q} \}, \quad (13)$$

et observons que

$$\frac{dV}{dt} = \dot{q}' K_p e + \dot{q}' D \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}' D \dot{q} \quad (14)$$

conséquentement

$$\frac{dV}{dt} = \dot{q}' K_p e - \dot{q}' K_p e - \dot{q}' K_D \dot{q} + \dot{q}' \left(\frac{1}{2} D - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q}. \quad (15)$$

À la lumière de l'équation 4.22 et de la propriété définie-
positive de K_D , ceci suggère que

$$\frac{dV}{dt} = - \dot{q}' K_D \dot{q} \leq 0 \quad (16)$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0. \quad (17)$$

Puisque K_p et $D(q)$ sont des matrices définies positives, nous
pouvons appliquer le théorème de Lasalle (Khalil, 1992, p. 117) et
conclure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_D. \quad (18)$$

7. Application à la modélisation d'un manipulateur planaire à deux degrés de liberté

Appliquons notre méthode de modélisation aux deux degrés de
liberté du manipulateur planaire de la figure 4 (une étude
détaillée de ce manipulateur est présentée dans de nombreuses
références dont Craig 1989, p. 201-205).

Les étapes de la méthode de modélisation proposée évoluent comme suit.

1. Un trièdre est assigné à chacun des deux segments du manipulateur; la position et l'orientation de ces segments par rapport à l'espace opérationnel sont représentées par

$$\chi_1 := [x_1 \ y_1 \ \Phi_1]' \text{ et } \chi_2 := [x_2 \ y_2 \ \Phi_2]' \quad (1)$$

où les symboles ont le sens qui leur est donné à la figure 4.

2. Le mouvement du segment 1 par rapport à l'espace opérationnel est un de rotation autour d'un axe qui est invariant à la fois par rapport au segment et à l'espace opérationnel. De même, le mouvement du segment 2 par rapport au segment 1 est une rotation autour d'un axe invariant par rapport à chacun des deux segments. Il s'ensuit que le nombre de degrés de liberté du manipulateur est égal à 2 et que la position et l'orientation du manipulateur peuvent être spécifiées par le vecteur de configuration $q := [\theta_1 \ \theta_2]' \in \mathbb{R}^2$, où θ_1 et θ_2 donnent la mesure de l'orientation des deux segments (voir figure 4).

3. La relation entre le vecteur q et la position et l'orientation dans l'espace opérationnel est la suivante :

$$x_1 = \ell_1 c_1 \qquad y_1 = \ell_1 s_1 \qquad \Phi_1 = \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} \qquad y_2 = \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} \qquad \Phi_2 = \theta_1 + \theta_2 \quad (3)$$

où

$$s_i := \sin\theta_i \quad c_i := \cos\theta_i \quad s_{12} := \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad c_{12} := \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (4)$$

4. Les mesures (relatives au trièdre de l'espace opérationnel) des vitesses des deux segments sont exprimées ainsi :

$$\dot{x}_1 = -l_1 \dot{s}_1 \dot{\theta}_1 \quad \dot{y}_1 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 \quad \dot{\Phi}_1 = \dot{\theta}_1 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{s}_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \dot{s}_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad \dot{y}_2 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad \dot{\Phi}_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2. \quad (6)$$

De ces mesures, on obtient les mesures des vitesses des segments par rapport à leurs propres trièdre

$$v_1 = [0 \quad l_1 \dot{\theta}_1]' \quad \Omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (7)$$

$$v_2 = [l_1 \dot{s}_1 \dot{\theta}_1 \quad (l_1 c_2 + l_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2]' \quad \Omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2. \quad (8)$$

De ces équations, nous obtenons

$$J_{h1}' = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$J_{h2}' = \begin{pmatrix} l_1 \dot{s}_2 & l_1 c_2 + l_2 & 1 \\ 0 & l_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

5. Étant donné l'absence de contraintes nonholonomes, le vecteur de vitesses généralisées coïncide avec la dérivée du vecteur des coordonnées généralisées et $J_{nh} = I_2$.

6. Des données ci-dessus, il s'ensuit que

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & 1 & l_1 \dot{s}_2 & l_1 c_2 + l_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 & 1 \end{array} \quad (11)$$

et conséquemment que

$$\dot{j}' = \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (12)$$

7. Cette étape donne

$$M_1 = \begin{array}{cc} m_1 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_1 \end{array} \quad (13)$$

$$M_2 = \begin{array}{cc} m_2 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_2 \end{array} \quad (14)$$

$$W_1 = \begin{array}{ccc} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (15)$$

$$W_2 = \begin{array}{ccc} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (16)$$

8. Reconnaisant les forces actives appliquées aux segments comme étant formées des couples transmis aux axes d'articulation et des forces attribuables à la gravité, on obtient

$$\omega_{a1} = \begin{array}{l} -m_1 g s_1 \\ -m_1 g c_1 \end{array}$$

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 \quad (17)$$

$$-m_2 g s_{12}$$

$$\omega_{a2} = -m_2 g c_{12}$$

$$\Gamma_2, \quad (18)$$

où Γ_1 est le couple appliqué au segment 1 par l'actionneur placé à la base du manipulateur; Γ_2 est le couple appliqué au segment 2 par l'actionneur placé dans le segment 1.

