

10 JAN. 2000

EPM/RT-99/21

**DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES
SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NON HOLONOMES**

par

Romano M. De Santis
Professeur

gratuit

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
HIVER 2000

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, Décembre 1999
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS
CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES

Romano M. DeSantis
Département de Génie électrique et de Génie informatique

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au :

Service des Éditions
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale Centre-Ville
Montréal, (Québec) H3C 3A7
Téléphone : (514) 340-4711 ext : 4473
Télécopie : (514) 340-3734

Compter 0,10\$ par page et ajouter 3,00\$ pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

Ce rapport est une version améliorée du rapport avec même titre et même auteur EPM/RT-96/01.

Les améliorations apportées sont les suivantes:

- ◆ Corrections d'un certain nombre d'erreurs de nature typographique;
- ◆ Révision d'un certain nombre de points insuffisamment clairs;
- ◆ Ajout d'un exemple d'application supplémentaire;
- ◆ Ajout d'un annexe concernant les notions fondamentales de cinématique utilisées dans le rapport.

**DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES
SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES**

**DeSantis, R.M., Professeur,
Département de génie électrique et de génie informatique
École Polytechnique de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit,
C.P. 6079 Succ. Centre-Ville
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7**

TABLE DES MATIÈRES

0. Sommaire	3
1. Introduction	4
2. Cinématique d'un ensemble de corps rigides	5
3. Dynamique d'un corps rigide	9
4. Dynamique d'un ensemble de corps rigide	14
5. La procédure de modélisation	18
6. Le cas d'un manipulateur robotique	20
7. Modélisation d'un manipulateur planaire à deux degrés de liberté	23
8. Modélisation d'un tracteur-remorque	29
9. Modélisation d'un robot mobile avec roues motrices indépendantes	40
Conclusions	47
Références	49
Symboles	58
Liste des Figures	60
Annexe A : Éléments de Cinématique	61

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES
SOUS CONTRAINTES HOLONOMES ET NONHOLONOMES

**DeSantis, R.M., Professeur,
Département de génie électrique et de génie informatique
École Polytechnique de Montréal
2900, boul. Édouard-Montpetit,
C.P. 6079 Succ. Centre-Ville
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7**

0. SOMMAIRE

Le problème de modélisation de la dynamique de systèmes mécaniques composés de corps rigides assujettis à des contraintes holonomes et nonholonomes est discuté. Fondé sur les approches de Denavit-Hartenberg et de Kane, et sur les notions de coordonnées, vitesses et forces généralisées, le développement que nous présentons est applicable à de nombreux systèmes qui doivent être pris en ligne de compte dans l'automatisation industrielle avancée. Parmi ces systèmes il y a, à titre d'exemple, les manipulateurs à chaîne ouverte ou à chaîne fermée, les robots mobiles et les ponts roulants. La modélisation de la dynamique d'un manipulateur plan avec deux degrés de liberté, d'un tracteur-remorque, et d'un robot mobile avec roues motrices indépendantes illustrent la méthode.

1. INTRODUCTION

L'automatisation avancée de machines industrielles, comme les robots manipulateurs, les ponts roulants, les véhicules de transport et les chargeurs-transporteurs, exige que divers problèmes soient résolus. Suffit de penser au problème de la détermination des forces qui sont nécessaires pour qu'une machine exécute une commande assignée, au problème de faire qu'un véhicule emprunte un chemin désiré, à la planification des tâches et à d'autres problèmes semblables. A son tour, une solution efficace à ces problèmes exige une solide compréhension des relations qui existent entre les forces et les couples appliqués à la machine, et les accélérations, vitesses, positions et orientations qui s'ensuivent (voir par exemple, DeSantis et al. (1994, 1995)).

Ces relations sont étudiées en détail (sous la rubrique «modélisation») dans différents livres d'introduction à la robotique (par exemple, Kane et Levinson (1983), Spong et Vidyasagar (1987), et Craig (1989)), ainsi que dans des articles spécialisés (par exemple, Kane et Levinson (1985), Nikravesh et al. (1985), et Saha et Angeles (1991)). Il n'est cependant pas toujours facile d'extraire de cette documentation une réponse à certaines questions fondamentales soulevées par la modélisation des systèmes qui sont d'intérêt en robotique. Comment peut-on formuler le modèle de la dynamique d'une machine industrielle? Comment les contraintes holonomes et nonholonomes interviennent-elles dans la description de ce modèle? Pourquoi la dynamique d'un manipulateur robotique possède-t-elle les propriétés structurelles que nous leur tenons pour acquis (telle une forme spéciale pour le modèle d'état, la propriété positive définie de la matrice d'inertie, la relation spéciale entre la dérivée de la matrice d'inertie et la matrice de Coriolis et les forces centripètes)? Dans quelle mesure la dynamique d'autres systèmes mécaniques d'intérêt partage-t-elle ces propriétés? Par exemple les ponts roulants, les véhicules de transport et les véhicules de chargement-transport-déchargement possèdent-ils ces propriétés? Dans quelle mesure les méthodes de modélisation et les techniques de contrôle hautement raffinées mises au point pour les

manipulateurs robotiques peuvent-elles être appliquées à d'autres types de mécanismes? Avec quelles modifications, quelle efficacité de calcul et quelles hypothèses physiques supplémentaires?

Le présent document a pour but de contribuer à répondre à ces questions en présentant une méthode de modélisation systématique et unifiée applicable à divers systèmes mécaniques (dont ceux mentionnés ci-dessus). Fondées sur l'approche bien connue de Kane et fortement influencées par le récent ouvrage de Saha et Angeles (1991), les étapes de cette méthode sont élaborées de façon à accentuer l'intuition et l'importance physique de même que sa valeur du point de vue pédagogique. En plus de concepts élémentaires que l'on retrouve, par exemple, dans les chapitres 1 à 3 de Spong et Vidyasagar (1987), nous nous appuyerons sur les notions de matrices jacobiniennes, de vitesses admissibles dans l'espace opérationnel et dans l'espace de configuration, de forces généralisées et de coordonnées généralisées, de contraintes holonomes et nonholonomes.

2. CINÉMATIQUE D'UN ENSEMBLE DE CORPS RIGIDES

Une machine industrielle peut être vue comme un système mécanique formé de n corps rigides dans un espace tridimensionnel. Nous associons à chacun de ces corps un repère à trois dimensions et décrivons la position et l'orientation du i -ème corps à l'aide du vecteur $\chi_i := [c_i \ \xi_i]$, $i=1,2,.. n$, où c_i fournit les coordonnées de l'origine du repère du corps par rapport à l'espace opérationnel (souvent appelé également espace Cartésien ou espace de travail) et ξ_i décrit l'orientation du corps. ξ_i peut correspondre à une matrice de rotation, un vecteur Euler, un triplet d'angles d'Euler, un quaternion ou toute autre description appropriée d'une orientation (voir Annexe A).

Nous décrivons la vitesse du i -ème corps par rapport à l'espace opérationnel avec un vecteur $v_i := [v_i \ \Omega_i]$, où v_i représente la mesure, par rapport au repère du corps, de la vitesse du centre de masse du corps et Ω_i la mesure de la vitesse angulaire. Nous associons la matrice de vitesse angulaire à la vitesse angulaire Ω_i :

$$S(\Omega_i) := \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{iz} & \Omega_{iy} \\ \Omega_{iz} & 0 & -\Omega_{ix} \\ -\Omega_{iy} & \Omega_{ix} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

L'ensemble des positions et des orientations des n corps du système est décrit par le vecteur composé

$$\chi := [\chi_1' \ \chi_2' \ \dots \ \chi_n']'; \quad (2)$$

l'ensemble des vitesses par le vecteur

$$v := [v_1' \ v_2' \ \dots \ v_n']'. \quad (3)$$

Dans la plupart des applications, les corps du système mécanique sont soumis à un ensemble de contraintes de position et d'orientation. Ces contraintes (appelées contraintes holonomes) peuvent souvent être modélisées au moyen d'un ensemble d'équations scalaires de la forme suivante

$$h_i(\chi) = 0, \quad i = 1, \dots, p_1. \quad (4)$$

En supposant ces équations indépendantes, il suit que les valeurs admissibles de χ peuvent être décrites en tant que fonction d'un vecteur de coordonnées généralisées (vecteur de configuration) $q \in \mathbb{R}^p$,

$$\chi = f(q). \quad (5)$$

La dimension de q correspond généralement au nombre de degrés de liberté du système mécanique et est égale à $6n - p_1$.

La présence de contraintes holonomes induit la présence de contraintes de vitesse. De fait, à partir des équations 4 et 5 (en se servant des formules de propagation établissant la relation de Ω_i à la dérivée temporelle de ξ_i), il suit que les vecteurs v_i peuvent être exprimés comme suit

$$v_i = J_{h_i}(q) \dot{q}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Dans cette équation, \dot{q} est la vitesse dans l'espace des configurations; $J_{hi}(q)$ est une matrice $6 \times p$ (la matrice jacobienne du i -ème corps), dont les colonnes (vitesses partielles holonomes) sous-tendent le sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel, qui sont compatibles avec les contraintes holonomes. Introduisant la matrice composée (de dimension $6n \times p$)

$$J_h := [J_{h1} \quad J_{h2} \quad \dots \quad J_{hn}] \quad (7)$$

nous pouvons réécrire l'équation 6 sous la forme plus concise :

$$v = J_h(q)\dot{q} \quad (8)$$

Dans certains systèmes (comme par exemple les véhicules de transport, les robots mobiles avec roues et les ponts roulants), le vecteur de vitesse, v , est assujéti à des contraintes dont l'origine est indépendante de la présence des contraintes holonomes. Ces contraintes supplémentaires (appelées contraintes nonholonomes) souvent peuvent être décrites par un ensemble d'équations de la forme suivante :

$$g_i(\chi) v = 0, \quad i = 1, \dots, \ell_1 \quad (9)$$

En se servant des équations 5 et 8, l'équation 9 peut être alors formulée comme suit :

$$H(q)\dot{q} = 0 \quad (10)$$

où

$$H(q) := g(f(q)) J_h(q) \quad (11)$$

et

$$g(f(q)) := [g_1(q)' \quad g_2(q)' \quad \dots \quad g_{\ell_1}(q)']'$$

En supposant que $H(q)$ soit une matrice de plein rang, l'équation 10 suggère que \dot{q} peut être représenté comme suit :

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}^{\ell}, \ell = p - \ell_1, \quad (12)$$

où α est le vecteur des vitesses généralisées; J_{nh} est une matrice de plein rang $p^* \ell$ (matrice orthogonale complémentaire de $H(q)$, Saha et Angeles 1991) telle que

$$HJ_{nh} = 0. \quad (13)$$

Avec l'introduction de la matrice Jacobienne (avec dimension $6n^* \ell$)

$$J := J_h J_{nh} \quad (14)$$

des équations 8 et 12, il suit

$$v = J\alpha \quad (15)$$

et, conséquemment,

$$\dot{v} = \dot{J}\alpha + J\dot{\alpha}. \quad (16)$$

Remarque 2.1. Les vecteurs des coordonnées généralisées q et des vitesses généralisées α ne sont pas définis d'une façon unique. Comme il sera illustré dans les exemples à suivre, un choix approprié de ces vecteurs émerge souvent d'une façon naturelle à partir de considérations physiques. Des lignes directrices (visant à faire que ce choix soit efficace au point de vue de la simplicité des équations qui s'en suivent) peuvent être retrouvées dans Mitiguy et Kane 1996.

Remarque 2.2. En analogie à J_h , les colonnes de J_{nh} (vitesses partielles nonholonomes) sous-tendent le sous-espace des vitesses au sein de l'espace de configuration qui sont compatibles avec les contraintes nonholonomes. Les colonnes de J (vitesses partielles holonomes et nonholonomes) sous-tendent le sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel qui sont admissibles en vertu de l'imposition simultanée des contraintes holonomes et nonholonomes.

Remarque 2.3. Un manipulateur robotique peut être vu comme un système mécanique formé d'un ensemble ordonné de n corps rigides (segments). Chaque segment a deux segments adjacents, sauf le premier qui est fixe (la base) et le dernier (le segment terminal), qui n'en ont qu'un. Le

mouvement relatif de deux segments adjacents est une rotation autour d'un axe d'articulation (ou une translation le long d'un axe d'articulation) qui demeure invariant par rapport à chacun des deux segments. Il suit que le nombre de degrés de liberté du système mécanique est égal au nombre de segments n . Les entrées du vecteur de configuration q sont alors généralement représentées soit par les angles ou par les distances (variables d'articulation) qui décrivent le déplacement relatif de deux segments adjacents. De plus, le manipulateur n'étant pas (en général) soumis à des contraintes nonholonomes, le vecteur des vitesses généralisées α aura la même dimension de q et il est en général représenté par la dérivée de q . Les repères à associer à chaque segment sont choisis en observant un ensemble de règles cinétiques bien établies (formalisme de Denavit Hartenberg, Craig 1989, p. 77, Fu-Gonzales-Lee 1987, p. 36-37); les entrées de vecteur c_i correspondent aux coordonnées de l'origine du i -ème repère; le vecteur ξ_i correspond généralement à la matrice de rotation décrivant l'orientation du repère par rapport à l'espace opérationnel. Avec le formalisme de Denavit Hartenberg, la fonction cinétique directe $f(q)$ est normalement décrite en termes des paramètres de Denavit-Hartenberg et des matrices de transformation de base (Craig 1989, p.76). Le calcul des vitesses, des accélérations, des matrices jacobiennes et de leur dérivées est effectué en utilisant des formules de propagation des vitesses et des accélérations dont la simplicité est encore une fois tributaire de l'efficacité offerte par le formalisme de Denavit-Hartenberg.

3. DYNAMIQUE D'UN CORPS RIGIDE

Soit f_i la mesure relative au repère du i -ème corps de la résultante des forces appliquées au i -ème corps; soit n_i la mesure du moment résultant de ces forces relatif au centre de masse du corps.

En supposant que l'espace opérationnel soit un repère inertiel, le déplacement du centre de masse (cdm) du i -ème corps assujetti à l'application de f_i et de n_i est décrit à l'aide de l'équation de Newton

($f = ma$) qui donne

$$f_i = S(\Omega_i)m_i v_i + m_i \dot{v}_i \quad (1)$$

où m_i est la masse du corps; le changement d'orientation du corps est décrit par de l'équation d'Euler ($N = dH / dt$; $H := \text{moment_de_quantité_de_mouvement}$) qui donne

$$n_i = S(\Omega_i)j_i \Omega_i + j_i \dot{\Omega}_i \quad (2)$$

où j_i est la matrice d'inertie massique relative au repère du corps translaté dans le centre de masse.

Remarque 3.1. La matrice d'inertie d'un corps relative à un repère C est donnée par les expressions suivantes (voir, par exemple, le chapitre 6 de Craig 1989)

$${}^c I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} := \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV$$

$$I_{xy} := \iiint_V xy \rho dV$$

$$I_{yy} := \dots$$

.....

où ρ est la densité de masse par unité de volume et V est le volume occupé par le corps.

Remarque 3.2. Les équations 1 et 2 représentent le modèle dynamique du système qui est nécessaire afin de concevoir un éventuel contrôleur. En fait, elles permettent de calculer la force f_i et le couple n_i requis pour imposer au i -ème corps une accélération linéaire et angulaire spécifiées. Ces équations permettent aussi de calculer la position et l'orientation résultant de l'application d'une fonction-temps spécifiée de f_i et n_i . Tout particulièrement, avec le vecteur c_i dénotant les coordonnées relatives à l'espace opérationnel du centre de masse du corps, et avec $\xi_i := R_i$ dénotant

la matrice de rotation décrivant l'orientation du corps, nous obtenons (le modèle utilisé en simulation)

$$\dot{v}_i = \frac{f_i}{m_i} - S(\Omega_i)v_i \quad (3)$$

$$\dot{\Omega}_i = j_i^{-1} \{ n_i - S(\Omega_i)j_i\Omega_i \} \quad (4)$$

$$\dot{R}_i = R_i S(\Omega_i) \quad (5)$$

$$\dot{c}_i = R_i v_i \quad (6)$$

En utilisant les notations

$$v_i := \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}; \Omega_i = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}; f_i = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}; n_i = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},$$

en prenant comme hypothèse que les axes du repère C coïncident avec les axes principaux d'inertie du corps rigide,

$${}^c I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

et en observant que

$$S(\Omega_i)v_i = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_z v_y + \Omega_y v_z \\ \Omega_z v_x - \Omega_x v_z \\ -\Omega_y v_x + \Omega_x v_y \end{bmatrix}$$

$$S(\Omega_i)j_i\Omega_i = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx}\Omega_x \\ I_{yy}\Omega_y \\ I_{zz}\Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\Omega_y\Omega_z \\ (I_{xx} - I_{zz})\Omega_x\Omega_z \\ (I_{yy} - I_{xx})\Omega_y\Omega_x \end{bmatrix}$$

les équations (3,4) deviennent

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_z v_y - \Omega_y v_z \\ \Omega_x v_z - \Omega_z v_x \\ \Omega_y v_x - \Omega_x v_y \end{bmatrix} + 1/m \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (3')$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{yy} - I_{zz})\Omega_y\Omega_z / I_{xx} \\ (I_{zz} - I_{xx})\Omega_x\Omega_z / I_{yy} \\ (I_{xx} - I_{yy})\Omega_x\Omega_y / I_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_x / I_{xx} \\ n_y / I_{yy} \\ n_z / I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4')$$

Remarque 3.3. Si l'on représente l'orientation du corps rigide avec le vecteur $\zeta_i := [\alpha \ \beta \ \gamma]^t$, où α, β, γ dénotent les angles d'Euler ($\alpha = \text{lacet}$, $\beta = \text{tangage}$ et $\gamma = \text{roulis}$), alors les équations (5,6) assument la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s\gamma / c\beta & c\gamma / c\beta \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 1 & \tan \beta / s\gamma & \tan \beta / c\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (5')$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - s\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (6')$$

où l'on a posé $[x \ y \ z]^t := c_i$. Les équations (3',4',5',6') représentent le modèle d'état de notre corps rigide. Dans ce modèle, l'état est représenté par le vecteur

$$X := \begin{bmatrix} x & y & z & v_x & v_y & v_z & \alpha & \beta & \gamma & \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \end{bmatrix}^t$$

↑↑↑ mesure relative à C de la vitesse angulaire du corps/repère inertiel;

↑↑ orientation du corps/repère inertiel;

↑↑ mesure relative à C de la vitesse du corps/repère inertiel;

↑↑↑ coordonnées/repère inertiel de l'origine de C, un repère solide avec le corps ayant origine dans le cdm du corps;

l'entrée (action de contrôle) est représentée par le vecteur

$$u := \begin{bmatrix} \underbrace{f_x \quad f_y \quad f_z}_{\substack{\uparrow \\ \text{mesure relative à C de la résultante des forces appliquées au corps.}}} \quad \underbrace{n_x \quad n_y \quad n_z}_{\substack{\uparrow \\ \text{mesure relative à C du moment résultant de forces appliquées au corps.}}} \end{bmatrix},$$

Remarque 3.4. Pour des raisons qui deviendront claires un peu plus loin dans le texte, il est utile de réécrire les équations 1 et 2 sous la forme plus concise :

$$M_i \dot{v}_i = -W_i M_i v_i + \omega_i \quad (7)$$

où M_i est la matrice de masse étendue,

$$M_i := \begin{bmatrix} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & J_i \end{bmatrix}; \quad (8)$$

W_i est la matrice de vitesse angulaire étendue,

$$W_i := \begin{bmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{bmatrix}; \quad (9)$$

ω_i , le vecteur force-couple appliqué au corps, est défini comme suit:

$$\omega_i := \begin{bmatrix} f_i' & n_i' \end{bmatrix}'. \quad (10)$$

4. DYNAMIQUE D'UN ENSEMBLE DE CORPS RIGIDES

L'équation 3.7 est valide pour $i = 1, 2, \dots, n$. Nous avons donc,

$$M_1 \dot{v}_1 = -W_1 M_1 v_1 + \omega_1$$

$$M_2 \dot{v}_2 = -W_2 M_2 v_2 + \omega_2$$

.....

$$M_n \dot{v}_n = -W_n M_n v_n + \omega_n$$

où M_i , W_i et ω_i sont tels que définis par les équations 3.8-3.10. En introduisant les notations

$$M := \text{diag}(M_i) \tag{1}$$

$$W := \text{diag}(W_i) \tag{2}$$

$$\omega := [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]^T, \tag{3}$$

nous pouvons alors écrire

$$M \dot{v} = -W M v + \omega. \tag{4}$$

En se servant des équations 2.15 et 2.16, il suit

$$M J \dot{\alpha} = -M J \dot{\alpha} - W M J \alpha + \omega. \tag{5}$$

La prémultiplication par J' des deux membres de cette équation donne

$$J' M J \dot{\alpha} = -J' M J \dot{\alpha} - J' W M J \alpha + J' \omega. \tag{6}$$

En introduisant la matrice d'inertie

$$D(q) := J' M J, \tag{7}$$

la matrice des forces de Coriolis et centripètes

$$C(q, \alpha) := J' (M \dot{J} + W M J), \tag{8}$$

et le vecteur des forces généralisées

$$\tau := J' \omega, \quad (9)$$

on obtient le modèle dynamique

$$D(q)\dot{\alpha} = -C(q, \alpha)\alpha + \tau. \quad (10)$$

La relation entre les forces généralisées, les accélérations, les vitesses, les positions et les orientations de l'ensemble des n corps peut se résumer par les équations suivantes

$$\dot{\alpha} = g_0 + g_w \tau \quad (11)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha \quad (12)$$

$$\chi = f(q) \quad (13)$$

où

$$g_0 := -D(q)^{-1} C(q, \alpha)\alpha \quad (14)$$

et

$$g_w := D(q)^{-1}. \quad (15)$$

Ces équations représentent le modèle d'état du système; le vecteur $[\alpha' q']$ représente l'état du système; τ représente l'action de contrôle.

