

06 OCT. 1989

EPM/RT-89/14

Méthode numérique pour la simulation des  
écoulements turbulents faiblement compressibles

Mohamed Agouzoul, étudiant Ph.D.  
David Elkaim, étudiant Ph.D.  
Ricardo Camarero, professeur titulaire

Septembre 1989

*gratuit*

Ce document a pu être publié grâce à une subvention de Gaz Métropolitain

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 3e trimestre 1989  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition  
École Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale A  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
(514) 340-4000

Compter 0,10 \$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00 \$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, des sociétés ou d'organismes canadiens.

# Table des Matières

Liste des figures	iv
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Équations de base</b>	<b>3</b>
2.1 Les équations de mouvement . . . . .	3
2.2 Les équations moyennes . . . . .	5
2.3 Le modèle de turbulence . . . . .	8
2.3.1 Le concept de la viscosité turbulente . . . . .	8
2.3.2 Le modèle $k - \epsilon$ . . . . .	9
2.4 Résumé . . . . .	9
<b>3 Schéma numérique</b>	<b>12</b>
3.1 Viscosité artificielle et lissage . . . . .	13
3.2 Conditions aux frontières . . . . .	14
3.3 Algorithme . . . . .	16
<b>4 Résultats numériques</b>	<b>18</b>
4.1 Résultats numériques . . . . .	18
4.2 Conclusion . . . . .	20

**5 Bibliographie**

# Figures

4.1	Champ de vitesse (canal droit) . . . . .	21
4.2	Pression le long de la paroi du canal . . . . .	22
4.3	Champ de vitesse (marche) . . . . .	23
4.4	Profil de vitesse à l'entrée . . . . .	24
4.5	Profil de vitesse $x = 2.0$ . . . . .	25
4.6	Profil de vitesse $x = 25$ . (après la zone de recirculation) . . . . .	26
4.7	Pression le long de la paroi inférieure . . . . .	27
4.8	Pression le long de la paroi supérieure . . . . .	28

# Chapitre 1

## Introduction

L'une des sources d'énergie les plus utilisées au monde est la combustion d'un combustible. Parmi les combustibles les plus répandus dans la nature, il y a le gaz naturel.

Dans les chambres de combustion, un mélange de gaz et d'air réagit en une réaction dite la combustion. La chaleur dégagée par cette réaction est utilisée soit pour le chauffage, cas des chaudières par exemple, soit pour la production d'énergie mécanique, cas des moteurs à combustion interne par exemple.

La recherche de dispositifs de plus en plus performants nécessite une bonne connaissance des phénomènes physiques qui entrent en jeu. On s'intéresse au rendement pour minimiser la consommation d'énergie d'une part; et à la pollution créée par les produits de la réaction d'autre part. Parmi les phénomènes physiques on peut citer l'écoulement, le mélange, la réaction chimique et les transferts thermiques.

Pour étudier ces phénomènes, la simulation numérique (par ordinateur) offre une autre alternative moins coûteuse, rapide et propre relativement aux méthodes

classiques basées sur les expériences.

Le problème de la combustion étant très complexe l'étude a été divisée en plusieurs étapes. Dans le cadre du projet combustion deux rapports techniques ont été publiés. Le premier EPM/RT-87-30 (Agouzoul et Camarero, 1987) traite le cas des écoulements bidimensionnels ou axisymétriques de fluide incompressible en régime laminaire. Le deuxième EPM/RT-88/32 (Elkaim et al., 1988) étudie les écoulements de fluide compressible dans des configurations bidimensionnelles.

Dans ce rapport, comme suite aux deux premiers, on développe une méthode numérique pour la simulation des écoulements turbulents faiblement compressibles.

# Chapitre 2

## Équations de base

### 2.1 Les équations de mouvement

On admet que l'écoulement d'un fluide compressible en régime turbulent est régi par les équations de Navier-Stokes et la conservation de l'énergie. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme conservatrice suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

où  $U, F$  et  $G$  sont des vecteurs donnés par:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} + q_x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} + q_y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

avec

$$E_t = \rho \left( e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right); \text{ énérgie totale} \quad (2.5)$$

$$e = c_v T; \text{ énérgie interne} \quad (2.6)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} \quad (2.7)$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

Le système (1) est fermé avec l'équation d'état du fluide, soit pour un gaz parfait.

$$P = \rho r T \quad (2.9)$$

Ce système d'équations peut être résolu numériquement en utilisant l'une ou l'autre des méthodes développées pour les écoulements laminaires. Pour les écoulements turbulents la finesse du maillage et le pas de temps devraient être suffisamment petits pour récupérer les petites structures de la turbulence; avec ces

maillages on dépasserait la capacité des ordinateurs modernes. Pour remédier à ceci on s'intéressera aux équations qui régissent les grandeurs moyennes de l'écoulement.

## 2.2 Les équations moyennes

Les équations moyennes de Reynolds peuvent être obtenues en décomposant chaque variable en une partie moyenne et une partie fluctuante.

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.10)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t + \tau) d\tau \quad (2.11)$$

où

$f$  = variable dépendante (vitesse, pression, densité, etc)

$\bar{f}$  = valeur moyenne

$f'$  = 0

Pour les écoulements compressibles ou les écoulements de mélange, cette technique introduit dans les équations moyennes des termes contenant les fluctuations de la masse volumique (par exemple  $\overline{\rho' \mu'}$ ,  $\overline{\rho' \mu' v'}$ , ...). Afin d'éviter ces termes, difficiles à modéliser, la technique de moyenne pondérée par la masse (Anderson 1984) s'avère plus adéquate. Cette technique peut se décrire comme suit:

on pose,

$$\tilde{f} = \frac{\rho f}{\bar{\rho}} \quad (2.12)$$

on définit une nouvelle fluctuation  $f''$  telle que:

$$f = \tilde{f} + f'' \quad (2.13)$$

Il est important de noter que:

$$\overline{f''} \neq 0 \quad (\text{sauf si } \rho' = 0) \quad (2.14)$$

$$\overline{f''} = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}} \quad (2.15)$$

$$\overline{\rho f''} = 0 \quad (2.16)$$

En utilisant cette dernière technique pour la vitesse et la température (ou l'énergie) et la première pour la masse volumique et la pression et en prenant la moyenne de l'équation (1), on obtient les équations moyennes de Reynolds.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} = 0 \quad (2.17)$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \tilde{E}_t \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p} - \bar{\tau}_{xx} + \overline{\rho u''^2} \\ \overline{\rho u v} - \bar{\tau}_{xy} + \overline{\rho u'' v''} \\ (\tilde{E}_t + \bar{p})\tilde{u} - \tilde{u}\bar{\tau}_{xx} - \tilde{v}\bar{\tau}_{xy} + \bar{q}_x + \overline{\rho c_p T'' u''} - \phi_x \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} - \bar{\tau}_{xy} + \overline{\rho u'' v''} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p} - \bar{\tau}_{yy} + \overline{\rho v''^2} \\ (\tilde{E}_t + \bar{p})\tilde{v} - \tilde{u}\bar{\tau}_{xy} - \tilde{v}\bar{\tau}_{yy} + \bar{q}_y + \overline{\rho c_p T'' v''} - \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Avec