9. À l'aide des expressions ci-dessus, on calcule

$$D(q, \delta) = J' M J \quad (19)$$

$$C := J' \dot{M} J + J' W M J \quad (20)$$

$$\tau = J' \omega, \quad (21)$$

pour obtenir

$$D = \begin{array}{cc} m_1 l_1^2 + m_2 (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2) & m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \\ m_2 (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) & m_2 l_2^2 \end{array} \quad (22)$$

$$C = \begin{array}{cc} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{array} \quad (23)$$

$$\tau = \begin{array}{cc} \Gamma_1 - (m_1 + m_2) g l_1 c_1 & -m_2 g l_2 c_{12} \\ \Gamma_2 - m_2 g l_2 c_{12} & \end{array} \quad (24)$$

10. Le modèle dynamique du manipulateur est le suivant :

$$\Gamma_1 = m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{aligned}
 & -2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \\
 \Gamma_2 = & m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 c_{12}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

8. Application à la modélisation de la dynamique d'un camion avec semi-remorque

Considérons un camion (muni de deux roues à traction arrière et de deux roues de direction à l'avant) raccordé à une semi-remorque (à deux roues arrière) au moyen d'un raccord vertical rotoïde articulé (figure 2; voir aussi DeSantis, 1993a). Supposons que le mouvement du véhicule soit planaire, sans glissement latéral des roues, que les propriétés cinétiques et dynamiques du camion et de la remorque soient symétriques par rapport à leurs axes longitudinaux, que le contact entre les pneus et la surface de mouvement soit ponctuel. De plus, soit la différence entre l'orientation du camion et de ses roues avant (angle de direction) suffisamment faible pour que ces roues puissent être représentées en termes d'une roue «médiane» située au centre de l'essieu avant.

En vertu de ces hypothèses, les étapes de la méthode de modélisation évoluent comme suit :

1. Un trièdre est attaché au camion et à la remorque; les positions et les orientations de ces trièdres sont représentées par

$$\chi_1 := [x_1 \ y_1 \ \Theta_1]' \text{ et } \chi_2 := [x_2 \ y_2 \ \Theta_2]' \tag{1}$$

où les symboles ont le sens qui leur est donné à la figure 2.

2. Le mouvement relatif entre le camion et la remorque est une rotation autour d'un axe invariant par rapport à chacun des deux corps. Il s'ensuit que, étant donné la position et l'orientation du camion, un seul paramètre additionnel est requis pour établir la position et l'orientation du camion. Ceci signifie que la position et l'orientation du camion à remorque peut être spécifiée par un vecteur de configuration $q := [x \ y \ \Theta \ \Phi]' \in \mathbb{R}^4$, où x, y dénotent les coordonnées d'origine du trièdre attaché au camion par rapport à l'espace opérationnel; Θ est une mesure de l'orientation du camion; Φ est une mesure de l'orientation de la remorque par rapport au camion (voir figure 2).

3. La relation entre le vecteur de configuration et les positions et orientations dans l'espace opérationnel du camion à remorque est la suivante :

$$x_1 = x \quad y_1 = y \quad \Theta_1 = \Theta$$

et

$$x_2 = x - c \cos \Theta - l_2 \cos(\Theta + \Phi) \quad y_2 = y - c \sin \Theta - l_2 \sin(\Theta + \Phi)$$

$$\Theta_2 = \Theta + \Phi. \tag{2}$$

4. Mesurées par rapport à leurs trièdres, les vitesses du camion et de la remorque sont données par les vecteurs suivants :

$$v_1 := [v_{u1} \ v_{w1} \ \Omega_1]' \quad v_2 := [v_{u2} \ v_{w2} \ \Omega_2]' \tag{3}$$

où

$$\dot{x}_1 = \cos\Theta v_{u1} - \sin\Theta(v_{w1} - b\Omega_1)$$

$$\dot{y}_1 = \sin\Theta v_{u1} + \cos\Theta(v_{w1} - b\Omega_1)$$

et

$$\dot{\Theta}_1 = \Omega_1 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \cos(\Theta+\Phi)v_{u2} - \sin(\Theta+\Phi)(v_{w2} - d(\Omega_1 + \dot{\Phi}))$$

$$\dot{y}_2 = \sin(\Theta+\Phi)v_{u2} + \cos(\Theta+\Phi)(v_{w2} - d(\Omega_1 + \dot{\Phi})) \quad (5)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \Omega_1 + \dot{\Phi}. \quad (6)$$