Remarque 4.1. Le vecteur force-couple ω peut être perçu comme décomposable en

$$\omega = \omega_c + \omega_a \quad (16)$$

où ω_c (force-couple de contrainte) représente la résultante des forces et des couples qui sont nécessaires pour que les contraintes holonomes et nonholonomes soient effectivement satisfaites; ω_a (force-couple actif) représente la résultante des forces et des couples qui influencent d'une façon explicite le mouvement du système. En supposant que les forces-couples relatifs aux contraintes n'effectuent aucun travail, ω_c est orthogonal aux valeurs admissibles du vecteur de vitesse v , à savoir,

$$v' \omega_c = 0. \quad (17)$$

De l'équation 2.15, il suit

$$\alpha' J' \omega_c = 0 \quad (18)$$

et, par conséquent, puisque cette dernière équation doit être valable pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$,

$$J' \omega_c = 0. \quad (19)$$

Cette dernière équation implique $\tau := J' \omega = J' \omega_a$. En connaissant ω_a on peut alors connaître $\dot{\alpha}$, d'où en intégrant les équations 11 et 13 on peut calculer q et donc χ . La résultante des forces de contraintes ω_c , elle peut être calculée en utilisant l'équation 4.

Remarque 4.2. Tel que l'illustre la figure 1, le modèle d'état du système est formé d'une composante dynamique (équation 11) où un contrôle τ peut toujours être déterminé de sorte que $\dot{\alpha}$ ait une valeur arbitrairement spécifiée, suivie d'une composante cinétique, donnant la position et l'orientation en fonction des vitesses généralisées (équations 12 et 13). Cette structure suggère que le problème de faire que χ suive une trajectoire désirée puisse être résolu en deux étapes. Dans une première étape, on considère $\dot{\alpha}$ ou α comme une action de contrôle auxiliaire et on détermine des valeurs de ce contrôle auxiliaire qui permettent d'atteindre l'objectif désiré. Dans une deuxième étape, on détermine le vecteur des forces généralisées qui est requis pour obtenir le contrôle auxiliaire. Lorsque $\dot{\alpha}$ est choisi comme contrôle auxiliaire, cette méthode correspond à la méthode de contrôle qui va sous le nom de « contrôle par régulation d'accélération » (formalisée par Luh, Walker et Paul, 1980). Lorsque l'attention se porte plutôt sur α elle correspond à la méthode qui va sous le nom de « contrôle par régulation de vitesse » (formalisée par Whitney, 1982).

Remarque 4.3. Il est clair, depuis l'équation 7, que la matrice d'inertie $D(q)$ est symétrique, définie-positive et inversible. Une autre propriété de cette matrice est représentée par sa relation

spéciale avec la matrice $C(q, \alpha)$. Pour illustrer cette propriété, notons que pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha' J' W M J \alpha &= v' W M v = \sum v_i' W_i M_i v_i = \sum v_i' S(\Omega_i) m_i v_i + \sum \Omega_i' S(\Omega_i) j_i \Omega_i \\ &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

De l'équation 8, il suit

$$\begin{aligned} \alpha' C(q, \alpha) \alpha &= \alpha' J' (M J + W M J) \alpha = \alpha' J' (M J) \alpha = \frac{1}{2} \alpha' \left\{ \frac{d}{dt} J' M J \right\} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \alpha' \dot{D}(q) \alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

et, par conséquent, la propriété recherchée

$$\alpha' (\dot{D}(q) - 2C(q, \alpha)) \alpha = 0. \quad (22)$$

Cette équation joue un rôle important dans la conception et l'analyse des systèmes de contrôle des manipulateurs robotiques (voir, par exemple, la remarque 6.1, voir aussi Li-Slotine 1991).

Remarque 4.4. Lorsque le mouvement du système mécanique est limité à un espace bidimensionnel (comme dans le cas d'un manipulateur ou d'un robot mobile planaires), la complexité des équations 1 à 10 est considérablement réduite. En particulier, les dimensions des vecteurs χ_i , v_i , Ω_i , v_i , et ω_i se réduisent à 3, 2, 1, 3, et 3 respectivement. De plus, en mettant l'espace bi-dimensionnel en correspondance avec le plan xy du repère de l'espace opérationnel, les matrices M_i et W_i deviennent

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_{zzi} \end{bmatrix} \quad (23)$$

et

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{zi} & 0 \\ \Omega_{zi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

5. LA PROCÉDURE DE MODÉLISATION

Le développement des sections précédentes suggère que le modèle de la dynamique d'un système mécanique formé de n corps rigides puisse être obtenu en adoptant les étapes suivantes:

1. Joindre un repère à chacun des n corps; représenter la position et l'orientation de ce repère par

rapport à l'espace opérationnel avec un vecteur approprié $\chi_i := \begin{bmatrix} c_i' & \xi_i' \end{bmatrix}$.

2. En dénotant avec p le nombre de degrés de liberté du système, sélectionner un vecteur de coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^p$ (cette étape tient compte des contraintes holonomes).

3. Identifier la fonction (cinématique directe) $f(q)$ de sorte que

$$\chi := \begin{bmatrix} \chi_1' & \chi_2' & \cdots & \chi_n' \end{bmatrix}' = f(q). \quad (1)$$

4. Déterminer les matrices jacobiennes $J_{hi}(q)$ qui lient les vitesses dans l'espace opérationnel à la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées. Plus particulièrement, $J_{hi}(q)$ doit être tel que

$$v_i := \begin{bmatrix} v_i' & \Omega_i' \end{bmatrix}' = J_{hi}(q) \dot{q} \quad (2)$$

où v_i est mesuré par rapport au repère du i-ème corps. Bâter $J_h(q) := [J_{h1}(q)' \ J_{h2}(q)' \ \dots \ J_{hn}(q)']'$.

5. Sélectionner un vecteur de vitesses généralisées $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, où ℓ est le nombre de variables indépendantes requises pour spécifier la dérivée \dot{q} (les contraintes nonholonomes entrent en jeu); déterminer la matrice jacobienne $J_{nh}(q)$ qui nous permet de calculer la dérivée du vecteur de coordonnées généralisées en fonction des vitesses généralisées

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha . \quad (3)$$

6. Calculer

$$J = J_h J_{nh} \quad (4)$$

et

$$j = \frac{dJ}{dt} . \quad (5)$$

7. Déterminer

$$M := \text{diag} (M_i) \quad (6)$$

$$W := \text{diag} (W_i) \quad (7)$$

où

$$M_i := \begin{bmatrix} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

et

$$W_i := \begin{bmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{bmatrix} . \quad (9)$$

8. Déterminer

$$\omega_a := \left[\omega_{a1}' \ \omega_{a2}' \ \cdots \ \omega_{an}' \right]' , \quad (10)$$

où ω_{ai} est la résultante des forces-couples actifs appliqués au i-ème corps

$$\omega_{ai} := [f_{ai}' \ n_{ai}']' . \quad (11)$$

9. Calculer $D(q)$, $C(q,\alpha)$, g_0 , g_w et τ

$$D(q) := J'MJ \quad (12)$$

$$C(q,\alpha) := J' (MJ + WMJ) \quad (13)$$

$$g_0 := -D(q)^{-1} C(q,\alpha) \alpha \quad (14)$$

$$g_w := D(q)^{-1} \quad (15)$$

$$\tau := J'\omega. \quad (16)$$

10. Le modèle d'état désiré de la dynamique du système est exprimé par

$$\dot{\alpha} = g_0 + g_w \tau \quad (17)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q)\alpha \quad (18)$$

$$\chi = f(q) . \quad (19)$$

6. LE CAS D'UN MANIPULATEUR ROBOTIQUE

Dans le cas d'un manipulateur robotique, les entrées du vecteur de configuration, q , sont généralement représentées soit par l'angle ou par la distance caractérisant le déplacement relatif de deux segments adjacents (variable d'articulation). Avec une telle représentation, les entrées du vecteur de forces généralisées τ coïncident avec la mesure relative aux repères de Denavit-Hartenberg des forces ou des couples transmis par les actionneurs aux axes d'articulation (la mesure le long de ces axes des forces et des couples attribuables à l'accélération de gravité, g , est souvent tenue en ligne de compte en attribuant à la base du manipulateur une accélération égale et contraire à g).

De plus, étant donné que les robots manipulateurs sont généralement exempts de contraintes nonholonomes, nous obtenons $\alpha := \dot{q}$. Le modèle d'état du robot manipulateur se présente alors sous la forme

$$D(q)\dot{\alpha} + C(q, \alpha)\alpha = \tau \quad (1)$$

En sélectionnant les trièdres avec le formalisme de Denavit Hartenberg, l'exécution des étapes 4-9 est grandement simplifiée du fait que le calcul des matrices jacobiennes et de leur dérivée, ainsi que l'écriture des équations de Newton-Euler, peuvent être effectués à l'aide de formules de propagation des vitesses, des accélérations et des forces. Il en suit qu'en pratique la modélisation de la dynamique d'un manipulateur robotique est effectuée en exécutant le bien connu algorithme itératif qui va souvent sous le nom de Luh-Walker-Paul (Craig 1989, p.200, Fu-Gonzales-Lee 1987, p. 114, p.116).

En dénotant avec $v_n := [v_n' \ \Omega_n']'$ la mesure relative à un repère inertiel de la vitesse (linéaire et angulaire) du segment terminal (souvent solidaire avec l'effecteur ou l'outil du manipulateur) et par J_n sa matrice jacobienne, nous obtenons

$$v_n = J_n \dot{q} \quad (2)$$

et

$$\dot{v}_n = \dot{J}_n \dot{q} + J_n \ddot{q} \quad (3)$$

En supposant que J_n soit une matrice inversible (comme c'est le cas pour les manipulateurs qu'on appelle maniables), l'on a alors

$$\dot{q} = J_n^{-1} v_n \quad (4)$$

$$\ddot{q} = J_n^{-1} (\dot{v}_n - \dot{J}_n \dot{q}) \quad (5)$$

et, de l'équation (1),

$$J_n'^{-1} DJ_n^{-1} \dot{v}_n = J_n'^{-1} \left\{ -C(q, \dot{q}) J_n^{-1} v_n - DJ_n^{-1} \dot{J}_n J_n^{-1} v_n + \tau \right\} . \quad (6)$$

En introduisant les notations

$$M_\chi := J_n'^{-1} DJ_n^{-1} \quad (7)$$

$$V_\chi := J_n'^{-1} \left\{ C(q, \dot{q}) J_n^{-1} + DJ_n^{-1} \dot{J}_n J_n^{-1} \right\} v_n \quad (8)$$

$$\omega_\chi := J_n'^{-1} \tau , \quad (9)$$

il suit

$$\omega_\chi := M_\chi \dot{v}_n + V_\chi$$

$$\dot{R}_n = R_n S(\Omega_n) \quad (10)$$

$$\dot{C}_n = R_n v_n .$$

En comparant les équations 7 à 10 aux équations de Newton-Euler pour un corps rigide, il est naturel d'en faire référence en utilisant le terme de modèle dans l'espace opérationnel du manipulateur (voir Craig, 1989, p. 211). Dans ce modèle, le contrôle du n-ième segment du manipulateur (et par conséquent de l'outil du manipulateur) peut être vu comme équivalent au contrôle d'un corps avec une matrice de masse variable dans le temps M_χ , soumis à l'influence du vecteur des forces de Coriolis et centripète V_χ et au force-couple ω_χ .

Remarque 6.1. En prenant pour hypothèse une compensation parfaite de la gravité, l'application au système décrit par l'équation (1) de la loi de contrôle «PD»,

$$\tau = -K_p e - K_D \dot{q} , \quad (11)$$

où $e := q - q_D$, q_D est un vecteur assigné de R^n , K_P et K_D sont des matrices positives définies, fait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_D. \quad (12)$$

Pour vérifier ce résultat, considérons la fonction de Lyapunov

$$V := \frac{1}{2} \{ e' K_P e + \dot{q}' D \dot{q} \}, \quad (13)$$

et observons que

$$\frac{dV}{dt} = \dot{q}' K_P e + \dot{q}' D \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}' \dot{D} \dot{q} \quad (14)$$

et donc, en utilisant l'équation 6.1 et 11

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{q}' K_D \dot{q} + \dot{q}' \left(\frac{1}{2} \dot{D} - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q}. \quad (15)$$

À la lumière de l'équation 4.22 et de la propriété définie - positive de K_D , ceci implique

$$\frac{dV}{dt} = -\dot{q}' K_D \dot{q} \leq 0 \quad (16)$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0. \quad (17)$$

Puisque K_P et $D(q)$ sont des matrices définies positives, nous pouvons appliquer le théorème de Lasalle (Khalil, 1992, p. 117) et conclure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_D. \quad (18)$$

7. MODÉLISATION D'UN MANIPULATEUR PLANAIRE À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

Soit le manipulateur planaire à deux degrés de liberté de la figure 2 (une étude détaillée de ce manipulateur est présentée dans de nombreuses références dont Craig 1989, p. 201-205). Les étapes de la méthode de modélisation proposée évoluent comme suit.

1. Un repère est attribué à chacun des deux segments du manipulateur; la position et l'orientation de ces segments par rapport à l'espace opérationnel sont représentées par

$$\chi_1 := [x_1 \ y_1 \ \Phi_1]' \text{ et } \chi_2 := [x_2 \ y_2 \ \Phi_2]' \quad (1)$$

où les symboles ont le sens qui leur est donné à la figure 2.

2. Le mouvement du segment 1 dans l'espace opérationnel en est un de rotation autour d'un axe qui est invariant à la fois par rapport au segment et à l'espace opérationnel. De même, le mouvement du segment 2 par rapport au segment 1 est une rotation autour d'un axe invariant par rapport à chacun des deux segments. Le nombre de degrés de liberté du manipulateur est donc égal à 2. La position et l'orientation du manipulateur peuvent être spécifiées par le vecteur de configuration $q := [\theta_1 \ \theta_2]' \in \mathbb{R}^2$, où θ_1 et θ_2 donnent la mesure de l'orientation des deux segments (voir figure 2).

3. La relation entre le vecteur q et la position et l'orientation dans l'espace opérationnel est la suivante

$$x_1 = \ell_1 c_1 \qquad y_1 = \ell_1 s_1 \qquad \Phi_1 = \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} \qquad y_2 = \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} \qquad \Phi_2 = \theta_1 + \theta_2 \quad (3)$$

où

$$s_i := \sin\theta_i \qquad c_i := \cos\theta_i \qquad s_{12} := \sin(\theta_1 + \theta_2) \qquad c_{12} := \cos(\theta_1 + \theta_2) . \quad (4)$$

4. Les mesures (relatives au repère de l'espace opérationnel) des vitesses des deux segments sont exprimées ainsi

$$\dot{x}_1 = -\ell_1 s_1 \dot{\theta}_1 \qquad \dot{y}_1 = \ell_1 c_1 \dot{\theta}_1 \qquad \dot{\Phi}_1 = \dot{\theta}_1 \quad (5)$$

$$\dot{x}_1 = -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 \quad \dot{y}_1 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 \quad \dot{\Phi}_1 = \dot{\theta}_1 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad \dot{y}_2 = l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad \dot{\Phi}_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \quad (6)$$

De ces mesures, on obtient les mesures des vitesses des segments dans leur propre repère

$$v_1 = [0 \ l_1 \dot{\theta}_1]' \quad \Omega_1 = \dot{\theta}_1 \quad (7)$$

$$v_2 = [l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \quad (l_1 c_2 + l_2) \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2]' \quad \Omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \quad (8)$$

De ces équations, il suit

$$J_{h1}' = \begin{bmatrix} 0 & l_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$J_{h2}' = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 l_2 & 1 \\ 0 & l_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

5. Étant donné l'absence de contraintes nonholonomes, le vecteur de vitesses généralisées coïncide avec la dérivée du vecteur des coordonnées généralisées. Cela implique $J_{nh} = I_2$.

6. Des données ci-dessus, il suit

$$J' = \begin{bmatrix} 0 & l_1 & 1 & l_1 s_2 & l_1 c_2 l_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

et conséquemment

$$\dot{J}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & l_1 c_2 \dot{\theta}_2 & -l_1 s_2 \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

7. Cette étape donne

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_1 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_2 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

8. Reconnaisant les forces actives appliquées aux segments comme étant formées des couples transmis par les actionneurs aux axes d'articulation et des forces attribuables à la gravité, on obtient

$$\omega_{a1} = \begin{bmatrix} -m_1 g s_1 \\ -m_1 g c_1 \\ \Gamma_1 - \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\omega_{a1} = \begin{bmatrix} -m_2 g s_{12} \\ -m_2 g c_{12} \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

où Γ_1 est le couple appliqué au segment 1 par l'actionneur placé à la base du manipulateur; Γ_2 est le couple appliqué au segment 2 par l'actionneur placé dans le segment 1.

9. À l'aide des expressions ci-dessus, on calcule

$$D(q,\delta) = J'MJ \quad (19)$$

$$C := J'MJ J + J' WMJ \quad (20)$$

$$\tau = J' \omega , \quad (21)$$

pour obtenir

$$D = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2) & m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \\ m_2(l_2^2 + l_1 l_2 c_2) & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$C = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2 & -m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \Gamma_1 - (m_1 + m_2) g l_1 c_1 & -m_2 g l_2 c_{12} \\ \Gamma_2 - m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

10. Le modèle dynamique du manipulateur est le suivant :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = & m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 c_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 c_1 + m_2 g l_2 c_{12} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Gamma_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 c_{12} .$$

ou, d'une façon équivalente,

$$D \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left\{ -C \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + G + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \right\}$$

où

$$G := \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2) g l_1 c_1 - m_2 g l_2 c_{12} \\ -m_2 g l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

et les matrices D et C sont définies par les équations 22 et 23.

Remarque 7.1. Le modèle du manipulateur dans l'espace opérationnel met directement en relation Γ_1, Γ_2 avec la position de l'outil dans l'espace opérationnel. Dans ce cas la position de l'outil est représentée par le vecteur $[x_2 \ y_2]'$. Pour obtenir ce modèle, de la relation

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = Rot(0,2)v_2 = Rot(0,2)J_2^2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = J_2^0 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \dot{J}_2^0 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + J_2^0 \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = [J_2^0]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} - \dot{J}_2^0 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \right\}$$

En utilisant cette expression dans l'équation 26, il suit

$$D[J_2^0]^{-1} \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = D[J_2^0]^{-1} \dot{J}_2^0 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \left\{ -C \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + G + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \right\}$$

et donc le modèle dans l'espace opérationnel

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \dot{J}_2^0 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + J_2^0 D \left\{ -C \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + G + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Remarque 7.2 Le problème d'asservissement en position dans l'espace des variables d'articulation est de déterminer Γ_1, Γ_2 de façon telle que $(\vartheta_1, \vartheta_2)(t) \rightarrow (\vartheta_{1d}, \vartheta_{2d})(t)$ avec une dynamique de l'erreur assignée.

Le problème d'asservissement dans l'espace opérationnel est de déterminer Γ_1, Γ_2 de façon telle que $(x_2, y_2)(t) \rightarrow (x_{2d}, y_{2d})(t)$ avec une dynamique de l'erreur assignée.

8. MODÉLISATION D'UN TRACTEUR-REMORQUE

Soit un tracteur (muni de deux roues à traction arrière et de deux roues de direction avant) raccordé à une remorque (à deux roues arrière) au moyen d'un raccord vertical rotoïde articulé (figure 3; voir aussi De Santis, 1994a). Soit le mouvement du véhicule planaire, caractérisé par une absence de glissement latéral des roues; soit les propriétés cinétiques et dynamiques du tracteur et de la remorque symétriques par rapport à leurs axes longitudinaux; soit le contact entre les pneus et la surface de mouvement ponctuel. De plus, soit l'angle définissant l'orientation des roues antérieures par rapport au tracteur (angle de direction) suffisamment petit pour que l'action de ces roues sur la cinématique du tracteur puissent être représenté en termes de l'action produite par une roue «médiane» située au centre de l'essieu avant.