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \operatorname{div} \vec{v} \quad (2.21)$$

après quelques manipulations algébriques en utilisant les relations (14-16) on obtient:

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \operatorname{div} \vec{v} + \mu \left( \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j''}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \operatorname{div} \vec{v}'' \quad (2.22)$$

Les derniers termes, contenant les gradients des fluctuations, sont négligeables en pratique (Anderson 1984). Ainsi  $\bar{\tau}_{ij}$  est approximée par

$$\bar{\tau}_{ij} \simeq \tilde{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu \operatorname{div} \vec{v} \quad (2.23)$$

$$\phi_i = \overline{u_j'' \tau_{ij}} \quad (2.24)$$

en général  $\phi_i$  est négligeable par rapport aux autres termes dans le cas des écoulements faiblement compressibles.

Dans le système (17), l'effet de la turbulence est introduit par les corrélations  $\overline{\rho \mu_i'' u_j''}$  pour les équations de quantité de mouvement et par  $\overline{\rho c_p T'' u_i''}$  pour l'équation de l'énergie. Ces termes, inconnus, nécessitent une modélisation en fonction des quantités moyennes de l'écoulement.

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = \text{tensions de Reynolds}$$

$$\overline{\rho c_p u_i'' T''} = \text{flux de chaleur de Reynolds}$$

l'équation d'état du fluide devient

$$\bar{p} = \bar{\rho} r \bar{T} \quad (2.25)$$

## 2.3 Le modèle de turbulence

Un grand nombre de modèles existe dans la littérature (Mathieu et al., 1984). Des études précédentes (Agouzoul, 1988) nous ont permis de choisir le modèle  $k-\epsilon$  basé sur le concept de la viscosité turbulente. Ce modèle peut être considéré comme un bon compromis entre le temps de calcul et la prédiction réaliste de l'écoulement.

### 2.3.1 Le concept de la viscosité turbulente

Ce concept stipule que les tensions et les flux de chaleurs de Reynolds sont proportionnels aux gradients des valeurs moyennes, soit:

$$\overline{\rho u_i'' u_j''} = -\mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \mu_t \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\rho} k \right) \quad (2.26)$$

$$\overline{\rho c_p T'' u_i''} = -\lambda_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i}$$

avec

$$k = \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{\bar{\rho}}$$

l'énergie cinétique de turbulence.  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  sont la viscosité et la conductivité turbulentes.

Notons que  $\mu_t$  et  $\lambda_t$  dépendent uniquement de l'écoulement, et non du fluide, contrairement à la viscosité et la conductivité du fluide.  $\lambda_t$  est reliée à  $\mu_t$  par la relation:

$$\lambda_t = c_p \frac{\mu_t}{P_{rt}} \quad (2.27)$$

avec  $P_{rt}$  le nombre de Prandtl turbulent qui est constant pour l'écoulement. Il est déterminé d'une manière empirique.

### 2.3.2 Le modèle $k - \epsilon$

C'est un modèle à deux équations de transport pour l'énergie cinétique de turbulence ( $k$ ) et sa dissipation ( $\epsilon$ ).  $k$  et  $\epsilon$  permettent d'évaluer la viscosité turbulente.

Équation de  $k$ :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \bar{\rho} \epsilon \quad (2.28)$$

Équation de  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + \frac{\epsilon}{k} (c_1 P - c_2 \bar{\rho} \epsilon) + \bar{\rho} \epsilon \text{div} \vec{v} \quad (2.29)$$

avec

$$P = 2\mu_t \left( e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\text{div} \vec{v})^2 \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \text{div} \vec{v}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

la viscosité turbulente ( $\mu_t$ ) est reliée à  $k$  et  $\epsilon$  par la relation suivante:

$$\mu_t = \bar{\rho} c_D \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.30)$$

Dans les relations précédentes  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\epsilon$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_D$  sont des constantes empiriques du modèle de turbulence. Les valeurs utilisées sont celles recommandées par Serag-Eldin et Spalding 1978 (voir Lilley 1979).

$$\sigma_k = 1.0 \quad c_1 = 1.44 \quad c_D = 0.09$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3 \quad c_2 = 1.92 \quad P_{rt} \simeq 0.9$$

## 2.4 Résumé

En remplaçant les tensions et les flux de chaleur de Reynolds par leurs expressions dans le système (17) les équations de base s'écrivent sous la forme vectorielle suivante:

(Nota: les signes  $\sim$  et  $-$  sont omis pour plus de clareté)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + S = 0 \quad (2.31)$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \\ \rho k \\ \rho \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx}^e \\ \rho uv - \tau_{xy}^e \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx}^e - v\tau_{xy}^e + q_x^e \\ \rho uk - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \\ \rho u \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy}^e \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy}^e \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy}^e - v\tau_{yy}^e + q_y^e \\ \rho vk - \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \\ \rho v \epsilon - \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P - \rho\epsilon \\ (c_1P - c_2\rho\epsilon)\frac{\epsilon}{k} + \rho\epsilon\text{div}\vec{v} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où

$$\tau_{ij}^e = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} ((\mu + \mu_t)\text{div}\vec{v} + \rho k)$$

$$q_i^e = -(\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.36)$$

$$\mu_t = \rho c_D \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\lambda_t = c_p \frac{\mu_t}{P_{rt}}$$

et l'équation d'état du fluide

$$P = \rho r T \quad (2.37)$$

# Chapitre 3

## Schéma numérique

Il est bien connu qu'en général le système d'équations précédent ne peut être résolu que numériquement. Le schéma numérique est celui développé initialement par Ni (1981) et modifié par Elkaim et al. (1988). Dans cette partie on discutera uniquement du traitement du terme source; les autres sont discrétisés de la même façon que dans Elkaim et al. (1988).

