

10 JAN. 2000

EPM/RT-99/22

ASSERVISSEMENT EN POSITION  
D'UN MANIPULATEUR ROBOTIQUE  
NOTIONS ET TECHNIQUES FONDAMENTALES

par

Romano M. De Santis  
Professeur

Département de Génie électrique et de Génie informatique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL  
DÉCEMBRE 1999

*gratuit*

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, Décembre 1999  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

---

ASSERVISSEMENT EN POSITION D'UN MANIPULATEUR ROBOTIQUE  
NOTIONS ET TECHNIQUES FONDAMENTALES

Romano M. DeSantis  
Département de Génie Électrique et de Génie Informatique

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au :

Service des Éditions  
École Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale Centre-Ville  
Montréal, (Québec) H3C 3A7  
Téléphone : (514) 340-4711 ext : 4473  
Télécopie : (514) 340-3734

Compter 0,10\$ par page et ajouter 3,00\$ pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

ASSERVISSEMENT EN POSITION  
D'UN MANIPULATEUR ROBOTIQUE  
NOTIONS ET TECHNIQUES FONDAMENTALES

DeSantis, Romano M., Professeur  
Département de Génie Électrique et de Génie Informatique  
École Polytechnique de Montréal  
2900 Boul. Édouard-Montpetit, C.P. 6079, Succ. Centre-Ville  
Montréal, Qué. Canada, H3C 3A7

<b>0. Sommaire</b> .....	1
<b>1. Introduction</b>	
1.1 Système de guidage d'un manipulateur robotique .....	2
1.2 Modèle dynamique d'un manipulateur.....	4
1.3 Énoncé du problème d'asservissement en position .....	5
<b>2. Asservissement en position dans l'espace articulaire</b>	
2.1 Cas d'un manipulateur avec une articulation.....	7
2.1.1 Articulation représentée par un double intégrateur .....	7
2.1.2 Articulation plus générale .....	8
2.2 Cas d'un manipulateur avec plusieurs articulations .....	11
2.2.1 Asservissement en position avec régulation d'accélération.....	11
2.2.2 Asservissement en position avec régulation de vitesse .....	13
2.3 Contrôleurs industriels .....	15
2.3.1 Cas d'un manipulateur avec une articulation.....	15
2.3.1.1 PID par régulation d'accélération .....	17
2.3.1.2 PID par régulation de vitesse .....	19
2.3.2 Cas d'un manipulateur avec plusieurs articulations .....	20
<b>3. Asservissement en position dans l'espace opérationnel</b>	
3.1 Énoncé du problème.....	24
3.2 Asservissement en position/orientation d'un corps rigide.....	24
3.2.1 Solution par régulation d'accélération .....	25
3.2.2 Solution par régulation de vitesse .....	29
3.2.3 Asservissement en orientation par linéarisation exacte .....	31
3.2.3.1 Linéarisation exacte en utilisant les quaternions (Dwyer 1984) .....	31
3.2.3.2 Linéarisation exacte en utilisant les angles d'Euler .....	36
3.3 Asservissement en position/orientation de l'outil d'un manipulateur.....	37
3.3.1 Solution par régulation d'accélération .....	37
3.3.2 Solution par régulation de vitesse .....	39

<b>4. Asservissement en position avec commande adaptative .....</b>	<b>40</b>
<b>5. Asservissement en position avec auto-apprentissage.....</b>	<b>44</b>
<b>Conclusions.....</b>	<b>47</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>48</b>

---

# **ASSERVISSEMENT EN POSITION D'UN MANIPULATEUR ROBOTIQUE NOTIONS ET TECHNIQUES FONDAMENTALES**

**DeSantis, R.M., Professeur  
Département de génie électrique et génie informatique  
École Polytechnique de Montréal  
2900, boul. Édouard-Montpetit, C.P. 6079-A  
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7**

## **0. Sommaire**

---

Ce rapport présente notions et techniques concernant l'asservissement en position de manipulateurs robotiques. Cela inclut la structure conceptuelle du système de guidage d'un manipulateur, les notions de contrôle dans l'espace articulaire et dans l'espace opérationnel, les notions de suivi de trajectoire d'état par régulation d'accélération et par régulation de vitesse, la méthode du couple pré-calculé, les techniques de conception de contrôleurs industriels, la méthode de commande adaptative basée sur le modèle du manipulateur, la notion de contrôle avec auto-apprentissage.

# 1. INTRODUCTION

## 1.1 Système de guidage d'un manipulateur robotique

Le système de guidage d'un manipulateur robotique est constitué de composantes similaires à celles que l'on retrouve dans tout système de contrôle d'un procédé industriel: capteurs, senseurs, actionneurs, générateurs de puissance, éléments de communication, unités de calcul et de mémoire, instruments de visualisation, interface, logiciels, etc...

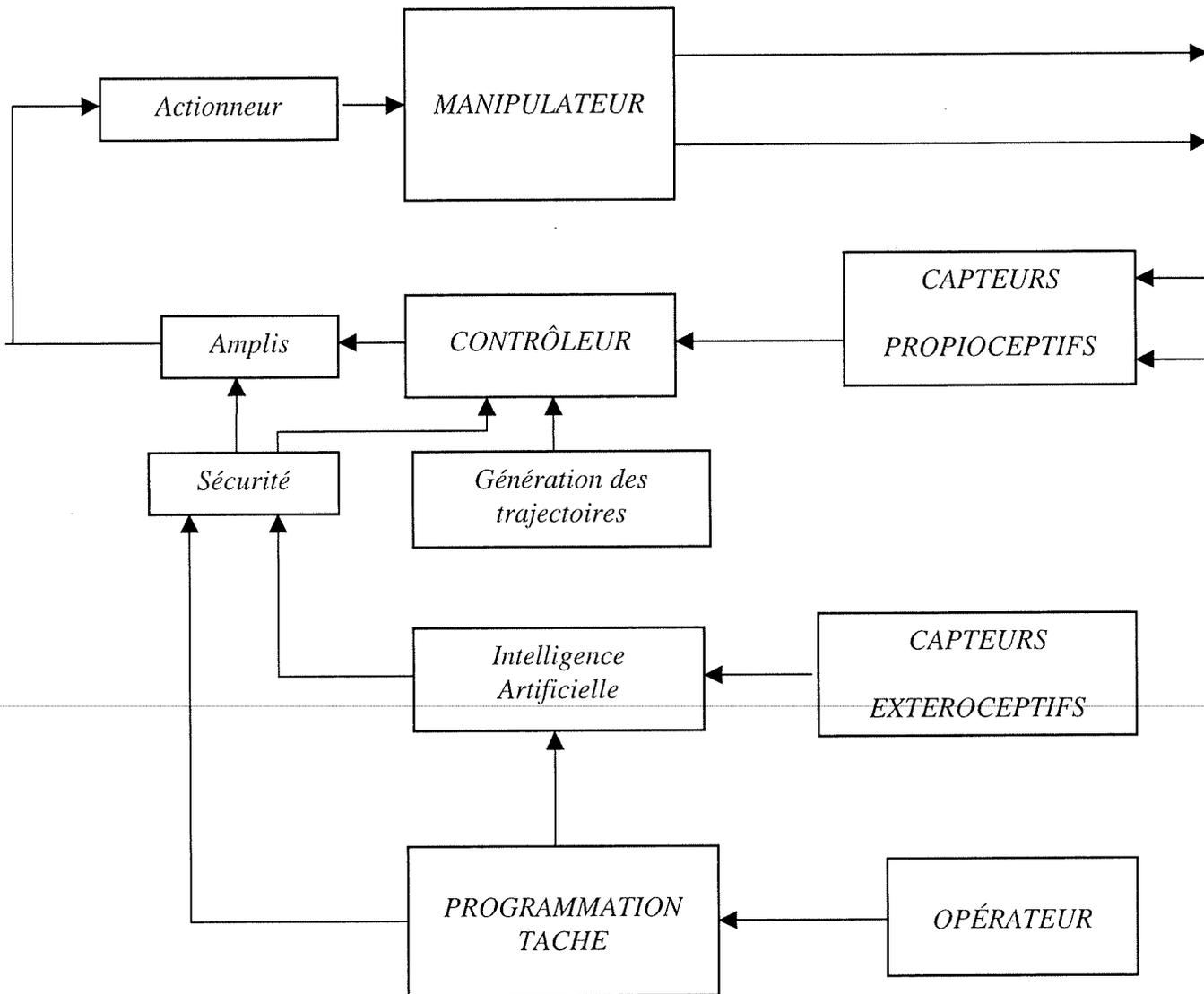
D'un point de vue conceptuel, et avec référence à la Figure 1.1, le fonctionnement d'un tel système peut être décrit comme suit:

- i. un opérateur communique, en utilisant une interface homme-machine, la tâche que le manipulateur doit effectuer;
- ii. un module d'intelligence artificielle détermine les actions à exécuter afin d'accomplir la tâche demandée; ces actions sont une fonction de la tâche elle-même et des données (concernant la scène de travail) procurées par les senseurs et les capteurs;
- iii. un générateur de plans calcule la position et l'orientation que l'outil doit assumer dans le temps afin d'exécuter les actions requises;
- iv. un contrôleur de position détermine les forces que les actionneurs doivent appliquer aux diverses membrures du manipulateur afin que la position et l'orientation de l'outil coïncident le plus rapidement et avec la plus grande précision possible aux valeurs requises;
- v. les étapes ii., iii., et iv. sont répétées jusqu'à ce que la tâche ait été accomplie.

Dans ce qui suit nous discuterons de la problématique de conception du contrôleur de position. L'adoption d'une architecture ou le choix d'un algorithme particulier pour un tel contrôleur dépend en général de divers facteurs tels que le niveau de connaissance du modèle cinétique et dynamique

du manipulateur, les propriétés de ce modèle, les possibilités offertes par l'unité informatique en termes de mémoire et de rapidité de calcul, la nature des actionneurs et des capteurs disponibles, les spécifications d'opération requises.

Bien qu'il n'y ait pas un accord unanime de la part des experts sur la meilleure approche à suivre afin d'atteindre une conception optimale, la plupart des approches préconisées par la littérature font néanmoins recours à un certain nombre de notions fondamentales qui varient très peu d'un auteur à l'autre et qui offrent un outil conceptuel particulièrement efficace pour mieux comprendre, analyser et appliquer les diverses approches. Dans ce qui suit, nous présentons ces notions en incluant, entre autre, la notion de contrôleur de position par régulation d'accélération et par régulation de vitesse, la notion de découplage par retour d'état nonlinéaire, la notion de linéarisation locale ou globale, la notion de contrôle dans l'espace articulaire ou dans l'espace opérationnel. Nous procéderons en utilisant la même terminologie et les mêmes notations introduites dans le rapport 'Dynamique des Systèmes Mécaniques...', De.1.



*Figure 1.1: Structure conceptuel du système de guidage d'un manipulateur robotique*

## 1.2 Modèle dynamique du manipulateur

En indiquant le vecteur des variables d'articulation avec le symbole  $q$  et le vecteur des forces (généralisées) fournies par les actionneurs avec  $\tau$ , le modèle dynamique d'un manipulateur dans l'espace articulaire est décrit par les équations suivantes

$$D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau.$$

Les expressions détaillées de D et C peuvent être retrouvées dans De.1 (voir également Cr.1, Sh.1, Sp.1).

En dénotant avec le vecteur  $[c_n \ \xi_n]'$  la position et l'orientation de l'outil par rapport à un observateur inertiel, et avec  $v_n := [v_n \ \Omega_n]'$  la mesure de sa vitesse linéaire et angulaire, le modèle dynamique d'un manipulateur dans l'espace opérationnel est décrit par

$$\begin{aligned} F_X &:= M_X \dot{v}_n + V_X \\ \dot{R} &= RS(\Omega_n) \\ \dot{c}_n &= R v_n \\ \tau &= J_n^{-1} F_X \end{aligned}$$

où la matrice de rotation R représente l'orientation  $\xi_n$ . La signification physique et les expressions mathématiques concernant les symboles utilisés dans ces équations peuvent, encore une fois, être retrouvées dans De.1.

### 1.3. Énoncé du problème d'asservissement en position

L'asservissement en position d'un manipulateur implique la détermination des forces généralisées,  $\tau$ , qui sont requises pour que

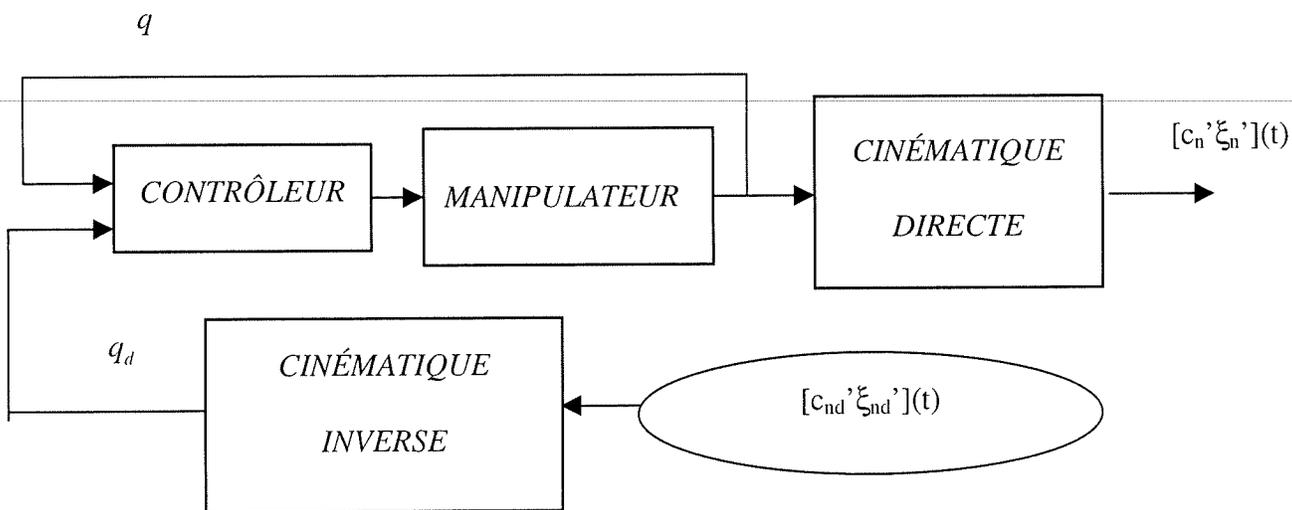
$$\lim_{t \rightarrow 0} [c_n \ \xi_n](t) = [c_{nd} \ \xi_{nd}](t)$$

Les symboles  $[c_n \ \xi_n](t)$  et  $[c_{nd} \ \xi_{nd}](t)$  dénotent les valeurs, actuelle et désirée, de la position et de l'orientation de l'outil dans l'espace opérationnel. En principe, déterminer ces forces est équivalent au problème de faire que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d(t)$$

où  $q(t)$  et  $q_d(t)$  sont les vecteurs des variables d'articulation associés avec  $[c_n \xi_n](t)$  et  $[c_{nd} \xi_{nd}](t)$  (association établie par les équations de cinématique directe et inverse).