Les étapes de la procédure de modélisation évoluent comme suit.

1. Un repère est attaché au tracteur et à la remorque; les positions et les orientations de ces repères sont représentées par

$$\chi_1 := [x_1 \ y_1 \ \Theta_1]' \text{ et } \chi_2 := [x_2 \ y_2 \ \Theta_2]' \quad (1)$$

où les symboles ont le sens qui leur est donné à la figure 3.

2. Le mouvement relatif entre le camion et la remorque est une rotation autour d'un axe invariant par rapport à chacun des deux corps. Étant donné la position et l'orientation du tracteur, un seul paramètre additionnel est alors requis pour établir la position et l'orientation de la remorque. Cela signifie que la position et l'orientation de l'ensemble tracteur-remorque peut être spécifiée par

un vecteur de configuration $q := [x \ y \ \Theta \ \Phi]^T \in \mathbb{R}^4$, où x, y dénotent les coordonnées de l'origine du repère attaché au camion dans l'espace opérationnel; Θ est la mesure de l'orientation du camion relative à l'espace opérationnel; Φ est la mesure de l'orientation de la remorque relative au tracteur (voir figure 3).

3. La relation entre le vecteur de configuration et les positions et orientations dans l'espace opérationnel du tracteur-remorque est la suivante :

$$x_1 = x \quad y_1 = y \quad \Theta_1 = \Theta$$

et

$$x_2 = x - c \cos \Theta - \ell_2 \cos(\Theta + \Phi) \quad y_2 = y - c \sin \Theta - \ell_2 \sin(\Theta + \Phi) \quad \Theta_2 = \Theta + \Phi. \quad (2)$$

4. Mesurées par rapport à leurs repères, les vitesses du tracteur et de la remorque (dans les respectifs centres de masse) sont données par les vecteurs suivants :

$$v_1 := [v_{u1} \ v_{w1} \ \Omega_1]^T \quad v_2 := [v_{u2} \ v_{w2} \ \Omega_2]^T \quad (3)$$

où

$$\dot{x}_1 = \cos \Theta v_{u1} - \sin \Theta (v_{w1} - b \Omega_1)$$

$$\dot{y}_1 = \sin \Theta v_{u1} + \cos \Theta (v_{w1} - b \Omega_1)$$

et

$$\dot{\Theta}_1 = \Omega_1 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \cos(\Theta + \Phi) v_{u2} - \sin(\Theta + \Phi) (v_{w2} - d(\Omega_1 + \dot{\Phi})) \quad (5)$$

$$\dot{y}_2 = \sin(\Theta + \Phi) v_{u2} + \cos(\Theta + \Phi) (v_{w2} - d(\Omega_1 + \dot{\Phi}))$$

$$\dot{\Theta}_2 = \Omega_1 + \dot{\Phi}. \quad (6)$$

De ces équations, on obtient

$$v_{u1} = \cos \Theta \dot{x} + \sin \Theta \dot{y} \quad (7)$$

$$v_{w1} = -\sin \Theta \dot{x} + \cos \Theta \dot{y} + b\Omega_1 \quad (8)$$

et

$$v_{u2} = \cos(\Theta + \Phi)\dot{x} + \sin(\Theta + \Phi)\dot{y} - c\Omega_1 \sin \Phi \quad (9)$$

$$v_{w2} = -\sin(\Theta + \Phi)\dot{x} + \cos(\Theta + \Phi)\dot{y} - c\Omega_1 \cos \Phi - \ell_2\Omega_1 - \ell_2\dot{\Phi} + d(\Omega_1 + \dot{\Phi}) \quad (10)$$

Il suit

$$J_{h1} := \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$J_{h2} := \begin{bmatrix} \cos(\Theta + \Phi) & \sin(\Theta + \Phi) & -c \sin \Phi & 0 \\ -\sin(\Theta + \Phi) & \cos(\Theta + \Phi) & -e - c \cos \Phi & -e \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

et

$$J_h := [J_{h1} \ J_{h2}]. \quad (13)$$

5. En présence d'un mouvement exempt de glissement latéral et correspondant à un angle de direction de δ , nous obtenons

$$v_{w1} = b\Omega_1 \quad (14)$$

$$\Omega_1 = \frac{v_{u1} \tan \delta}{\ell_1} \quad (15)$$

$$\dot{\Phi} = -\frac{v_{u1}}{\ell_1 \ell_2} \{ \ell_1 \sin \Phi + (\ell_2 + c \cos \Phi) \tan \delta \}. \quad (16)$$

De ces équations et de l'équation 4, il suit

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = v_{u1} \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ \frac{\tan \delta}{l_1} \\ -\frac{l_1 \sin \Theta + (l_2 + c \cos \Phi) \tan \delta}{l_1 l_2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Cette équation suggère le choix de $\alpha := v_{u1} \in \mathbb{R}$ comme vecteur de vitesse généralisée. Avec ce choix, on obtient

$$J_{nh} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \\ \frac{\tan \delta}{l_1} \\ -\frac{l_1 \sin \Phi + (l_2 + c \cos \Phi) \tan \delta}{l_1 l_2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

6. En combinant les équations 10 à 13 et l'équation 18, on peut calculer

$$J = J_h J_{nh} \quad (19)$$

et

$$\dot{J} = + \frac{d(J)}{dt}. \quad (20)$$

De ces calculs, il découle

$$J' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b \tan \delta}{l_1} & \frac{\tan \delta}{1} & \cos \Phi - \frac{c \sin \Phi \tan \delta}{l_1} & -\frac{d \sin \Phi}{l_2} - \frac{cd \cos \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} & -\frac{l_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{l_1 l_2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

et

$$\begin{aligned}
 \dot{j}' = & \frac{\dot{\delta}}{\cos^2 \delta} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{\ell_1} & \frac{1}{\ell_1} & \frac{c \sin \Phi}{\ell_1} & -\frac{cd \cos \Phi}{\ell_1 \ell_2} & -\frac{c \cos \Phi}{\ell_1 \ell_2} \end{bmatrix}, \\
 & + \dot{\Phi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{\ell_1} & -\frac{d \ell_1 \cos \Phi - cd \sin \Phi \tan \delta}{\ell_1 \ell_2} & -\frac{\ell_1 \cos \Phi - c \sin \Phi \tan \delta}{\ell_1 \ell_2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

où $\dot{\Phi}$ est comme dans l'équation 16. Pour usage futur, nous trouvons utile d'exprimer \dot{J} comme suit :

$$\dot{J} = A(q, \delta, \alpha) \dot{\Phi} + B(q, \delta, \alpha) \dot{\delta} \tag{23}$$

où

$$A(q, \delta, \alpha) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell_1 \sin \Phi + c \cos \Phi \tan \delta}{\ell_1} & -\frac{d \ell_1 \cos \Phi - cd \sin \Phi \tan \delta}{\ell_1 \ell_2} & -\frac{\ell_1 \cos \Phi - c \sin \Phi \tan \delta}{\ell_1 \ell_2} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

et

$$B(q, \delta, \alpha) := \frac{1}{\cos^2 \delta} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{\ell_1} & \frac{1}{\ell_1} & -\frac{c \sin \Phi}{\ell_1} & -\frac{cd \cos \Phi}{\ell_1 \ell_2} & -\frac{c \cos \Phi}{\ell_1 \ell_2} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

7. Cette étape donne

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_1 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} m_2 I_2 & 0_{21} \\ 0_{12} & j_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & 0 \\ \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\Phi} + \Omega_1) & 0 \\ (\dot{\Phi} + \Omega_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

8. Reconnaisant les forces actives appliquées au véhicule comme formées des forces longitudinales appliquées aux roues F_{ui} (voir figure 3), nous obtenons

$$\omega_{a1} = \begin{bmatrix} F_{u2} + F_{u1} \cos \delta \\ F_{u1} \sin \delta \\ a \sin \delta F_{u1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\omega_{a2} = \begin{bmatrix} F_{u3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

9. En se servant des expressions ci-dessus, on obtient

$$D(q, \delta) = J' MJ \quad (31)$$

$$C_1 := J' MA(q, \delta, \alpha) + J' WMJ \quad (32)$$

$$C_2 := J' MB(q, \delta, \alpha) \quad (33)$$

$$C(q, \delta, \alpha, \dot{\delta}) = C_1 + C_2 \dot{\delta} \quad (34)$$

$$g_{01} := -D^{-1} C_1 \alpha \quad (35)$$

$$g_{02} := -D^{-1} C_2 \alpha \quad (36)$$

$$g_0 = g_{01} + g_{02} \dot{\delta} \quad (37)$$

$$g_{wa} = D^{-1} J' ; \quad (38)$$

10. Le modèle de la dynamique du système est le suivant :

$$\dot{\alpha} = g_{01} + g_{02} \dot{\delta} + g_{u1} F_{u1} + g_{u2} F_{u2} + g_{u3} F_{u3} \quad (39)$$

$$\dot{q} = J_{nh}(q, \delta) \alpha \quad (40)$$

$$\chi = f(q) , \quad (41)$$

où J_{nh} et $f(q)$ sont comme dans les équations 2 et 18, et

$$g_{u1} := g_{wa} [\cos\delta \quad \sin\delta \quad \sin\delta \quad 0 \quad 0 \quad 0] ' \quad (42)$$

$$g_{u2} := g_{wa} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] ' \quad (43)$$

$$g_{u3} := g_{wa} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] ' . \quad (44)$$

En pratique, il est courant de poser

$$\dot{\delta} = F_s \quad (45)$$

où F_s est le contrôle de direction. Le contrôle de propulsion est généralement appliqué aux roues arrière du camion et est représenté par

$$F_p = F_{u2} . \quad (46)$$

F_{u1} et F_{u3} sont considérés comme étant des perturbations externes.

Remarque 8.1. Le modèle décrit par les équations 39 à 45 coïncide avec celui présenté dans Ellis, 1965 et adopté par De Santis, 1994a. Il peut être également vu comme un cas particulier du modèle plus général offert par Bolzern et al. 1995.

Remarque 8.2. Des équations 39 à 45, il est facile de modéliser la dynamique d'un véhicule ordinaire, telle une voiture. Pour obtenir ce modèle, nous associons à chaque symbole $\gamma \in \{J, M, W, A, B\}$ un symbole $\gamma_c \in \{J_c, M_c, W_c, A_c, B_c\}$ obéissant à la règle suivante :

$$\gamma_c = P_{33}\gamma \quad (47)$$

où

$$P_{33} := \begin{bmatrix} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Nous modifions alors les équations 30 à 46 en remplaçant $\gamma \in \{J, M, W, A, B\}$ par le γ_c correspondant. Le modèle qui en découle coïncide avec celui utilisé par De Santis, 1995a .

Remarque 8.3. En posant

$$u_1 := F_{u_2} \text{ (force de propulsion)}$$

$$u_2 := \dot{\delta} \text{ (contrôle sur l'angle de braquage)}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &:= F_{u_1} \\ \zeta_2 &:= F_{u_2} \end{aligned} \text{ (perturbations)}$$

nous obtenons le modèle

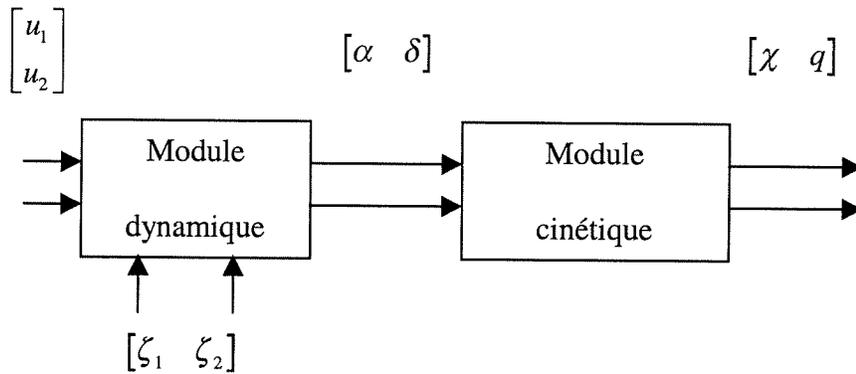
$$\dot{\alpha} = g_{01}(q, \delta) + g_{u1}(q, \delta)u_1 + g_{u2}(q, \delta)u_2 + g_{\zeta1}(q, \delta)\zeta_1 + g_{\zeta2}(q, \delta)\zeta_2$$

$$\dot{\delta} = u_2$$

$$\dot{q} = \text{Jnh}(q, \delta)\alpha$$

$$\chi = f(q).$$

Tel que suggéré par le schéma bloc qui suit, ce modèle peut donc être vu comme constitué d'un module dynamique qui à partir de l'action de contrôle $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ nous permet d'obtenir la vitesse généralisée $[\alpha \ \delta]$, plus un module cinétique qui à partir de la vitesse généralisée $[\alpha \ \delta]$ nous permet d'obtenir la position du véhicule ou bien dans l'espace opérationnel χ , ou bien dans l'espace des coordonnées généralisées q .



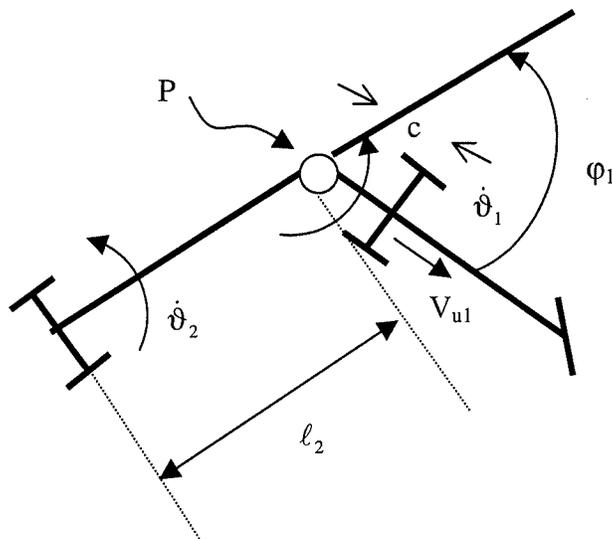
Remarque 8.4. Les problèmes souvent considérés en relation avec ce modèle sont du type suivant :

i) déterminer α, δ tels que pour $t \in [0, 1]$, $q(t)$ soit tel que $q(0) \equiv A$, $q(1) \equiv B$, $q(t) \notin \beta C$ \mathbb{R}^4 (planification de parcours);

ii) déterminer u_1, u_2 tels

Remarque 8.5. Dérivation de la contrainte non holonome.

Considérons la mesure relative à la remorque de la vitesse latérale du point, P, commun à la remorque et au tracteur.



En voyant P comme lié à la remorque, et en tenant compte de l'absence de glissement latéral dans les roues de la remorque, on a

$$V_{\text{lat}}(P) = l_2 \dot{\vartheta}_2 = l_2 (\dot{\phi} + \dot{\vartheta}_1).$$

En voyant P comme lié au tracteur, on a

$$v_{\text{lat}}^*(P) = -\dot{\vartheta}_1 c \cos \phi - v_{u1} \sin \phi.$$

En imposant $v_{\text{lat}}(P) = v_{\text{lat}}^*(P)$, il suit

$$l_2 (\dot{\phi} + \dot{\vartheta}_1) = -\dot{\vartheta}_1 c \cos \phi - v_{u1} \sin \phi$$

d'où

$$\dot{\phi} = -\dot{\vartheta}_1 \frac{l_2 + c \cos \phi}{l_2} - \frac{v_{u1}}{l_2} \sin \phi$$

...

$$\dot{\phi} = -\frac{v_{u1}}{l_1 l_2} (l_1 \sin \phi + (l_2 + c \cos \phi) \tan \delta).$$

9. MODÉLISATION D'UN ROBOT MOBILE AVEC ROUES MOTRICES INDÉPENDANTES

Le déplacement d'un robot mobile avec roues est souvent réalisé en utilisant une plate forme de locomotion ayant une roue folle en avant et, en arrière, une paire de roues motrices coaxiales et avec traction indépendante (Figure 5, De Santis – Hurteau 1990; De Santis 1995a). A chaque roue motrice on applique un couple généré par un moteur qui est à son tour énergisé par une tension de contrôle (Figure 6). Dans ce qui suit nous nous proposons d'obtenir le modèle mathématique permettant de calculer la position/orientation de la plate forme en fonction des tensions appliquées aux moteurs (Figure 7).

Pour simplifier notre démarche, nous prendrons comme hypothèse un mouvement planaire, une plate forme avec propriétés symétriques par rapport à l'axe longitudinal, un contact surface-roue approximable avec un point, une absence de forces de résistance au déplacement de la roue folle. De plus, nous utiliserons les notations suivantes:

x, y : position du repère solide avec le mobile par rapport au repère fixe;

θ : angle d'orientation du mobile;

V_1, V_2 : tensions de contrôle appliquées aux moteurs;

V_u : vitesse longitudinale du mobile;

V_w : vitesse transversale;

Ω : vitesse angulaire;

F_{u1}, F_{u2} : forces longitudinales appliquées au mobile par les roues matrices de droite (1) et de gauche (2).

La procédure de modélisation présentée à la section 5 se concrétise comme suit:

1. En négligeant la masse des roues, nous considérons le véhicule comme constitué d'un corps rigide. Nous lui lions un repère avec axes u et w tel qu'indiqué à la Figure 8. La position et l'orientation de ce repère peuvent être représentées par le vecteur

$$\begin{bmatrix} c \\ \xi \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

2. Le mobile n'étant assujéti à aucune contrainte de position/orientation, nous pouvons choisir comme vecteur de coordonnées généralisées

$$q := \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

3. La relation entre la position/orientation du mobile et le vecteur de coordonnées généralisées est donnée tout simplement par la fonction identité

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix} = q.$$

4. La mesure relative au repère fixe de la vitesse du mobile est représentée par $[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\vartheta}]'$; relativement au repère lié au mobile, la mesure de cette vitesse est représentée par le vecteur $[v_u \ v_w \ \Omega]'$. La relation entre les deux mesures est donnée par

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_w \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}.$$

5. En prenant pour hypothèse une absence de glissement latéral des roues motrices, l'on a $v_w = 0$. Il suit que l'on peut représenter la vitesse généralisée avec le vecteur $\alpha := [v_u \ \Omega]'$.

6. La vitesse du centre de masse (cdm) en fonction de la vitesse généralisée est donnée par

$$\begin{bmatrix} v_{uc} \\ v_{wc} \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_u \\ \Omega \end{bmatrix}.$$

D'où

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Les matrices de masse et de vitesse angulaire sont données par

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}$$

où m est la masse du véhicule et J_0 est le moment d'inertie du mobile par rapport à l'axe vertical passant par le c.d.m. du mobile; de plus,

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Le vecteur des forces actives est donné par

$$\omega_a = \begin{bmatrix} Fu_1 + Fu_2 \\ 0 \\ (Fu_1 - Fu_2) \ell \end{bmatrix}$$

où Fu_1 et Fu_2 représentent les forces de propulsion appliquées par les moteurs aux roues motrices.

9. Les matrices d'inertie et de Coriolis sont données par

$$D = J'MJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & a^2m + J_0 \end{bmatrix}$$

Il suit

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_0 + ma^2} \end{bmatrix}$$

$$C = J'WMJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ am\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$C \begin{bmatrix} V_u \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ma\Omega^2 \\ maV_u\Omega \end{bmatrix}$$

$$g_o = \begin{bmatrix} a\Omega^2 \\ maV_u\Omega \\ -\frac{1}{J_0 + ma^2} \end{bmatrix} \quad g_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_0 + ma^2} \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Fu_1 + Fu_2 \\ 0 \\ (Fu_1 - Fu_2)\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fu_1 + Fu_2 \\ (Fu_1 - Fu_2)\ell \end{bmatrix}$$

10. Le modèle d'état du mobile est donné donc par

$$\dot{V}_u = +a\Omega^2 + \frac{Fu_1 + Fu_2}{m}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{ma\Omega V_u}{J_0 + ma^2} + \frac{(Fu_1 - Fu_2)\ell}{J_0 + ma^2}$$

$$\dot{x} = \cos\vartheta V_u$$

$$\dot{y} = \sin\vartheta V_u$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega$$

Afin de compléter le modèle il nous faudra exprimer F_{u_1} et F_{u_2} en fonction de V_1 et V_2 .