Le système d'équations s'écrit sous la forme vectorielle

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + S = 0 \quad (3.1)$$

Notons  $\delta^1 U_i$  et  $\delta^2 U_i$  les variations de premier et de deuxième ordre du vecteur  $u$  en un point  $i$ .

$$\delta^1 U_i = \left. \frac{\partial U_i}{\partial t} \right|^n \Delta t \simeq - \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right)_i^n \Delta t \quad (3.2)$$

$$\delta^2 U_i = \left. \frac{\partial^2 U_i}{\partial t} \right|^n \frac{(\Delta t)^2}{2} \simeq - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial U} \delta^1 U_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial G}{\partial U} \delta^1 U_i \right) \right] \quad (3.3)$$

Rappelons que les détails de calcul et de la discrétisation de ces termes sont expliqués dans Elkaim et al. (1988). Notons que pour calculer  $\delta^1 U_i$  et  $\delta^2 U_i$  on ne tient pas compte du terme source.

Si  $\delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n$  la variation de  $U$  entre l'instant  $n + 1$  et  $n$  en un point  $i$  on a

$$\delta U_i = \delta^1 U_i + \delta^2 U_i + S_i^n \Delta T + \Delta S_i^n \frac{\Delta t}{2} \quad (3.4)$$

avec

$$\Delta S_i^n = \frac{\partial S}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_i^n \Delta t = \frac{\partial S}{\partial U} S^1 U_i \Big|_i^n \quad (3.5)$$

ceux-ci peuvent s'expliquer en prenant l'équation modèle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = S \quad (3.6)$$

$$S \varphi_i = \varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_i^n \delta t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} \quad (3.7)$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = S$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\Delta t^2}{2} = \frac{\partial S}{\partial U} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \cdot \frac{\Delta T}{2} = \frac{\partial S}{\partial U} \cdot S U \cdot \frac{\Delta T}{2} = \Delta S \frac{\Delta T}{2} \quad (3.8)$$

en un point donné on calcul d'abord le premier ordre  $\delta^1 U_i$  à partir duquel on calcule le deuxième  $\delta^2 U_i$  et le deuxième ordre du terme source  $\Delta S_i$ .

### 3.1 Viscosité artificielle et lissage

Un terme de diffusion artificielle est ajouté à toutes les quantités pour stabiliser le schéma numérique (éviter des oscillations dans la solution) qui est centré dans l'espace. Ceci est nécessaire du fait qu'à certaines régions le maillage n'est pas suffisamment fin pour que les dérivées centrées soient une bonne approximation des grands gradients. Ainsi, à chaque quantité  $\varphi$ , calculée par la relation (3.4), on

ajoute les termes de diffusion artificielle déduits de la différenciation amont; on obtient

$$\varphi^c = \varphi^{n+1} + \frac{|u| \Delta t}{2 \Delta x} \delta_\varphi^i |^n + \frac{|v| \Delta t}{2 \Delta x} \delta_\varphi^j |^n \quad (3.9)$$

avec

$$\delta_\varphi^i = \varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j} \quad (3.10)$$

$$\delta_\varphi^j = \varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}$$

Pour les écoulements faiblement compressibles, il s'est avéré nécessaire d'ajouter un terme de lissage surtout pour la masse volumique. Ce terme se traduit par l'addition au système d'équations de base d'un terme de quatrième ordre. Sous la forme discrétisée ce terme se met sous la forme

$$\varphi^{cc} = \varphi^c + w(\hat{\varphi} - \varphi^c) \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} = & -\frac{1}{4}\varphi_{i+1,j-1} + \frac{1}{2}\varphi_{i+1,j} - \frac{1}{4}\varphi_{i-1,j-1} \\ & + \frac{1}{2}\varphi_{i-1,j} - \frac{1}{4}\varphi_{i-1,j+1} + \frac{1}{2}\varphi_{i,j+1} + \frac{1}{2}\varphi_{i,j-1} \end{aligned}$$

où  $w$  est un facteur de relaxation. Lors des essais numériques effectués on a remarqué qu'il suffit de lisser la masse volumique.

## 3.2 Conditions aux frontières

Une solution numérique en plus de dépendre du schéma numérique dépend de la façon dont les conditions aux frontières sont calculées ou imposées. Parmi les conditions aux frontières on peut distinguer celles qui découlent de la physique

du problème (adhérence sur les parois solides par exemple) et les conditions numériques (extrapolation). En ce qui concerne les conditions pour les grandeurs de l'écoulement (vitesse, pression, masse volumique, température) le traitement est le même que dans Elkaim et al. (1988). Pour les quantités de la turbulence ( $k - \epsilon$ ) un traitement spécial est nécessaire dans les zones près des parois solides (Agouzoul 1988).

Le modèle de turbulence ( $k - \epsilon$ ) utilisé n'est valable que dans les régions où l'écoulement est complètement turbulent. Il n'est pas valable dans les sous-couches visqueuses existantes près des parois solides où les effets visqueux dominent la turbulence. L'utilisation d'un modèle, dit à faible nombre de Reynolds, valable dans ces régions nécessiterait un maillage très fin et par conséquent un temps de calcul et un stockage élevés. Dans ce travail, on a suivi la méthodologie développée par Agouzoul (1988) en utilisant la "loi de paroi". Cette technique consiste à calculer les conditions aux frontières pour  $k$  et  $\epsilon$  aux noeuds adjacents aux parois solides à partir de la variation de la vitesse.

La "loi de paroi" consiste à connaître la variation  $f$ , la vitesse en fonction de la distance normale à la paroi:

$$f(v^+, y^+) = 0 \quad (3.12)$$

où

$$v^+ = \frac{v}{v^*}$$

et

$$y^+ = y \frac{v^*}{v}$$

avec  $v_*$  une vitesse caractéristique reliée à la contrainte de cisaillement et la densité

à la paroi par:

$$v^* = \left( \frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

l'expression de  $f$  de la zone où le point considéré se trouve. Pour un écoulement faiblement compressible avec un modèle à deux zones on a:

$$0 \leq y^+ \leq 10 \quad v^+ = y^+ \quad (3.14)$$

$$0 \leq y^+ \leq 100 \quad v^+ = \frac{1}{k} \ln(Ey^+)$$

le traitement et la mise en oeuvre sont expliqués en détail dans Agouzoul et al. (1988).