De ces équations, on obtient

$$v_{u1} = \cos\Theta \dot{x} + \sin\Theta \dot{y} \quad (7)$$

$$v_{w1} = -\sin\Theta \dot{x} + \cos\Theta \dot{y} + b\Omega_1 \quad (8)$$

et

$$v_{u2} = \cos(\Theta+\Phi)\dot{x} + \sin(\Theta+\Phi)\dot{y} - c\Omega_1 \sin\Phi \quad (9)$$

$$v_{w2} = -\sin(\Theta+\Phi)\dot{x} + \cos(\Theta+\Phi)\dot{y} - c\Omega_1 \cos\Phi - l_2\Omega_1 - l_2\dot{\Phi} + d(\Omega_1 + \dot{\Phi}) \quad (10)$$

Il s'ensuit que

$$J_{h1} := \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$J_{h2} := \begin{pmatrix} \cos(\Theta+\Phi) & \sin(\Theta+\Phi) & -c\sin\Phi & 0 \\ -\sin(\Theta+\Phi) & \cos(\Theta+\Phi) & -e - c\cos\Phi & -e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

et

$$J_h := [J_{h1} \ J_{h2}]'. \quad (13)$$

5. En présence d'un mouvement exempt de glissement et correspondant à un angle de direction de δ , nous obtenons :

$$v_{w1} = b\Omega_1 \quad (14)$$

$$\Omega_1 = \frac{v_{u1} \tan \delta}{l_1} \quad (15)$$

$$\dot{\Phi} = - \frac{v_{u1}}{l_1 l_2} \{l_1 \sin \Phi + (l_2 + c \cos \Phi) \tan \delta\}. \quad (16)$$

De ces équations et de l'équation 4, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Phi} \end{matrix} &= v_{u1} \begin{matrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \\ \frac{\tan \delta}{l_1} \\ - \frac{l_1 \sin \Phi + (l_2 + c \cos \Phi) \tan \delta}{l_1 l_2} \end{matrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Cette équation suggère que nous pouvons choisir $\alpha := v_{u1} \in \mathbb{R}$ comme vecteur de vitesse généralisée. Par cette sélection, on obtient

$$J_{nh} = \begin{matrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \\ \tan \delta \\ \text{----} \end{matrix}$$

$$l_1 \frac{l_1 \sin \Phi + (l_2 + c \cos \Phi) \tan \delta}{l_1 l_2} \quad (18)$$

6. En combinant les équations 10 à 13 et l'équation 18, nous calculons

$$J = J_h J_{nh} \quad (19)$$

et

$$\dot{J} = \dot{J} + \frac{d(J)}{dt} \quad (20)$$

De ces calculs, il découle

$$J' = \left[1 ; \frac{b \tan \delta}{l_1} ; \frac{\tan \delta}{l_1} ; \cos \Phi - \frac{c \sin \Phi \tan \delta}{l_1} ; - \frac{d \sin \Phi}{l_2} - \frac{c d \cos \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} ; \right. \\ \left. - \frac{l_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} \right] \quad (21)$$

et

$$J' = \frac{\dot{\delta}}{\cos^2 \delta} \left[0 ; - \frac{b}{l_1} ; - \frac{1}{l_1} ; - \frac{c \sin \Phi}{l_1} ; - \frac{c d \cos \Phi}{l_1 l_2} ; - \frac{c \cos \Phi}{l_1 l_2} \right] \\ + \dot{\Phi} \left[0 ; 0 ; 0 ; - \frac{l_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{l_1} ; - \frac{d l_1 \cos \Phi - c d \sin \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} ; \right. \\ \left. - \frac{l_1 \cos \Phi - c \sin \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} \right] \quad (22)$$

où $\dot{\Phi}$ est comme dans l'équation 16. Pour usage futur, nous trouvons utile d'exprimer \dot{J} comme suit :

$$\dot{J} = A(q, \delta, \alpha) \dot{\Phi} + B(q, \delta, \alpha) \dot{\delta} \quad (23)$$

où

$$A(q, \delta, \alpha) := \left[0; 0; 0; -\frac{l_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{l_1}; -\frac{d l_1 \cos \Phi - c d \sin \Phi \tan \delta}{l_1 l_2}; -\frac{l_1 \cos \Phi - c \sin \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} \right]' \quad (24)$$

et

$$B(q, \delta, \alpha) := \frac{1}{\cos^2 \delta} \left[0; -\frac{b}{l_1}; -\frac{1}{l_1}; -\frac{c \sin \Phi}{l_1}; -\frac{c d \cos \Phi}{l_1 l_2}; -\frac{c \cos \Phi}{l_1 l_2} \right]'. \quad (25)$$

