

I. S. E. G.
Biblioteca
HD9685.E86.G87
2007

COTA

RESERVADO



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

TÍTULO

DINÂMICA DE PREÇOS À VISTA DE ELECTRICIDADE
UMA ANÁLISE EMPÍRICA

AUTOR

JOAQUIM ALEXANDRE DO NASCIMENTO FERREIRA LAPAS DE GUSMÃO

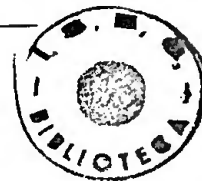
ORIENTADO POR:

PROF. DOUTOR JOÃO LUIS C. DUQUE
MESTRE ALCINO TIAGO CRUZ GONÇALVES

JÚRI CONSTITUÍDO POR:

PROF. DOUTOR JOÃO LUIS C. DUQUE
PROF. DOUTOR PAULO MENESES BRASIL DE BRITO
PROF. DOUTOR PEDRO MANUEL CORTESÃO GODINHO
DOUTOR ALCINO TIAGO CRUZ GONÇALVES

13 de Outubro de 2007



Abstract

This work concerns the dynamics of hourly electricity spot prices on the OMEL, the Spanish Electricity Spot Market.

The stylized facts of the dynamics of electricity spot prices (the clearing price) are identified on the literature and have similarities among several electricity markets such as several periodicities (intra-daily, weekly, and annual seasonality's), mean regression, outliers and variant volatility, with the level degree of each of this features depending on each market structure. There are in the literature several models that use the clearing load as an exogenous variable. In the present work the processes of price and load are analyzed.

Both dynamics are decomposed under several time horizons: intra-daily, weekly, intra-annual and supra-annual. This temporal multi-scale analysis is done with a MODWT (Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform) multi-resolution analysis (MRA). In this way, scale dynamics are isolated from each other and the knowledge of every dynamics can be achieved. With this tool, the trend, the periodicities and the multi-scale dynamics details can be captured and isolated from each other.

The original contribution of the present work concerns the MODWT multi-scale dynamics analysis of a high frequency eight year long series of hourly price and load of the OMEL, something not reported, so far, on the literature. Under this analysis, the multi-scale variance of each process and the cross-correlation of both process are uncovered, showing different behavior over the several temporal scales.

Under this analysis, several results not reported in the literature were achieved: the variance wavelet decomposition revealed that some scales are determinant for the global dynamics variance process: daily and weekly variance components are more important than others time horizons variance components. Under standardized series, price and load processes, revealed similar variance scale decomposition.

The departure from constancy growth of the sample variance for prices and loads processes were study along the series and exposed different behavior in each scale, but no qualitative relation is apparent between both processes.

A wavelet cross-correlation analysis was performed over prices and loads, and over volatility of prices and loads. Over the sampled global dynamics were founded extremely low correlation values on the cases of prices levels vs prices volatility and load levels vs load volatility. However, some moderate correlation values were founded for intra-daily and daily scales, but with symmetric signals. For larger scales, the correlation values were not significant. The correlation time scale decomposition allowed uncovering relations between variables that were insignificant from a global dynamics point of view.

For the case of load and prices, the global dynamics correlation shows a substantial value. Nevertheless, daily and weekly scale load and price processes correlations are strongly positive and are dominant over others scales correlations and are superior comparing with global dynamics correlation value. So, as stated by some of the literature, also for the OMEL the correlation between loads and prices over the analysed period is positive and substantial, but is stronger for some of the smaller scales and has only a moderate behavior for larger scales.

In the case of volatility of loads and volatility of prices cross correlation showed a global moderate positive value, the wavelet decomposition revealed a substantial positive cross correlation for the intra-daily and daily dynamics.

Some of the literature points for the potential of persistence on the electricity spot prices. There is in the literature settled procedures, based on wavelet decomposition, for an estimate of the fractal parameter for long memory processes. Such a procedure was used for determining the price and load processes fractal exponent. What is revealed is that both processes might not be well modeled as a single fractal parameter processes but rather the presence of some other embedded dynamics that might point for multifractality models.

KEYWORDS: Electricity spot prices; multiresolution analysis; wavelet transform; wavelet variance; wavelet correlation; fractal exponent.

Resumo

Este trabalho debruça-se sobre a dinâmica dos preços à vista de electricidade, de cada hora do dia (*clearing price*), no mercado liberalizado de energia eléctrica de Espanha, o OMEL.