### 3.3 Algorithme

L'algorithme de résolution peut se résumer comme suit:

1. estimation des valeurs initiales de

$$\vec{v}, p, T, e, K, \epsilon$$

2. calcul du premier et deuxième ordre pour

$$\vec{v}, p, E_t, K, \epsilon$$

3. correction des variables dépendantes

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^n + S^1 \vec{v} + S^2 \vec{v}$$

$$\rho^{n+1} = \rho^n + S_\rho^1 + S_\rho^2$$

$$E_t^{n+1} = E_t^n + S^1 E_t + S^2 E_t$$

$$k^{n+1} = k^n + S^1 k + S^2 k + \Delta t S + \delta S \frac{\Delta t}{2}$$

4. calcul de la pression à partir de  $p$  et  $E_t$
5. application des conditions aux frontières pour

$$\vec{v}, P, T$$

6. viscosité artificielle et lissage
7. calcul des conditions aux frontières pour  $k$  et  $\epsilon$
8. calcul de la viscosité turbulente.

on répète les étapes 2 à 8 jusqu'à l'atteinte du régime stationnaire s'il en existe un.

# Chapitre 4

## Résultats numériques

### 4.1 Résultats numériques

Toutes les techniques précédentes ont été incorporées dans un programme de simulation numérique par ordinateur. Deux configurations d'écoulements ont été considérées pour la validation du schéma numérique et du traitement des conditions aux frontières.

Le premier cas consiste en un écoulement dans un canal droit. Les conditions aux frontières sont les suivantes:

À l'entrée:

- pression totale  $P_o = \frac{1}{\gamma}$
- température totale  $T_p = 1$
- extrapolation de la pression statique
- $k_e = 0.01$
- $\epsilon_e$  (calculé à partir de  $k_e$ , voir Agouzoul 1988)

- viscosité  $\mu = 10^{-6}$

À la sortie:

- pression statique  $P_s = 0.7P_o$
- extrapolation de toutes les autres variables

Sur les parois solides:

- adhérence  $\vec{v} = \vec{0}$
- $\frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0$
- parois adiabatiques

La figure 1 montre le développement de la vitesse dans le canal. Ceci permet aussi de voir le caractère aplati du profil de vitesse. A la figure 2, on montre la distribution de la pression le long des parois solides.

Le deuxième cas est l'écoulement dans un canal avec expansion rectangulaire. Les conditions aux frontières sont les mêmes que dans le cas précédent.

A la figure 3, on montre le champ de vitesse qui met en évidence la zone de recirculation, résultat auquel on peut s'attendre. Aux figures 4, 5, et 6, on donne la vitesse axiale en fonction de la distance transversale à différentes stations (à l'entrée, dans la zone de recirculation et vers la sortie).

La distribution de la pression statique sur les parois inférieure et supérieure est donnée aux figures 7 et 8.

## 4.2 Conclusion

Le schéma numérique développé par Elkaim et al. (1988) pour les écoulements laminaires a été étendu aux écoulements turbulents. Le traitement des conditions aux frontières développé Agouzoul (1988) a été utilisé avec succès pour les écoulements faiblement compressibles.

Les tests effectués nous ont permis de valider qualitativement les techniques utilisées. Les résultats expérimentaux pour ce régime d'écoulements (faiblement compressibles Mach 1 et turbulents) sont rares dans la littérature. Ils sont disponibles dans le cas des écoulements avec réaction chimique (combustion); ces cas permettront de tester le programme d'une manière quantitative. Ces derniers tests sont en cours.

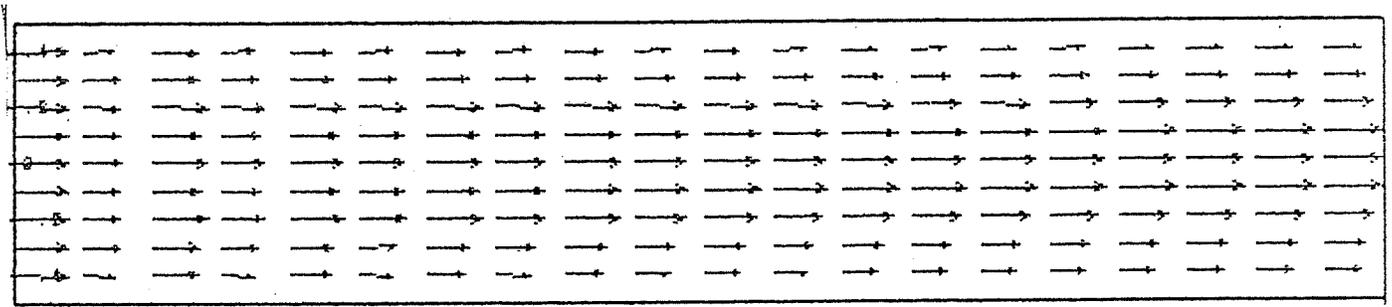
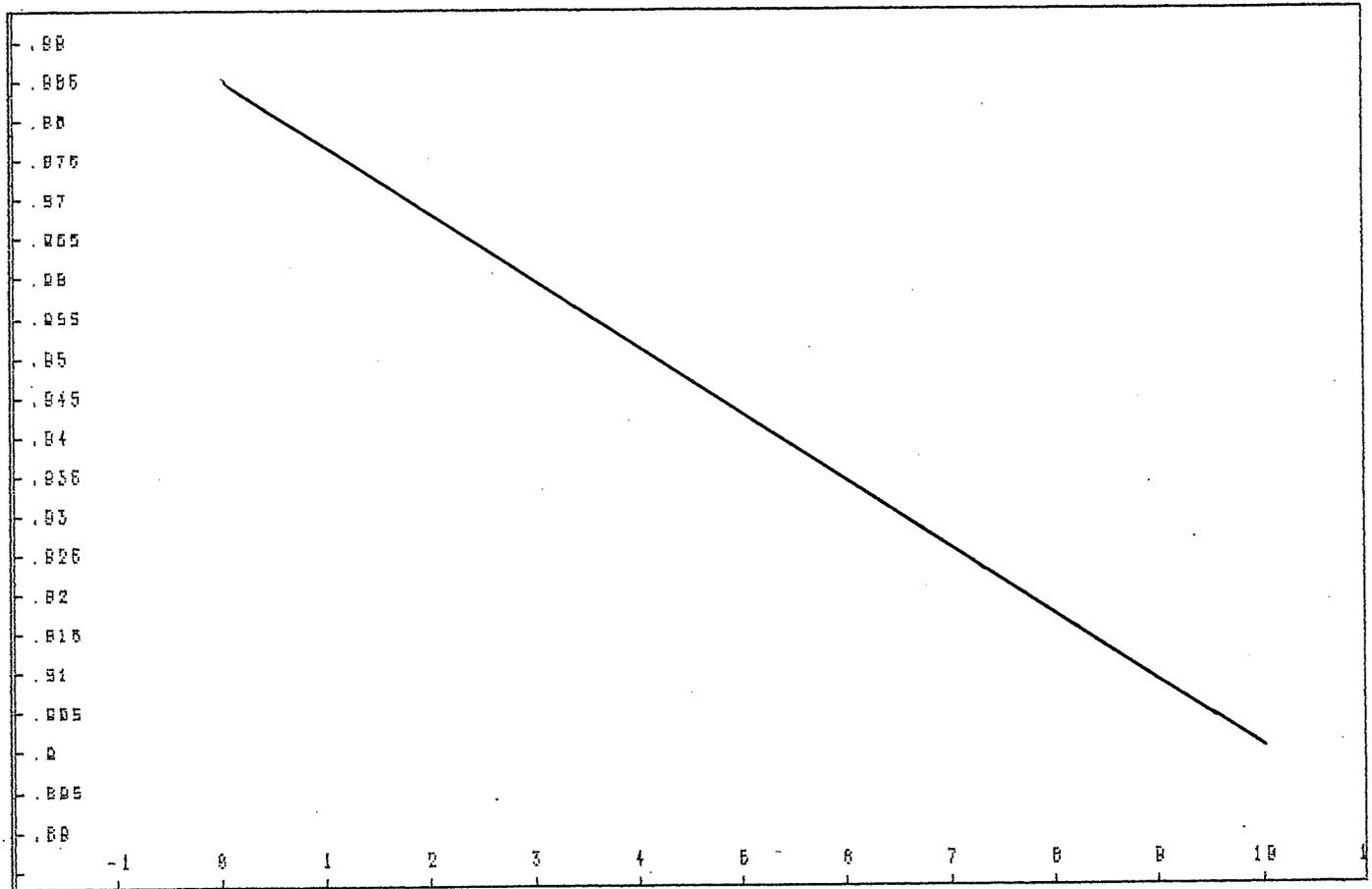