L'on parle d'asservissement en position dans l'espace articulaire lorsqu'on vise à déterminer  $\tau$  en fonction de  $q$ , de  $q_d$  et de leurs dérivées (en utilisant le modèle dynamique dans l'espace articulaire). L'on parle d'asservissement en position dans l'espace opérationnel lorsqu'on vise à déterminer  $\tau$  en fonction d'une comparaison directe de  $[c_n \xi_n](t)$  avec  $[c_{nd} \xi_{nd}](t)$  (en se servant du modèle dynamique dans l'espace opérationnel décrit). Les Figures 1.2 et 1.3 illustrent la différence conceptuelle entre ces deux approches.



**Figure 1.2:** Contrôleur de position dans l'espace articulaire

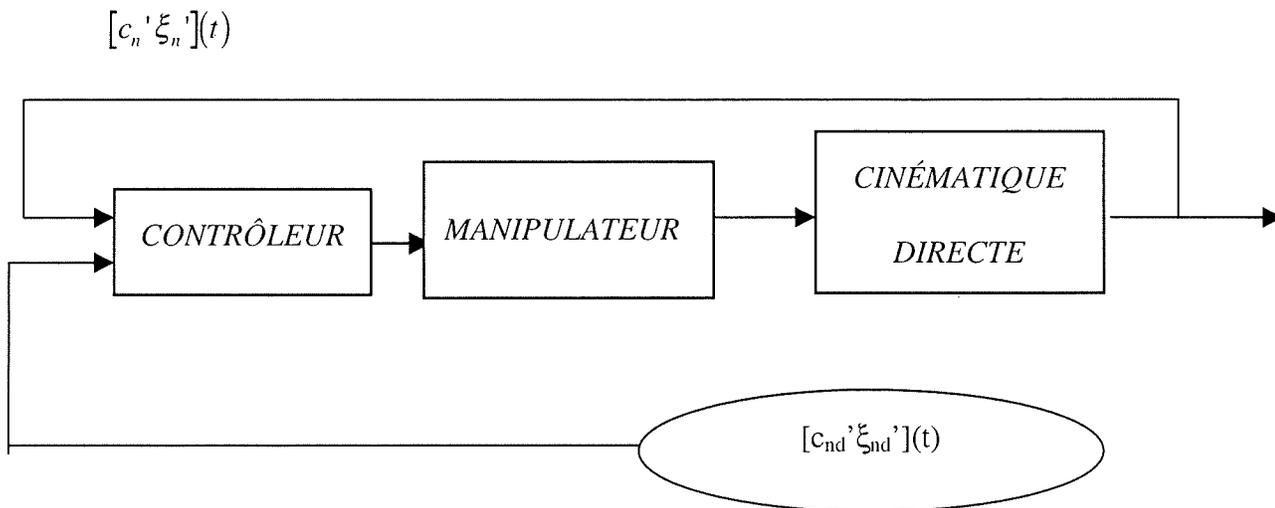


Figure 1.3: Contrôleur de position dans l'espace opérationnel

## 2. ASSERVISSEMENT EN POSITION DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

### 2.1 Cas d'un manipulateur avec une seule articulation

#### 2.1.1 Articulation représentée par un double intégrateur

Soit le comportement dynamique d'un manipulateur avec une seule articulation représenté par le modèle simplifié

$$\ddot{q} = \tau.$$

Un contrôleur qui impose une accélération désirée est appelé un régulateur d'accélération et peut être réalisé en utilisant l'équation

$$\tau = \ddot{q}_d.$$

Un régulateur de vitesse impose à l'articulation une vitesse désirée. Une façon naturelle de réaliser ce contrôleur est décrite par l'équation

$$\tau = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q}).$$

Un asservissement en position impose à l'articulation une position désirée,  $q_d$ , et pourrait être décrit par l'action de contrôle

$$\tau = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p (q_d - q).$$

L'ensemble des contrôleurs décrits par ces équations peuvent être interprétés comme des régulateurs d'accélération visant à imposer les accélérations

$$\ddot{q}^* = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q})$$

ou

$$\ddot{q}^* = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p (q_d - q).$$

Cela fait que souvent l'on se réfère à un contrôleur décrit par l'avant dernière équation comme à un contrôleur de vitesse par régulation d'accélération, et à un contrôleur décrit par la dernière équation comme à un asservissement en position par régulation d'accélération. Dans le même ordre d'idées, l'on se réfère à un contrôleur décrit par

$$\tau = \dot{q}^* + K_v (\dot{q}^* - \dot{q})$$

avec

$$\dot{q}^* = \dot{q}_d + K_p (q_d - q)$$

avec l'appellation d'asservissement en position par régulation de vitesse.

### 2.1.2 Articulation plus générale.

Ces notions, particulièrement simples dans le cas d'un double intégrateur, restent valables dans le cas plus réaliste où la dynamique de l'articulation robotique est décrite par une équation plus complexe du type

$$\ddot{q} = \alpha(\dot{q}, q) + \beta(q) \tau.$$

Dans ce cas, en supposant les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  connues, l'on introduit la commande auxiliaire

$$v = \alpha(q, \dot{q}) + \beta(q) \tau$$

pour avoir

$$\ddot{q} = v.$$

Les contrôleurs d'accélération, vitesse ou position fourniront alors le contrôle

$$\tau = \beta^{-1}\{v - \alpha\}$$

avec  $v$  égal respectivement à

$$\ddot{v} = \ddot{q}_d$$

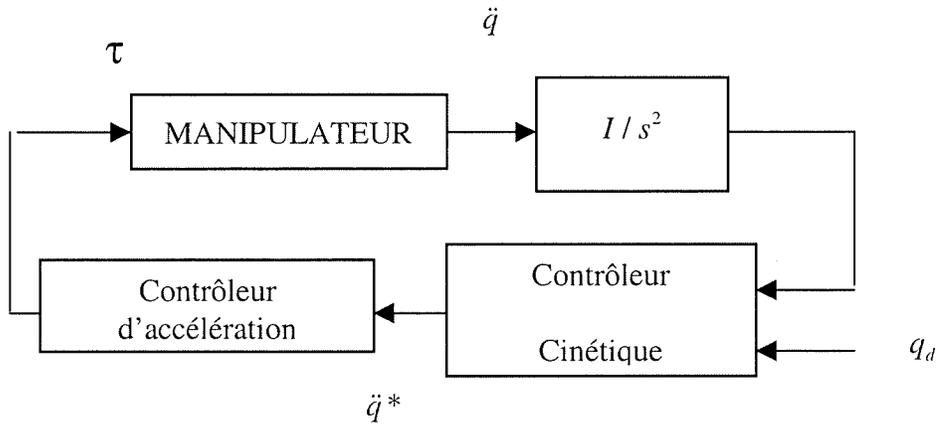
$$\ddot{v} = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q}),$$

et

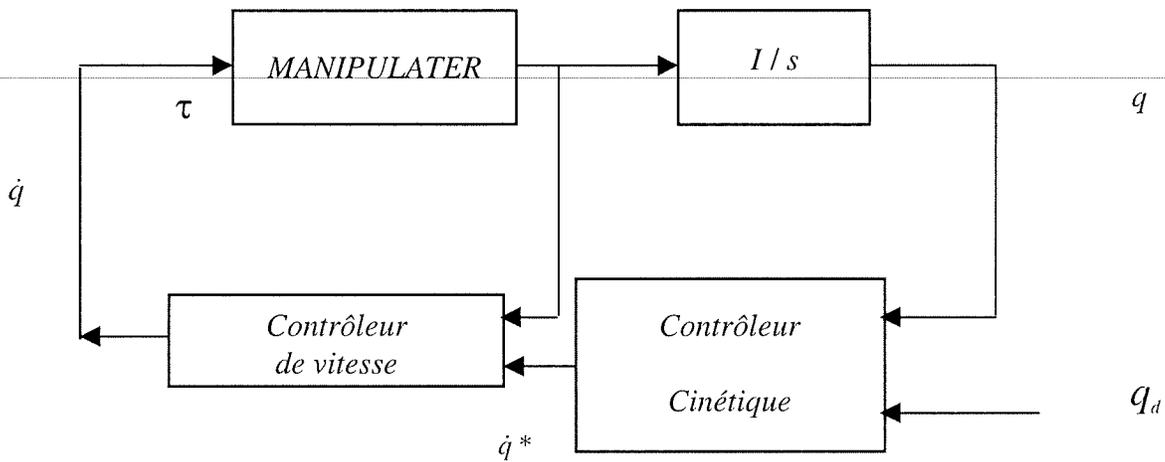
$$\ddot{v} = \ddot{q}_d + K_v (\dot{q}_d - \dot{q}) + K_p (q_d - q).$$

L'asservissement en position par régulation d'accélération (tout comme l'asservissement en position par régulation de vitesse) peut être vu comme la composition en cascade de deux modules.

Un premier module, le contrôleur cinétique, détermine une accélération  $\ddot{q}^*$  (une vitesse  $\dot{q}^*$ ) telle que si  $\ddot{q} = \ddot{q}^*$  (si  $\dot{q} = \dot{q}^*$ ) alors  $q(t)$  converge envers  $q_d(t)$  avec une dynamique désirée. Un deuxième module, un contrôleur d'accélération (contrôleur de vitesse) qui détermine  $\tau$  de façon à ce que  $\ddot{q}$  soit en fait égal à  $\ddot{q}^*$  ( $\dot{q}$  soit en fait égal à  $\dot{q}^*$ ). La structure de ces deux contrôleurs est représentée aux Figures 2.1 et 2.2.



**Figure 2.1:** Structure d'un asservissement en position par régulation d'accélération (manipulateur avec une articulation).



**Figure 2.2:** Structure d'un asservissement en position par régulation de vitesse (manipulateur avec une articulation).

## 2.2 Cas d'un manipulateur avec plusieurs articulations

### 2.2.1 Asservissement en position avec régulation d'accélération.

Tout comme dans le cas d'une articulation, l'asservissement en position d'un manipulateur avec plusieurs articulations par régulation d'accélération peut lui aussi être vu comme constitué de deux modules. Un premier module, le contrôleur cinétique, détermine une valeur  $\ddot{q}^*$  telle que si  $\ddot{q}$  est égal à  $\ddot{q}^*$ , converge envers  $q_d$  avec une dynamique désirée. Un deuxième module, le contrôleur d'accélération, détermine le contrôle  $\tau$  de façon à ce que  $\ddot{q}$  soit effectivement égal à  $\ddot{q}^*$ .

Pour mieux décrire une telle structure nous pouvons poser

$$\ddot{q}^* = \ddot{q}_d + K_2(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_1(q_d - q) + K_3 \int (q_d - q) dt \quad (1)$$

avec  $K_1, K_2, K_3$ , matrices diagonales définies positives et convenablement choisies,  $K_i = \text{diag}(K_{ij})$ ,  $i=1, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Avec un tel choix, l'hypothèse  $\ddot{q} = \ddot{q}^*$  fait que la dynamique de l'erreur en position soit décrite par l'équation

$$\varepsilon_i(s)(s-p_{1i})(s-p_{2i})(s-p_{3i}) = 0 \quad (2)$$

où

$$\varepsilon_i := q_i - q_{id} \quad (3)$$

et

$$K_{1i} = -(p_{1i} + p_{2i} + p_{3i}), \quad K_{2i} = (p_{1i}p_{2i} + p_{2i}p_{3i} + p_{1i}p_{3i}), \quad K_{3i} = -p_{1i}p_{2i}p_{3i}. \quad (4)$$

Pour avoir effectivement  $\ddot{q} = \ddot{q}^*$ , il suffit, en principe, d'utiliser la commande

$$\tau = D(q)\ddot{q}^* + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (5)$$

La structure du contrôleur qui en résulte est représentée à la Figure 2.3.

**Observation 1.** La méthode de conception d'un asservissement de position pour un manipulateur avec plusieurs articulations que nous avons présenté (souvent appelée la méthode du couple pré-calculé) est, d'un point de vue conceptuel, identique à celle utilisée pour un manipulateur avec une seule articulation. Avec cette méthode, le comportement dynamique de chaque articulation est stable, complètement découplé des autres articulations, linéaire et invariant dans le temps. De plus, ce comportement est caractérisé par des valeurs propres qui peuvent être assignées d'une façon arbitraire.

**Observation 2.** Puisque cette méthode requiert, entre autre, une connaissance détaillée du modèle cinétique et dynamique du manipulateur, une implantation physique du contrôleur qu'elle engendre est considérablement plus complexe que dans le cas d'un manipulateur avec une seule articulation.

En général le modèle du manipulateur n'est connu que d'une façon approximative et le contrôleur n'aura pas le comportement idéal préconisé . Parmi les remèdes utilisés pour surmonter cette difficulté on retrouve souvent l'adoption d'une version du contrôleur renforcée par l'introduction d'une boucle de commande adaptative, d'une boucle de commande avec auto-apprentissage ou d'une boucle de commande robuste.