Os factos estilizados da dinâmica dos preços à vista estão identificados em vários mercados, com maior ou menor grau, dependendo da estrutura desse mercado, e prendem-se com: periodicidades várias (diária, semanal e sazonalidade anual), regressão à média, picos nos preços, volatilidade variante. Na literatura existem variados modelos que incorporam a quantidade de energia eléctrica transaccionada como uma variável exógena a ter em conta. No presente trabalho analisa-se, a par com o processo do preço de energia eléctrica, a quantidade transaccionada (também denominada carga – *clearing load*).

A dinâmica dos preços à vista e da quantidade de energia eléctrica, ou carga, é analisada sobre vários horizontes temporais: inter-diário, inter-semanal, inter-mensal, inter-anual e supra-anual. Para esta análise multi-escala temporal recorreu-se à metodologia de multi-resolução da transformada discreta de onduletas modificada (MODWT – *maximal overlap discret wavelet transform*). A análise por diferentes horizontes temporais permite isolar dinâmicas e obter detalhes sobre os processos nessas dinâmicas, contribuindo para um conhecimento das dinâmicas particulares na dinâmica global.

A contribuição original do presente trabalho está assente na análise da dinâmica conjunta, em várias escalas temporais, do preço e da carga do OMEL, com recurso à transformada de onduleta MODWT sobre duas amostras univariadas, de alta-frequência e de grande dimensão (8 anos), algo não reportado na literatura sobre o OMEL nem em outros mercados de energia eléctrica.

No presente trabalho, com base numa decomposição de multi-resolução por onduletas, analisaram-se as dinâmicas multi-escala das séries dos preços e de cargas nos seguintes aspectos: variância de onduleta e correlação cruzada de onduleta. É realizada também a estimativa do expoente fractal dos dois processos, por recurso à variância de onduleta.

A análise de multi-resolução por onduletas permite quantificar a contribuição de cada escala temporal para a variância total da série temporal. Quando padronizadas, as séries temporais da

amostra do processo dos preços e das cargas demonstram igual decomposição da variância por escalas temporais, principalmente nas escalas superiores a uma semana. Em ambas as séries, os horizontes temporais mais determinantes (ou as componentes de maior peso) na variância dos dois processos, são as variações de um dia para o outro e as variações de uma semana para a outra.

Analizou-se também a existência de alterações no crescimento da variância ao longo da amostra e nas várias escalas temporais. Verifica-se que existem escalas que demonstram fortes perturbações no crescimento da variância (mais relevante o caso da escala de variações diárias) enquanto outras não aparentam perturbações no seu crescimento. É aparente a existência de sazonalidades nas perturbações do crescimento da variância para o caso das cargas nas escalas inter-anuais. No entanto, e por inspeção visual, concluiu-se não existir aparente relação entre as perturbações na variância do processo de preços e do processo das cargas.

A análise da correlação cruzada de onduleta entre dois processos permite verificar detalhes que os factores globais de correlação cruzada não conseguem deixar transparecer. Verificou-se, por exemplo, que correlações cruzadas de séries (que contêm a globalidade da dinâmica) com coeficientes de valor ínfimo são, afinal, compostas por correlações moderadas ou substanciais, mas simétricas, em alguns dos horizontes temporais.

A correlação cruzada entre os processos de preços e de cargas é substancial mas a decomposição desta em escalas temporais revela valores bastante diferenciados. Para os horizontes temporais diário e semanal a correlação cruzada é positiva e muito forte, sendo substancialmente superior à dos dois processos originais que contêm toda a dinâmica e é bastante superior aos das outras escalas temporais. Ou seja, a ideia, presente em grande parte da literatura, que a altos (baixos) valores de carga corresponderão preços altos (baixos) parece fazer mais sentido ao nível da escala diária e semanal, mas não é tão demarcada noutros horizontes temporais.

A correlação cruzada entre as séries da volatilidade dos preços e da volatilidade das cargas é positiva moderada, no entanto verificou-se que essa correlação cruzada é substancialmente positiva para a dinâmica intra-diária e diária, sendo nula para dinâmicas com escalas temporais superiores a alguns dias.

Em alguma da literatura reportam-se modelos que incorporam o nível de preços como um indicador potencial de regimes de volatilidade, ou regime de picos nos preços. No entanto, na análise de correlações cruzadas entre os preços e da sua volatilidade revela-se com valor ínfimo negativo. Recorrendo à decomposição em escalas temporais verificou-se que correlação cruzada na escala intra-diária é simétrica da obtida à escala diária, apresentando valores baixos, mas positivos nas escalas intra-diárias e negativos ou nulos nas escalas temporais superiores a um dia. As restantes escalas não contribuem significativamente para a correlação cruzada do preço e da volatilidade deste processo.