11. Proposons-nous d'obtenir le modèle d'état en fonction des tensions d'alimentation des moteurs.

La relation entre V_1, V_2 et F_{u_1}, F_{u_2} peut être exprimées par les équations suivantes:

$$V_i = R_e I_j + K_b \dot{\vartheta}_i \quad (\text{loi de ohm appliquée au circuit induit de chaque moteur})$$

$$\Gamma_i = K_\phi I_i \quad (\text{relation entre couple moteur et courant d'induit})$$

$$F_{u_i} = \Gamma_i / R_a \quad (\text{relation entre couple moteur et force motrice})$$

où

R_e : = résistance de l'induit du moteur;

K_b, K_ϕ : = constantes du moteur;

ϑ_i : = angle de rotation des roues motrices;

R_a : = rayon d'une roue motrice;

Γ_i : = couple moteur.

Il suit

$$F_{u_i} = (V_i - K_b \dot{\vartheta}_i) \frac{K_\phi}{R_e R_a}$$

d'où

$$F_{u_1} + F_{u_2} = \frac{K_\phi}{R_e R_a} (V_1 + V_2) - \frac{K_b K_\phi}{R_e R_a} (\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)$$

$$F_{u_1} - F_{u_2} = \frac{K_\phi}{R_e R_a} (V_1 - V_2) - \frac{K_b K_\phi}{R_e R_a} (\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2)$$

En prenant pour hypothèse une absence de glissement longitudinal des roues motrices, l'on a

$$V_u = \frac{(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2)}{2} R_a$$

$$\Omega = \frac{\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2}{2\ell} R_a$$

d'où

$$\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2 = \frac{2V_u}{R_a}$$

$$\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}_2 = \frac{2\ell\Omega}{R_a} .$$

Il suit

$$F_{u_1} + F_{u_2} = (V_1 + V_2) \frac{K_\phi}{R_e R_a} - \frac{2K_b K_\phi V_u}{R_e R_a^2}$$

$$(F_{u_1} - F_{u_2})\ell = (V_1 - V_2) \frac{K_\phi \ell}{R_e R_a} - \frac{2K_b K_\phi \ell^2}{R_e R_a^2} \Omega .$$

En utilisant ces expressions dans le modèle obtenu à l'étape 10, l'on obtient

$$\dot{V}_u = +a \Omega^2 - \frac{2K_b K_\phi}{R_e R_a^2 m} V_u + \frac{K_\phi}{m R_e R_a} U_1$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{ma V_i \Omega}{J_0 + ma^2} - \frac{2K_b K_\phi \ell^2 \Omega}{(J_0 + ma^2) R_e R_a} + \frac{K_\phi \ell}{(J_0 + ma^2) R_e R_a} U_2$$

où

$$U_1 = V_1 + V_2$$

$$U_2 = V_1 - V_2$$

Le modèle du mobile peut donc être représenté par:

$$\dot{V}_u = -\frac{1}{\tau_v} V_u + \frac{K_v}{\tau_v} U_1 + a\Omega^2$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{\tau_0} \Omega + \frac{K_0}{\tau_0} U_2 + \frac{maV_u \Omega}{J_0 + ma^2}$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega$$

$$\dot{x} = V_u \cos \vartheta$$

$$\dot{y} = V_u \sin \vartheta$$

où

$$K_v := \frac{R_a}{2K_b} \quad \tau_v := \frac{R_e R_a^2 m}{2K_\phi K_m}$$

$$K_0 := \frac{R_a}{2K_b \ell} \quad \tau_0 := \frac{R_e R_a^2 (J_0 + ma^2)}{2K_\phi K_b \ell^2}$$

Ce modèle est représenté par le diagramme à la Figure 9.

En négligeant les termes quadratiques $V_u \Omega$ et Ω^2 et en utilisant la transformée de Laplace, nous obtenons le modèle simplifié suivant:

$$\left. \begin{aligned} V_u(s) &= \frac{K_v}{1 + s\tau_v} U_1(s) \\ \Omega(s) &= \frac{K_0}{1 + s\tau_0} U_2(s) \end{aligned} \right\} \text{composante dynamique du modèle}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \Omega \\ \dot{x} &= V_u \cos \vartheta \\ \dot{y} &= V_u \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \text{composante cinétique.}$$

Ce modèle peut être utilisé dans un grand nombre d'applications pratiques, tel que par exemples:

- i) Conception d'un contrôleur de vitesse linéaire (cruise control);
- ii) Conception d'un langage pour la téléopération du véhicule (exécution automatique de trajectoires linéaires de circulaires);
- iii) Conception d'un système de Navigation (localisation du véhicule; fusion des données);
- iv) Conception d'un contrôleur d'asservissement en parcours (path tracking control).

CONCLUSIONS

La méthode de modélisation que nous avons présentée est applicable à divers systèmes mécaniques devant être pris en compte lors de l'automatisation industrielle, par exemple les robots manipulateurs, les robots mobiles, les véhicules de transport, les excavateurs mécaniques, les ponts roulants et autres machines semblables. Similaire à d'autres méthodes disponibles dans la littérature (comme par exemple la méthode utilisée dans Kane Levinson, 1983; ou celle récemment offerte par Saha et Angeles, 1991), cette méthode suit des étapes qui, tout en étant efficaces d'un point de vue numérique, sont également particulièrement bien adaptées à une interprétation intuitive de leur signification physique.

Cette méthode est un peu plus générale (puisque'elle tient compte des contraintes holonomes et nonholonomes à la fois) que les méthodes généralement proposées dans les livres d'introduction à la robotique (par exemple, Craig, 1989; ou Spong et Vidyasagar, 1987). Elle permet d'exposer similarités et différences qui caractérisent les modèles d'un système donné soumis à diverses hypothèses (par exemple, un camion à remorque se déplaçant avec un mouvement exempt ou non exempt de glissement). Elle permet aussi de comparer les propriétés structurelles et numériques de modèles de différents systèmes mécaniques fonctionnant en présence d'hypothèses semblables (par exemple, un robot manipulateur, un camion à remorque, un excavateur mécanique ou un chargeur-

transporteur de mine). D'autre part, son exécution peut en même temps profiter des nombreux algorithmes numériques disponibles dans la littérature (dont les formules de propagation des vitesses, accélérations et forces) ainsi que d'un codage assisté par ordinateur offert par des progiciels symboliques comme Mathematica ou Maple.

RÉFÉRENCES

- [Bo.1] Bolzern, P., De Santis, R.M., Locatelli, A., Tognò, S. 1995, Dynamic Model of a Two-Trailer Articulated Vehicle Subject to Nonholonomic Constraints, **Robotica**, Vol.14, 1996, pp. 444-450.
- [Cr.1] Craig, J.J, 1989, **Adaptive Control of Mechanical Manipulators**, Addison Wesley.
- [De.1] De Santis, R.M., 1994a, Path-Tracking for Car-Like and Tractor-Trailer-Like Robots, **Int. Journal of Robotics Research**, vol. 13, n° 3, décembre 1994, pp. 533 à 544.
- [De.2] De Santis, R.M., Krau, S., 1994b, Bang Bang Motion Control of a Cartesian Crane, **Robotica**, vol. 12, septembre 1994, pp. 449 à 454.
- [De.3] De Santis, R.M., Hurteau, R., 1990, On the Motion Control of Electric AGVs, **EPM/RT-93/6**, École Polytechnique de Montréal, 1993 (également dans **Automazione e Instrumentazione**, vol. 3, pp. 137 à 150, 1990).
- [De.4] De Santis, R.M., 1995a, Path-Tracking for a Car-Like Robot with Double Steering, **IEEE Trans on Vehicular Technology**, Vol 44, N.2, pp 366-377.
- [De.5] De Santis, R.M., 1995b, Modeling and Control of a Loading-Hauling-Dumping Mining Vehicle, **EPM/RT-94/XXX**, École Polytechnique de Montréal, printemps 1995 (également dans **Trans of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control**, march 1997).
- [De.6] De Santis, R.M., 1995c, Modeling and Path-Tracking Control of a Mobile Wheeled Robot with a Differential Drive, **EPM/RT-94**, École Polytechnique de Montréal, (également dans **Robotica**, vol. 13, may 1995, pp. 401 - 410).

- [De.7] De Santis, R.M., 1995d, Motion/Force Control of Robotic Manipulators, **EPM/RT-95-04**, École Polytechnique de Montréal, également dans **ASME J. of Dynamic Systems, Measurements and Control**, Vol. 118, June 1996, pp.386-389.
- [De.8] De Santis, R.M., 1999, Elements of Kinematics with Applications to Problems in Navigation and Robotics, EPM/RT-99/08.
- [Fu.1] Fu, K.S., Gonzales, R.C., Lee, C.S.G., Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence, Mc Graw-Hill Book Company, 1987.
- [La.1] Latombe, J.C., **Robot Motion Planning**, Kluver, 1991.
- [Lu.1] Luh, J.Y.S., Walker, M.W., Paul, R.P.C, Resolved-Acceleration Control of Mechanical Manipulators, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. AC-25, n° 3, juin 1980, pp. 468 à 474.
- [Ka.1] Kane, T.R., Levinson, D.A., 1985, **Dynamics: Theory and Applications**, McGraw-Hill.
- [Ka.2] Kane, T.R., Levinson, D.A., 1983, The Use of Kane's Dynamical Equations in Robotics, **International Journal of Robotic Research**, vol. 2, n° 3, pp. 3 à 21.
- [Ka.3] Kane, T.R., Likins, P.W., Levinson, D.A., 1983, **Spacecraft Dynamics**, McGraw-Hill.
- [Kha.1] Khalil, H.K., 1992, **Nonlinear Systems**, MacMillan.
- [Mi.1] Mitiguy, P.C., Kane, T.R. 1996. Motion Variables Leading to Efficient Equations of Motion, **Int. Journal of Robotics Research**, vol. 15, n.5, octobre 1996, pp. 522 à 532.
- [Ni.1] Nikravesh, P.E., Wehage, R.A., Kwon, O.K., 1985, Euler Parameters in Computational Kinematics and Dynamics, parts 1 and 2, **Trans of the ASME Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design**, vol. 107, pp. 358 à 370.

[Sa.1] Saha, K.S., Angeles, J., 1991, Dynamics of Nonholonomic Mechanical Systems Using a Natural Orthogonal Complement, **Trans of the ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 58, pp. 238 à 243.

[Slo.1] Slotine, J.J., Li, W., **Applied Nonlinear Control**, Prentice Hall 1991.

[Spo.1] Spong, M.W., 1987, Modeling and Control of Elastic Joint Robots, **Trans of the ASME Journal of Dynamic Systems Measurement and Control**, vol. 109, pp. 310 à 331.

[Wh.1] Whitney, D.E., 1982, The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators, **Trans of the ASME Journal of Journal of Dynamic Systems Measurement and Control**, vol. 122, décembre, pp. 303 à 309.