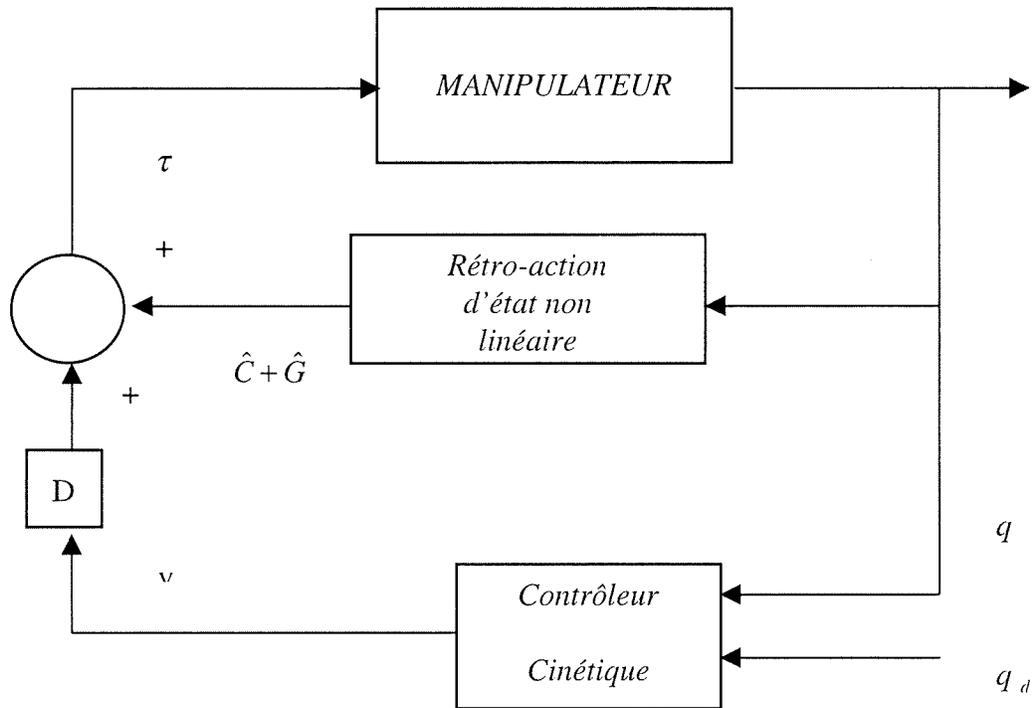


Figure 2.3: Asservissement en position avec régulation d'accélération.

### 2.2.2 Asservissement en position avec régulation de vitesse.

Un asservissement en position avec régulation de vitesse pour un manipulateur avec plusieurs articulations, peut lui aussi être vu comme constitué de deux modules. Un premier module, le contrôleur cinétique, détermine une valeur  $\dot{q}^*$  telle que si  $\dot{q} = \dot{q}^*$  alors  $q(t)$  converge envers  $q_d(t)$  avec un comportement dynamique désiré. Un second module, le contrôleur de vitesse, détermine les forces généralisées requises afin que  $\dot{q}$  converge aussi rapidement que possible envers  $\dot{q}^*$ . L'idée à la base de ce contrôleur est de poser

$$\dot{q}^* = \dot{q}_d + K_1(q_d - q) + K_2 \int (q_d - q) dt \quad (6)$$

avec  $K_1$ ,  $K_2$  matrices diagonales définies positives,  $K_i = \text{diag}(K_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, 2$ . Avec un tel choix, la dynamique de l'erreur en position est maintenant décrite par l'équation

$$\varepsilon_i(s)(s-p_{1i})(s-p_{2i}) = 0 \quad (7)$$

où

$$\varepsilon_i := q_i - q_{id} \quad (8)$$

et

$$K_{1i} = -(p_{1i} + p_{2i}), \quad K_{2i} = p_{1i}p_{2i} \quad (9)$$

Afin d'avoir  $\dot{q} = \dot{q}^*$ , il suffit de poser

$$\tau = D(\dot{q})\ddot{q}^* + C(\dot{q}, q)q + G(q) \quad (10)$$

avec

$$\ddot{q}^* = \ddot{q}_d + K_1(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_2(q_d - q). \quad (11)$$

---

Une stratégie de contrôle plus simple pourrait être représentée par

$$\tau = D(q) \left\{ K_v (\dot{q}^* - \dot{q}) \right\} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (12)$$

avec  $K_v = \text{diag}(K_{vi})$  une matrice diagonale définie positive. Avec ce contrôleur l'on a

$$q_i(s) = q_i^*(s) / (1 + s / K_{vi}). \quad (13)$$

En choisissant  $K_{vi}$  suffisamment grand, cela fait que, à toute fin pratique, l'on puisse considérer

$\dot{q} = \dot{q}^*$ . La structure du contrôleur qui en résulte est représentée à la Figure 2.4.

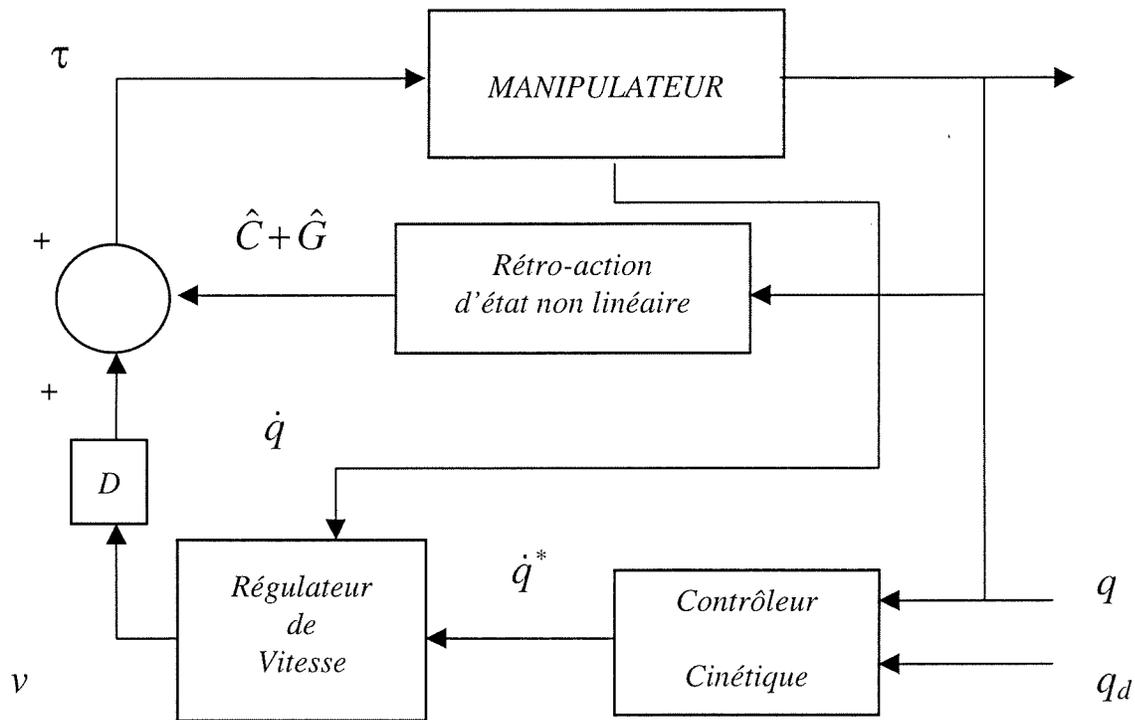


Figure 2.4: Asservissement en position position avec régulation de vitesse.

## 2.3 Contrôleurs industriels

### 2.3.1 Cas d'un manipulateur avec une articulation

Un contrôleur industriel pour un manipulateur avec une seule articulation fournit une action de contrôle visant à neutraliser l'influence de la force de gravité, plus une action de contrôle qui est une fonction linéaire (PID) des valeurs actuelles et désirées de la variable d'articulation, de ses dérivées et de ses intégrales. L'objectif est de faire que la variable d'articulation converge aussi rapidement que possible envers la valeur désirée et cela malgré la présence d'éléments perturbateurs tels que la friction d'engrenage ou la force de gravité.

Parmi les nombreuses configurations de contrôleurs PID offertes par l'industrie l'on peut mentionner: le PID classique (Figure 2.5), le PID avec régulation d'accélération (Figure 2.6), et le



### 2.3.1.1 PID par régulation d'accélération.

En considérant un modèle d'articulation du type

$$\tau = J\ddot{q} + \alpha\dot{q} + G(q)$$

l'on constate que si

$$\ddot{q} = \ddot{q}^* = \ddot{q}_d + K_2(q_d - q) + K_1(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_3 \int (q_d - q) dt,$$

alors, en utilisant la notation  $\varepsilon : = q - q_d$ , l'on a

$$\ddot{\varepsilon} + K_2\dot{\varepsilon} + K_1\varepsilon + K_3 \int \varepsilon dt = 0.$$

Il est naturel de choisir les gains  $K_i$  de façon à ce que la dynamique de l'erreur soit régie par des pôles assignés. Par exemple, si nous voulons que cette dynamique soit décrite par l'équation caractéristique

$$\varepsilon_i(s) (s-p_{1i}) (s-p_{2i}) (s-p_{3i}) = 0, \quad (14)$$

où

$$\varepsilon_i : = q_i - q_{id} \quad (15)$$

il suffira de choisir

$$K_1 = -(p_1 + p_2 + p_3), \quad K_2 = (p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3), \text{ et } K_3 = -p_1p_2p_3.$$

Afin que l'on ait effectivement  $\ddot{q} = \ddot{q}^*$  il suffira de poser ensuite

$$\tau = J\ddot{q}^* + \alpha\dot{q} + G(q) \quad (16)$$

c'est à dire

$$\tau = J \left\{ \ddot{q}_d + K_2(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_1(q_d - q) + K_3 \int (q_d - q) dt \right\} + \alpha\dot{q} + G(q). \quad (17)$$

En supposant  $G(q)$  appliquée d'une façon séparée, cette commande suggère l'utilisation de la configuration PID à la Figure 2.6.

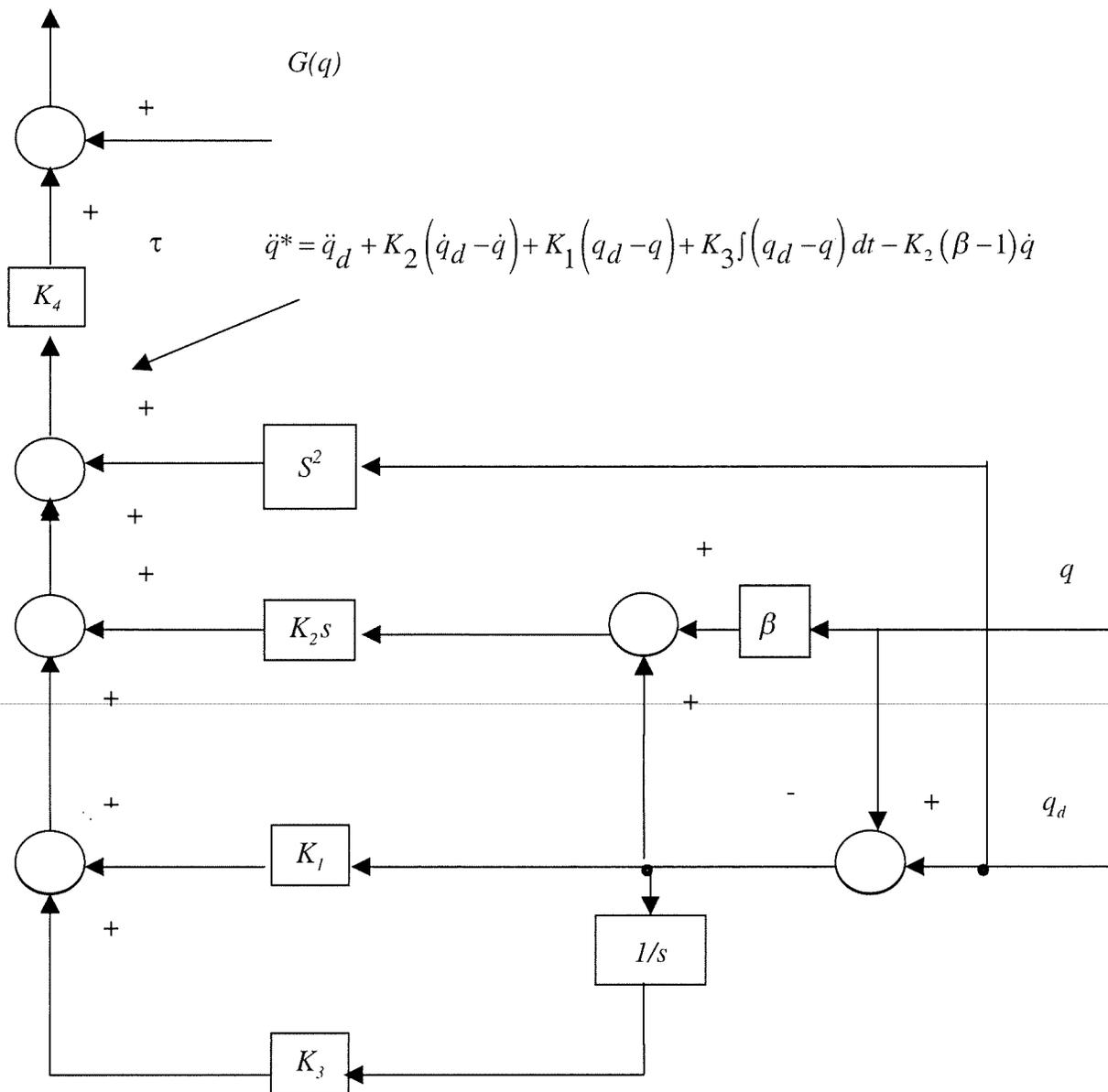


Figure 2.6 : PID axé sur la notion de régulation d'accélération.