7. Cette étape donne

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_1 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_2 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\Phi} + \Omega_1) & 0 \\ (\dot{\Phi} + \Omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

8. Reconnaisant les forces actives appliquées au véhicule comme formées des forces longitudinales appliquées aux roues F_{ui} (voir figure 3), nous obtenons

$$\begin{aligned} & F_{u2} + F_{u1} \cos \delta \\ \omega_{a1} = & F_{u1} \sin \delta \\ & 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & F_{u3} \\ \omega_{a2} = & 0 \\ & 0 \end{aligned} \quad (30)$$

9. En se servant des expressions ci-dessus, nous calculons

$$D(q, \delta) = J' M J \quad (31)$$

$$C_1 := J' M A(q, \delta, \alpha) + J' W M J \quad (32)$$

$$C_2 := J' M B(q, \delta, \alpha) \quad (33)$$

$$C(q, \delta, \alpha, \dot{\delta}) = C_1 + C_2 \dot{\delta} \quad (34)$$

$$g_{01} := -D^{-1} C_1 \alpha \quad (35)$$

$$g_{02} := -D^{-1} C_2 \alpha \quad (36)$$

$$g_0 = g_{01} + g_{02} \dot{\delta} \quad (37)$$

$$g_{wa} = D^{-1} J' ; \quad (38)$$

10. Le modèle dynamique du système est le suivant :

$$\dot{\alpha} = g_{01} + g_{02} \dot{\delta} + g_{u1} F_{u1} + g_{u2} F_{u2} + g_{u3} F_{u3} \quad (39)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q, \delta) \alpha \quad (40)$$

$$\chi = f(q), \quad (41)$$

où J_{nh} et $f(q)$ sont comme dans les équations 2 et 18, et

$$g_{u1} := g_{wa} [\cos\delta \quad \sin\delta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]' \quad (43)$$

$$g_{u2} := g_{wa} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]' \quad (42)$$

$$g_{u3} := g_{wa} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]'. \quad (44)$$

En pratique, il est courant de poser

$$\dot{\delta} = F_s \quad (45)$$

où F_s est le contrôle de direction. Le contrôle de propulsion est généralement appliqué aux roues arrière du camion et est représenté par

$$F_p = F_{u2}. \quad (46)$$

F_{u1} et F_{u3} sont considérés comme étant des perturbations externes.

Remarque 8.1. Le modèle décrit par les équations 39 à 41 coïncide avec celui présenté dans Ellis, 1965 et adopté par DeSantis, 1994a. Il peut être également vu comme un cas particulier du modèle plus général offert par Bolzern et al. 1995.

Remarque 8.2. Des équations 39 à 41, nous pouvons facilement modéliser la dynamique d'un véhicule ordinaire, telle une voiture (un camion à remorque, sans remorque). Pour obtenir ce modèle, nous associons à chaque symbole $\gamma \in \{J, M, W, A, B\}$ un symbole $\gamma_c \in \{J_c, M_c, W_c, A_c, B_c\}$ obéissant à la règle suivante :

$$\gamma_c = P_{33}\gamma \quad (47)$$

où

$$P_{33} := \begin{pmatrix} I_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 \end{pmatrix} . \quad (48)$$

Nous modifions alors les équations 30 à 46 en remplaçant $\gamma \in \{J, M, W, A, B\}$ par le γ_c correspondant. Le modèle qui en découle coïncide avec celui utilisé par DeSantis, 1995a.

Remarque 8.3. Le modèle que nous avons obtenu peut également être vu comme un cas particulier du modèle plus général proposé par Bolzern et al. 1995.

Conclusions

La méthode de modélisation que nous avons présentée est applicable à divers systèmes mécaniques devant être pris en compte lors de l'automatisation industrielle, par exemple les robots manipulateurs, les robots mobiles, les véhicules de transport, les excavateurs mécaniques, les ponts roulants et autres machines semblables. Similaire à d'autres méthodes disponibles (comme par exemple la méthode utilisée dans Kane Levinson, 1983; ou celle récemment offerte par Saha et Angeles, 1991), cette méthode suit des étapes qui, tout en étant efficaces d'un point de vue numérique, sont également particulièrement bien adaptées à une interprétation intuitive de leur signification physique.