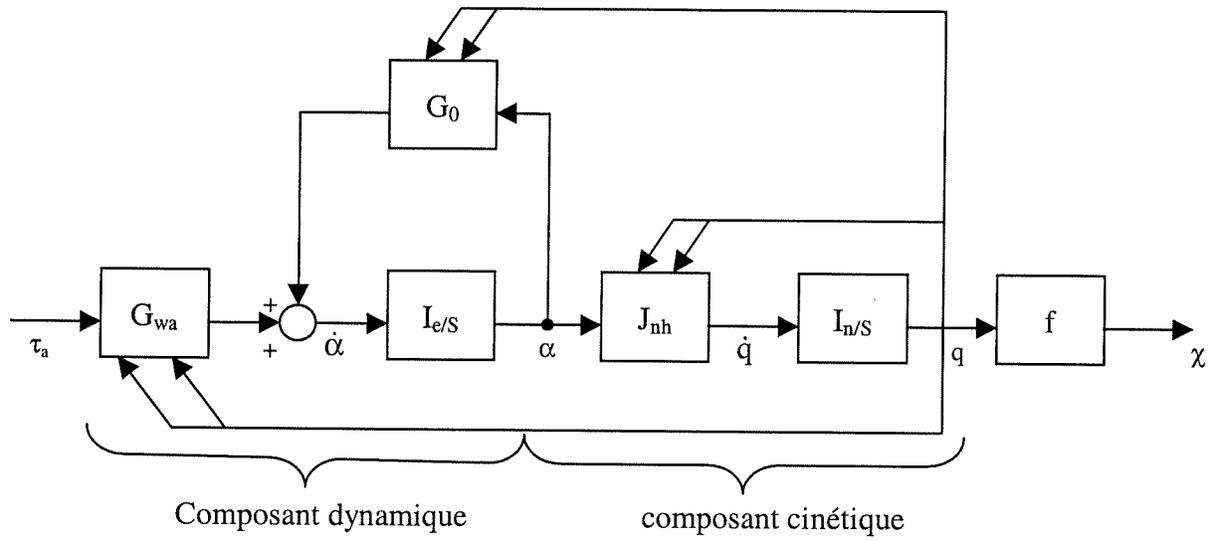


Figure 1. Structure du modèle dynamique

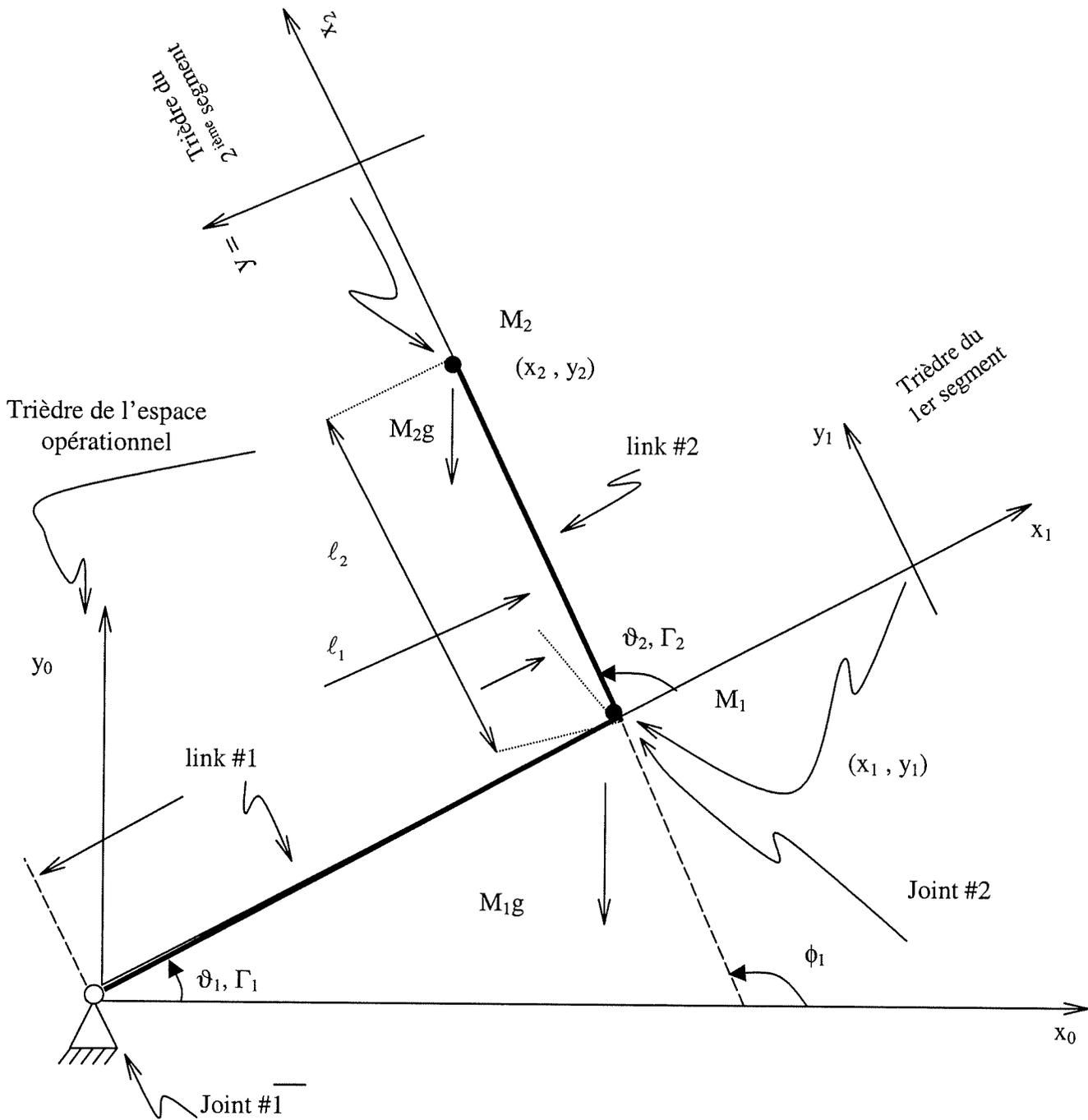


Figure 2 : Manipulateur planaire à deux degrés de liberté

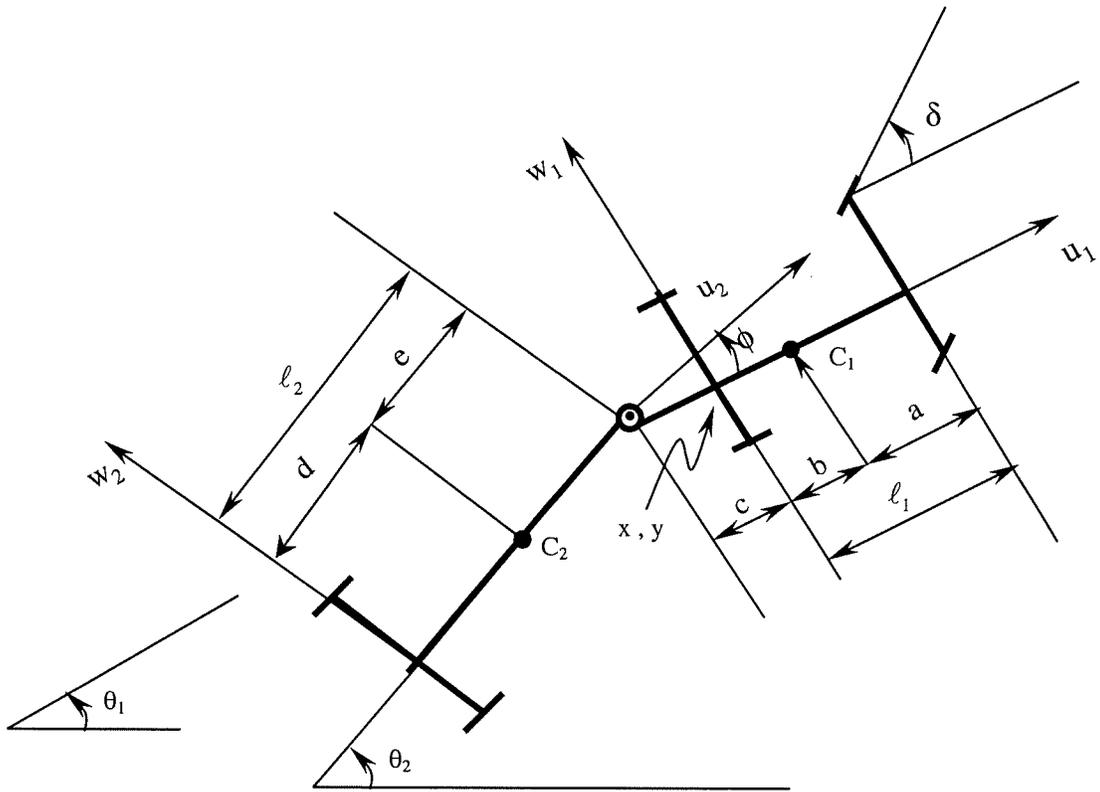


Figure 3. Géométrie d'un camion à remorque

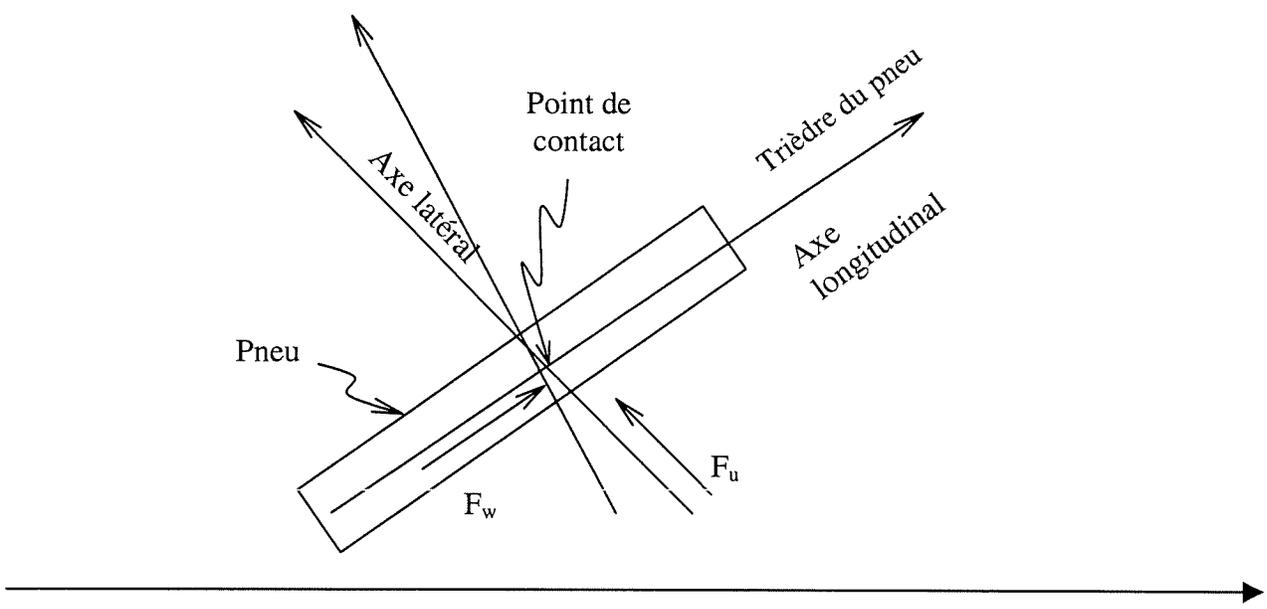


Figure 4. Forces latérales et longitudinales exercées par les pneus

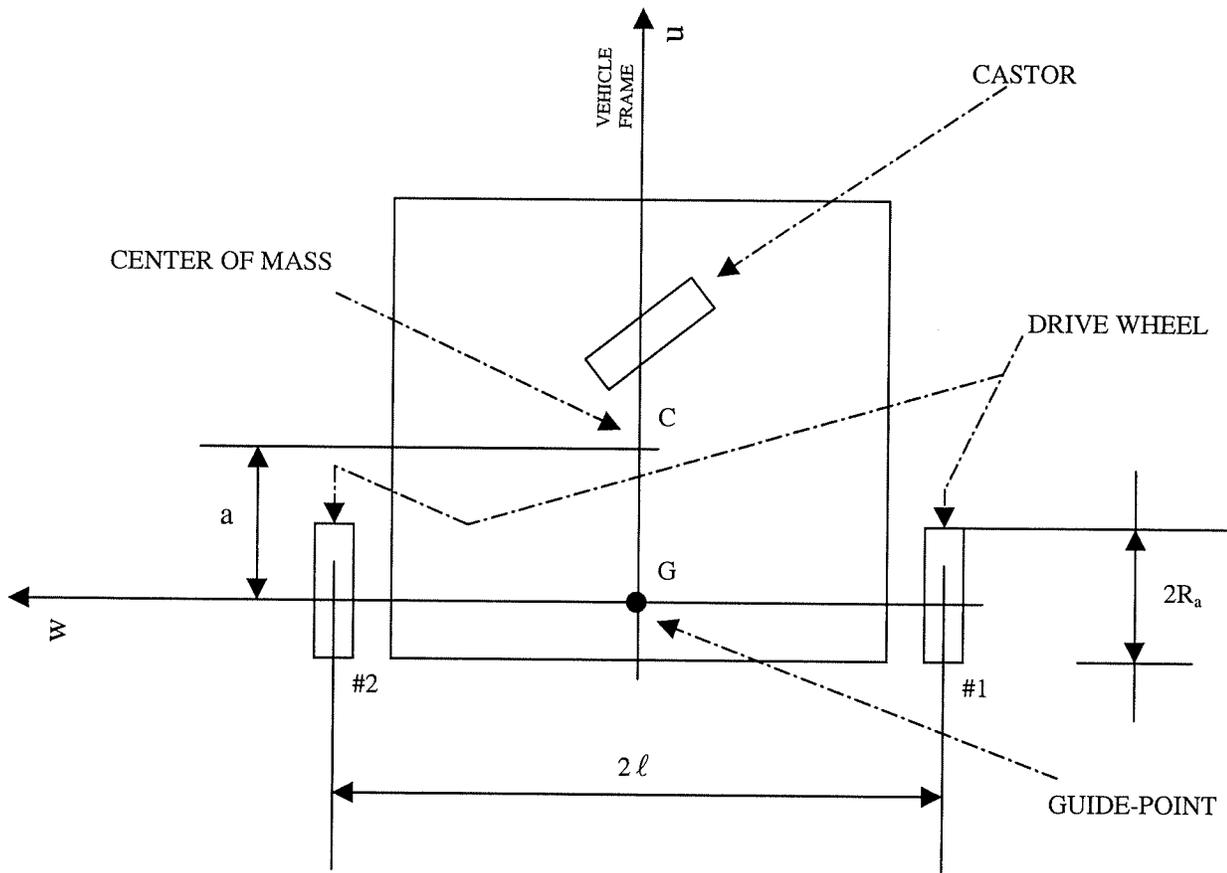


Figure 5 : Géométrie du robot mobile

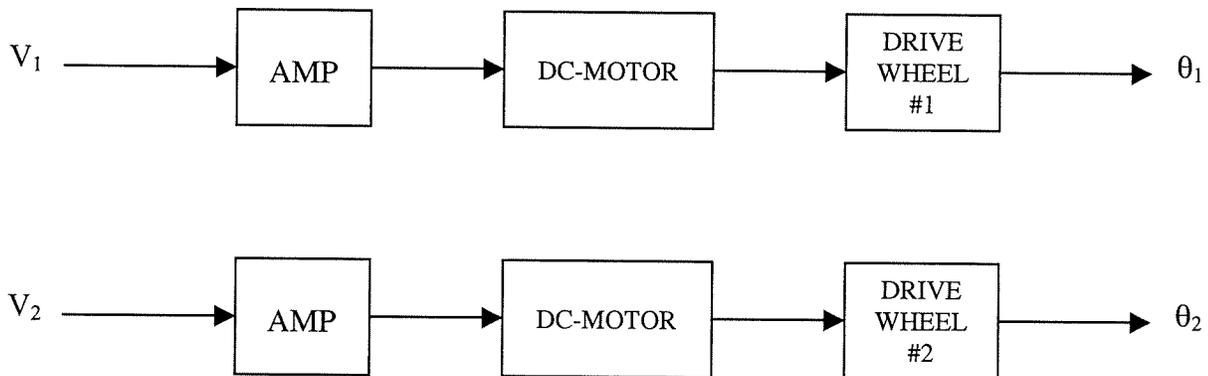


Figure 6 : Plate-forme de locomotion

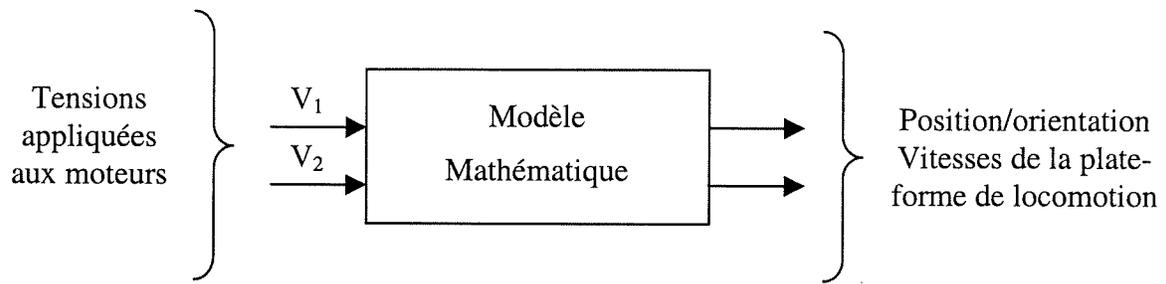


Figure 7 : Modèle Mathématique du Mobile

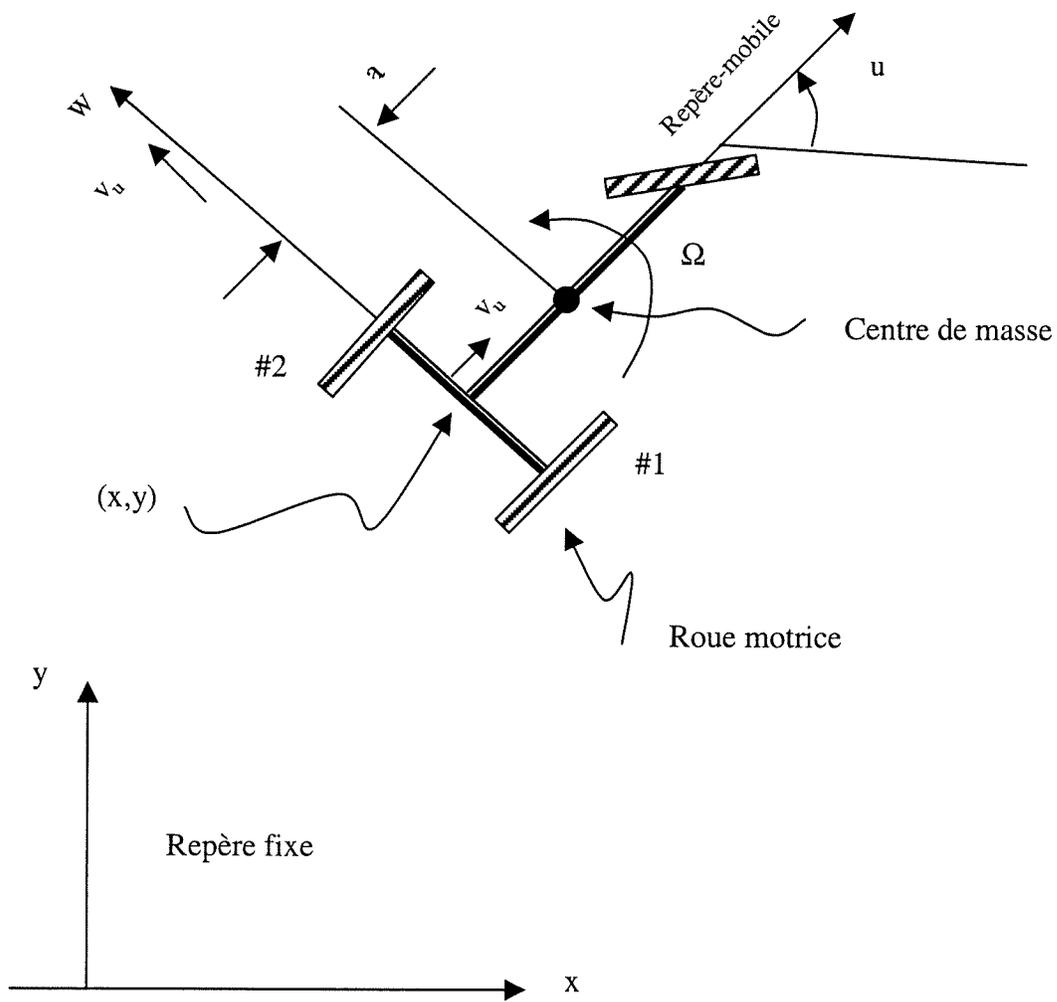
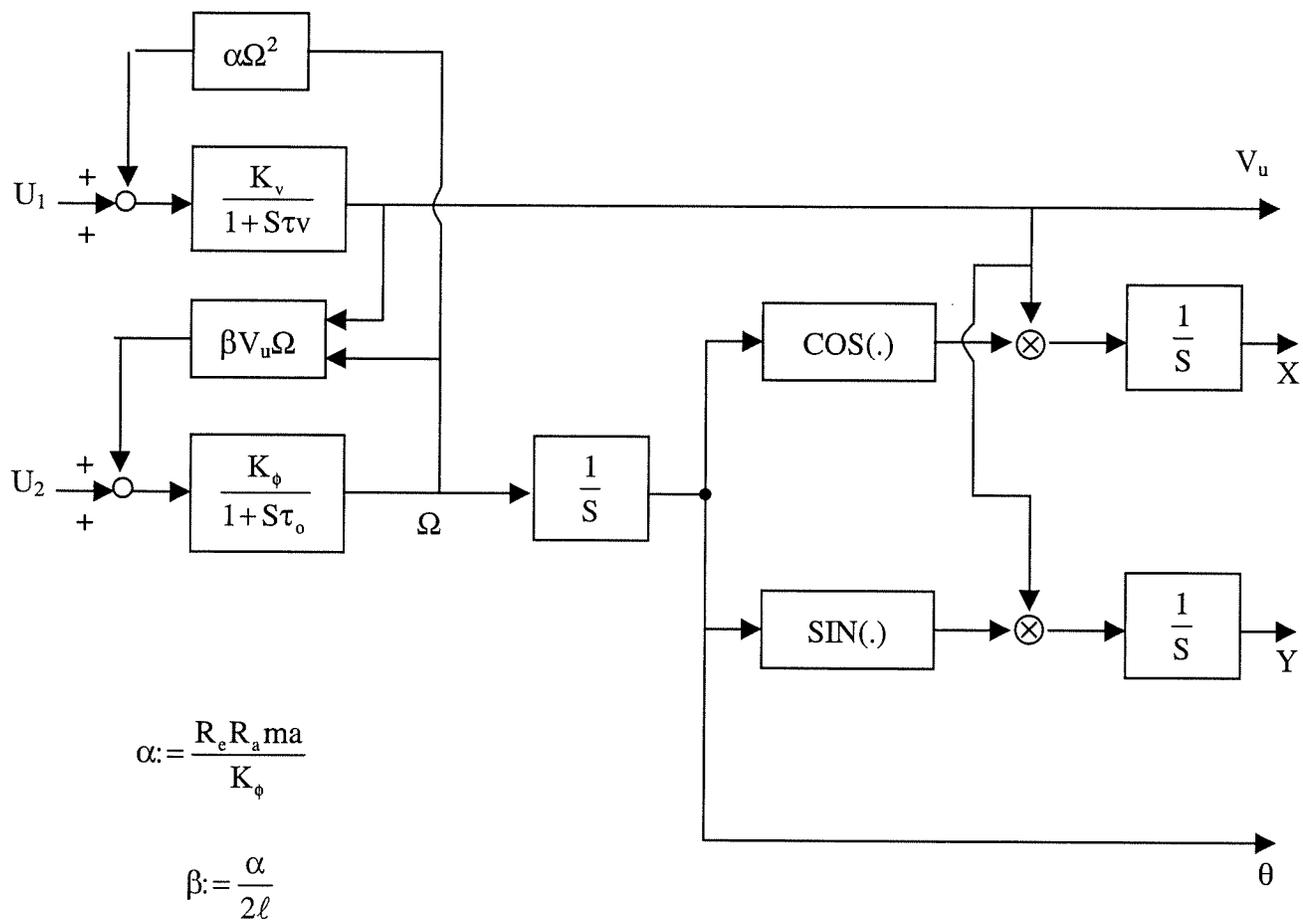


Figure 8 : Repère fixe et Repère mobile



$$U_1 = (V_1 + V_2)$$

$$U_2 = (V_1 - V_2)$$

$$K_v := \frac{R_a}{2K_p}$$

$$\tau_v := \frac{R_e R_a^2 m}{2K_\phi K_p}$$

$$K_0 := \frac{R_a}{2K_p \ell}$$

$$\tau_0 := \frac{R_e R_a^2 (j_a + m a^2)}{2K_\phi K_b \ell^2}$$

Figure 9 : Modèle du Robot Mobile avec 2 roues motrices indépendantes

SYMBOLES

n : nombre de corps rigides d'un système mécanique.

p_1 : nombre de contraintes holonomes.

ℓ_1 : nombre de contraintes nonholonomes.

q : vecteur de coordonnées généralisées; aussi vecteur de configuration, vecteur de variables d'articulation.

p : dimension du vecteur de configuration; aussi nombre de degrés de liberté du système mécanique (en général : $p=6n-p_1$).

α : vecteur de vitesses généralisées.

ℓ : dimension du vecteur de vitesses généralisées (en général : $\ell = p - \ell_1$).

c_i : position dans l'espace articulaire du i -ème corps du système.

ξ_i : orientation dans l'espace opérationnel du i -ème corps du système.

$\chi_i = [c_i' \ \xi_i']'$: configuration dans l'espace opérationnel du i -ème corps du système.

$\chi = [\chi_1' \ \chi_2' \ \dots \ \chi_n']'$: configuration du système à n corps.

v_i : un vecteur décrivant la vitesse du centre de masse du i -ème corps dans l'espace opérationnel.

Ω_i : un vecteur décrivant la vitesses angulaire du i -ème corps dans l'espace opérationnel.

$v_i = [v_i' \ \Omega_i']'$: vecteur de vitesses linéaires-angulaires du i -ème corps.

$v = [v_1' \ v_2' \ \dots \ v_n']'$: vecteur de vitesses linéaires-angulaires de l'ensemble des n corps.

$S(\Omega_i)$: matrice de vitesse angulaire associée à Ω_i .

$$S(\Omega_i) := \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{iz} & \Omega_{iy} \\ \Omega_{iz} & 0 & -\Omega_{ix} \\ -\Omega_{iy} & \Omega_{ix} & 0 \end{bmatrix} .$$

W_i : matrice de vitesse angulaire étendue

$$W_i := \begin{bmatrix} S(\Omega_i) & 0_3 \\ 0_3 & S(\Omega_i) \end{bmatrix};$$

$W := \text{diag}(W_i), i = 1, \dots, n.$

h_i : fonction décrivant une contrainte holonome.

H : matrice utilisée pour décrire une contrainte nonholonome.

g_i' : vecteur représentant une vitesse non admissible dans l'espace opérationnel.

J_h : matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel qui sont compatibles avec la présence de contraintes holonomes.

J_{nh} : matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace de configuration qui sont compatibles avec la présence de contraintes nonholonomes.

$J := J_h J_{nh}$: matrice dont les colonnes forment la base du sous-espace des vitesses dans l'espace opérationnel et sont compatibles avec la présence simultanée de contraintes holonomes et nonholonomes.

m_i : masse du i -ème corps.

j_i : matrice d'inertie du i -ème corps par rapport au repère du corps translaté à son centre de masse.

f_i : résultante des forces appliquées au i -ème corps.

n_i : résultant du moment des forces appliquées au i -ème corps autour de son centre de masse.

$\omega_i := [f_i' \ n_i']'$: force-couple résultant appliqué au i -ème corps.

ω_{ai} : résultante des rapports forces-couples actifs appliquée au i -ème corps.

$M_i :=$ masse-matrice étendue du i -ème corps

$$M_i := \begin{bmatrix} m_i I_3 & 0_3 \\ 0_3 & j_i \end{bmatrix}$$

$M := \text{diag}(M_i)$: masse-matrice étendue du système.

$W := \text{diag}(W_i)$: matrice angulaire étendue du système.

$\omega := [\omega_1' \ \omega_2' \ \dots \ \omega_n']'$: ensemble des vecteurs force-couple appliqués au système.

ω_a : composante force-couple actif de ω .

ω_c : composant de ω généré par les contraintes holonomes et nonholonomes.

$D(q)$: matrice d'inertie du système mécanique.

$C(q, \dot{q})$: matrices Coriolis et centripète.

τ : vecteur des forces généralisées.

FIGURES

1. Structure du modèle dynamique
2. Manipulateur planaire à deux degrés de liberté
3. Géométrie du camion à remorque
4. Forces latérales et longitudinales exercées par les pneus
5. Géométrie d'un robot mobile
6. Plate-forme de locomotion
7. Modèle Mathématique du Mobile
8. Repère fixe et Repère mobile
9. Modèle du Robot Mobile avec 2 roues motrices indépendantes

ANNEXE A : ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE

SOMMAIRE

Cet annexe présente un certain nombre de notions de cinématique qui sont fondamentales à la description mathématique du mouvement d'un corps solide. Elles sont formalisées en utilisant les matrices de rotation, le vecteur, angles et paramètres d'Euler, et en mettant en évidence les principales propriétés algébriques, différentielles et d'interprétation physique qui caractérisent ces éléments.

1. MESURE D'UN VECTEUR RELATIVE À UN TRIÈDRE

Un vecteur, \underline{v} , est un objet mathématique caractérisé par une direction et une amplitude. Dans l'espace à 3 dimensions, \underline{v} peut représenter une force, une vitesse angulaire ou linéaire, la position d'un point, une direction, etc.... La mesure de \underline{v} relative à un trièdre A, indiqué avec la notation $[\underline{v}]_A$, est donnée par un triplet de scalaires

$$[\underline{v}]_A := \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

où v_x, v_y, v_z sont tels que

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}, \quad (2)$$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ étant les vecteurs directeurs de A.