### 2.3.1.2 PID par régulation de vitesse

En considérant un modèle d'articulation

$$u = J\ddot{q} + \alpha\dot{q} + G(q) \quad (1)$$

l'on constate que si

$$\dot{q} = \dot{q}^* = \dot{q}_d + K_1(q_d - q) + K_2 \int (q_d - q) dt \quad (2)$$

alors

$$\ddot{\varepsilon} + K_1\dot{\varepsilon} + K_2\varepsilon = 0 \quad (3)$$

où

$$\varepsilon = q - q_d. \quad (4)$$

Encore une fois, il est naturel de déterminer les gains  $K_i$  de façon à ce que la dynamique de l'erreur soit caractérisée par des pôles assignés. Par exemple, si nous désirons une dynamique décrite par

l'équation caractéristique

$$\varepsilon(s)(s - p_1)(s - p_2) = 0 \quad (5)$$

il suffira de choisir

$$K_1 = -(p_1 + p_2), \quad K_2 = p_1 p_2. \quad (6)$$

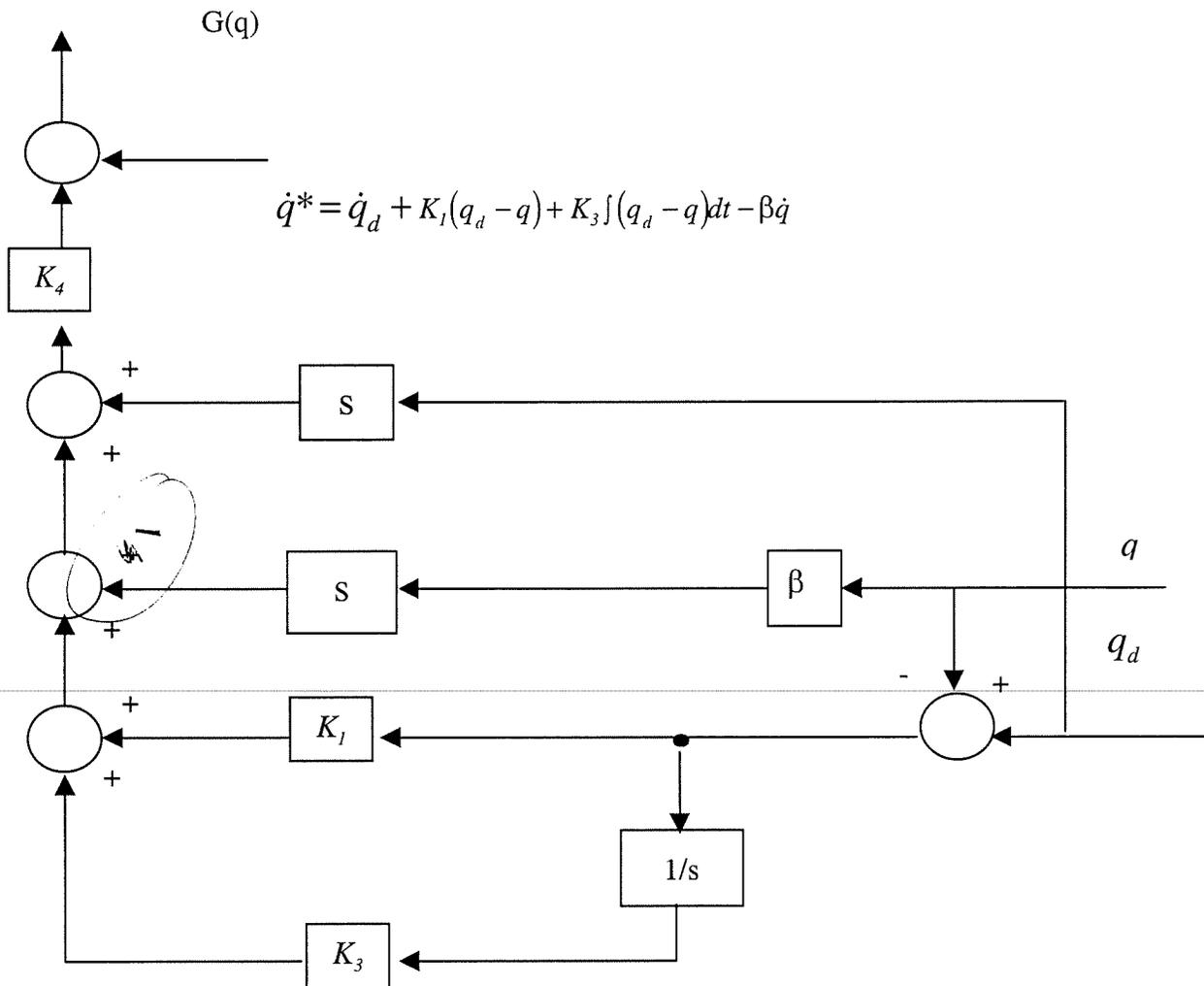
Afin que  $\dot{q} = \dot{q}^*$  l'on pose ensuite

$$\tau = J\{K_v(\dot{q}^* - \dot{q})\} + \alpha\dot{q} + G(q) \quad (7)$$

pour obtenir

$$\dot{q}(s) = \dot{q}^*(s) / (1 + s / K_v). \quad (8)$$

En supposant  $G(q)$  appliquée d'une façon séparée, cette loi de commande suggère l'utilisation de la configuration PID représentée à la Figure 2.7.



*Figure 2.7: PID axé sur la notion de régulation de vitesse.*

### 2.3.2 Cas d'un manipulateur avec plusieurs articulations

Dans un contrôleur industriel pour l'asservissement en position d'un manipulateur avec plusieurs articulations, la force fournie par chaque actionneur peut être pensée comme donnée par la somme de deux composantes

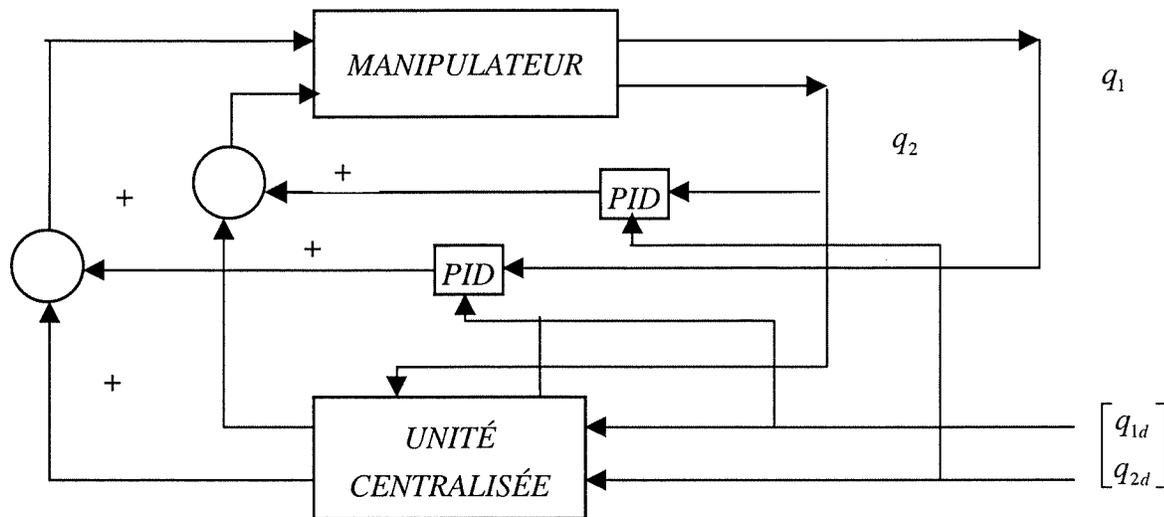
$$u_i = u_{i1} + u_{i2} \quad (1)$$

La composante  $u_{i2}$  est choisie de façon à compenser autant que possible l'influence de la gravité. La composante  $u_{i1}$  est souvent choisie tout comme si la  $i$ -ème variable d'articulation était la seule à changer de valeur (alors que les autres variables sont assumées maintenir une valeur constante) et tout comme si le comportement dynamique de cette articulation était décrit (dans le domaine de la Transformée de Laplace) par

$$q_i(s) = K_{mi} (u_{i1} + \xi_i) / s(1 + \tau_i s). \quad (2)$$

Dans cette équation  $\xi_i$  représente l'influence de forces négligées à cause de la simplicité du modèle utilisé (telles que par exemple les forces de Coriolis, d'intercouplage, de perturbation et de gravité);  $K_{mi}$  dénote le gain statique de l'articulation,  $\tau_i$  la constante de temps. Habituellement, la composante  $u_{i1}$  est fournie par un contrôleur PID du type discuté à la section précédente; la composante  $u_{i2}$  est fournie par une unité centralisée. La structure du contrôleur est représentée la Figure 2.8.

**Observation 1.** Tel qu'indiqué à la Figure 2.8, chaque articulation a son PID. Ce PID est conçu comme dans le cas d'un manipulateur avec une seule articulation. Il est important d'observer que, contrairement au cas d'un manipulateur avec une seule articulation, les gains  $K_{mi}$  et les constantes de temps  $\tau_i$  sont une fonction de la configuration changeante du manipulateur. Cela implique que des importants compromis doivent maintenant être effectués entre la sécurité d'opération (stabilité) et le niveau de performance. Par exemple, le fait de négliger les forces de Coriolis, les forces centripètes et les forces d'intercouplage implique la nécessité d'utiliser des vitesses d'opération moins élevées que dans les cas où ces forces étaient compensées d'une façon adéquate. Ces difficultés peuvent parfois être surmontées en introduisant une boucle additionnelle pour un réglage adaptatif des gains, ou bien en renforçant l'opération de chaque PID avec des techniques avancées telles que la commande par mode de glissement ou la commande robuste.



*Figure 2.8: Structure typique d'un contrôleur industriel*

**Observation 2.** Contrairement au cas des contrôleurs de type couple précalculé (par régulation de vitesse ou par régulation d'accélération), dans le cas d'un contrôleur industriel nous ne pouvons pas assurer la stabilité globale du système. Il faudra souvent se contenter d'une stabilité avec un caractère local. Cependant, une stabilité globale peut parfois être établie sous des circonstances particulières. Une de ces circonstances est représentée par le cas où on prend pour hypothèse une compensation parfaite de la gravité et on considère l'application de la loi de contrôle «PD» décrite par l'équation

$$u = -K_p \varepsilon - K_D \dot{q}.$$

Les symboles décrits dans cette équation sont tels que  $\varepsilon = q - q_D$ ,  $q_D$  est un vecteur assigné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K_P$  et  $K_D$  représentent des matrices définies positives.

Pour nous convaincre qu'une telle loi de contrôle implique effectivement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_D$$

indépendamment des conditions initiales du manipulateur, considérons la fonction

$$V := \frac{1}{2} \{ \varepsilon' K_p \varepsilon + \dot{q}' D \dot{q} \}.$$

Observons que

$$\dot{V} = \dot{q}' K_p \varepsilon + \dot{q}' D \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}' \dot{D} \dot{q}$$

et donc, en utilisant la valeur de  $\ddot{q}$  induite par la loi de contrôle en étude,

$$\dot{V} = \dot{q}' K_p \varepsilon - \dot{q}' K_p \varepsilon - \dot{q}' K_p \dot{q} + \dot{q}' \left( \frac{1}{2} \dot{D} - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q}.$$

À la lumière de la relation bien connue (De.1)

$$\dot{q}' \left( \frac{1}{2} \dot{D} - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} = 0,$$

et de la propriété définie-positive de  $K_D$ , il suit

$$\dot{V} = -\dot{q}' K_p \dot{q} \leq 0.$$

Étant donné que  $\dot{V}$  est uniformément continue, et que  $V$  est positive, cela implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0,$$

c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \text{constante}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_d(t) \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \xi_d(t) \quad (2)$$

où  $c(t)$  et  $\xi(t)$ ,  $c_d(t)$  et  $\xi_d(t)$  dénotent les valeurs actuelles et désirées de la positions et de l'orientation du corps. En suivant la référence Yua.1, nous aborderons ce problème en représentant  $\xi(t)$  et  $\xi_d(t)$  avec des quaternions unitaires (voir aussi De.1).

### 3.2.1 Solution par régulation d'accélération

Tout comme dans le cas d'un manipulateur dans l'espace articulaire la conception un asservissement en position/orientation d'un corps rigide peut être abordée avec l'approche basée sur la régulation d'accélération.

**Étape 1.** L'on constate que si on réussit à faire que

$$\dot{v} = \dot{v}^* = \dot{v}_d + K_v(v_d - v) + K_p(c_d - c)$$

où  $K_v$  et  $K_p$  sont des matrices diagonales définies positives, alors l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_d(t)$$

De plus, la dynamique des erreurs de position le long des axes des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  est complètement découplée, globalement stable, linéaire et invariante dans le temps. De plus encore, elle est caractérisée par des valeurs propres qui peuvent être assignées d'une façon arbitraire.