Figure 4.1: Champ de vitesse (canal droit)



X  
Figure 4.2: Pression le long de la paroi du canal

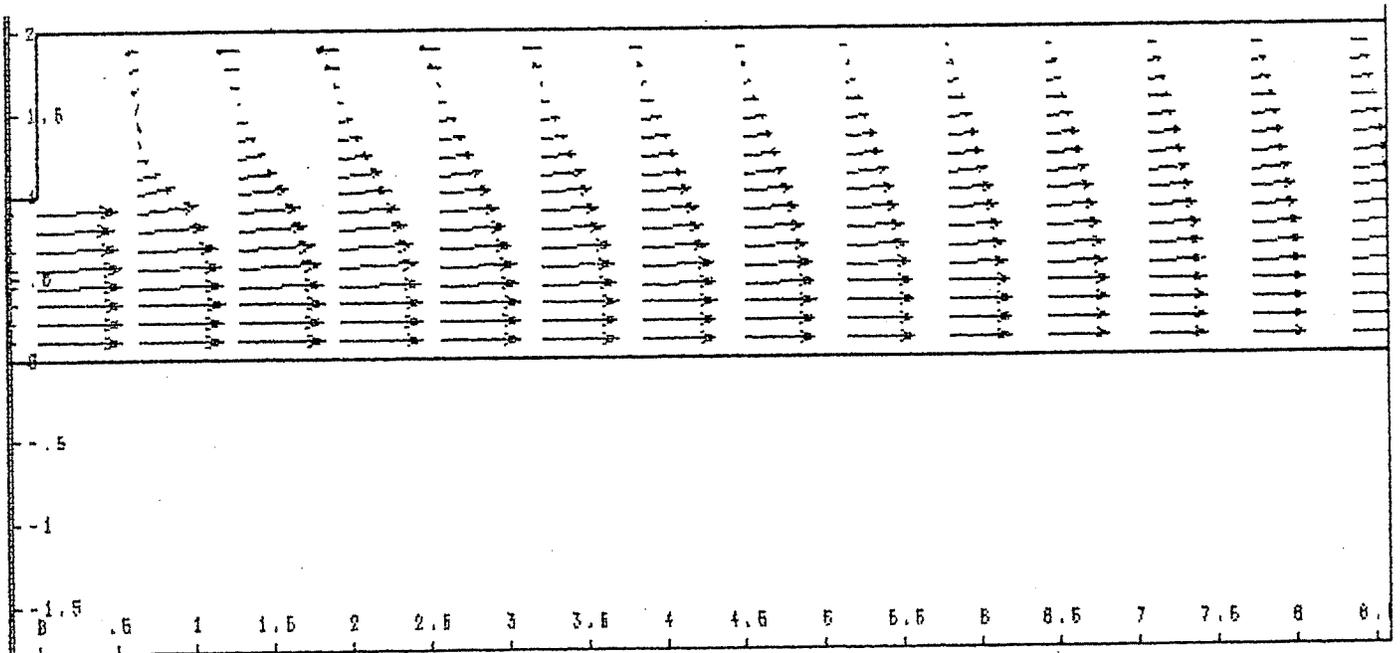


Figure 4.3: Champ de vitesse (marche)