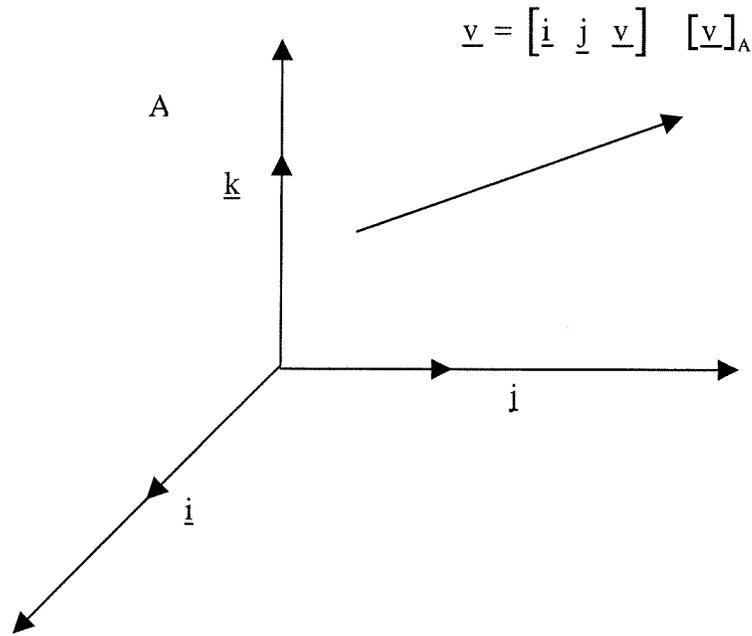


Figure 1: Notion de mesure d'un vecteur relative à un trièdre

Exemple 1: La vitesse d'un mobile A, par rapport à un mobile B est un vecteur que nous dénotons avec le symbole ${}^B\underline{v}_A$. Pour représenter ce vecteur, nous pouvons en donner la mesure relative à un trièdre solide avec A, ou bien à un trièdre solide avec B, ou encore à un trièdre C choisi d'une façon arbitraire. Ces mesures, dénotées avec les symboles ${}^B\underline{v}_A$, ${}^B\underline{v}_A$, ${}^B\underline{v}_A$, sont normalement différentes l'une de l'autre. Cependant, chacune d'entre elles représente d'une façon non ambiguë le vecteur ${}^B\underline{v}_A$.

Exemple 2: La position d'un point P par rapport à un trièdre, A, est définie par la mesure, ${}^A\underline{0}_A\overrightarrow{P}$, du vecteur $\overrightarrow{0}_A\overrightarrow{P}$ qui conjugue l'origine du trièdre avec P. La position de P relative à un autre trièdre B représente la mesure du vecteur $\overrightarrow{0}_B\overrightarrow{P}$, relative à B. Il faut noter qu'en général ${}^A\underline{0}_A\overrightarrow{P} \neq {}^B\underline{0}_B\overrightarrow{P}$, et $\overrightarrow{0}_A\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}_B\overrightarrow{P}$.

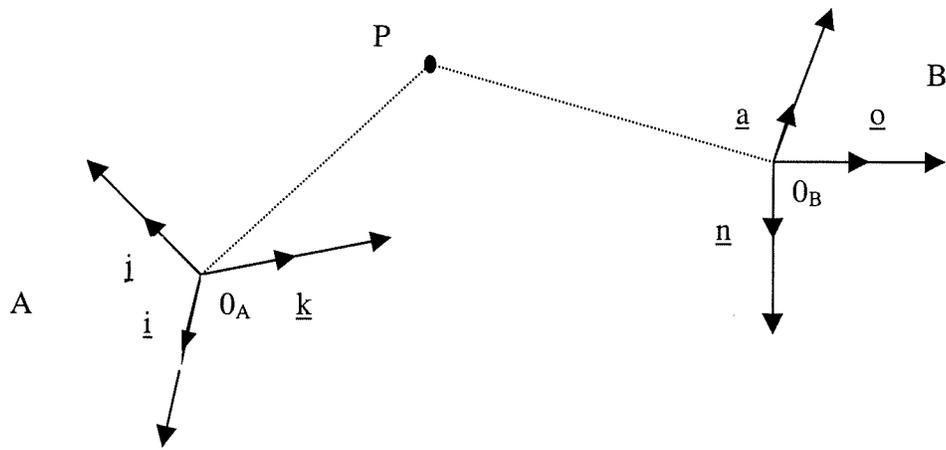


Figure 2: Mesure de la position d'un point

2. GRANDEURS INTERVENANT DANS LA DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN MOBILE

Étant donné deux trièdres A et B, la position de A relative à B est définie par le vecteur conjuguant l'origine de B avec l'origine de A, $\overrightarrow{0_B 0_A}$. L'orientation de A relative à B est définie par l'orientation des vecteurs directeurs de A par rapport à B. Cette orientation est souvent représentée par le vecteur d'Euler $\vartheta \underline{v}$, ou $(\underline{v}, \vartheta)$, un vecteur caractérisé par la propriété qu'en faisant subir à un trièdre C, initialement coïncidant avec B, une rotation d'un angle ϑ autour du vecteur unitaire \underline{v} , l'on obtient que C assume la même orientation que A.

La vitesse linéaire de A relative à B est définie par l'équation

$$[{}^B v_A]_B = \frac{d}{dt} \cdot [\overrightarrow{0_B 0_A}]_B \quad (1)$$

où $\overrightarrow{0_B 0_A}$ est le vecteur qui donne la position de A relative à B. La vitesse angulaire de A relative à B est définie par l'équation

$$[{}^B\Omega_A]_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{{}^B\Theta_A(\Delta t)}{\Delta t} \right]_B, \quad (2)$$

où ${}^B\Theta_A(\Delta t)$ est le vecteur d'Euler représentant la variation d'orientation de A par rapport à B qui s'est produite durant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$.

Les accélérations linéaires et angulaires de A par rapport à B sont définies par les équations

$$[{}^B a_A]_B = \frac{d}{dt} [{}^B v_A]_B \quad (3)$$

$$[{}^B a_{\Omega_A}]_B = \frac{d}{dt} [{}^B \Omega_A]_B. \quad (4)$$

3. MATRICES DE ROTATION

Une matrice de rotation est une matrice avec dimensions 3 x 3 qui décrit l'orientation d'un trièdre B par rapport à un trièdre A. D'une façon plus précise,

$$\text{Rot}(A, B) = \left[[{}^B\mathbf{n}]_A, [{}^B\mathbf{o}]_A, [{}^B\mathbf{a}]_A \right] \quad (1)$$

où $[{}^B\mathbf{n}]_A, [{}^B\mathbf{o}]_A, [{}^B\mathbf{a}]_A$ représentent les mesures relatives à A des vecteurs directeurs de B. La matrice $\text{Rot}(A, B)$ est souvent appelée matrice des cosinus parce que ses entrées représentent les cosinus des angles que les axes de A forment avec les axes de B.

Remarque 1: Dans certaines applications scientifiques (par exemple dans le contexte du graphisme par ordinateur), la matrice de rotation est définie comme étant plutôt donnée par

$$\text{Rot}(A, B) = \left[[{}^B\mathbf{n}]_A, [{}^B\mathbf{o}]_A, [{}^B\mathbf{a}]_A \right]' \quad (2)$$

où $[{}^B\mathbf{n}]_A, [{}^B\mathbf{o}]_A, [{}^B\mathbf{a}]_A$ représentent encore une fois la mesure relative à A des vecteurs directeurs de B. Cette définition alternative reflète une préférence à opérer avec des vecteurs "lignes" plutôt qu'avec des vecteurs colonnes.

Remarque 2: Si $[\underline{v}]_A$ et $[\underline{v}]_B$ sont les mesures relatives à A et B d'un même vecteur \underline{v} , alors

$$[\underline{v}]_B = \text{Rot}(B,A)[\underline{v}]_A.$$

Démo: Soient \underline{i} , \underline{j} et \underline{k} les vecteurs directeurs de B; \underline{n} , \underline{o} et \underline{a} les vecteurs directeurs de A.

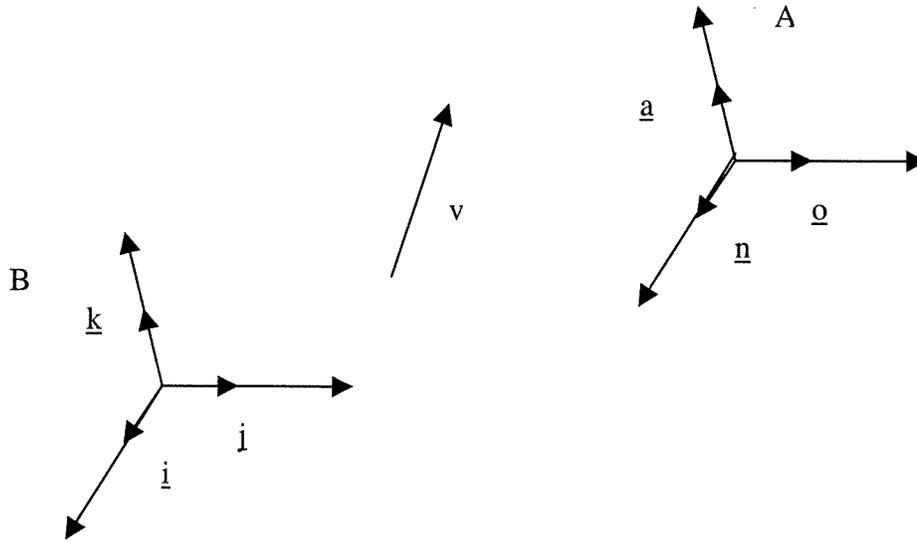


Figure 1: Relation entre les mesures $[\underline{v}]_A$, $[\underline{v}]_B$ d'un même vecteur.

De la définition de $[\underline{v}]_A$ et $[\underline{v}]_B$ l'on a

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} [\underline{v}]_B \quad (3)$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{n} & \underline{o} & \underline{a} \end{bmatrix} [\underline{v}]_A. \quad (4)$$

Puisque,

$$\text{Rot}(B,A) = \begin{bmatrix} [\underline{n}]_B & [\underline{o}]_B & [\underline{a}]_B \end{bmatrix} \quad (5)$$

avec

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} [\underline{n}]_B \quad (6)$$

$$\underline{o} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} [\underline{o}]_B \quad (7)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{bmatrix} [\underline{a}]_B \quad (8)$$

il suit

$$[\underline{n} \quad \underline{o} \quad \underline{a}] = [\underline{i} \quad \underline{j} \quad \underline{k}] \text{Rot}(B,A) \quad (9)$$

et donc

$$\begin{aligned} [\underline{i} \quad \underline{j} \quad \underline{k}][\underline{v}]_B &= [\underline{n} \quad \underline{o} \quad \underline{a}][\underline{v}]_A \\ &= [\underline{i} \quad \underline{j} \quad \underline{k}] \text{Rot}(B,A)[\underline{v}]_A, \end{aligned} \quad (10)$$

d'où

$$[\underline{v}]_B = \text{Rot}(B,A)[\underline{v}]_A. \quad (11)$$

Remarque 3: Si $[\overrightarrow{0_A P}]_A, [\overrightarrow{0_B P}]_B$ représentent les positions relatives à A et B d'un point P, alors

$$\begin{bmatrix} [\overrightarrow{0_B P}]_B \\ 1 \end{bmatrix} = T[B,A] \begin{bmatrix} [\overrightarrow{0_A P}]_A \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

où $T[B,A]$ est la matrice de transformation homogène définie par la position/orientation de A par rapport à B (Craig, chapitre 2). L'on a

$$T[B,A] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Rot}(B,A) & \begin{bmatrix} \overrightarrow{0_B 0_A} \\ \end{bmatrix}_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (13)$$

3.1 Produit, inversion de matrices

Soit l'orientation de B par rapport à A, de C par rapport à B, et de A par rapport à C représentée par les matrices $\text{Rot}(A,B)$, $\text{Rot}(B,C)$ et $\text{Rot}(C,A)$. Alors, les relations suivantes sont valides:

$$\begin{aligned} \text{Rot}(B,A) &= \text{Rot}(B,C) \text{Rot}(C,A) \\ \text{Rot}(A,B) &= \text{Rot}(B,A)^{-1} = \text{Rot}(B,A)' \end{aligned} \quad (1)$$

Démo: Avec $[\underline{v}]_A, [\underline{v}]_B, [\underline{v}]_C$ les mesures d'un vecteur \underline{v} relatives à A, B, C, l'on a

$$[\underline{v}]_B = \text{Rot}(B, A)[\underline{v}]_A ; [\underline{v}]_B = \text{Rot}(B, C)[\underline{v}]_C ; [\underline{v}]_C = \text{Rot}(C, A)[\underline{v}]_A . \quad (2)$$

Il en suit

$$\text{Rot}(B, A)[\underline{v}]_A = \text{Rot}(B, C) \text{Rot}(C, A)[\underline{v}]_A \text{ pour tout } [\underline{v}]_A . \quad (3)$$

Cela implique

$$\begin{aligned} \text{Rot}(B, A) &= \text{Rot}(B, C) \text{Rot}(C, A), \\ \text{Rot}(B, A) \text{Rot}(A, B) &= I_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque 1: Il est souvent utile de représenter les relations d'orientation entre différents repères avec un graphe de fluence tel qu'indiqué à la Figure 2.

3.2 Exemples

Lorsque l'orientation d'un repère A par rapport à un repère B correspond à celle obtenue en faisant subir à un repère initialement coïncidant avec B une rotation d'un angle γ autour de l'axe x alors l'on a

$$\text{Rot}(B, A) = \text{Rot}(x, \gamma) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (1)$$

D'une façon analogue, si l'on considère une rotation d'un angle β autour de l'axe y, où une rotation d'un angle α autour de l'axe z, alors l'on a

$$\text{Rot}(y, \beta) := \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\text{Rot}(z, \alpha) := \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

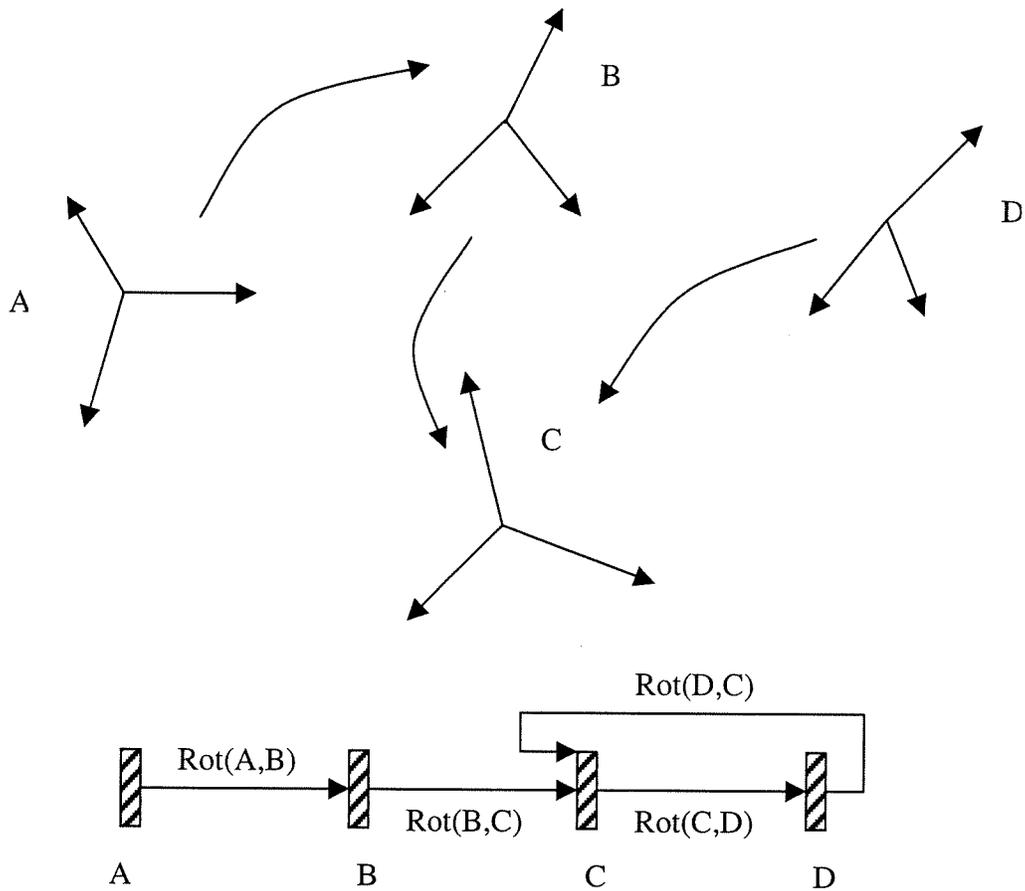


Figure 2: Graphe de fluence représentant les orientations relatives d'un ensemble de repères.

Ces matrices décrivent une rotation autour de l'un des axes principaux d'un trièdre et sont appelées matrices de rotation simples. Tel qu'il sera discuté plus loin, toute matrice de rotation peut être décomposée dans un produit de matrices de rotation simple, tel que, par exemple:

$$\text{Rot}(B,A) = \text{Rot}(z,\alpha)\text{Rot}(y,\beta)\text{Rot}(x,\gamma). \quad (4)$$

3.3 Matrice de rotation et déplacement de rotation

Lorsqu'un trièdre A subit un déplacement de rotation qui à partir d'une orientation initiale A_0 lui fait assumer une orientation finale A_{fin} , ce déplacement peut être représenté par la matrice de rotation $\text{Rot}(A_0, A_{\text{fin}})$. Si A subit une suite de déplacements de rotation représentés par les

matrices R_1, R_2, \dots, R_n , l'orientation finale de A (A_{fin}) par rapport à son orientation initiale (A_0) est représentée par la matrice

$$\text{Rot}(A_0, A_{fin}) = R_1 R_2 \dots R_n \quad (1)$$

si l'effectuation de la suite des rotations est décrite d'une façon relative; l'orientation finale de A est représentée par

$$\text{Rot}(A_0, A_{fin}) = R_n R_{n-1} \dots R_1 \quad (2)$$

si l'effectuation des rotations est décrite d'une façon absolue.

L'effectuation de la suite de rotations R_1, R_2, \dots, R_n est décrite d'une façon relative si, pour chaque $i = 1, \dots, n$, la i -ème rotation est décrite par rapport au trièdre ayant l'orientation obtenue en faisant effectuer à A les premières $i-1$ rotations. D'une façon plus explicite, lors d'une description relative, nous avons

$$R_1 = \text{Rot}(A_0, A_1) , R_2 = \text{Rot}(A_1, A_2), \dots \quad (3)$$

où A_i dénote un trièdre ayant l'orientation que A assume après avoir subi les rotations R_1, R_2, \dots, R_i .

Afin de déterminer la matrice qui décrit l'orientation résultante de cette suite de rotations, soit $\left[\overrightarrow{OP_0} \right]_A$, les coordonnées d'un point, P_0 , relatives à A_0 , un trièdre ayant l'orientation initiale de A.

Après avoir subi la rotation R_1 , A_0 sera transféré dans A_1 , P_0 dans P_1 avec

$$\left[\overrightarrow{OP_1} \right]_{A_0} = R_1 \left[\overrightarrow{OP_1} \right]_{A_1} = R_1 \left[\overrightarrow{OP_0} \right]_{A_0} \quad (4)$$

$\left(\left[\overrightarrow{OP_1} \right]_{A_1} = \left[\overrightarrow{OP_0} \right]_{A_0} \right)$ puisque P_1 a, par rapport à A_1 , la même position que P_0 par rapport à A_0 .

Après avoir subi R_2 , A_1 sera transféré dans A_2 , P_1 dans P_2 , avec

$$\left[\overrightarrow{OP_2} \right]_{A_0} = R_1 \left[\overrightarrow{OP_2} \right]_{A_1} = R_1 R_2 \left[\overrightarrow{OP_2} \right]_{A_2} = R_1 R_2 \left[\overrightarrow{OP_0} \right]_{A_0} \quad (5)$$

En réitérant ce raisonnement, il suit que $\left[\overrightarrow{0 P_n} \right]_{A_0} = R_1 R_2 \cdots R_n \left[\overrightarrow{0 P_0} \right]_{A_0}$. D'où,

$$\text{Rot}(A_0, A_{\text{fin}}) = R_1 R_2 \cdots R_n. \quad (6)$$

L'effectuation d'une suite de rotations R_1, \dots, R_n est décrite en termes absolus lorsque chaque matrice R_i représente le changement d'orientation qu'un trièdre A subit relativement à un trièdre fixe, après avoir été soumis aux rotations R_1, \dots, R_{i-1} . Afin de déterminer la matrice qui décrit l'orientation résultante de cette suite de rotations, soit $\left[\overrightarrow{0 P_0} \right]_{A_0}$ les coordonnées d'un point P_0 relatives à A_0 , un trièdre ayant l'orientation originale de A . Après avoir subi la rotation R_1 , P_0 sera transféré dans P_1 avec

$$\left[0 P_1 \right]_{A_0} = R_1 \left[0 P_0 \right]_{A_0}. \quad (7)$$

Après avoir subi R_2 , P_1 sera transféré dans P_2 avec

$$\left[0 P_2 \right]_{A_0} = R_2 \left[0 P_1 \right]_{A_0} = R_2 R_1 \left[0 P_0 \right]_{A_0}. \quad (8)$$

Après avoir subi R_n , P_{n-1} sera transféré dans P_n avec

$$\left[0 P_n \right]_{A_0} = R_n \cdots R_2 R_1 \left[0 P_0 \right]_{A_0}. \quad (9)$$

Il suit que la rotation résultante de la composition de R_1, \dots, R_n est décrite par la matrice

$$\text{Rot}(A_0, A_n) = R_n \cdots R_1. \quad (10)$$

Exemple 1 : Soit R_1 et R_2 deux déplacements de rotation décrits par les matrices

$$R_1 = \text{Rot}(x, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$R_2 = \text{Rot}(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Si ces deux déplacements sont composées en considérant l'affectation de la représentation $\{R_1, R_2\}$ comme décrite d'une façon relative, la matrice représentant le déplacement de rotation composé est donnée par

$$R_{rés} = R_1 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Si on considère l'affectation de la suite de rotations comme décrite d'une façon absolue, alors

$$R_{rés} = R_2 R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq R_1 R_2. \quad (14)$$

3.4 Vecteur d'Euler et matrice de rotation

L'orientation d'un trièdre B par rapport à un trièdre A est décrite par le vecteur d'Euler $w := \vartheta \underline{k}$, où ϑ est un scalaire et \underline{k} un vecteur unitaire, lorsque l'orientation de B peut être pensée comme obtenue en imposant à un trièdre initialement coïncidant avec A un déplacement de rotation autour de \underline{k} d'un angle ϑ .