Algo semelhante se passa para a correlação cruzada entre a carga e a volatilidade da carga, mas de forma ainda mais demarcada. Ou seja, os valores das contribuições na escala intra-diária e diária são maiores no caso do preço e da sua volatilidade, mas a simetria da correlação nessas escalas é também mais acentuada. As contribuições das restantes escalas para a correlação são estatisticamente nulas.

A literatura aponta para a potencial presença de persistência no mercado eléctrico. Determinaram-se estimativas para os expoentes característicos de processos fraccionalmente diferenciáveis, recorrendo-se a metodologia por regressão linear sobre a estimativa da variância de onduleta. Conclui-se pela potencial presença de multi-fractalidade no processo do preço e das cargas, bem como das suas volatilidades.

INDICE

Resumo.....	4
Agradecimentos.....	9
Lista de Tabelas	10
Lista de Figuras	10
1 - INTRODUÇÃO	13
2 – O MERCADO À VISTA DE ELECTRICIDADE	14
2.1 - A Formação do Preço à Vista	14
2.2 - A Oferta	16
2.3 - A Procura	18
2.4 – Modelos de preços em mercados à vista de energia eléctrica.....	19
2.5 - O Preço à Vista e o Preço Futuro.....	23
3.- REVISÃO DE LITERATURA	24
4. – DADOS	43
5. – ANÁLISE EMPÍRICA.....	44
5.1. – Análise Estatística das Amostras.....	44
Trajectórias das Séries Temporais	44
Ciclos intra-semanal e intra-diário.....	46
Análise das sub-séries de cada hora do dia.....	47
Estimativas da Densidade das Distribuições Amostrais das Cargas e Preços	52
Testes de Normalidade das Distribuições	53
Estacionaridade e Ergodicidade	53
Teste aDF de Estacionaridade das Séries dos Preços e das Cargas	57
Transformações de Variáveis.....	58
Autocorrelação	60
5.2. - Análise de Multi-Resolução.....	63
Análise da Tendência.....	67
5.3. - Análise da Variância de Onduletas.....	69
5.4. - Análise das Variações Temporais da Variância.....	72
5.5. – Correlações Cruzadas Preços - Cargas	75
5.6. - Memória Longa.....	81
6. – CONCLUSÕES E TÓPICOS PARA INVESTIGAÇÃO FUTURA	87
7. – BIBLIOGRAFIA	90
A. ANEXO A – Análise de Multiresolução e Transformada Discreta de Onduletas.....	94
A.1 - Análise de Multiresolução	94
A.2.- Transformada Discreta de Onduleta	98
B. ANEXO B – Estatísticas de Regressão dos parâmetros β , para a memória longa.....	106
C. ANEXO C – Estimativa de expoentes fractais para ruído branco, movimento browniano, e de dois índices financeiros.....	112

à RITA

ser pai de cinco filhos não é fácil
tenho o dever de a todos colocar
ao mesmo nível

aos GuiChiBeaToMa

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível com o apoio dos meus orientadores, pelo que agradeço ao Prof. Doutor João Duque a confiança depositada, principalmente tendo em conta a introdução de uma metodologia ainda não muito divulgada em Finanças.

Ao mestre Tiago Gonçalves agradeço todo o suporte, paciência e palavras de alento.

Ao Eng^o Álvaro Brandão Pinto agradeço o exemplo, que guardarei e utilizarei, de apostar na forte qualificação dos quadros e, acima de tudo, de neles depositar confiança. De facto, o conhecimento é a energia com mais futuro.

Aos meus quatro filhos mais velhos Guilherme, Francisco, Maria Beatriz e António, pelo facto de terem dispensado o pai e ainda suportarem umas saídas de mau humor. Mas espero que o exemplo de um pai que estudou e trabalhou muitas vezes partilhando o mesmo espaço dos filhos, os alerte para a necessidade de se esforçarem pelo conhecimento.

À Rita agradeço o ter ultrapassado a invejável condição de mãe dos nossos filhos e ter tido a experiência forçada de ser pai também. E ainda conseguiu ser esposa.

E claro, ao quinto filho, o Manelinho, pela ternura que em toda a família desperta.