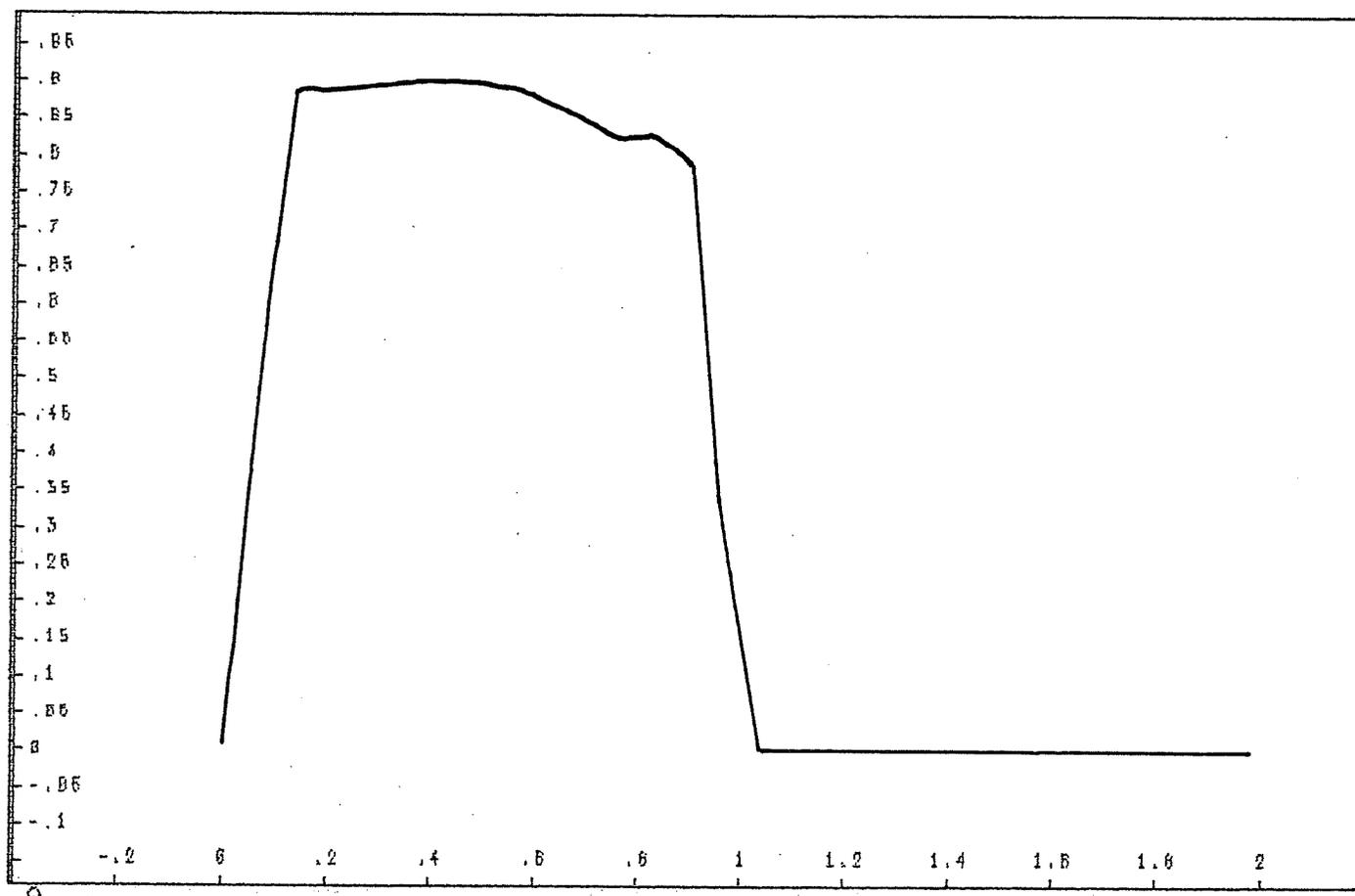


Figure 4.4: Profil de vitesse à l'entrée

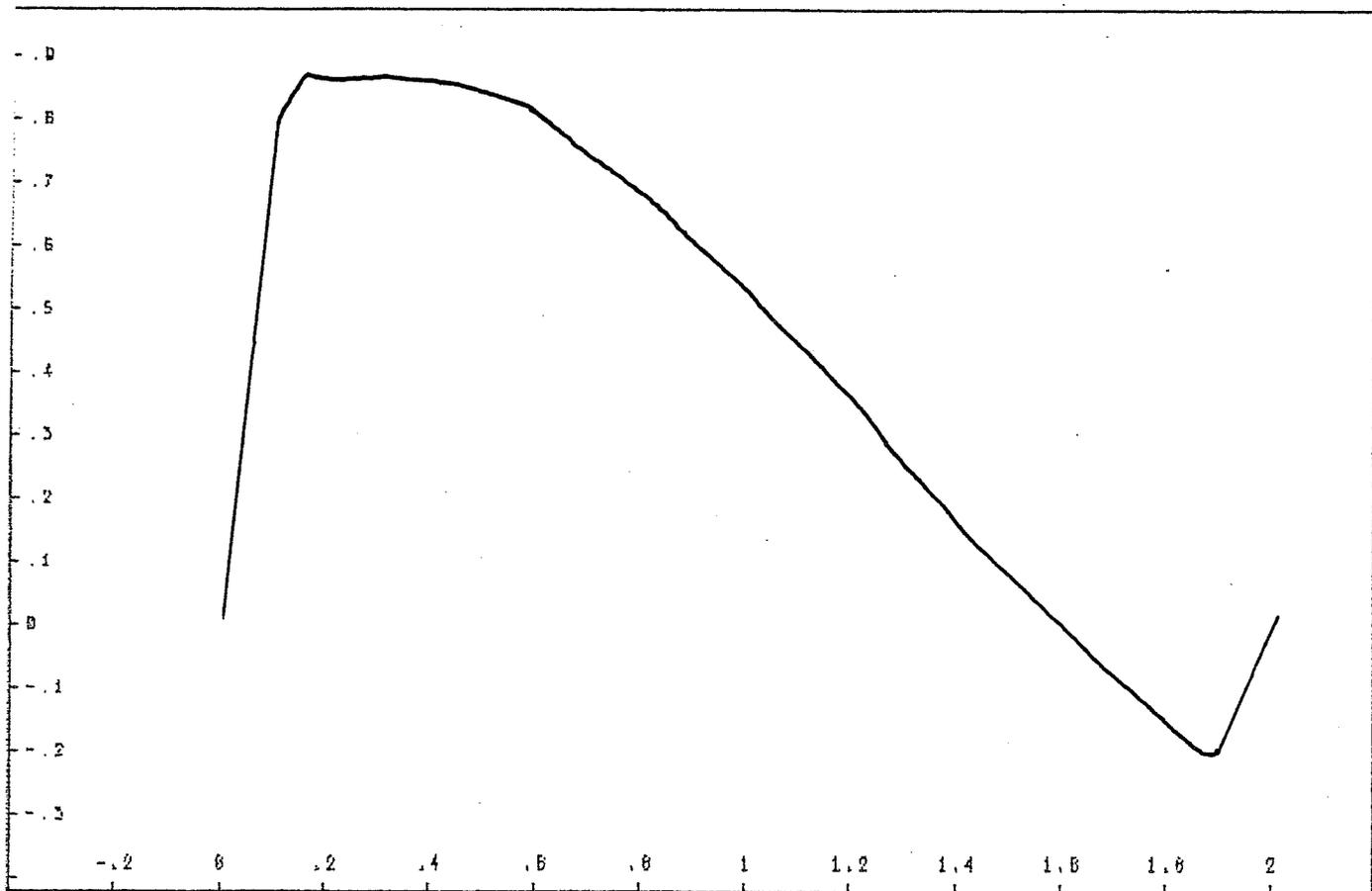