Cette méthode est plus générale (puisqu'elle tient compte des contraintes holonomes et nonholonomes) et numériquement plus efficace (puisqu'elle ne requiert pas le calcul des forces de contraintes) que les méthodes généralement proposées dans les livres d'introduction à la robotique (par exemple, Craig, 1989; ou Spong et Vidyasagar, 1987). Grâce à cette méthode, il est plus facile d'exposer des similarités et des différences parmi les modèles d'un système donné soumis à diverses hypothèses (par exemple, un camion à remorque se déplaçant avec un mouvement exempt ou non exempt de glissement). Il est aussi plus facile de comparer les propriétés structurelles et numériques de modèles de différents systèmes mécaniques fonctionnant en présence d'hypothèses semblables (par exemple, un robot manipulateur, un camion à remorque, un excavateur mécanique ou un véhicule minier de chargement-transport-déchargement). D'autre part, son exécution peut en même temps profiter des algorithmes numériques disponibles (dont les formules de propagation de vélocité) ainsi que d'un codage assisté par ordinateur, offert dans le cadre de progiciels symboliques comme Mathematica ou Maple.

Remerciements

Ce rapport est préparé à l'intention des étudiants du cours Ele 6207 «Commande des systèmes robotiques».

Références

- [Bo.1] Bolzern, P., DeSantis, R.M., Locatelli, A., Tognò, S. 1995, Dynamic Model of a Two-Trailer Articulated Vehicle subject to nonholonomic constraints (à paraître dans *Robotica*).
- [Cr.1] Craig, J.J, 1989, **Adaptive Control of Mechanical Manipulators**, Addison Wesley.
- [De.1] DeSantis, R.M., 1994a, Path-Tracking for Car-Like and Tractor-Trailer-Like Robots, *EPM/ RT-93/25*, École Polytechnique de Montréal, 1993 (également dans *Int. Journal of Robotic Research*, vol. 13, n° 3, décembre 1994, pp. 533 à 544).
- [De.2] DeSantis, R.M., Krau, S., 1994b, Bang Bang Motion Control of a Cartesian Crane, *EPM/RT-93/6*, École Polytechnique de Montréal, 1993 (également dans *Robotica*, vol. 12, septembre 1994, pp. 449 à 454).
- [De.3] DeSantis, R.M., Hurteau, R., 1990, On the Motion Control of Electric AGVs, *EPM/RT-93/6*, École Polytechnique de Montréal, 1993 (également dans *Automazione e Instrumentazione*, vol. 3, pp. 137 à 150, 1990).
- [De.4] DeSantis, R.M., 1995a, Path-Tracking for a Car-Like Robot with Double Steering, (également dans *IEEE Trans on Vehicular Technology*, Vol 44, N.2, pp 366-377).
- [De.5] DeSantis, R.M., 1995b, Modeling and Control of a Loading-Hauling-Dumping Mining Vehicle, *EPM/RT-94/XXX*, École Polytechnique de Montréal, printemps 1995 (soumis à *Trans of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*).
- [De.6] DeSantis, R.M., 1995c, Modeling and Path-Tracking Control of a Mobile Wheeled Robot with a Differential Drive, *EPM/RT-94*, École Polytechnique de Montréal, (également dans *Robotica*, vol. 13, may 1995, pp. 401 - 410).
- [De.7] DeSantis, R.M., 1995d, Motion/Force Control of Robotic Manipulators, *EPM/RT-95-04*, École Polytechnique de Montréal, (à être publié dans *Trans of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*).
- [La.1] Latombe, J.C., **Robot Motion Planning**, Kluver, 1991.

- [Lu.1] Luh, J.Y.S., Walker, M.W., Paul, R.P.C, Resolved-Acceleration Control of Mechanical Manipulators, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. AC-25, n° 3, juin 1980, pp. 468 à 474.
- [Ka.1] Kane, T.R., Levinson, D.A., 1985, **Dynamics: Theory and Applications**, McGraw-Hill.
- [Ka.2] Kane, T.R., Levinson, D.A., 1983, The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, **International Journal of Robotic Research**, vol. 2, n° 3, pp. 3 à 21.
- [Ka.3] Kane, T.R., Likins, P.W., Levinson, D.A., 1983, **Spacecraft Dynamics**, McGraw-Hill.
- [Kha.1] Khalil, H.K., 1992, **Nonlinear Systems**, MacMillan.
- [Ni.1] Nikravesh, P.E., Wehage, R.A., Kwon, O.K., 1985, Euler Parameters in Computational Kinematics and Dynamics, parties 1 et 2, **Trans of the ASME Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design**, vol. 107, pp. 358 à 370.
- [Sa.1] Saha, K.S., Angeles, J., 1991, Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement, **Trans of the ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 58, pp. 238 à 243.
- [Slo.1] Slotine, J.J., Li, W., **Applied Nonlinear Control**, Prentice Hall 1991.
- [Spo.1] Spong, M.W., 1987, Modeling and Control of Elastic Joint Robots, **Trans of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control**, vol. 109, pp. 310 à 331.
- [Wh.1] Whitney, D.E., 1982, The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators, **Trans of the ASME Journal of Journal of Dynamic Systems Measurement and Control**, vol. 122, décembre, pp. 303 à 309.