Lista de Tabelas

Tabela 3. 1 – Relação entre os detalhes da análise de multi-resolução e a frequência segundo Gençay <i>et al</i> (2002) e Percival e Walden (2000)	31
Tabela 3. 2: Valores característicos dos parâmetros determinantes dos vários tipos de processos com características de memória longa.....	40
Tabela 4. 1 – Relação Composição do número de dados de cada uma das amostras dos preços e cargas horárias.	43
Tabela 5. 1 – Factores de padronização das séries de preços e cargas de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005	45
Tabela 5. 2: Resultados dos ajustamentos das funções de densidade de distribuição	52
Tabela 5.3: Valores críticos do teste (augmented) Dickey-Fuller (aDF), para 24 atrasos	57
Tabela 5.4 – Coeficientes de correlação cruzada das séries de preços e cargas, da volatilidade dos preços e da volatilidade das cargas (dada pelas séries dos valores absolutos das diferenças dos logaritmos dos preços ou das cargas), dos preços e da sua volatilidade e das cargas e da sua volatilidade.	76
Tabela 5.5: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries dos Preços e das Cargas	84
Tabela 5.6: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries dos incrementos logarítmicos (retornos) dos preços e das cargas	85
Tabela 5.7: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries das volatilidades dos preços e das cargas	85

Lista de Figuras

Figura 5. 1 – Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) desde 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005.....	44
Figura 5. 2 – Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços padronizados (linha a verde) e das cargas padronizadas (linha a azul).....	45
Figura 5. 3: Correspondência entre as cargas horárias de equilíbrio transaccionadas (em abcissas) e os preços horários de equilíbrio (em ordenadas) da transacção por cada ano da análise (1998: azul escuro, 1999:verde, 2000: vermelho, 2001: castanho, 2002: rosa, 2003: púrpura, 2004:bege e 2005: azul claro).	46
Figura 5. 4: Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) desde a amostra horária de 31 de Maio de 2005 a 20 de Julho de 2005 (amostras horárias 64.968 até a 66.168) – unidade em abcissas: mês.	47
Figura 5. 5: Ciclo intra-diário dos preços e das cargas - gráficos <i>box-plot</i> dos valores médios das séries padronizadas para cada hora do dia considerando todo o comprimento da amostra	48
Figura 5. 6: Ciclo intra-semanal - trajectórias temporais dos valores médios horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) padronizados – unidade em abcissas: hora da semana.	49
Figura 5. 7: Valores dos quatro primeiros momentos dos preços e das cargas ao longo das horas do dia.....	50
Figura 5. 8: Densidades de distribuição das séries horárias dos preços e das cargas. Ajustamento às funções de densidade de distribuição para as cargas (ajustamento à normal) e para os preços (ajustamento à distribuição Normal – linha a vermelho, e ajustamento à distribuição Lognormal – linha a azul).....	52