**Étape 2.** D'une façon similaire, l'on constate que si on réussit à faire que :

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}^* = \dot{\Omega}_d + K_{\Omega}(\Omega_s - \Omega) - \delta q$$

où  $(\eta, q)$  est le quaternion décrivant l'orientation actuelle du corps;  $(\eta_d, q_d)$  est le quaternion décrivant l'orientation désirée;  $(\delta\eta, \delta q) = (\eta, -q)$  est le quaternion décrivant la rotation que le corps doit subir pour que son orientation actuelle devienne égale à l'orientation désirée (voir Figure 3.1);  $K_{\Omega}$  est une matrice diagonale définie positive; alors l'on a

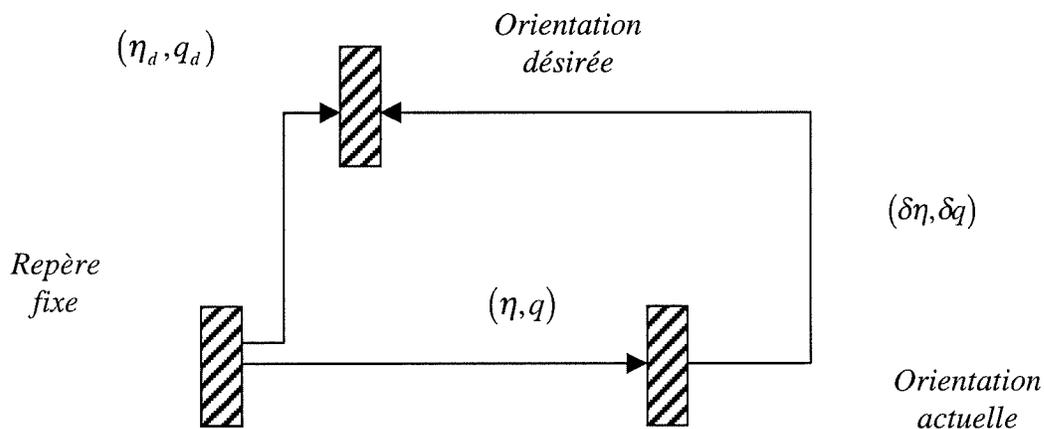
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta, q)(t) = (\eta_d, q_d)(t).$$

**Étape 3.** Les égalités  $v = v^*$  et  $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}^*$  peuvent être obtenues en posant tout simplement

$$f = m\dot{v}^*$$

$$n = S(\Omega)j\Omega + j\dot{\Omega}^*.$$

**Étape 4.** Le problème peut alors être résolu en appliquant le contrôleur indiqué à la Figure 3.2.



**Figure 3.1:** Signification physique de  $(\delta\eta, \delta q)$

**Observation 1.** Le fait que l'équation

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}^* = \dot{\Omega}_d + K_{\Omega}(\Omega_d - \Omega) - \delta q$$

implique (Yuan 1988)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta, q)(t) = (\eta_d, q_d)(t)$$

peut être démontré comme suit. Considérons la fonction

$$V = (\eta - \eta_d)^2 + (q - q_d)'(q - q_d) + \frac{1}{2}(\Omega - \Omega_d)'(\Omega - \Omega_d).$$

En dérivant par rapport au temps nous obtenons

$$\dot{V} = 2(\eta - \eta_d)(\dot{\eta} - \dot{\eta}_d) + 2(q - q_d)'(\dot{q} - \dot{q}_d) + (\Omega - \Omega_d)'(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d).$$

Observons que

$$(\Omega - \Omega_d)'(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d) = -(\Omega - \Omega_d)'K_{\Omega}(\Omega - \Omega_d) - (\Omega - \Omega_d)'\delta q.$$

De plus, de la loi de propagation des quaternions (De.4, chap. 5)

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & -\Omega' \\ \Omega & -S(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix},$$

nous obtenons

$$2(\eta - \eta_d)(\dot{\eta} - \dot{\eta}_d) = (\eta - \eta_d)(-\Omega'q + \Omega'_d q_d) = -\eta\Omega'q + \eta\Omega'_d q_d + \eta_d\Omega'q - \eta_d\Omega'_d q_d$$

et

$$\begin{aligned} 2(q - q_d)'(\dot{q} - \dot{q}_d) &= (q - q_d)'(\eta\Omega - S(\Omega)q - \eta_d\Omega_d + S(\Omega_d)q_d) \\ &= q'\eta\Omega - q'S(\Omega)q - q'\eta_d\Omega_d + q'S(\Omega_d)q_d - q_d'\eta\Omega + q_d'S(\Omega)q + q_d'\eta_d\Omega_d - q_d'S(\Omega_d)q_d. \end{aligned}$$

En observant que

$$-\Omega'S(q_d)q = q_d'S(\Omega)q = -q_d'S(q)\Omega,$$

il suit

$$2(\eta - \eta_d)(\dot{\eta} - \dot{\eta}_d) + 2(q - q_d)'(\dot{q} - \dot{q}_d) = (\Omega - \Omega_d)'(\eta_d q - \eta q_d - S(q_d)q) = (\Omega - \Omega_d)'\delta q.$$

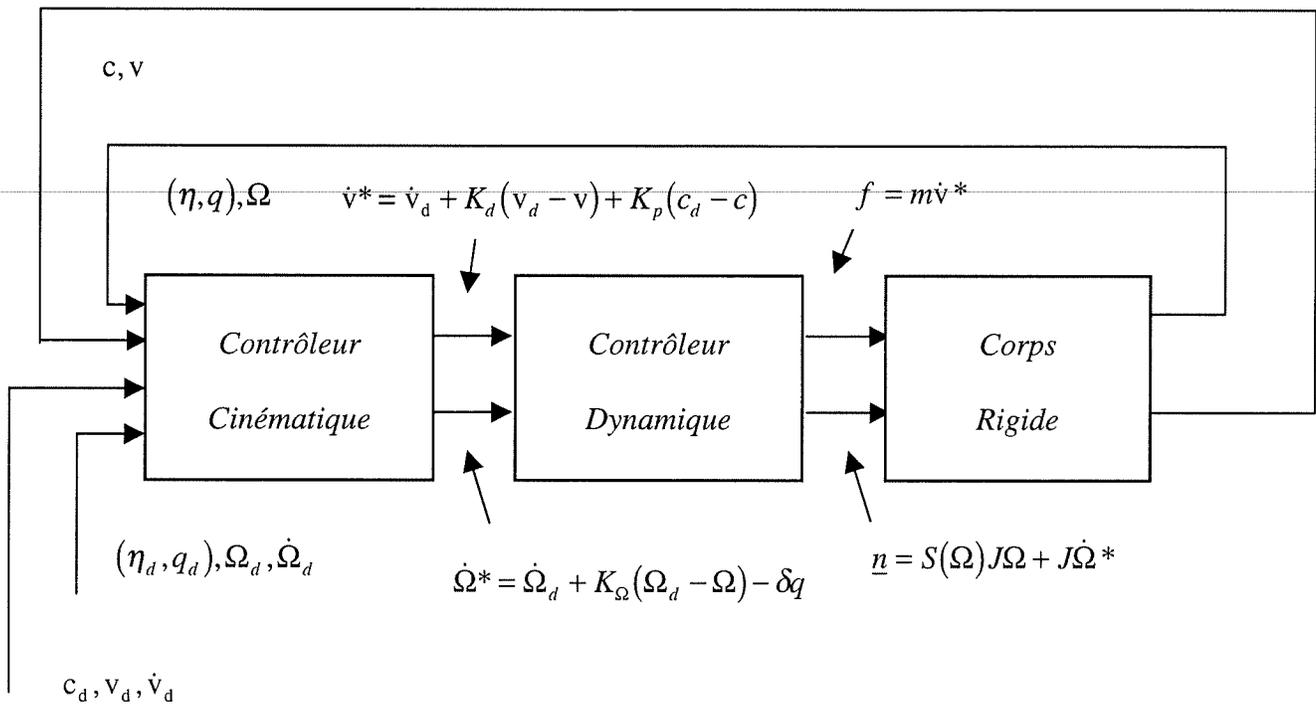
En tenant compte de cette expression, il suit

$$\dot{V} = (\Omega - \Omega_d)' \delta q - (\Omega - \Omega_d)' K_\Omega (\Omega - \Omega_d) - (\Omega - \Omega_d)' \delta q = -(\Omega - \Omega_d)' K_\Omega (\Omega - \Omega_d) \leq 0. \quad (3)$$

Il suit que  $V$  diminue jusqu'à ce que  $\Omega = \Omega_d$ . Puisque  $\Omega = \Omega_d$  implique  $\delta q = \text{constante}$ , et étant donné que l'on a imposé

$$(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_d) = -\delta q,$$

il suit que  $\Omega = \Omega_d$  implique  $\delta q = 0$ , c'est à dire  $q = q_d$



**Figure 3.2:** Asservissement par régulation d'accélération de la position/orientation d'un corps rigide

### 3.2.2 Solution par régulation de vitesse

En analogie avec l'approche par régulation d'accélération, l'approche par régulation de vitesse à la conception d'un contrôleur pour l'asservissement en position/orientation d'un corps rigide, peut être vue comme constituée des quatre étapes suivantes.

**Étape 1.** L'on constate que si on fait que

$$v = v^* = v_d + K_p(c_d - c)$$

où  $K_p$  est une matrice diagonale définie positive, alors l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_d(t).$$

Encore une fois, la dynamique des erreurs de position le long des axes des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  est complètement découplée, globalement stable, linéaire et invariant dans le temps, et caractérisée par des valeurs propres qui peuvent être assignées d'une façon arbitraire.

**Étape 2.** D'une façon similaire, si on fait que

$$\Omega = \Omega^* = \Omega_d - K_q \delta q$$

où  $K_q$  est une matrice diagonale définie positive, et

$$(\delta \eta, \delta q) = (\eta_d, q_d) (\eta, -q),$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\eta, q)(t) = (\eta_d, q_d)(t).$$

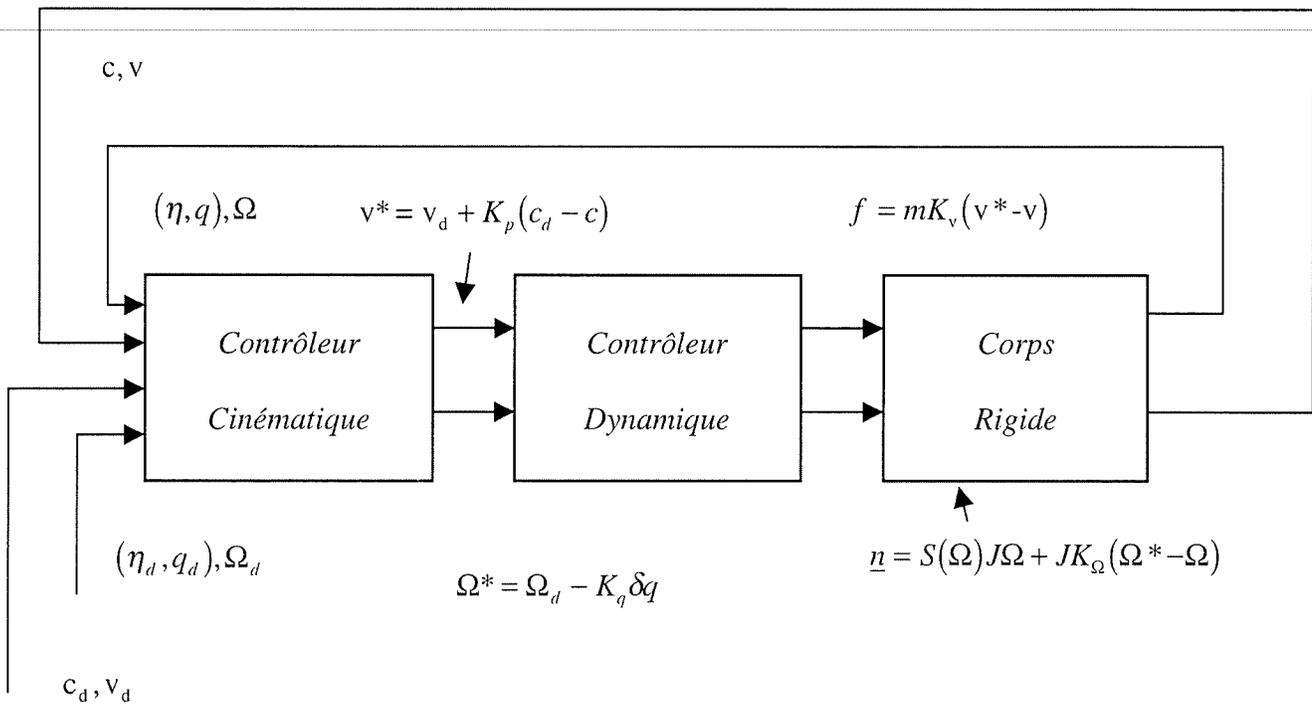
$$f = m K_v(v^* - v)$$

$$\underline{n} = S(\Omega)j\Omega + jK_\Omega(\Omega^* - \Omega),$$

avec  $K_v$  et  $K_\Omega$  deux matrices diagonales définies positives.

**Étape 4** Le problème peut alors être résolu en appliquant le contrôleur indiqué à la Figure 3.3.

**Observation 1.** Pour que la procédure de conception soit effectivement valable, il faut que  $K_v \gg K_p$  et  $K_\Omega \gg K_q$ . En d'autres mots, et avec référence à la Figure 3.3, il est important d'assurer que la dynamique du contrôle en vitesse soit plus rapide que celle associée avec le contrôleur cinétique ( $\delta q \neq 0 \rightarrow \dot{\Omega} \neq \dot{\Omega}_d \rightarrow \Omega \neq \Omega_d$ ).



**Figure 3.3:** Asservissement par régulation de vitesse de la position/orientation d'un corps rigide

**Observation 2.** Afin de démontrer la validité de l'étape 2, considérons

$$V = (\eta - \eta_d)^2 + (q - q_d)' (q - q_d).$$

En utilisant le même raisonnement qu'à l'observation 3.2.1.1, notons que

$$\dot{V} = 2(\eta - \eta_d)(\dot{\eta} - \dot{\eta}_d) + 2(q - q_d)'(\dot{q} - \dot{q}_d) = -(\Omega - \Omega_d)' \delta q \quad V,$$

d'où, en posant  $\Omega = \Omega_d - K_q \delta q$  il suit

$$\dot{V} = -\delta q' K_q \delta q \leq 0 \text{ si } \delta q \neq 0. \quad (4)$$

Cela implique  $V \Rightarrow 0$ , et  $\delta q \Rightarrow 0$ .