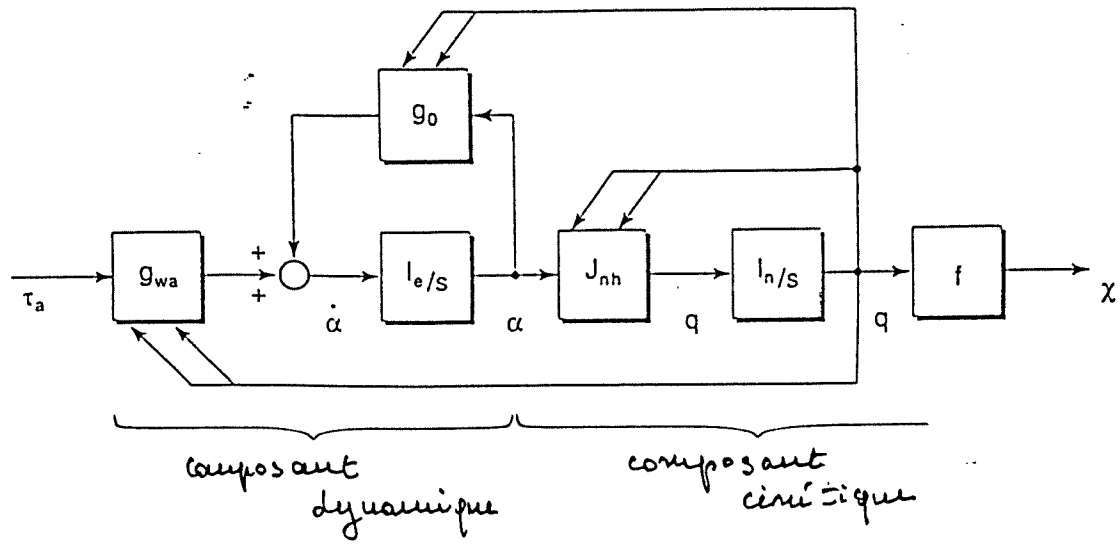


Figure 1. Structure du modèle dynamique

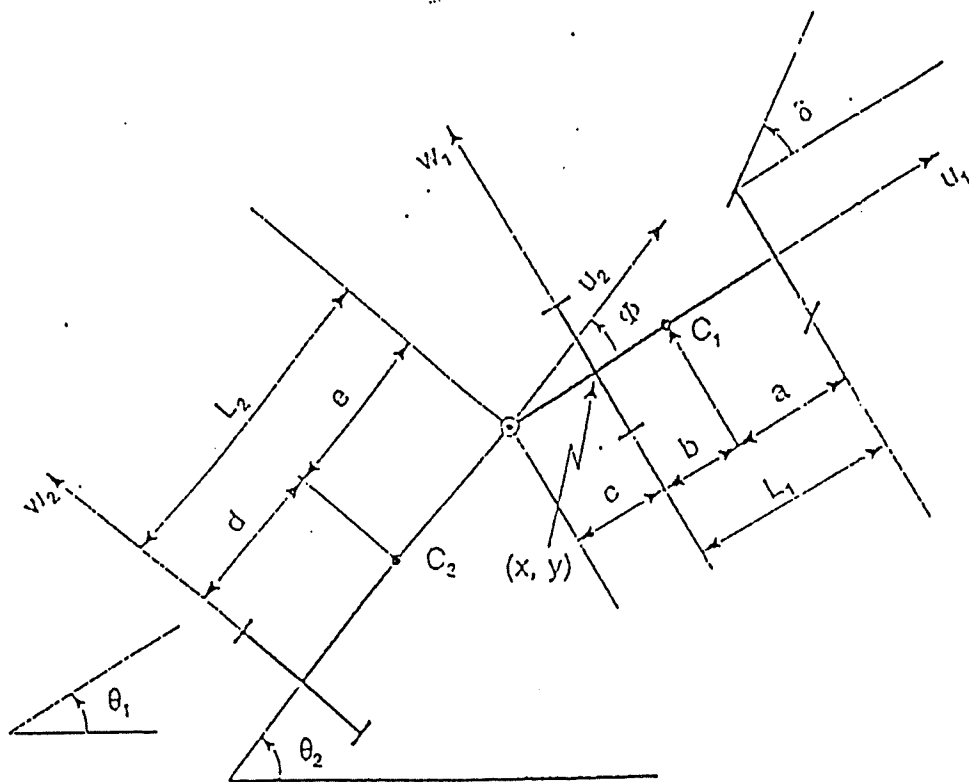


Figure 2. Géométrie d'un camion à remorque

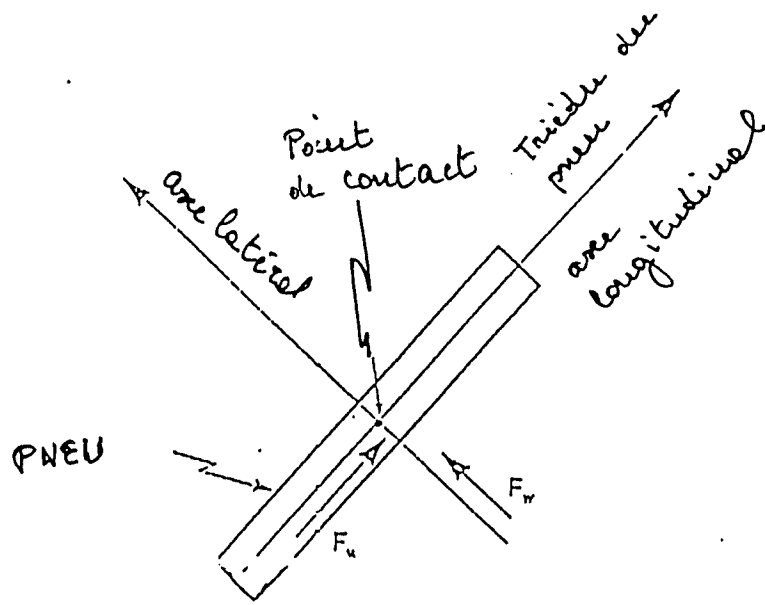


Figure 3. Forces latérales et longitudinales exercées par les pneus

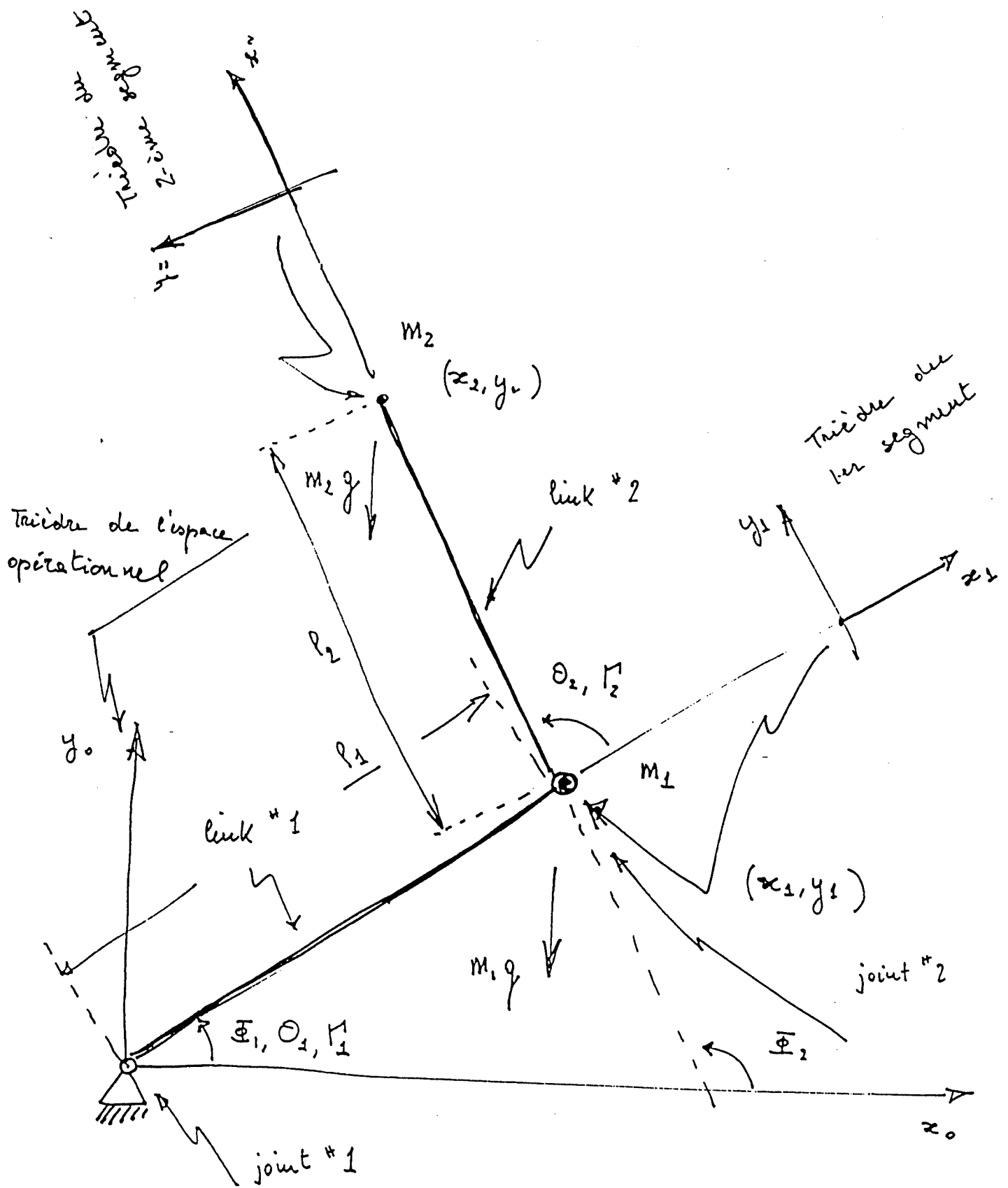


Figure 4. Manipulateur planaire à deux degrés de liberté

Symboles

n : nombre de corps rigides d'un système mécanique.

p_1 : nombre de contraintes holonomes.

ℓ_1 : nombre de contraintes nonholonomes.

q : vecteur de coordonnées généralisées; aussi vecteur de configuration, vecteur de variables d'articulation.

p : dimension du vecteur de configuration; aussi nombre de degrés de liberté du système mécanique (en général : $p=6n-p_1$).

α : vecteur de vitesses généralisées.

ℓ : dimension du vecteur de vitesses généralisées (en général : $\ell=p-\ell_1$).

c_i : position dans l'espace articulaire du i -ème corps du système.

ξ_i : orientation dans l'espace opérationnel du i -ème corps du système.

$\chi_i := [c_i' \ \xi_i']'$: configuration dans l'espace opérationnel du i -ème corps du système.

$\chi := [\chi_1' \ \chi_2' \ \dots \ \chi_n']'$: configuration du système de n corps.

v_i : un vecteur décrivant la vitesses du centre de masse du i -ème corps relatif à l'espace opérationnel.