Figura 5. 9: Valores das estatísticas do teste de Jarque-Bera ao longo das séries de preços e de cargas. O valor crítico da estatística para um nível de significância de 0,05 é de 5,996.	53
Figura 5. 10: As trajectórias dos 4 primeiros momentos acumulados da distribuição dos valores horários dos Preços e das Cargas com recurso a janela temporalmente deslizante sobre todo o comprimento da amostra (70.128 horas), com início fixo em 1 de Janeiro de 1998.....	55
Figura 5.11: Variação do valor da estatística do teste aDF com o número de atrasos. Preços – linha a verde, Cargas, linha a azul.	58
Figura 5.12: As trajectórias dos 4 primeiros momentos acumulados da distribuição dos valores horários dos incrementos logarítmicos dos preços e das cargas com recurso a janela temporalmente deslizante sobre todo o comprimento da amostra (70.128 horas), com início fixo em 1 de Janeiro de 1998.....	60
Figura 5.13: Funções de autocorrelação estimadas (FAC) e Funções de autocorrelação parciais (FACP) das séries horárias dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) – unidade dos atrasos (<i>atrasos</i>) é de 1 hora.	62
Figura 5.14: Análise de Multi-resolução da série de preços e de cargas do OMEL, de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005 (8 anos de valores horários), por recurso à transformação parcial de onduleta $J_0=13$ MODWT LA8.....	65
Figura 5.15: Trajectórias temporais das funções de Aproximação S_{10} a S_{12} da recomposição após transformação de onduleta MODWT LA8 para o caso das séries padronizadas dos Preços (linha a verde) e das Cargas (linha a azul), entre 1 Janeiro 98 e 31 Dezembro 2005.....	68
Figura 5.16 – Decomposição do desvio-padrão, em escalas de nível 1 a 13, das séries de preços e cargas pela utilização da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) e respectivos intervalos de confiança a 95% (linhas vermelha e verde).....	70
Figura 5.17 – Decomposição do desvio-padrão, em escalas de nível 1 a 13, das séries padronizadas de preços (linha a verde) e cargas (linha a azul) e dos quadrados dessas séries pela utilização da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) e respectivos intervalos de confiança a 95% (linhas a traço interrompido).....	70
Figura 5. 18– Decomposição do desvio-padrão pela utilização da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8), das séries padronizadas das variações dos logaritmos dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) e das volatilidades dessas grandezas - intervalos de confiança a 95% (linhas a traço interrompido para as cargas e a traço grande traço curto para os preços).	71
Figura 5.19 – Desvios das trajectórias temporais do crescimento da variância com a dimensão da amostra nos vários níveis dos valores dos coeficientes de onduleta das transformadas de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8).....	72
Figura 5.20 – Desvios das trajectórias temporais do crescimento da variância com a dimensão da amostra nos vários níveis dos valores dos coeficientes de onduleta das transformadas de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8).....	74
Figura 5. 21– Funções de correlação cruzada entre as várias séries. A unidade em abcissas é a hora.	77
Figura 5.22: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) das séries dos níveis dos preços e das cargas e da sua volatilidade.....	78
Figura 5.23: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) das séries dos níveis dos preços e da volatilidade dos preços, série esta dada pelo valor absoluto dos incrementos dos logaritmos dos preços.....	79
Figura 5.24: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) das séries da volatilidade dos preços e dos níveis das cargas e das séries dos níveis dos preços e da volatilidade das cargas.	80

Figura 5.25: Representação gráfica das grandezas $Y(\tau_j)$ definidas pela equação 5.15 a 5.20 para os processos das séries originais, dos incrementos logarítmicos e da volatilidade 83

1 - INTRODUÇÃO

Os mercados regulados e não regulados demonstram processos de preços muito diferentes, e as crises passadas em alguns mercados liberalizados fizeram despoletar a polémica se os mercados de electricidade deveriam ser desregulados ou se seriam monopólios naturais que deveriam assim permanecer.

Os preços de energia eléctrica em mercados regulados são estabelecidos por entidades públicas reguladoras com os objectivos gerais de não permitirem poder de mercado por parte das firmas geradoras e simultaneamente assegurarem a solvência das empresas fornecedoras de electricidade. Neste contexto, a variação de preço é mínima e sob forte supervisão da entidade reguladora que fixa o preço de forma baseada, essencialmente, nos custos médios de produção de energia eléctrica. Esta situação, levou as empresas de produção eléctrica a focarem-se na previsão da procura de energia eléctrica. A entrada no mercado é barrada a novos operadores e os novos investimentos em activos de geração eléctrica pelas empresas incumbentes são largamente baseados nas previsões da procura. Assim, num contexto de mercado regulado, não há a necessidade de cobertura de risco do preço de electricidade¹, pois este variará por causas determinísticas da natureza do processo económico imposto pela regulação.

A liberalização dos mercados de electricidade retira o controlo dos preços e encoraja a entrada de novos operadores. No entanto, dado as características deste mercado, os preços sofrem de grande volatilidade, o que levou a que os volumes transaccionados nestes mercados fossem menores do que o previsto (Knittel e Roberts (2001)).

Nos mercados não regulados, os preços de energia eléctrica apresentam características diferenciadas dos restantes bens transaccionáveis em mercados livres, designadamente de outros bens de energia armazenáveis, como crude, gás, carvão e urânio. As causas desta diferenciação, documentadas na literatura por variadíssimos autores, provêm de quatro características técnicas da produção, distribuição e consumo muito próprias dos sistemas de energia eléctrica:

- 1 - Obrigatoriedade de balanço perfeito entre produção e consumo;
- 2 - Incapacidade de armazenamento;

¹ - No entanto, os produtores em regime regulado têm que se precaver sobre as variações das fontes primárias de energia: gás natural, carvão, urânio, etc.

- 3 - Curva da oferta fortemente convexa que parte duma situação praticamente horizontal tornando-se praticamente vertical quando a oferta se aproxima da capacidade máxima disponível de geração de energia eléctrica (Géman e Roncoroni (2006));
- 4 – Forte inelasticidade da procura de curto prazo (Escribano, Pena e Villaplana (2002)).