### 3.2.3 Asservissement en orientation par linéarisation exacte

Il est possible, tout comme dans le cas de l'asservissement en position et contrairement à la méthode de Yuan, de concevoir un contrôleur pour l'asservissement en orientation dans l'espace opérationnel en imposant à l'erreur une dynamique représentée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cependant, le fait qu'une orientation ne correspond pas à l'intégrale de la vitesse angulaire comporte des procédures de conception quelque peu plus complexes que dans le cas d'un asservissement de position (qui, elle, correspond à l'intégrale de la vitesse linéaire). Dans ce qui suit nous présentons deux exemples de procédures qui ont été proposées par la littérature.

#### 3.2.3.1 Linéarisation exacte en utilisant les quaternions (Dwyer 1984).

Le modèle d'état représenté par l'équation d'Euler

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= J^{-1} \{ \underline{n} - S(\Omega) J \Omega \} \\ \dot{\xi} &= g(\Omega) \xi \end{aligned}$$

où  $\xi$  est le quaternion unitaire  $(\eta, q)$ , et

$$g(\Omega) = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & -\Omega' \\ \Omega & -S(\Omega) \end{bmatrix},$$

est mis en correspondance biunivoque avec la dynamique du système linéaire équivalent

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}.$$

Les opérateurs  $T: \begin{bmatrix} \xi \\ \Omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $T^{-1}: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \Omega \end{bmatrix}$  sont décrits par les équations suivantes

$$T: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}: \Omega = \frac{2}{x_0} [x_0^2 I_3 + x_1 x_1' - x_0 S(x_1)] x_2$$

$$\eta = x_0 = \sqrt{1 - x_1' x_1}$$

$$q = x_1.$$

De plus, étant donné que

$$\dot{\Omega} = \frac{2}{\eta} [\eta^2 I_3 + qq' - \eta S(q)] \left( \ddot{q} + \frac{1}{4} \Omega' \Omega q \right)$$

il suit que la correspondance entre  $\underline{n}$  et  $u$  est décrite par l'équation

$$\underline{n} = S(\Omega) J \Omega + \frac{2}{\eta} J [\eta^2 I_3 + qq' - \eta S(q)] \left( u + \frac{1}{4} \Omega' \Omega q \right).$$

Tel qu'illustré à la figure 3.4, la conception du contrôleur peut alors être développée en lui donnant la structure d'un contrôleur linéaire (de conception relativement simple) en parallèle avec un contrôleur linéarisant. Il est intéressant de remarquer que ce schéma fonctionne bien sous la condition que l'angle de rotation du mobile soit contenu entre  $-\pi$  et  $+\pi$  ( $\eta \neq 0$ ).

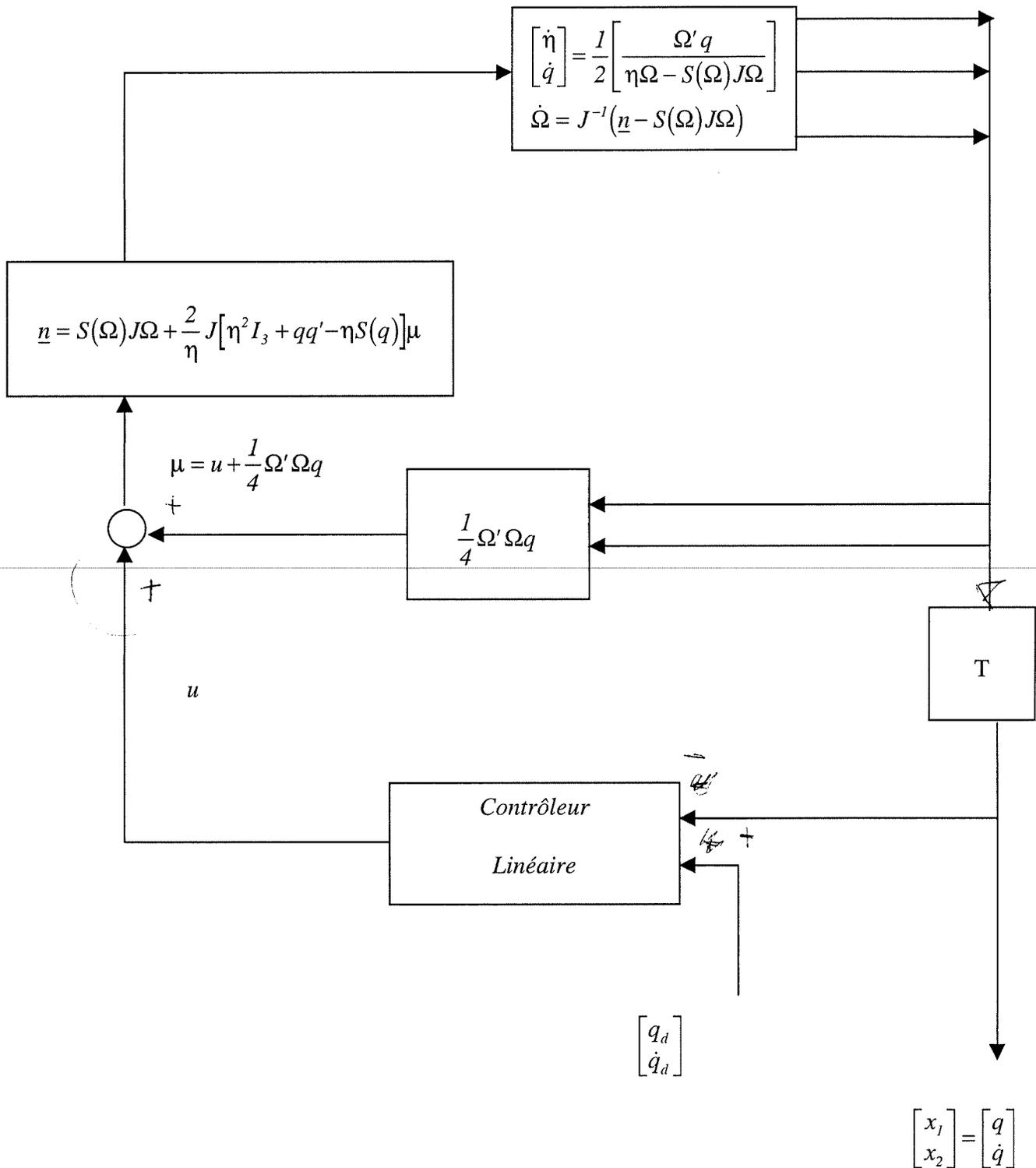


Figure 3.4: Linéarisation exacte par rétroaction d'état de l'équation d'Euler avec la méthode de Dwyer

**Observation 1.** Lorsque l'orientation requise du corps rigide ne satisfait pas la condition relative à un angle de rotation inférieur à  $\pi$ , il convient de modifier notre démarche en mesurant l'orientation du corps rigide non pas par rapport à un trièdre fixe, mais plutôt par rapport à un trièdre ayant l'orientation désirée. Avec un tel changement de mesure, les équations décrivant la dynamique de l'orientation du corps rigide deviennent alors,

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}^* &= J^{-1} \left\{ \underline{n} - S(\Omega^* + \Omega_d) J(\Omega^* + \Omega_d) \right\} - \dot{\Omega}_d \\ \dot{\xi}^* &= g(\Omega^*) \xi^*\end{aligned}$$

où  $\xi^* := (\eta^*, q^*)$ , et  $\Omega^*$  dénotent l'orientation et la vitesse angulaire du corps rigide par rapport au trièdre ayant l'orientation désirée,  $\Omega_d$  est la vitesse angulaire de ce trièdre. Le problème est de déterminer  $\underline{n}$  de façon à ce que  $\xi^* \rightarrow (1, 0)$ . Le schéma de contrôle devient maintenant celui à la figure 3.5. Ce schéma fonctionne bien pourvu que l'écart d'orientation du mobile ne dépasse pas une rotation impliquant un angle plus grand que  $\pi$  (l'orientation elle même n'est pas soumise à cette restriction).

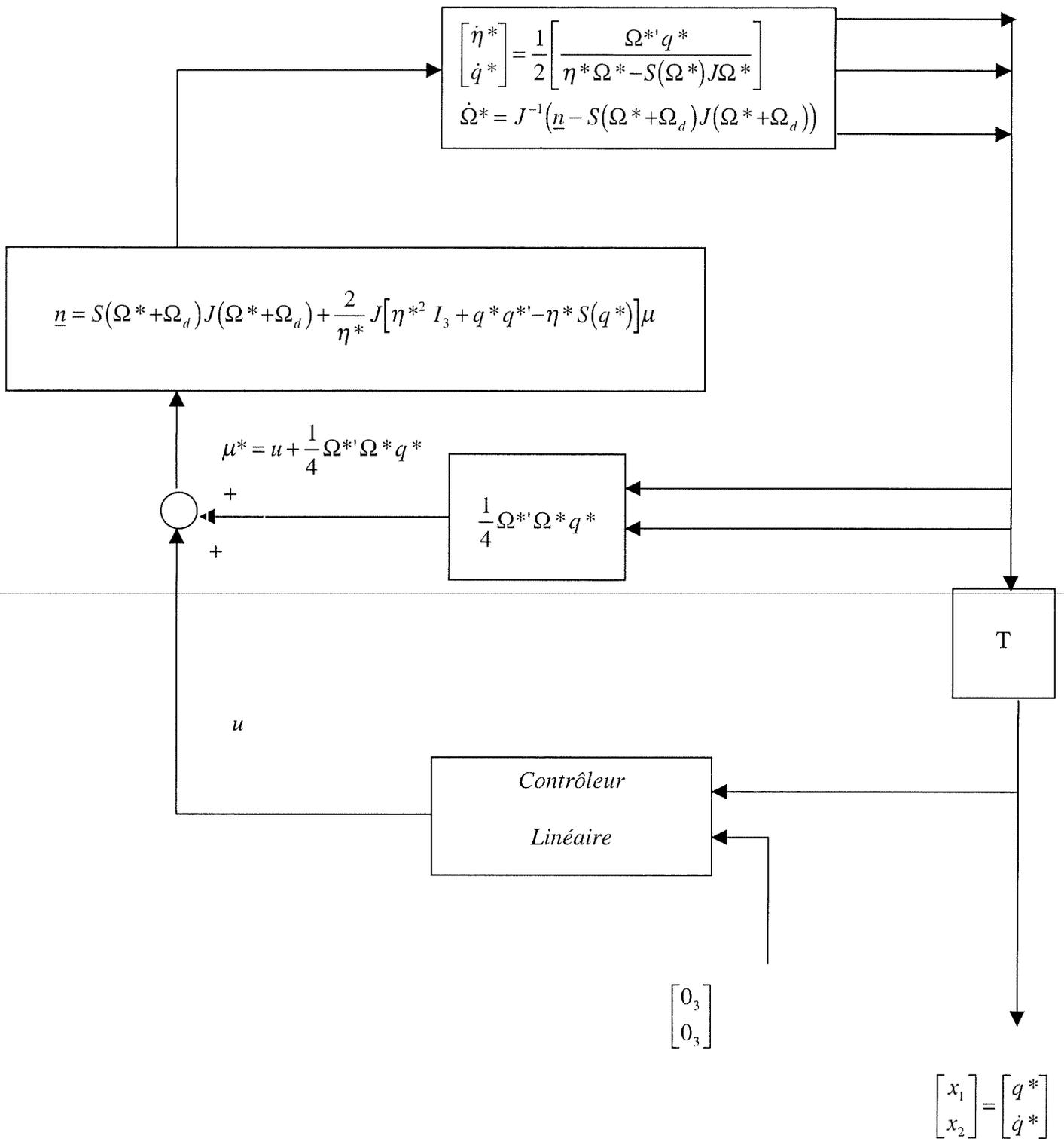


Figure 3.5 : Linéarisation exacte par rétroaction d'état de l'équation d'Euler avec la méthode de Dwyer

### 3.2.3.2 Linéarisation exacte en utilisant les angles d'Euler.

En utilisant les angles d'Euler, la dynamique non linéaire représentée par l'équation d'Euler est décrite par le modèle d'état

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= J^{-1}\{\underline{n} - S(\Omega)J\Omega\} \\ \dot{\xi} &= J_a(\xi)\Omega\end{aligned}$$

où  $\xi$  représente les angles d'Euler,  $\xi := [\alpha \quad \beta \quad \gamma]$  et  $J_a$  est la matrice Jacobienne

$$J_a := \begin{bmatrix} 0 & c\gamma/c\beta & c\gamma c\beta \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 1 & \tan\beta s\gamma & \tan\beta c\gamma \end{bmatrix}.$$

L'état est représenté par le vecteur

$$y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \xi \\ \Omega \end{bmatrix}.$$

En dérivant la deuxième des deux équations d'Euler, l'on a

$$\ddot{\xi} = \dot{J}_a(\xi)\Omega + J_a(\xi)\dot{\Omega}$$

d'où

$$\ddot{\Omega} = J_a(\xi)^{-1}\ddot{\xi}\Omega + J_a(\xi)\dot{\Omega}$$

En utilisant la première équation des deux équations d'Euler, l'on obtient alors

$$\ddot{\xi} = \dot{J}_a(\xi)\Omega + J_a(\xi)J^{-1}\{\underline{n} - S(\Omega)J\Omega\}.$$

En introduisant le changement d'état

$$T: y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \Omega \end{bmatrix} \rightarrow x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$$

et le changement de contrôle

$$\underline{n} \rightarrow v, \quad v := \dot{J}_a(\xi)\Omega + J_a(\xi)J^{-1}\{\underline{n} - S(\Omega)J\Omega\} = \alpha(\xi, \Omega) + \beta(\xi, \Omega)\underline{n}$$

nous obtenons le système équivalent

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ v \end{bmatrix}.$$

Le problème de contrôle peut alors être résolu en déterminant d'abord un contrôle auxiliaire  $v^*$  qui fait que  $x \rightarrow x_d$ ; ensuite un contrôle  $\underline{n}$  tel que  $v = v^*$  ( $\underline{n} = \beta^{-1}(v^* - \alpha)$ ).