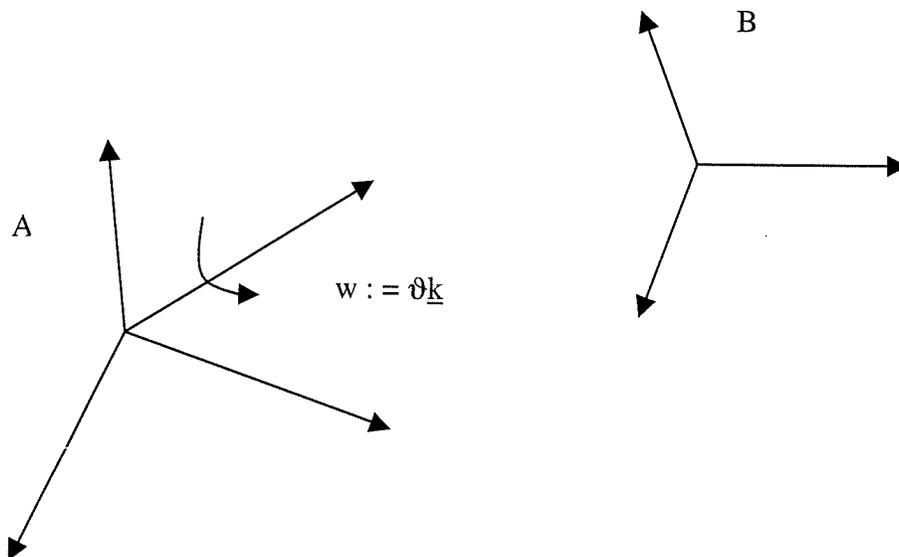


Figure 3: L'orientation de B est obtenue en faisant tourner A d'un angle ϑ (sens anti-horaire) autour de \underline{k}

Soit l'orientation d'un trièdre B par rapport à A représentée par le vecteur d'Euler

$$\vartheta \underline{k}, \quad [\underline{k}]_A = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

et par la matrice de rotation

$$\text{Rot}(A, B) := [r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Les deux représentations sont liées par les relations suivantes:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} k_x k_x v\vartheta + c\vartheta & k_x k_y v\vartheta - k_z s\vartheta & k_x k_z v\vartheta + k_y s\vartheta \\ k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta & k_y k_y v\vartheta + c\vartheta & k_y k_z v\vartheta - k_x s\vartheta \\ k_x k_z v\vartheta - k_y s\vartheta & k_y k_z v\vartheta + k_x s\vartheta & k_z k_z v\vartheta + c\vartheta \end{bmatrix} \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} v\vartheta &:= 1 - c\vartheta \\ c\vartheta &:= \cos \vartheta \\ s\vartheta &:= \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (4)$$

A l'inverse, l'on a

$$\vartheta = \text{Arc cos} \left\{ \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right\} \quad 0 \leq \vartheta \leq 180 \quad (5)$$

$$[\underline{k}]_A = \frac{1}{\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}} \begin{bmatrix} r_{32} & - & r_{23} \\ r_{13} & - & r_{31} \\ r_{21} & - & r_{12} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Démo: i) Du vecteur d'Euler à la matrice de rotation

Proposons nous de déterminer la matrice de rotation qui représente le déplacement produit par une rotation d'un angle ϑ autour du vecteur \underline{k} . Soit le repère B tel que $\text{Rot}(A, B) = \text{Rot}([\underline{k}]_A, \vartheta)$. En appliquant à un repère R_B initialement posé sur un repère auxiliaire arbitrairement choisi R_A , une rotation de ϑ autour de \underline{k} , on aura

$$\text{Rot}(R_A, R_B) = \text{Rot}([\underline{k}]_{R_A}, \vartheta). \quad (7)$$

Puisque R_B et B sont obtenus en faisant subir une même rotation à deux repères initialement posés respectivement sur R_A et A , l'orientation de R_B relative à B est identique à l'orientation de R_A relative à A . Il en suit

$$\text{Rot}(A, R_A) = \text{Rot}(B, R_B). \quad (8)$$

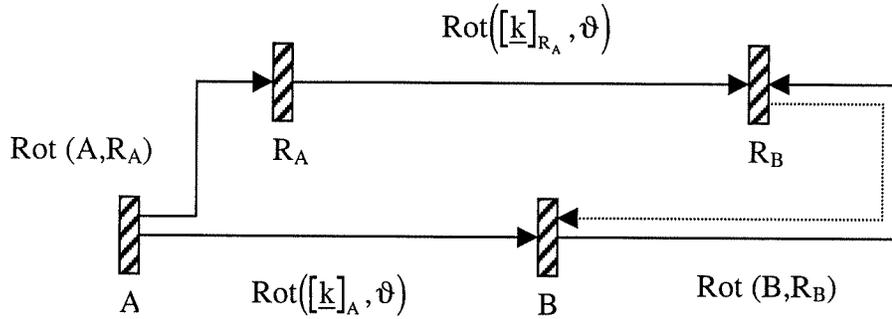


Figure 1 : Matrice de rotation et vecteur d'Euler

En nous servant du schéma à la figure 1, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \text{Rot}(A, B) &= \text{Rot}([\underline{k}]_A, \vartheta) = \text{Rot}(A, R_A) \text{Rot}([\underline{k}]_{R_A}, \vartheta) \text{Rot}(R_B, B) \\ &= \text{Rot}(A, R_A) \text{Rot}([\underline{k}]_{R_A}, \vartheta) \text{Rot}(R_A, A) \\ &= \text{Rot}(A, R_A) \text{Rot}([\underline{k}]_{R_A}, \vartheta) \text{Rot}'(A, R_A). \end{aligned} \quad (9)$$

En choisissant R_A de façon à ce que l'axe x de R_A coïncide avec l'axe \underline{k} , donc de façon à ce que

$$[\underline{k}]_{R_A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ l'on a}$$

$$\text{Rot}(A, R_A) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \quad (10)$$

où α et β représentent les angles de lacet et de tangage de \underline{k} par rapport à A :

α : = angle entre le plan $\underline{z} \ \underline{x}$ de A et le plan $\underline{z} \ \underline{k}$

β : = angle entre le plan $\underline{x} \ \underline{y}$ de A et le vecteur \underline{k} .

L'équation (9) devient alors

$$\text{Rot}([\underline{k}]_A, \vartheta) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \vartheta) \text{Rot}(y, \beta)' \text{Rot}(z, \alpha)' \quad (11)$$

En utilisant la notation $[\underline{k}]_A = [k_x, k_y, k_z]'$, on a

$$\cos \beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \sin \beta = k_z$$

$$\cos \alpha = k_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$\sin \alpha = k_y / \sqrt{k_x^2 + k_y^2},$$

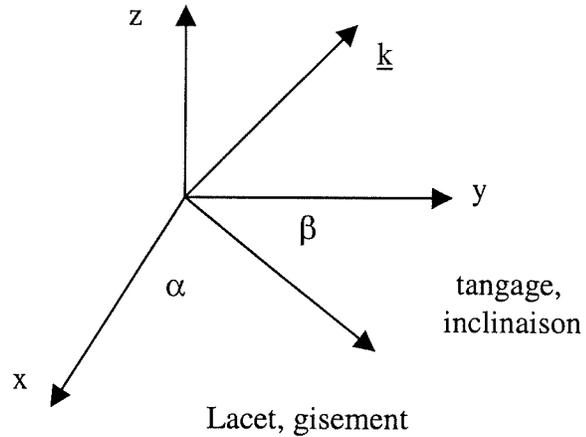


Figure 2 : Angles de gisement et d'inclinaison d'un vecteur par rapport à un trièdre.

En se rappelant que

$$\text{Rot}(x, \vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\vartheta & -s\vartheta \\ 0 & s\vartheta & c\vartheta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{Rot}(y, \beta) = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{Rot}(z, \alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

et en effectuant la multiplication de matrices qui s'impose, nous obtenons

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} k_x k_x v\vartheta + c\vartheta & k_x k_y v\vartheta - k_z s\vartheta & k_x k_z v\vartheta + k_y s\vartheta \\ k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta & k_y k_y v\vartheta + c\vartheta & k_y k_z v\vartheta - k_x s\vartheta \\ k_x k_z v\vartheta - k_y s\vartheta & k_y k_z v\vartheta + k_x s\vartheta & k_z k_z v\vartheta + c\vartheta \end{bmatrix} \quad (15)$$

ii) De la matrice de rotation au vecteur d'Euler

A partir de

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x k_x v\vartheta + c\vartheta & k_y k_x v\vartheta - k_z s\vartheta & k_z k_x v\vartheta + k_y s\vartheta \\ k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta & k_y k_y v\vartheta + c\vartheta & k_z k_y v\vartheta - k_x s\vartheta \\ k_x k_z v\vartheta - k_y s\vartheta & k_y k_z v\vartheta + k_x s\vartheta & k_z k_z v\vartheta + c\vartheta \end{bmatrix}, \quad (16)$$

en observant que

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - c\vartheta + 3c\vartheta = 1 + 2c\vartheta, \quad (17)$$

on déduit

$$\vartheta = \arccos^{-1} \left\{ \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right\}, \quad \vartheta \in [0, \pi]. \quad (18)$$

D'une façon analogue, de

$$r_{32} - r_{23} = -k_z k_y v\vartheta + k_x s\vartheta + k_y k_z v\vartheta + k_x s\vartheta = 2k_x s\vartheta \quad (19)$$

il suit

$$k_x = \frac{r_{32} - r_{23}}{2s\vartheta}; \quad (20)$$

de

$$r_{13} - r_{31} = k_z k_x v\vartheta + k_y s\vartheta - k_x k_z v\vartheta + k_y c\vartheta = 2k_y s\vartheta \quad (21)$$

il suit

$$k_y = \frac{r_{13} - r_{31}}{2s\vartheta}; \quad (22)$$

de

$$r_{21} - r_{12} = k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta - k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta = 2k_z s\vartheta \quad (23)$$

il suit

$$k_z = \frac{r_{21} - r_{12}}{2s\vartheta}. \quad (24)$$

L'on peut donc conclure

$$[\underline{k}]_A = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_v \end{bmatrix} = \frac{1}{2s\vartheta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

or, d'une façon équivalente

$$[\underline{k}]_A = \frac{1}{\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

3.5 Matrice de vitesse angulaire

Soit un vecteur d'Euler $\vartheta_{\underline{v}}$. Lorsque $\vartheta \cong \Delta\vartheta \ll 1$, nous pouvons utiliser l'approximation

$$\text{rot}([\underline{k}]_A, \vartheta) \cong \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\vartheta_z & \Delta\vartheta_y \\ \Delta\vartheta_z & 1 & -\Delta\vartheta_x \\ -\Delta\vartheta_y & \Delta\vartheta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

où

$$\Delta\vartheta_x := \Delta\vartheta v_x$$

$$\Delta\vartheta_y := \Delta\vartheta v_y \quad (2)$$

$$\Delta\vartheta_z := \Delta\vartheta v_z .$$

En introduisant la matrice $S \left\{ \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_x \\ \Delta\vartheta_y \\ \Delta\vartheta_z \end{bmatrix} \right\}$ définie par l'équation

$$S \left\{ \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_x \\ \Delta\vartheta_y \\ \Delta\vartheta_z \end{bmatrix} \right\} := \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\vartheta_z & \Delta\vartheta_y \\ \Delta\vartheta_z & 0 & -\Delta\vartheta_x \\ -\Delta\vartheta_y & \Delta\vartheta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

on a

$$\text{Rot}([\underline{k}]_A, \Delta\vartheta) \cong I_3 + S \left\{ \begin{bmatrix} \Delta\vartheta_x \\ \Delta\vartheta_y \\ \Delta\vartheta_z \end{bmatrix} \right\}. \quad (4)$$

La matrice, $S(a)$, associée à un triplet de scalaire $a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ par la relation

$$S(a) := \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

est appelée matrice de vitesse angulaire. Il s'agit d'une matrice antisymétrique ($S + S' = 0$) ayant

la propriété que pour tout autre triplet $b := \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$, on a

$$S(a)b = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_z b_y + a_y b_z \\ a_z b_x - a_x b_z \\ -a_y b_x + a_x b_y \end{bmatrix} = a \wedge b. \quad (6)$$

Remarque 1: Pour toute paire de trièdre A et B et tout vecteur \underline{v} l'on a

$$S \{ [\underline{v}]_B \} = \text{Rot}(B,A) S \{ [\underline{v}]_A \} \text{Rot}(A,B). \quad (7)$$

Démo: Pour toute paire de vecteurs \underline{v} et \underline{w} l'on a

$$\begin{aligned} [\underline{v} \wedge \underline{w}]_B &= S \{ [\underline{v}]_B \} [\underline{w}]_B = \text{Rot}(B,A) [\underline{v} \wedge \underline{w}]_A \\ &= \text{Rot}(B,A) S \{ [\underline{v}]_A \} [\underline{w}]_A \\ &= \text{Rot}(B,A) S \{ [\underline{v}]_A \} \text{Rot}(A,B) [\underline{w}]_B \end{aligned} \quad (8)$$

Cette égalité devant être valable pour tout $[\underline{w}]_B$, il suit l'équation (7).

3.6 Loi de propagation des matrices de rotation

Soit l'orientation de B par rapport à A décrite par la matrice $\text{Rot}(A,B)(t)$; soit ${}^A\Omega_B$ la vitesse angulaire de B par rapport à A, et soient $[\overset{A}{\Omega}_B]_A, [\overset{A}{\Omega}_B]_B$ les mesures relatives à A et à B de

${}^A\Omega_B$. La relation entre $\text{Rot}(A,B)(t)$, ${}^A\Omega_B$ et $\dot{\text{Rot}}(A,B)(t)$ est décrite par la loi suivante de propagation des matrices de rotation

$$\begin{aligned}\dot{\text{Rot}}(A,B)(t) &= S \left\{ \left[{}^A\Omega_B \right]_A \right\} \text{Rot}(A,B)(t) \\ &= \text{Rot}(A,B)(t) S \left\{ \left[{}^A\Omega_B \right]_B \right\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Ces équations permettent de déterminer l'orientation de B par rapport à A à partir de la mesure de la vitesse angulaire ${}^A\Omega_B$. A l'inverse, de

$$\begin{aligned}S \left\{ \left[{}^A\Omega_B \right]_A \right\} &= \dot{\text{Rot}}(A,B) \text{Rot}'(A,B)(t) \\ S \left\{ \left[{}^A\Omega_B \right]_B \right\} &= \text{Rot}(B,A) \dot{\text{Rot}}(A,B)\end{aligned}\tag{2}$$

elles permettent aussi de calculer la vitesse angulaire à partir de $\text{Rot}(A,B)(t)$ et de sa dérivée.

Démo: Loi de propagation des matrices de rotation.

En indiquant avec $[\Delta\vartheta_x \Delta\vartheta_y \Delta\vartheta_z]$ la mesure relative à A du vecteur d'Euler représentant la rotation requise pour que le trièdre B passe de l'orientation $\text{Rot}(A,B)(t) := R(t)$ à l'orientation $\text{Rot}(A,B)(t + \Delta t) := R(t + \Delta t)$ l'on a

$$R(t + \Delta t) = R(\Delta t)R(t) = \text{Rot}(\Delta\vartheta_x, \Delta\vartheta_y, \Delta\vartheta_z)R(t).\tag{3}$$

En appliquant la formule liant la matrice de rotation au vecteur d'Euler, il en suit

$$R(t + \Delta t) = \left[I_3 + S \left(\left[\Delta\vartheta_x \ \Delta\vartheta_y \ \Delta\vartheta_z \right] \right) \right] R(t),\tag{4}$$

d'où

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} S \left(\left[\begin{array}{ccc} \frac{\Delta \vartheta_x}{\Delta t} & \frac{\Delta \vartheta_y}{\Delta t} & \frac{\Delta \vartheta_z}{\Delta t} \end{array} \right] \right) R(t) \quad (5)$$

$$= S \left(\left[{}^A \Omega_B \right]_A \right) \text{Rot}(A, B), \quad (6)$$

et donc

$$\dot{\text{Rot}}(A, B)(t) = S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_A \right\} \text{Rot}(A, B). \quad (7)$$

D'autre part, de

$$\dot{\text{Rot}}(A, B) = S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_A \right\} \text{Rot}(A, B) \quad (8)$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \text{Rot}'(A, B) \dot{\text{Rot}}(A, B) &= \text{Rot}'(A, B) S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_A \right\} \text{Rot}(A, B) \\ &= \text{Rot}(B, A) S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_A \right\} \text{Rot}(A, B) \\ &= S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_B \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

d'où

$$S \left\{ \left[{}^A \Omega_B \right]_B \right\} = \text{Rot}(B, A) \dot{\text{Rot}}(A, B). \quad (10)$$

Remarque 1: Il est intéressant de noter que lorsque la matrice $R(\Delta t)$ est décrite en termes de

$\left[{}^A \Omega_B \right]_A$, alors

$$R(t + \Delta t) = R(\Delta t) R(t); \quad (11)$$

lorsque décrite en termes de $\left[{}^A \Omega_B \right]_B$ alors $R(t + \Delta t) = R(t) R(\Delta t)$.

Remarque 2: Si le trièdre C a une vitesse angulaire, ${}^A \Omega_C$, par rapport à A, alors

$${}^A \Omega_C = {}^B \Omega_C + {}^A \Omega_B. \quad (12)$$

Démo: De $\text{Rot}(A,C) = \text{Rot}(A,B) \text{Rot}(B,C)$, en utilisant la loi de propagation des matrices de rotation nous obtenons

$$\dot{\text{Rot}}(A,C) = S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_C \end{smallmatrix} \right]_A \right\} \text{Rot}(A,C) . \quad (13)$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\dot{\text{Rot}}(A,C) = \dot{\text{Rot}}(A,B) \text{Rot}(B,C) + \text{Rot}(A,B) \dot{\text{Rot}}(B,C)$$

d'où, en utilisant encore une fois la loi de propagation des matrices de rotation

$$\begin{aligned} \dot{\text{Rot}}(A,C) &= S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_B \end{smallmatrix} \right]_A \right\} \text{Rot}(A,B) \text{Rot}(B,C) + \text{Rot}(A,B) S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} B \\ \Omega_C \end{smallmatrix} \right]_B \right\} \text{Rot}(B,C) \\ &= S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_B \end{smallmatrix} \right]_A \right\} \text{Rot}(A,C) + S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} B \\ \Omega_C \end{smallmatrix} \right]_A \right\} \text{Rot}(A,C) \\ &= S \left\{ \left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_B \end{smallmatrix} \right]_A + \left[\begin{smallmatrix} B \\ \Omega_C \end{smallmatrix} \right]_A \right\} \text{Rot}(A,C) . \end{aligned} \quad (14)$$

En comparant (13) et (14) nous obtenons

$${}^A \Omega_C = {}^A \Omega_B + {}^B \Omega_C . \quad (15)$$

Avec $A \equiv C$, cette équation implique

$$\left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_A \end{smallmatrix} \right]_A = \left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_B \end{smallmatrix} \right]_A + \left[\begin{smallmatrix} B \\ \Omega_A \end{smallmatrix} \right]_A , \quad (16)$$

et puisque $\left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_A \end{smallmatrix} \right]_A = 0$, il suit

$$\left[\begin{smallmatrix} A \\ \Omega_B \end{smallmatrix} \right]_A = - \left[\begin{smallmatrix} B \\ \Omega_A \end{smallmatrix} \right]_A . \quad (17)$$

3.7 Meilleur approximant orthonormal d'une matrice non orthonormale

Lorsque une matrice $\text{Rot}(A,B)$ est obtenue à partir de calculs numériques, il peut arriver qu'elle ne possède pas la propriété d'orthonormalité qui devrait la caractériser. Une matrice $X :=$

$[X_{ij}]$ est le meilleur approximant orthonormal d'une matrice assignée $R := [r_{ij}]$, si X est orthonormal et si elle minimise la fonction

$$\sum_{ij} (x_{ij} - r_{ij})^2 = \text{Trace}(X - R)'(X - R). \quad (1)$$

X peut être calculée à partir de R en utilisant la formule $X = (R R')^{1/2} R'^{-1}$.