Em consequência destas características técnicas, resultam os seguintes factos estilizados: periodicidades pronunciadas tanto intra diária, semanal e sazonalidade anual, forte reversão à média, alta volatilidade, heteroscedasticidade e frequentes saltos (Huisman e Mahieu (2001), Escribano, Pena e Villaplana (2002)).

Compreender as características do processo preço à vista de electricidade é importante para poder valorizar os contratos de vários tipos: bilaterais (ou OTC) de curto, médio ou longo prazo, contratos de futuros, opções, etc. existentes nos mercados desregulados (Lúcia e Schwartz (2001), Escribano *et al* (2002), Knittel e Roberts (2001)). Saber valorizar a capacidade de gerar *cash-flow* por parte dos activos físicos de geração de energia eléctrica é importante também para poder valorizar activos, capitais próprios e alheios de sociedades que detenham este tipo de activos, bem como determinar o VaR da carteira de activos de geração de electricidade dessas sociedades (Deng, (1999) e Niemeyer (2000)).

2 – O MERCADO À VISTA DE ELECTRICIDADE

2.1 - A Formação do Preço à Vista

Apesar da enorme importância do mercado bilateral, bem como do mercado de derivados, o mercado à vista serve de base à negociação, dado que o desequilíbrio no cumprimento dos contratos do lado da oferta, mas também do lado do comprador no seu consumo, faz com que tanto o vendedor como o comprador de derivados necessitem do mercado à vista para tomarem as mesmas posições ou, eventualmente, posições inversas às tomadas nos seus contratos, para equilibrarem a procura e oferta das suas transacções em OTC, em futuros ou opções, etc. e, no global, o mercado poder atingir o obrigatório equilíbrio (Knittel e Roberts (2001)).

Em mercados de preços à vista de *pool* simétrico², há a possibilidade dos agentes transmitirem tando as ofertas de venda como as ofertas de compra de energia eléctrica (Saraiva, Silva e Leão (2002)).

Os produtores transmitem ao incumbente de operação do mercado, o operador do mercado, (OMEL, no presente caso de estudo) para cada intervalo de tempo (1 hora no caso do OMEL) do dia seguinte a sua oferta de energia em quantidade (MWh) e em preço por unidade de energia (c€/kWh) e as entidades comercializadoras, intermediários financeiros ou consumidores elegíveis (aqueles que tenham um consumo anual acima de um dado nível) transmitem ao operador do mercado a quantidade de energia que pretendem adquirir, em determinada hora do dia seguinte³. O ambiente de mercado simétrico possibilita que as cargas que sejam sensíveis ao nível do preço sejam impulsionadoras de introdução de eficiência no mercado (Saraiva, Silva e Leão (2002)).

O preço de equilíbrio (*clearing price*), ou preço de mercado, é estabelecido pelo operador do mercado, como o valor de equilíbrio entre as ofertas sucessivas de preços (do mais baixo para o mais alto - *stack*) e quantidades de energia para o dia seguinte por parte da oferta, ou seja dos agentes geradores, e a procura colocada ao operador do sistema, pelo que todos os geradores que realizarem ofertas iguais ou inferiores ao valor estabelecido são chamados a fornecer a energia ao preço à vista estabelecido, sendo esse valor de mercado igual para todas as unidades de energia injectadas na rede eléctrica nesse determinado período, geralmente de uma hora ou de meia hora (consoante os mercados), de todos os produtores em mercado à vista. Este valor é o preço marginal da energia – é o preço a que corresponde a remuneração de uma unidade extra de energia se o valor da carga aumentasse de uma unidade de energia.

O mercado à vista do OMEL é um mercado voluntário, não constitui, portanto, um *pool* obrigatório⁴, ou seja, os agentes são livres de estabelecer contratos bilaterais físicos, contratos cuja operação técnica é gerida pelo operador do sistema (que poderá coincidir ou não com o operador do mercado), entidade incubida de gerir tecnicamente a rede eléctrica de forma a evitar as situações de inviabilidade técnica. Assim, parte da produção dos agentes geradores

² Há mercados à vista de energia eléctrica assimétricos, ou seja, apenas aceitam propostas de venda de energia eléctrica. Esta forma de organização do mercado toma como pressuposto que a carga é totalmente inelástica e estará disposta a pagar qualquer preço que resulte do mercado (Saraiva, Silva e Leão (2002)).

³ - O mercado à vista de energia eléctrica é também denominado de *day-ahead market*.