Ω_i : un vecteur décrivant la vitesses angulaire du i -ème corps par rapport à l'espace opérationnel.

$v_i := [v_i' \ \Omega_i']'$: vecteur de vitesses linéaires-angulaires du i -ème corps.

$v := [v_1' \ v_2' \ \dots \ v_n']'$: vecteur de vitesses linéaires-angulaires de l'ensemble des n corps.

$S(\Omega_i)$: matrice de vitesse angulaire associée à Ω_i .

$$S(\Omega_i) := \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{iz} & \Omega_{ix} \\ \Omega_{iz} & 0 & -\Omega_{iy} \\ -\Omega_{ix} & \Omega_{iy} & 0 \end{pmatrix} .$$

W_i : matrice de vitesse angulaire étendue

$$W_i := \begin{pmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{pmatrix} ;$$

$W := \text{diag}(W_i), \ i=1, \dots, n.$

h_i : fonction décrivant une contrainte holonome.

H : matrice utilisée pour décrire une contrainte nonholonome.

g_i' : vecteur représentant une vitesse non admissible dans l'espace opérationnel.

J_h : matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel qui sont compatibles avec la présence de contraintes holonomes.

J_{nh} : matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace de configuration qui sont compatibles avec la présence de contraintes nonholonomes.

$J := J_h J_{nh}$: matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel et sont compatibles avec la présence simultanée de contraintes holonomes et nonholonomes.

m_i : masse du i -ème corps.