### 3.3. Asservissement en position/orientation de l'outil d'un manipulateur

Le comportement dynamique de l'outil d'un manipulateur étant décrit par

$$\begin{aligned} \tau &= D\ddot{q} + C\dot{q} + G \\ [c_n \ \xi_n'](t) &= f(q) \end{aligned}$$

le problème d'asservissement en position/orientation de l'outil revient à déterminer  $\tau$  en fonction de

$c_n(t)$  et  $\xi_{nd}(t)$  et  $c_{nd}(t)$  et  $\xi_{nd}(t)$  de façon telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_n(t) = c_{nd}(t) \quad (1)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_n(t) = \xi_{nd}(t), \quad (2)$$

où  $c_n(t)$ ,  $\xi_n(t)$  et  $c_{nd}(t)$  et  $\xi_{nd}(t)$  dénotent les valeurs actuelles et désirées, au temps  $t$ , pour la position et l'orientation de l'outil du manipulateur.

#### 3.3.1 Solution par régulation d'accélération.

D'une façon analogue au cas d'un corps rigide, nous pouvons solutionner le problème en quatre étapes. En indiquant avec  $\dot{v}$  et  $\dot{\Omega}$  la dérivée de la mesure des vitesses linéaire et angulaire de l'outil, les étapes 1 et 2 sont identiques à celles vues dans le cas d'un corps rigide, les étapes 3 et 4 peuvent être décrites comme suit.

**Étape 3.** L'on observe que  $\dot{v} = \dot{v}^*$  et  $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}^*$  peuvent être obtenues en posant

$$\tau = D\ddot{q}^* + C\dot{q} + G$$

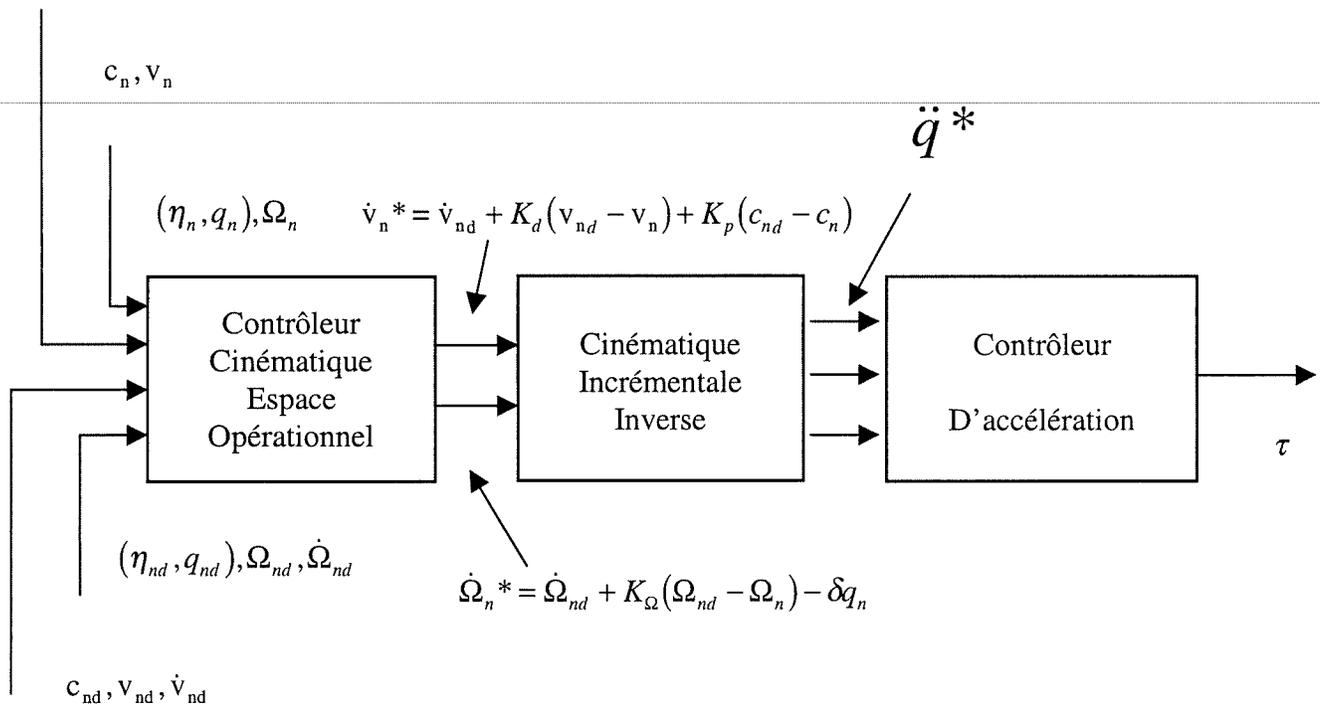
où

$$\ddot{q}^* := J^{-1}\dot{v}^* - J^{-1}\dot{J}\dot{q}$$

où  $v_n^{*'} = (v_n^{*'} \Omega_n^{*'})$ . Cela implique

$$\tau = DJ^{-1}\dot{v}_n^* - DJ^{-1}J\dot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + G(q). \quad (3)$$

**Étape 4.** Le problème peut être résolu en appliquant le contrôleur indiqué à la Figure 3.6.



**Figure 3.6 :** Asservissement par régulation d'accélération de la position/orientation de l'outil dans l'espace opérationnel

### 3.3.2 Solution par régulation de vitesse.

Encore une fois en analogie avec le cas d'un corps rigide, nous pouvons solutionner le problème en quatre étapes, les étapes 1 et 2 étant encore une fois identiques à celles vues dans le cas rigide, les étapes 3 et 4 pouvant être décrites comme suit.

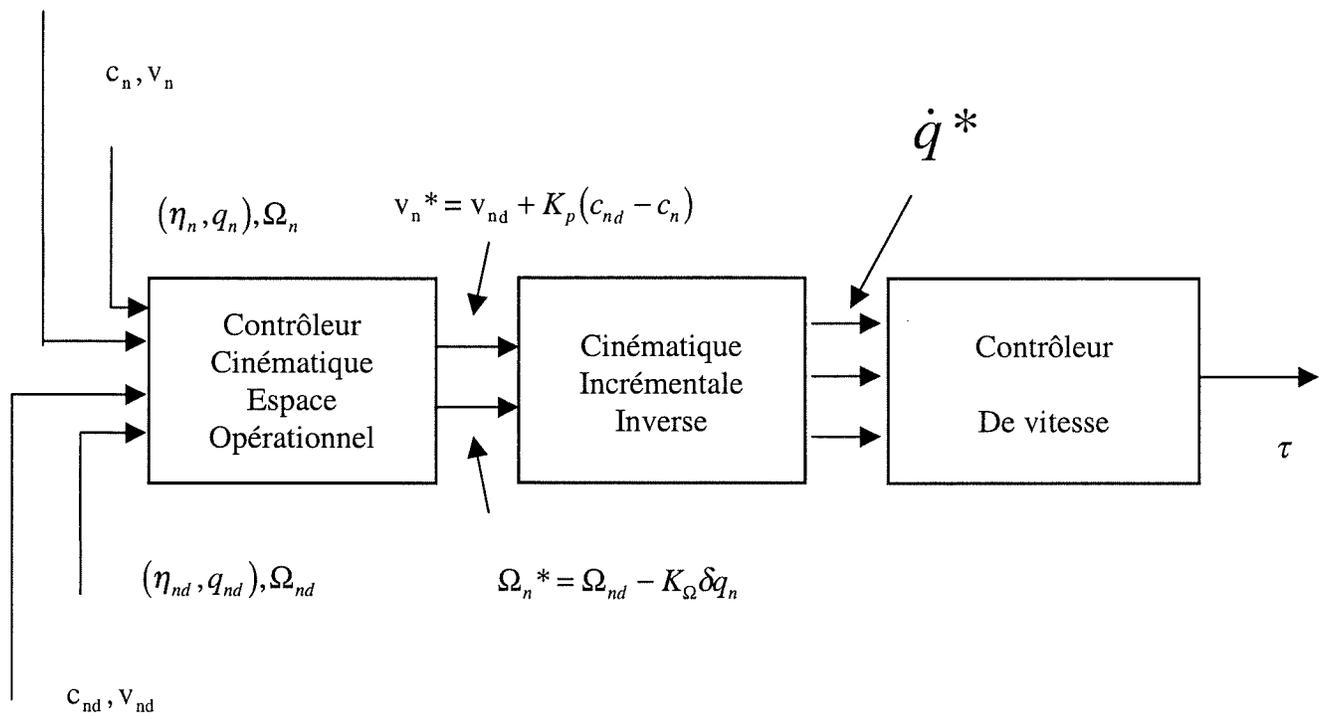
**Étape 3.** L'on constate que  $v = v^*$  et  $\Omega = \Omega^*$  peuvent être obtenues en posant

$$\tau = DJ^{-1}\dot{v}_n^* - DJ^{-1}J\dot{q} + C(\dot{q}, q)\dot{q} + G(q).$$

où  $\dot{v}_n^* = (\dot{v}_n^{*t}, \dot{\Omega}_n^{*t})^t$ .

**Étape 4.** Le problème peut alors être résolu en appliquant le contrôleur indiqué à la Figure 3.7.

**Observation 1.** Alors que dans notre exposé nous avons d'une façon tacite suggéré un asservissement en orientation obtenu en employant un des contrôleurs proposés par Yuan, un tel asservissement aurait été également pu être obtenu en employant un contrôleur basé sur l'approche de linéarisation exacte basée sur l'utilisation des quaternions où des angles d'Euler dont il a été question dans les sections précédantes.



**Figure 3.7 :** Asservissement par régulation de vitesse de la position/orientation de l'outil dans l'espace opérationnel.

#### 4. Asservissement en position avec commande adaptative

L'asservissement en position d'un manipulateur robotique peut être vu comme typique de la classe de problèmes de contrôle concernant un système dynamique nonlinéaire, intercouplé et avec plusieurs entrées et plusieurs sorties. Comme tel, ce problème peut bénéficier de la plus grande partie des techniques de commande adaptative et d'auto-réglage qui sont offertes par la littérature scientifique. Cela inclut les techniques de commande adaptative basées sur la notion de suivi d'un modèle de référence (Landau 1979) et les techniques de commande adaptative qui vont sous l'appellation de techniques self-tuning (Astrom 1989).

Ces techniques n'étant pas spécifiques aux manipulateurs robotiques et étant en même temps bien traitées dans des cours de base sur la commande automatique, elles ne seront pas discutées dans le présent document. D'autre part, il existe des techniques de commande adaptative qui ont été

récemment développées dans le cadre d'applications concernant d'une façon particulière les systèmes robotiques. Un rôle fondamental parmi ces techniques est joué par l'algorithme de Slotine-Li (basé sur les propriétés structurelles d'un manipulateur) et par la notion de système de contrôle avec boucle d'auto-apprentissage.

Dans sa version originale (Slotine et Li 1987), l'algorithme de Slotine-Li concerne un manipulateur robotique dont la dynamique dans l'espace articulaire est décrite par l'équation

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau. \quad (1)$$

Sous l'hypothèse que les paramètres cinétiques et massiques du manipulateur ne soient pas nécessairement connues, quoique invariants dans le temps, le problème est de déterminer une loi de contrôle qui fait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d(t), \quad (2)$$

malgré la connaissance incomplète des paramètres du système asservi.

Les propriétés d'un manipulateur robotique qui sont nécessaires pour que l'algorithme de Slotine-Li puisse résoudre ce problème sont les suivantes:

**Propriété 1:** Il existe un vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , avec composantes dépendantes des paramètres cinétiques et massiques du manipulateur, tel que pour tout vecteur différentiable  $v(t)$ , l'on a

$$\tau = D(q)\dot{v} + C(q, \dot{q})v + G(q) = Y(q, \dot{q}, v, \dot{v})\alpha. \quad (3)$$

**Propriété 2:** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la relation suivante est valide

$$x'(\dot{D} - 2C)x = 0. \quad (4)$$

L'idée à la base de l'algorithme est de considérer un contrôleur comportant les trois composantes suivantes (Figures 4.1, et 4.2):

i) **une composante cinétique:** à partir de l'erreur de suivi elle fournit une vitesse d'articulation  $\dot{q}^*$  telle que si  $\dot{q} = \dot{q}^*$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d(t);$$

l'action de cette composante est décrite par l'équation

$$\dot{q}^* = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q) \quad (5)$$

où  $\Lambda$  est une matrice définie-positive;

ii) **un contrôleur de vitesse:** il produit la commande qui fait que l'on ait effectivement

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = \dot{q}^*(t);$$

l'action de cette composante est décrite par l'équation

$$\tau = \hat{D}(q)\ddot{q}^* + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}^* + \hat{G}(q) + K_D(\dot{q}^*(t) - \dot{q}(t)) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}^*)\hat{\alpha} + K_D(\dot{q}^*(t) - \dot{q}(t)) \quad (6)$$

où  $\hat{D}(q)$ ,  $\hat{C}(q, \dot{q})$ ,  $\hat{G}(q)$  et  $\hat{\alpha}$  représentent les valeurs estimées de  $D(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  et  $\alpha$ , et  $K_D$  est une matrice définie positive.

iii) **une boucle d'adaptation:** elle modifie les paramètres du contrôleur de vitesse en mettant à jour l'estimée de l'influence des paramètres inconnus sur la dynamique du manipulateur; l'action de cette composante est décrite par l'équation

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\Gamma^{-1}Y(q, \dot{q}, \ddot{q}^*)(\dot{q}(t) - \dot{q}^*(t)). \quad (7)$$

**Observation 1.** (Démonstration de convergence pour l'algorithme de Slotine-Li). En posant

$$\alpha^* := \alpha - \hat{\alpha}, \text{ et } \sigma := (\dot{q}^*(t) - \dot{q}(t)) \text{ avec } \dot{q}^* = \dot{q}_d + \Lambda(q_d - q),$$

considérons la fonction

$$V(t) = 1/2 \sigma^T D \sigma + 1/2 \alpha^{*T} \Gamma \alpha^*. \quad (8)$$

En dérivant par rapport au temps, nous avons

$$\dot{V}(t) = \sigma' D\dot{\sigma} + 1/2\sigma' D\dot{\sigma} + \alpha^* \Gamma \dot{\alpha}^* . \quad (9)$$

Puisque

$$\dot{\sigma} = \ddot{q}^* - \ddot{q} = \ddot{q}^* - D^{-1}(\hat{D}\ddot{q}^* + \hat{C}\dot{q}^* + \hat{G} + K_d\sigma - C\dot{q} - G), \quad (10)$$

il suit

$$\dot{V} = \sigma' (D\ddot{q}^* + C\dot{q}^* + G - \hat{D}\ddot{q}^* - \hat{C}\dot{q}^* - \hat{G} - C\dot{q}^* + C\dot{q}) \quad (11)$$

À partir de ces équations nous pouvons conclure que  $\sigma$  doit converger envers zéro (dans le cas contraire, en observant que  $\sigma$  est uniformément continue, l'on aurait que  $V(t)$  convergerait envers  $-\infty$ ).