⁴ - Os mercados de *pool* obrigatória denominam-se de mercados centralizados. Neste tipo de organização de mercado há um operador que se constitui como comprador e vendedor único e que, portanto, adquire toda a energia eléctrica dos produtores e a vende aos consumidores (Saraiva, Silva e Leão (2002)).

participantes no mercado poderá ser injectada na rede naquele determinado período, para cobrir contratos bilaterais, por exemplo, mas o preço dessa produção será o estabelecido nesses contratos bilaterais físicos.

Esta forma de realização de contratos directos entre produtores e consumidores constitui um mecanismo que permite a cobertura de risco à resposta de curto prazo do mercado à vista (Saraiva, Silva e Leão (2002)).

2.2 - A Oferta

Um gerador de energia eléctrica, sem poder de mercado (*price taker*), estará disposto a vender a sua energia desde que o preço estabelecido de mercado seja superior ao custo marginal de produção das unidades de energia eléctrica geradas. Os custos marginais de produção são formados pelos custos de combustível e por custos variáveis operacionais ou de manutenção⁵. Segundo Borenstein (1999), os custos fixos, de qualquer tipo, designadamente de investimento ou de operação e manutenção, são irrelevantes para este fim.

Ao custo marginal de produção mencionado dever-se-á contrapor o custo de oportunidade de venda de uma unidade de electricidade, pois o gerador perderá o rendimento que obteria se colocasse o seu produto num diferente local ⁶ (Borenstein (1999)). Assim, o custo marginal que o produtor enfrenta é o valor máximo entre o custo marginal de produção e o custo de oportunidade.

Note-se, no entanto, que o valor de oferta do produtor não é o valor que irá receber pela sua produção: este, que corresponde ao preço de mercado, será igual ou maior ao seu custo marginal de produção (Borenstein (1999)). Ou seja, o produtor produzirá toda a energia cujo valor de custo marginal esteja abaixo do valor de mercado e nenhuma que esteja acima.

Devido à grande rigidez na procura de curto prazo, à incapacidade de armazenamento e, cumulativamente, situações em que a oferta esteja próxima da sua capacidade disponível, choques do lado da procura, como uma vaga de calor, ou choques do lado da oferta, como a indisponibilidade não prevista de uma central de produção ou de uma linha de transporte de

⁵ A diferença entre preço à vista de uma unidade energia eléctrica em MWh e o preço *forward* do combustível necessário para a produzir é apelidada, na gíria anglo-saxónica e norte-americana, de *spark-spread*.

⁶ Por exemplo em contrato bilateral noutra região geográfica onde o valor da energia fosse mais alto (Borenstein (1999))

energia (Géman e Roncoroni (2006) e Kanamura e Ohashi (2004)), haverá o aparecimento natural de grandes picos nos preços pela entrada de centrais de geração com maior custo marginal, devido à alteração de tecnologia na produção (Borenstein (1999) e Escribano *et al* (2002)).

Num contexto deste tipo, os produtores que consigam satisfazer a procura marginal quando a procura é elevada, mesmo que tenham uma pequena quota de mercado, poderão exercer poder de mercado, influenciando o preço de equilíbrio do mercado, beneficiando, pelos mecanismos de determinação do preço de equilíbrio anteriormente mencionados, todos os produtores no mercado e, conseqüentemente, diminuindo a eficiência económica do mercado (Borenstein (1999)). Daqui a importância dos contratos bilaterais físicos (Saraiva *et al* (2002)), como forma de cobertura do risco de oscilações de preços.

A curva da oferta é convexa e merece alguma análise:

1. Do lado esquerdo da curva encontram-se as centrais de base, com um número de horas de funcionamento anual grande (Kanamura e Ohashi (2004)) que apresentam menor custo variável, tais como as centrais nucleares, ou as centrais com grandes custos de arranque ou inflexibilidade técnica, como as centrais a carvão, ou aquelas que têm que produzir, como as hidroeléctricas a fio de água (sem capacidade de armazenamento) quando têm recurso hídrico ou, similarmente às hídricas a fio de água, os parques eólicos quando têm recurso eólico.
2. Do lado direito da curva da oferta encontram-se as unidades de produção de pico (com poucas horas de funcionamento anual) e cujos custos variáveis são altos, designadamente o custo de combustível, como unidades equipadas com turbinas a gás natural, a fuel de ciclo simples ou motores alternativos a diesel.
3. As primeiras unidades, as de base, são as de alto mérito e as de pico são as unidades de baixo mérito⁷.