Figure 4.5: Profil de vitesse  $x = 2.0$

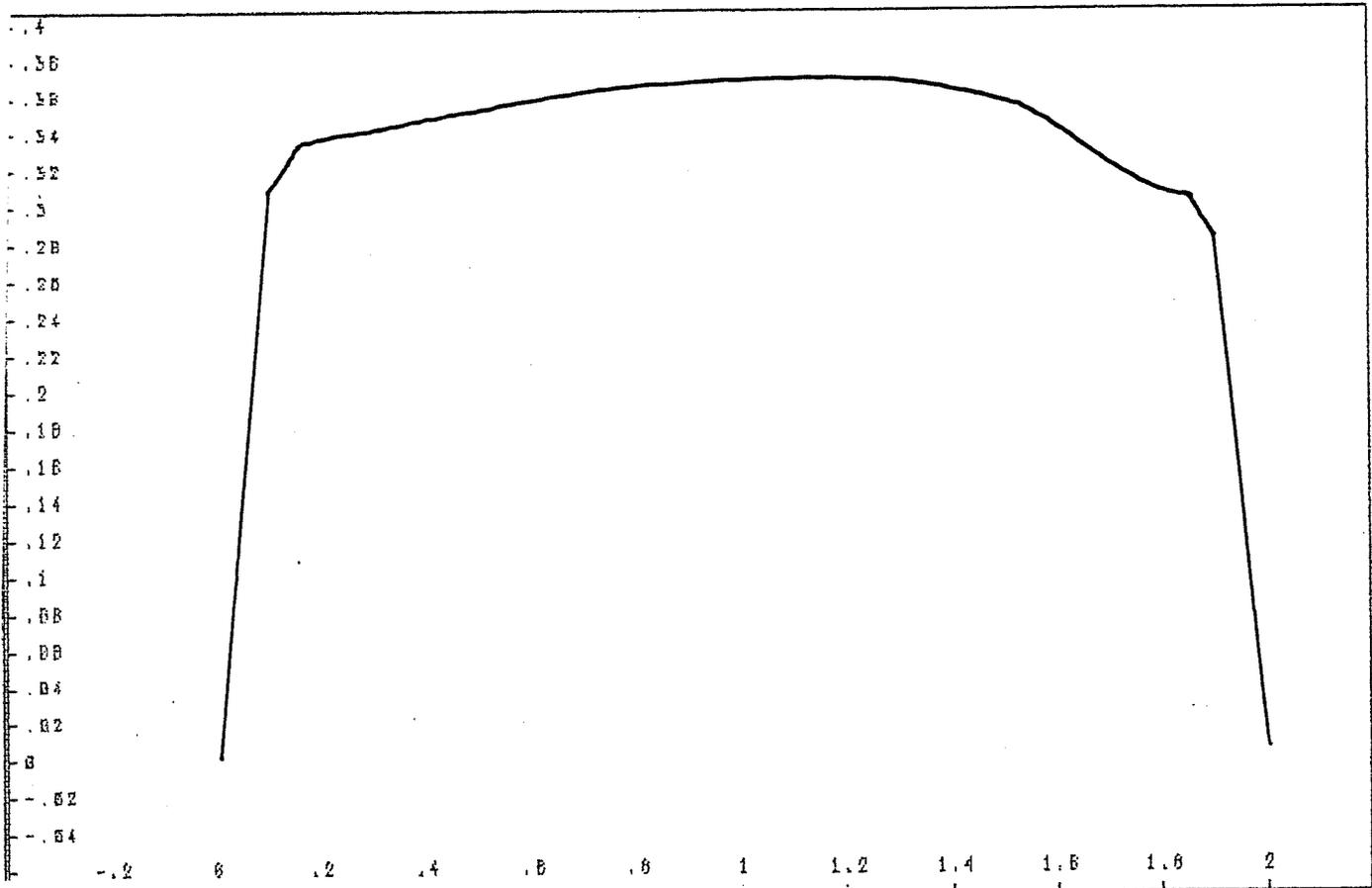


Figure 4.6: Profil de vitesse  $x = 25$ . (après la zone de recirculation)