j_i : matrice d'inertie du i -ème corps par rapport au trièdre du corps, translaté à son centre de masse.

f_i : résultante des forces appliquées au i -ème corps.

n_i : résultant du moment des forces appliquées au i -ème corps autour de son centre de masse.

$\omega_i := [f_i' \ n_i']'$: force-couple résultant appliqué au i -ème corps.

ω_{ai} : résultante des rapports forces-couples actifs appliquée au i -ème corps.

$M_i :=$ masse-matrice étendue du i -ème corps

$$M_i := \begin{array}{cc} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_i \end{array} .$$

$M := \text{diag}(M_i)$: masse-matrice étendue du système.

$W := \text{diag}(W_i)$: matrice angulaire étendue du système.

$\omega := [\omega_1' \ \omega_2' \ \dots \ \omega_n']'$: ensemble des vecteurs force-couple appliqués au système.

ω_a : composant force-couple actif de ω .

ω_c : composant de ω généré par les contraintes holonomes et nonholonomes.

$D(q)$: matrice d'inertie du système mécanique.

$C(q, \dot{q})$: matrices Coriolis et centripète.

τ : vecteur des forces généralisées.

Figures

1. Structure du modèle dynamique
2. Géométrie d'un camion avec semi-remorque
3. Forces latérales et longitudinales exercées par les pneus
4. Manipulateur planaire avec deux degrés de liberté

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00199913 3

École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3A7