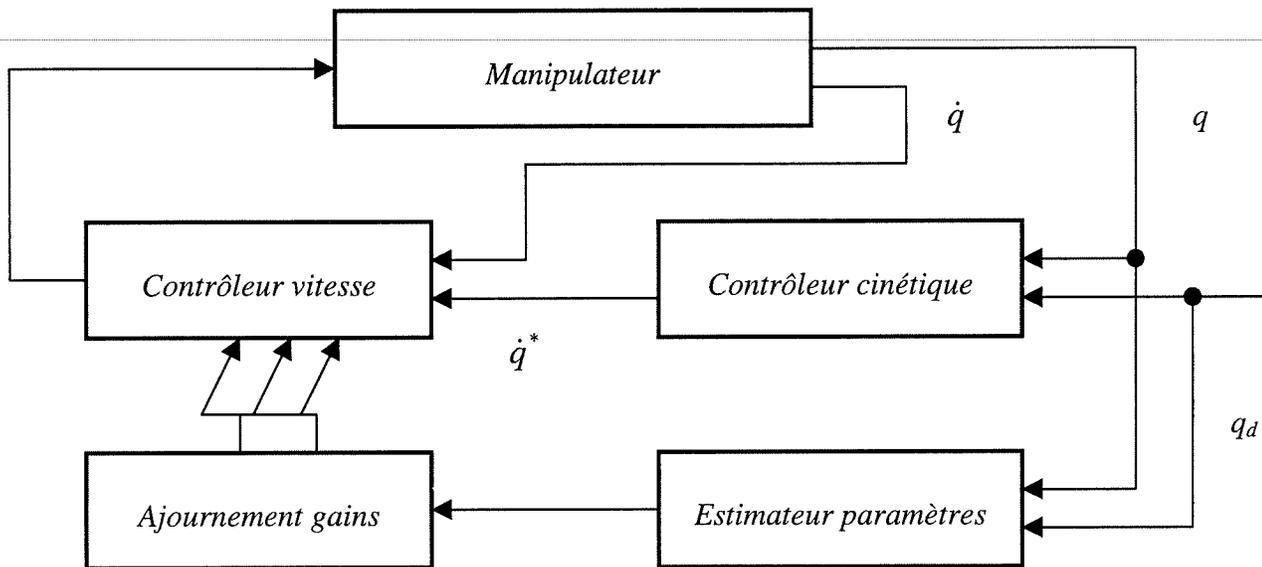


Figure 4.1: Structure du contrôleur adaptatif de Slotine-Li



En introduisant les notations:

$q_d(\cdot), q_k(\cdot)$  : valeurs des variables d'articulations désirées et obtenues à la k-ième exécution de la tâche;

$e_k(\cdot) := q_d(\cdot) - q_k(\cdot)$ , historique de l'erreur de suivi de trajectoire correspondante à la k-ième exécution de la tâche;

$d_k(\cdot)$  : variation d'accélération introduite par le module d'apprentissage en réponse à  $e_{k-1}(\cdot)$ ; les fonctions  $q_d(\cdot), q_k(\cdot), e_k(\cdot)$  et  $d_k(\cdot)$  peuvent être vues comme éléments de l'espace de fonctions  $L_2(0, \infty)$ .

En utilisant la méthode du couple pré-calculé, soit la dynamique du manipulateur à la k-ième exécution de la tâche représentée par l'équation

$$D_c(\ddot{q}_d + K_1 \dot{e}_k + K_2 \ddot{e}_k + d_k) = D\ddot{q} + f \quad (1)$$

où  $f$  est la perturbation et  $D_c$  et  $D$  représentent les valeurs calculées et actuelles de la matrice d'inertie du manipulateur. En supposant une parfaite connaissance des paramètres du manipulateur nous pouvons poser  $D_c = D$  et donc

$$K_1 \dot{e}_k + K_2 \ddot{e}_k + \ddot{e}_k + d_k = D^{-1}f =: d. \quad (2)$$

En appliquant la transformée de Laplace, il suit

$$e_k(s) = H(s) (d - d_k)(s) \quad (3)$$

avec

$$H(s) := 1/(K_1 + K_2 s + s^2). \quad (4)$$

En décrivant l'action du module d'auto-apprentissage avec l'équation

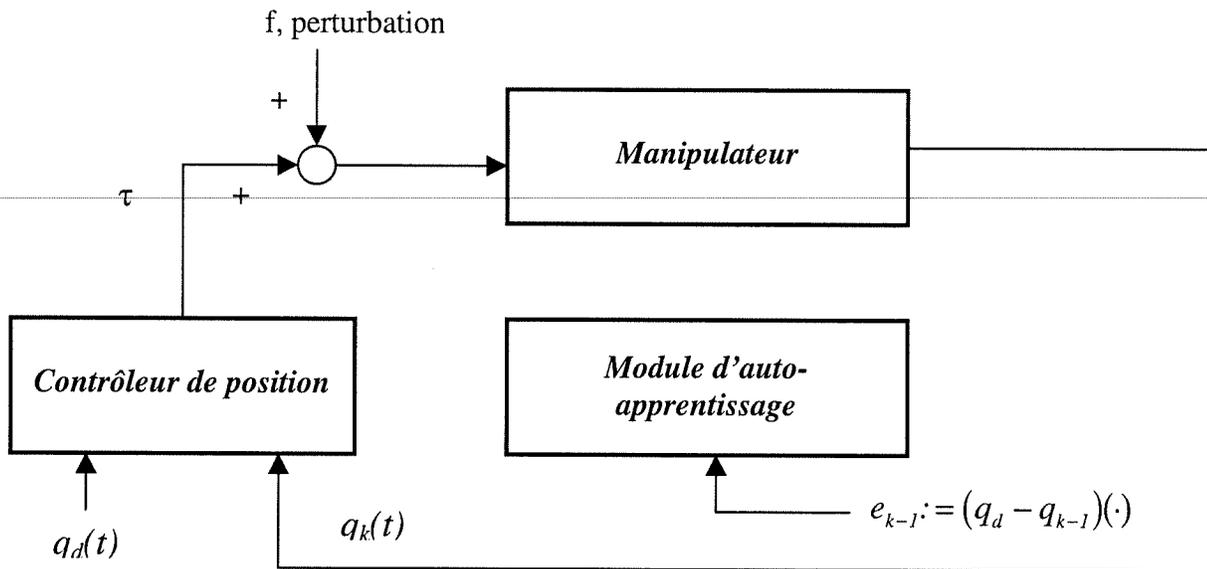
$$d_{k+1} = d_k + Qe_k \quad (5)$$

où  $Q: L_2(0, \infty) \Rightarrow L_2(0, \infty)$  est un opérateur à déterminer (non nécessairement causal), nous avons

$$d_{k+1} = d_k + QH(d - d_k)$$

$$d_{k+1} = (I - QH)d_k + QHd. \quad (6)$$

En invoquant le théorème du petit gain, il suit que l'objectif désiré peut être atteint en choisissant  $Q$  de façon à ce que  $d_k \Rightarrow d$ ; ce qui peut être fait en prenant un  $Q$  tel que la norme de l'opérateur  $I-QH$  soit inférieure à 1. Un choix possible (non-causal) d'un tel  $Q$  est représenté par  $Q = \alpha H^*$ , où  $H^*$  indique l'opérateur adjoint de  $H$  et  $\alpha$  est une constante telle que la norme de  $H$  est inférieure à  $1/\alpha$ .



**Figure 5.1:** Scénario typique d'un problème d'auto-apprentissage

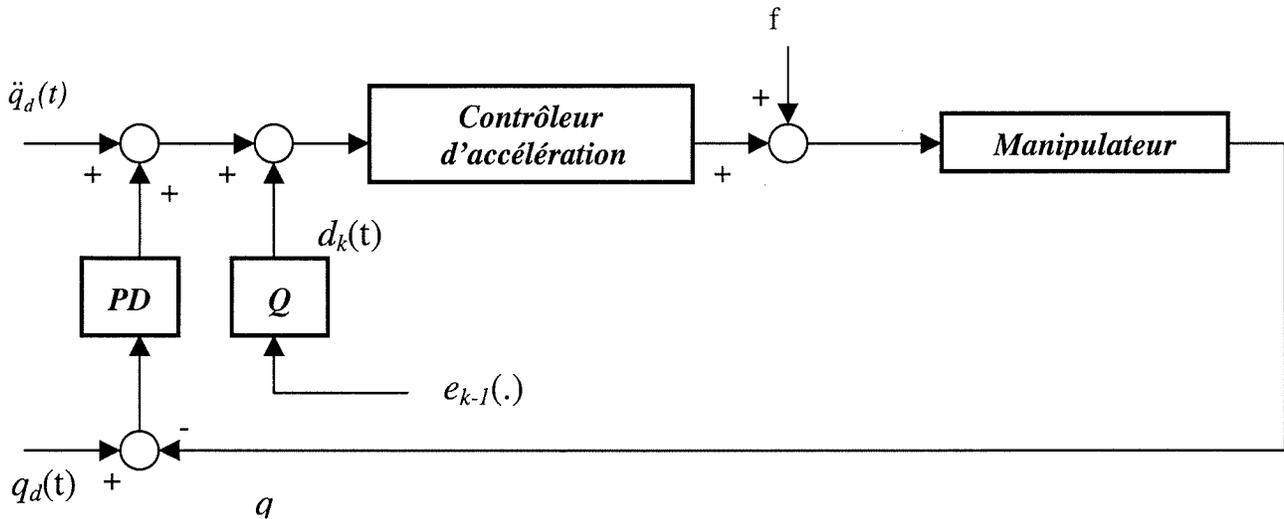


Figure 5.2: Schéma d'un système de contrôle avec auto-apprentissage

## Conclusions

La problématique posée par l'asservissement en position d'un manipulateur robotique implique une large variété d'approches et de formalismes. Cependant les idées fondamentales à la base de ces approches sont peu nombreuses et d'une nature fort simple. Ces idées peuvent être résumées en termes de contrôle dans l'espace articulaire et de contrôle dans l'espace opérationnel, de contrôleur d'accélération et de contrôleur de vitesse, d'asservissement en position par régulation d'accélération et par régulation de vitesse, de couple pré-calculé, de contrôleur PID, et de suivi de trajectoire d'état. Ces mêmes idées sont également à la base de la solution de problèmes plus spécialisés tels que la commande adaptative (par exemple l'algorithme de Slotine-Li), l'asservissement en position/force (telle que par exemple la méthode de Craig-Raibert), ou bien l'asservissement en parcours de robots mobiles sur roues.

## **Bibliographie**

- As.1** Astrom, K.J., Wittenmark, B., **Adaptive Control**, Reading, Mass,: Addison-Wesley 1989.
- Cr.1** Craig, J.J., **Adaptive Control of Mechanical Manipulators**, Reading, Mass,: Addison-Wesley 1988.
- De.1** DeSantis, R.M., Dynamique des systèmes mécaniques sous contraintes holonomes et nonholonomes, **EPM/RT-96/04**, Ecole Polytechnique de Montréal, 2000.
- De.2** DeSantis, R.M., Théorie des Asservissements Linéaires, **EPM/RT-89/7**, École Polytechnique de Montréal, 1989.
- De.3** De Santis, R.M., A Novel PID for Speed and Position Control, **ASME J. of Dynamic Systems, Measurements and Control**, Vol. 116, pp. 542-549, Sept '94.
- De.4** DeSantis, R.M., Motion/Force Control of Robotic Manipulators, **ASME J. of Dynamic Systems, Measurements and Control**, Vol. 118, June '96, pp. 386-390.
- DW.1** Qwyer, T.A., Exact Nonlinear Control of Large Angle Rotational Maneuvers, **IEEE Trans on Automatic Control**, Vol. **AC-29**, **N.9**, Sept 1984, pp. 769-774.
- Gr.1** Craig, J.J, **Introduction to Robotics**, Addison Wesley 1986.
- La.1** Landau, Y.D., **Adaptive Control-The Model Reference Approach**, New York, Marcel Dekker, 1979.
- Lu.1** Luh, J.Y.S., Walker, M.W., Paul, R.P.C., Resolved-Acceleration Control of Mechanical Manipulators, **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. AC-25, N.3, June 1980, pp 468-474.
- Sp.1** Spong, M.W., Vidyasagar, M., **Robot Dynamics and Control**, John Wiley & Sons 1989.
- Sh.1** Schilling, R.J., **Fundamentals of Robotics: Analysis, and Control**, Prentice Hall 1990.
- Slo.1** Slotine, J.J.E., Li, W., On the Adaptive Control Of Robot Manipulators, **The International Journal of Robotics Research**, Vol.6, N.3, Fall 1987.
- Yu.1** Yuan, J.S.C., Closed-Loop Manipulator Control Using Quaternion Feedback, **IEEE Journal of Robotics and Automation**, Vol.4, N.4, Aug 1988.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00249449 8

École Polytechnique de Montréal  
C.P. 6079, Succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
H3C 3A7