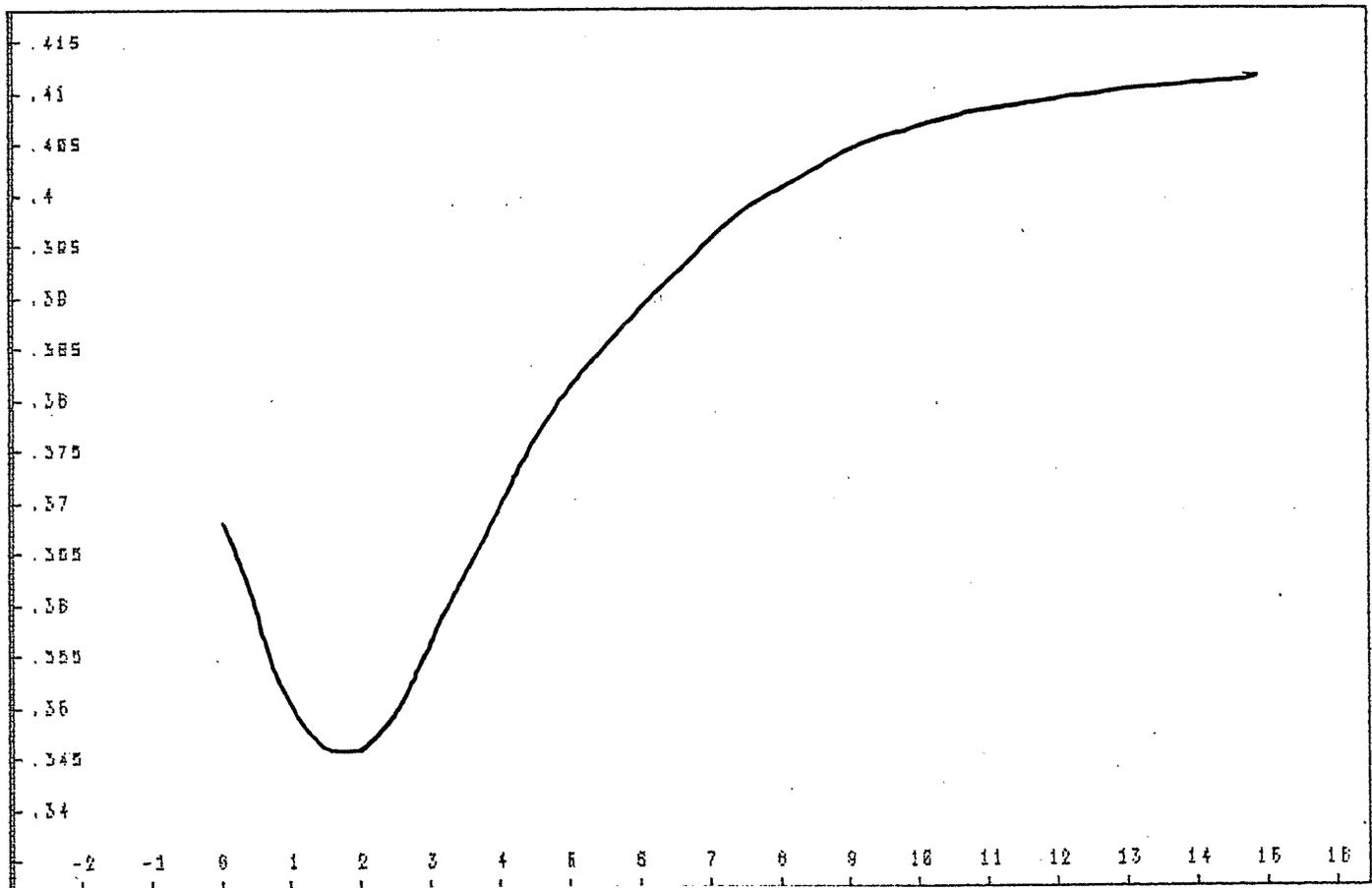


Figure 4.7: Pression le long de la paroi inférieure

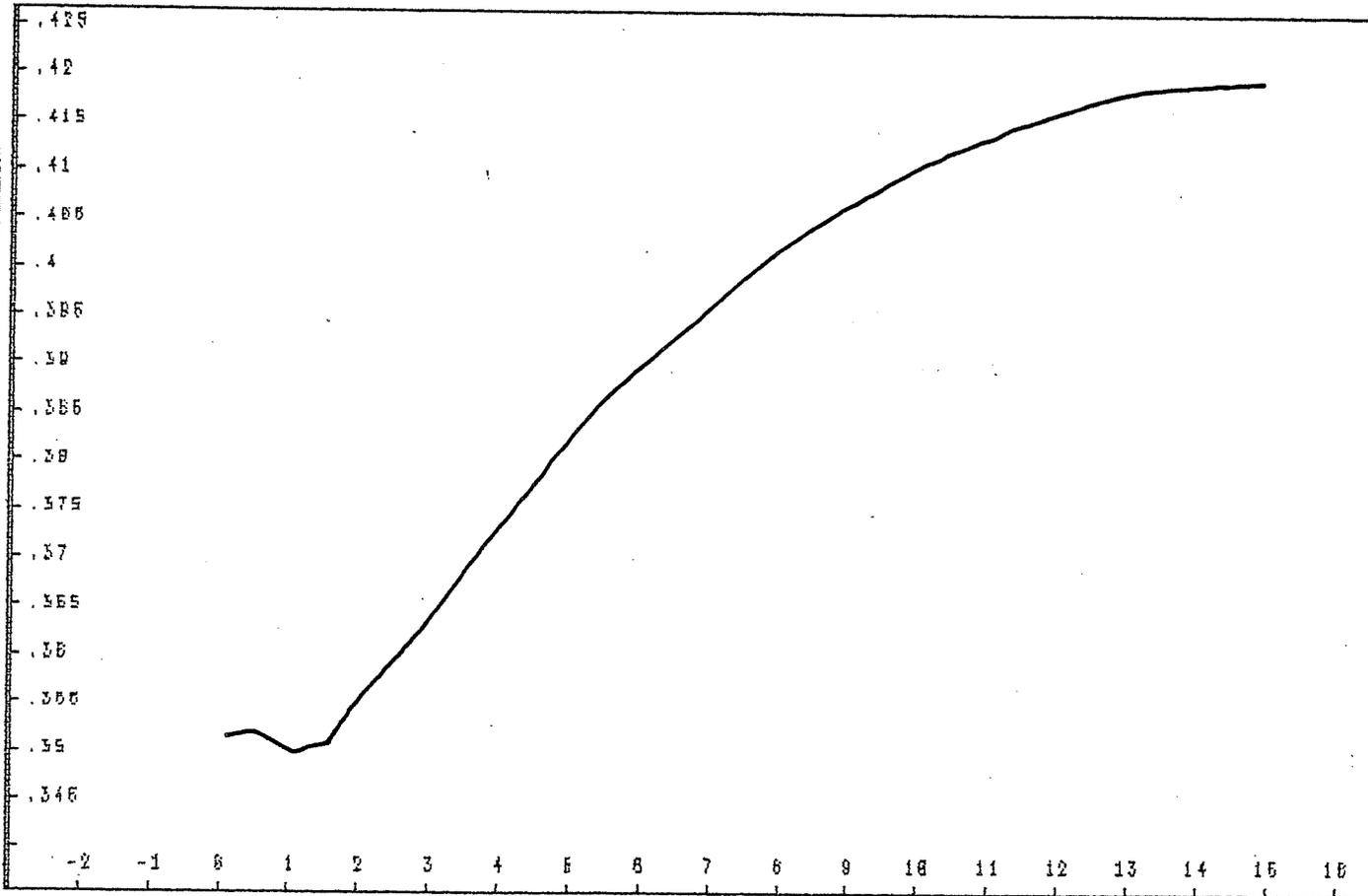


Figure 4.8: Pression le long de la paroi supérieure

# Chapitre 5

## Bibliographie

1. Agouzoul, M. et Camarero, R. 1987 "Simulation des écoulements dans les brûleurs Partie no 1: écoulements laminaires", Rapport technique EPM/RT-87/30, École Polytechnique de Montréal.
2. Agouzoul, M. (1988) "Résolution Numérique des écoulements tridimensionnels turbulents", Thèse de Ph.D. École Polytechnique de Montréal.
3. Agouzoul, M. Camarero, R. et Reggio, M. "Résolution Numérique des écoulements tridimensionnels turbulents", Rapport technique EPM/RT-88/37, École Polytechnique de Montréal.
4. Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H. (1984) *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, HPC New York.
5. Elkaim, D., Agouzoul, M. (1988) "Solution numérique des équations compressibles de Navier-Stokes", Rapport technique EPM/RT-88/32, École Polytechnique de Montréal.

6. Lilley, D.G. (1979) "Flowfield modeling in Practical combustors: A Review"  
Journal of Energy, vol. 3 no. 4.
7. Mathieu, J., Jeandel, D, Launder, B.E., Reynolds, W.C and Rodi, W. (1984)  
*La simulation des modèles de turbulence et leurs applications* volume 1, Éditions Eyrolles.
8. Ni,R.H. (1981) "A Multiple Grid Scheme for solving the Euler Equations"  
AIAA Journal, vol. 20, no. 11.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289683 3