Démo: Les conditions

- i Trace $(X - R)'(X - R)$ minimale avec $X X' = I_3$
- ii Trace $(R X')$ maximale, $X X' = I_3$
- iii $R X'$ symétrique, $X X' = I_3$

sont équivalentes.

De $R X' = X R'$, il suit

$$R X' X R' = X R' X R' \quad (2)$$

$$R R' = (X R')^2$$

$$X R' = (R R')^{1/2} \rightarrow X = (R R')^{1/2} R'^{-1}. \quad (3)$$

3.8 Relation entre les dérivées des mesures d'un même vecteur relatives à deux trièdres

Soient $[v]_A$, $[v]_B$ les mesures relatives à A et B d'un vecteur v , $\frac{d}{dt}[v]_A$, $\frac{d}{dt}[v]_B$ les dérivées

de ces mesures.

De

$$[v]_A = \text{Rot}(A, B)[v]_B \quad (1)$$

il suit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\underline{v}]_A &= \dot{\text{Rot}}(A, B) [\underline{v}]_B + \text{Rot}(A, B) \frac{d}{dt} [\underline{v}]_B \\
&= S \left([{}^A \Omega_B]_A \right) \text{Rot}(A, B) [\underline{v}]_B + \text{Rot}(A, B) \frac{d}{dt} [\underline{v}]_B \\
&= S [{}^A \Omega_B]_A [\underline{v}]_A + \text{Rot}(A, B) \frac{d}{dt} [\underline{v}]_B
\end{aligned} \tag{2}$$

et donc

$$\frac{d}{dt} [\underline{v}]_A = \text{Rot}(A, B) \left[[{}^A \Omega_B]_B [\underline{v}]_B + \frac{d}{dt} [\underline{v}]_B \right]. \tag{3}$$

4. ANGLES D'EULER (RPY)

Les angles d'Euler, (tangage, roulis, lacet) décrivent l'orientation d'un trièdre B par rapport à un trièdre A. Ils sont définis comme suit.

Tangage (β , tangage pitch): angle que l'axe x de B forme avec le plan xy de A;

Roulis (γ , roulis roll): angle de rotation en sens horaire que B doit effectuer autour de son axe x afin que son axe y devienne parallèle au plan xy de A;

Lacet (α , lacet yaw): angle de la rotation dans les sens anti-horaire que A doit effectuer autour de son axe z pour que son axe x soit parallèle au plan défini par l'axe z de A et l'axe x de B;

4.1 Relation entre les angles d'Euler et la matrice de rotation

Soit l'orientation de B relative à A, décrite par les angles d'Euler γ , β , α . La matrice Rot (A,B) peut être déterminée en considérant le déplacement nécessaire pour qu'un trièdre initialement posé sur A assume l'orientation de B définie par les angles γ , β et α .

Afin de caractériser ce déplacement, considérons les étapes suivantes:

- i) Soit l'orientation initiale d'un trièdre R^1 coïncidant avec celle de A. Faisons subir à R^1 une rotation $\text{Rot}(z, \alpha)$, (c. à. d.: une rotation autour de l'axe z d'un angle α). L'axe z de R^1 coïncidera alors avec l'axe z de A; l'axe x de R^1 sera parallèle au plan défini par l'axe z de A et l'axe x de B;
- ii) Soit R^2 un trièdre avec orientation initiale coïncidant avec R^1 . Faisons subir à R^2 une rotation $\text{Rot}(y, \beta)$. L'axe x de R^2 sera alors parallèle à l'axe x de B, l'axe y de R^2 parallèle à l'axe y de R^1 ;
- iii) Soit R^3 un trièdre avec orientation initiale coïncidant avec R^2 . Faisons subir à R^3 une rotation $\text{Rot}(x, \gamma)$. L'axe x de R^3 sera alors parallèle à l'axe x de B et l'axe y de R^3 parallèle à l'axe y de B.

En somme, R^3 a la même orientation que B.

Le déplacement caractérisant l'orientation de B relative à A peut donc être vue comme le déplacement résultant de l'effectuation de la suite des trois rotations $\text{Rot}(z, \alpha)$, $\text{Rot}(y, \beta)$, $\text{Rot}(x, \gamma)$. Chacune de cette suite de rotations étant décrite d'une façon relative, il suit

$$\text{Rot}(A,B) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma) . \quad (1)$$

En utilisant les expressions de ces matrices, l'on obtient

$$\text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

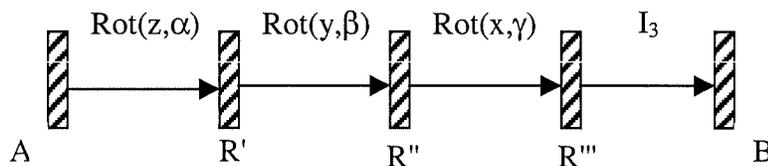


Figure 1

A l'inverse, en posant

$$\text{Rot}(A, B) = [r_{ij}] \quad (3)$$

l'on a

$$\beta = A \tan 2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) : \in (-90^0, +90^0)$$

$$\alpha = A \tan 2\left(r_{21} / c\beta, r_{11} / c\beta\right) \quad (4)$$

$$\gamma = A \tan 2\left(r_{32} / c\beta, r_{33} / c\beta\right).$$

Remarque 1: La fonction $\phi = A \tan 2(y, x)$ coïncide avec la fonction $\tan^{-1}(y/x)$ excepté que la valeur de ϕ est déterminée en utilisant le quadrant auquel le point (x, y) appartient $(-180^0 \leq \phi \leq 180^0)$.

Remarque 2: Si $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$, alors l'on a

$$\text{Rot}(A, B) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Rot}(x, \gamma) \cong \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} = I_3 + S \left\{ \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \quad (5)$$

D'où, en utilisant la notation $[\overset{A}{\Omega}_B]_A' = [\Omega_x \Omega_y \Omega_z]$,

$$\dot{\alpha} = \Omega_z$$

$$\dot{\beta} = \Omega_y \quad (6)$$

$$\dot{\gamma} = \Omega_x.$$

4.2 Loi de propagation

Il est important de remarquer qu'en général $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \neq (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$. La relation entre la vitesse angulaire et la dérivée des angles d'Euler peut être obtenue en calculant la dérivée de la matrice $\text{Rot}(A,B) = \text{Rot}(z,\alpha) \text{Rot}(y,\beta) \text{Rot}(x,\gamma)$ (une matrice fonction de $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \alpha, \beta$, et γ), et en

imposant que cette matrice soit égale à $S \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}_A \right\} \text{Rot}(A,B)$ ou bien égale à

$\text{Rot}(A,B) S \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}_B \right\}$ suivant que $(\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z)$ représente la vitesse angulaire mesurée

relativement à A ou bien à B.

Dans le cas où $(\Omega_x \ \Omega_y \ \Omega_z)$ est la mesure relative au repère B de la vitesse angulaire de B par rapport à A, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt} [\text{Rot}(z,\alpha)\text{Rot}(y,\beta)\text{Rot}(x,\gamma)] = \text{Rot}(z,\alpha)\text{Rot}(y,\beta)\text{Rot}(x,\gamma) S \left\{ \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}_B \right\} \quad (1)$$

c'est à dire,

$$\begin{bmatrix} -\dot{\alpha} s\alpha c\beta - \dot{\beta} c\alpha s\beta & -\dot{\alpha} s\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta} c\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma} c\alpha s\beta c\gamma & -\dot{\alpha} s\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta} c\alpha c\beta c\gamma \\ & -\dot{\alpha} c\alpha c\gamma & +\dot{\gamma} s\alpha s\gamma \\ & & +\dot{\alpha} c\alpha c\gamma \\ \dot{\alpha} c\alpha c\beta - \dot{\beta} s\beta s\alpha & +\dot{\alpha} c\alpha s\beta s\gamma + \dot{\beta} c\alpha c\beta s\gamma + \dot{\gamma} s\alpha s\beta c\gamma & \dot{\alpha} c\alpha s\beta c\gamma + \dot{\beta} s\alpha c\beta c\gamma - \dot{\gamma} s\alpha s\beta s\gamma \\ & -\dot{\alpha} s\alpha s\gamma - \dot{\gamma} s\gamma c\alpha & +\dot{\alpha} s\alpha s\gamma & -\dot{\gamma} c\alpha c \\ -\dot{\beta} c\beta & -\dot{\beta} s\beta s\gamma + \dot{\gamma} c\gamma c\beta & -\dot{\beta} s\beta c\gamma & -\dot{\gamma} c\beta s\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

En comparant l'entrée 3-1 de la matrice à gauche avec l'entrée correspondante à droite, l'on a

$$c\beta s\gamma\Omega_z - \Omega_y c\beta c\gamma = -\dot{\beta} c\beta \quad (3)$$

d'où

$$\dot{\beta} = \Omega_y c\gamma - \Omega_z s\gamma . \quad (4)$$

En considérant l'entrée 3-2, l'on a

$$\dot{\gamma} c\gamma c\beta - \dot{\beta} s\beta s\gamma = \Omega_z s\beta + \Omega_x c\beta c\gamma$$

d'où

$$\dot{\gamma} = \Omega_z \tan\beta c\gamma + \Omega_x + \Omega_y \tan\beta s\gamma . \quad (5)$$

En considérant l'entrée 1-1, l'on a

$$-\dot{\alpha} s\alpha c\beta - \dot{\beta} c\alpha s\beta = \Omega_z (c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha s\gamma) - \Omega_y (c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma) \quad (6)$$

d'où

$$-\dot{\alpha} s\alpha c\beta = (\Omega_z c\gamma - \Omega_y s\gamma) c\alpha s\beta + \Omega_z (c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha s\gamma) - \Omega_y (c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma) \quad (7)$$

c'est à dire,

$$\dot{\alpha} = \frac{\Omega_z c\gamma}{c\beta} + \frac{\Omega_y s\gamma}{c\beta} . \quad (8)$$

En réécrivant les équations (4,5,8) sous forme matricielle, on a

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s\gamma}{c\beta} & \frac{c\gamma}{c\beta} \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 1 & \tan\beta s\gamma & \tan\beta c\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

5. PARAMÈTRES D'EULER

Soit l'orientation d'un trièdre B par rapport à un trièdre A représentée par le vecteur d'Euler $\phi \underline{r}$. La représentation de cette même orientation en termes des paramètres d'Euler est donnée par la paire (scalaire, vecteur) $p := (\eta, \underline{q})$

où

$$\eta = \cos \phi/2 \quad \underline{q} := \sin \phi/2 \underline{r}. \quad (1)$$

D'une façon équivalente, la paire peut être vue comme un vecteur avec 4 entrées (quaternion)

$$\underline{q} := (\eta, q_1, q_2, q_3)$$

$$\eta := \cos \phi/2$$

$$q_1 := \sin \phi/2 r_x \quad q_2 := \sin \phi/2 r_y \quad q_3 := \sin \phi/2 r_z. \quad (2)$$

où $[r_x r_y r_z]$ dénote la mesure de \underline{r} .

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quaternion p représente un ensemble de paramètres d'Euler est que

$$\|\underline{p}\|^2 = \eta^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (3)$$

5.1 Relation avec la matrice de rotation

En indiquant avec $\text{Rot}(A,B)$ la matrice qui représente l'orientation de B par rapport à A, l'on a

$$\text{Rot}(A,B) = \begin{bmatrix} 1-2q_2^2-2q_3^2 & 2(q_1q_2-\eta q_3) & 2(q_1q_3+\eta q_2) \\ 2(q_1q_2+\eta q_3) & 1-2q_1^2-2q_3^2 & 2(q_3q_2-\eta q_1) \\ 2(q_1q_3-\eta q_2) & 2(q_2q_3+\eta q_1) & 1-2q_1^2-2q_2^2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Inversement, en utilisant la notation

$$\text{Rot}(A,B) := [r_{ij}] \quad (5)$$

l'on a

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{4\eta} \\
q_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{4\eta} \\
q_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{4\eta} \\
\eta &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Remarque 1: Ces formules peuvent être obtenues à partir de la relation liant la matrice de rotation avec le vecteur d'Euler, en exprimant $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ en fonction de $\sin\varphi/2$, $\cos\varphi/2$, et en identifiant les composantes du quaternion.

5.2 Propriétés algébriques

Les paramètres d'Euler jouissent les propriétés suivantes:

i) $\text{Rot}(A,B) = I_3 \iff (\eta, \underline{q}) = (1, 0_3)$

ii) Si (η, \underline{q}) est le quaternion associé avec $\text{Rot}(B,A)$ alors $(\eta, -\underline{q})$ est le quaternion associé avec $\text{Rot}(A,B)'$.

iii) En associant à un quaternion la notation complexe:

$$(\eta, \underline{q}) := \eta + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{1}$$

et en définissant les produits des imaginaires i, j, k avec les relations :

$$i * i = k * k = j * j = -1$$

$$i * j = k ; k * i = j ; j * k = i \tag{2}$$

l'on peut définir le produit de deux quaternions

$$(\eta_3, \underline{q}_3) = (\eta_1, \underline{q}_1) (\eta_2, \underline{q}_2), \tag{3}$$

en utilisant l'équation

$$\eta_3 + q_{31}i + q_{32}j + q_{33}k = (\eta_1 + q_{11}i + q_{12}j + q_{13}k)(\eta_2 + q_{21}i + q_{22}j + q_{23}k). \quad (4)$$

Celà nous donne

$$(\eta_3, \underline{q}_3) = (\eta_1 \eta_2 - \underline{q}_1 \underline{q}_2, \eta_1 \underline{q}_2 + \eta_2 \underline{q}_1 + S(\underline{q}_1) \underline{q}_2). \quad (5)$$

Si $(\eta_i, \underline{q}_i)$, $i = 1, 2, 3$ est le quaternion associé avec Rot_i , et si $\text{Rot}_3 = \text{Rot}_1 \text{Rot}_2$, alors,

$$(\eta_3, \underline{q}_3) = (\eta_1, \underline{q}_1)(\eta_2, \underline{q}_2). \quad (6)$$

5.3 Loi de Propagation

Soit $\text{Rot}(A,B)$ une fonction du temps, i.e. $\text{Rot}(A,B) = \text{Rot}(t)$; soit $(\eta, \underline{q})(t)$ le quaternion associé avec $\text{Rot}(t)$. La loi de propagation établit la relation entre $(\eta, \underline{q})(t)$, sa dérivée $\left(\dot{\eta}, \dot{\underline{q}}\right)(t)$

et la vitesse angulaire ${}^A\Omega_B$. Cette relation est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & \boxed{-S(\Omega)} & & \\ \Omega_2 & & & \\ \Omega_3 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{bmatrix} \quad (1)$$

où $\Omega \triangleq [{}^A\Omega_B]_B$ représente la vitesse angulaire de B par rapport à A, mesurée par rapport à B.

De l'équation (1) nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -q_1 & \eta & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & \eta & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Afin de démontrer la validité de l'équation (1), observons que

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\underline{q}} \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t + \Delta t) - \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t) \right\} \quad (3)$$

où

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t + \Delta t) = \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t) \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (\Delta t) \quad (4)$$

où $\begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (\Delta t)$ représente le changement d'orientation de B, par rapport à A, mesuré par rapport à

B, qui s'est produit dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$. Pour Δt suffisamment petit, ce changement d'orientation de B est décrit par le vecteur d'Euler $(\Delta \vartheta \underline{r})$ avec

$$[\underline{r}]_B := \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} := \frac{1}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix}; \Delta \vartheta = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2} \Delta t \quad (5)$$

où $[\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3]$ représente la mesure relative à B de la vitesse angulaire de B par rapport à A $([{}^A \Omega_B]_B)$.

Il suit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (\Delta t) &= \left(\cos \frac{\Delta \vartheta}{2}, \sin \frac{\Delta \vartheta}{2} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \right) \\ &\equiv \left(1, \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

et d'ici

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t + \Delta t) = \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t) \begin{pmatrix} \eta \\ \underline{q} \end{pmatrix} (\Delta t) = \begin{bmatrix} \eta - \frac{\Delta t}{2} [\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3] \underline{q} \\ \frac{\Delta t}{2} \eta \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} + \underline{q} - \frac{\Delta t}{2} S(\Omega) \underline{q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t + \Delta t) - \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{q} \end{pmatrix} (t) = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{2} [\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3] \underline{q} \\ \frac{\Delta t}{2} \underline{\eta} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} - \frac{\Delta t}{2} S(\Omega) \underline{q} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

En divisant la dernière expression par Δt et en considérant la limite pour $\Delta t \rightarrow 0$, l'on parvient alors à

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\eta}} \\ \dot{\underline{q}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & & & \\ \Omega_2 & & -S(\Omega) & \\ \Omega_3 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{q} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Remarque 1: L'équation (1) nous permet de déterminer l'orientation d'un véhicule à partir de la mesure de sa vitesse angulaire et de son orientation initiale.

Remarque 2: L'équation (2) nous permet de déduire la mesure fournie par un gyroscope à composants liés lorsque le véhicule suit une trajectoire assignée.

5.4 Mesures d'un vecteur et paramètres d'Euler

Si $[v]_A$, $[v]_B$ représentent la mesure d'un vecteur \underline{v} par rapport à deux trièdres A et B et si l'orientation de B par rapport à A est décrite par le quaternion $p = \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \underline{q}$, alors

$$Q([v]_A) = \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \underline{q} \right) Q([v]_B) \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\vartheta}{2} \underline{q} \right). \quad (9)$$

où $Q([v]_A)$, $Q([v]_B)$, quaternions associés à $[v]_A$ et $[v]_B$ sont définis par les relations

$$\begin{aligned} Q([v]_A) &:= (0, [v]_A) \\ Q([v]_B) &:= (0, [v]_B). \end{aligned} \quad (10)$$

5.5 Avantages offerts par les paramètres d'Euler

Les paramètres d'Euler obtiennent les avantages suivants:

utilisés d'une façon routinière dans les problèmes de guidage automatique en aéronautique et aérospatial (problèmes périphériques à la robotique);

un grand nombre de problèmes de contrôle de systèmes robotiques (en particulier, guidage autonome de véhicules) sont souvent solutionnés en utilisant la théorie des quaternions;

le calcul de l'orientation d'un trièdre après un déplacement de rotation en utilisant les matrices de rotation nécessite un nombre d'opérations (27 multiplications, 18 additions) qui est plus grand que celui requis si on utilise des quaternions (16 multiplications, 12 additions).

simuler la dynamique d'un corps solide à partir de l'équation d'Euler $N = {}^C I \dot{\Omega} + S(\Omega) {}^C I \Omega$ avec l'orientation et la vitesse angulaire initiales assignées, en utilisant les matrices de rotation, requiert un nombre d'opérations est considérablement plus grand qu'en utilisant des quaternions.

5.6 Paramètres de Rodriguez-Hamilton

Les paramètres de Rodriguez-Hamilton offrent une représentation des orientations qui est similaire à celle offerte par les paramètres d'Euler. En particulier la représentation de Rodriguez-Hamilton d'une orientation caractérisée par le vecteur d'Euler $\vartheta_{\mathbf{r}}$ est donnée par les paramètres

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \tan(\vartheta/2) [\mathbf{r}] \quad (1)$$

Relation avec la matrice de Rotation

$$\text{Rot} = (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \begin{bmatrix} 1 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 2(p_1 p_2 - p_3) & 2(p_1 p_3 + p_2) \\ 2(p_1 p_2 + p_3) & 1 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 & 2(p_1 p_3 - p_2) \\ 2(p_1 p_3 - p_2) & 2(p_2 p_3 + p_1) & 1 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Relation avec les paramètres d'Euler

$$\eta = (1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{-1/2} \quad q_1 = \eta p_1 \quad q_2 = \eta p_2 \quad q_3 = \eta p_3 \quad (3)$$

Loi de propagation

$$\begin{bmatrix} \dot{\cdot} \\ p_1 \\ \dot{\cdot} \\ p_2 \\ \dot{\cdot} \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + p_1^2 & p_1 p_2 - p_3 & p_1 p_3 + p_2 \\ p_1 p_2 + p_3 & 1 + p_2^2 & p_2 p_3 - p_1 \\ p_1 p_3 - p_2 & p_1 + p_2 p_3 & 1 + p_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00249459 7

École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succ. Centre-ville
Montréal (Québec)
H3C 3A7