A cada mercado, e para cada hora do dia, corresponderá uma diferente curva de oferta, mas todas com as seguintes características gerais: um formato plano e horizontal à esquerda, com alguns degraus intermédios, mais ou menos longos, mas formando planos horizontais e a terminar mais à direita numa curva praticamente vertical. Para Géman e Roncoroni (2006) esta

⁷ - Na gíria anglo-saxónica a ordenação de mérito das centrais é denominada *supply stack*, ou *power stack function*, Géman e Roncoroni (2006).

característica física do mercado à vista de electricidade leva ao aparecimento dos picos de preços, existindo dois regimes diferenciados: um que corresponderá à ordem de mérito da *supply-stack* quase plana e o outro regime correspondente à zona fortemente convexa parte da ordem de mérito, zona esta da curva de oferta que levará a picos nos preços.

Como ilustração da diferença de regimes incrementais da *supply stack*, Kanamura e Ohashi (2004), com base em regressões lineares sobre dois troços da curva de relação preço-carga, do mercado *PJM*⁸ nos EUA, encontraram valores incrementais dos preços muito diferentes quando estes estavam abaixo ou acima de um certo valor de limiar da procura: quando a procura era inferior a 900 GWh, os incrementos de preços eram da ordem dos 6 US\$/MWh, quando a procura era superior a 1.100 GWh, os incrementos de preço eram da ordem dos 153 US\$/MWh.

A dinâmica do preço em cada mercado é diferente e vai depender da *supply stack* de geração de cada mercado. Segundo exemplos que se podem encontrar em Escribano, Pena e Villaplana (2002), Argentina e Austrália têm uma *supply stack* essencialmente dominada por fuel, enquanto a Nova Zelândia e o *NordPool* essencialmente por hidroelectricidade e estas características têm influência no regime de picos dos preços.

2.3 - A Procura

A procura de curto prazo tem um alto grau de inelasticidade, por constituir um bem de grande necessidade, e ser fortemente dependente das condições meteorológicas (Escribano *et al* (2002) e Kanamura e Ohashi (2004)). Por outro lado, para Lúcia e Schwartz (2001), a característica de não armazenamento da electricidade faz com que a electricidade entregue a diferentes horas do dia e em diferentes datas seja apercebida pela procura como bens diferentes, pois os preços são fortemente dependentes das necessidades de utilização de electricidade e dos seus determinantes em cada momento preciso (actividade laboral, condições meteorológicas, etc.). Kanamura e Ohashi (2004), com base num modelo estrutural de descrição dos picos nos preços, incorporam um processo simples da procura de electricidade, dado por uma componente determinística de sazonalidade e uma componente estocástica de reversão à média, dada a importância da temperatura que é um processo reversível à média, que supuseram de variância constante.

⁸ Pensilvânia, New Jersey, Massachussets.

Routledge, Seppi e Spatt (2001) argumentam que as flutuações na procura de electricidade quando o nível da procura é baixo não têm impacto significativo no preço. No entanto, quando essas flutuações acontecem quando o nível da procura é alto têm um impacto imediato no preço, levando a picos nos preços e a alta volatilidade dos preços. Estes autores demonstraram que, mesmo para choques na procura de electricidade distribuídos simetricamente, o preço de equilíbrio da electricidade tem uma distribuição assimétrica: quando a procura esperada é baixa e a variabilidade dessa procura também é baixa, há pouca assimetria no preço à vista, o que contrasta com a situação em que a procura é alta, ou a sua variabilidade é grande, a distribuição torna-se assimétrica positiva.

Se o nível de cobertura de risco entre geradores e retalhistas for muito grande, de tal forma que a procura raramente exceda a quantidade coberta, então os preços de electricidade reflectirão os custos marginais (Stevenson (2001)). É possível, que nos períodos de procura elevada as posições estejam cobertas, pelo que os preços à vista poderão ser mais baixos que nos períodos de baixa procura em que, expectavelmente, haverá menor cobertura de posições. Nestes casos, os preços não seguirão a procura. Por outro lado, a presença de *outliers* nos preços resultarão de variações na procura e na oferta de capacidade de geração.

2.4 – Modelos de preços em mercados à vista de energia eléctrica

Escribano, Pena e Villaplana (2002) concluíram que qualquer esforço de modelação de processos de preços à vista de electricidade deverá conter as seguintes especificações que, naturalmente, não são mais do que um reflexo dos factos estilizados descritos na literatura:

- 1 - Efeito do dia da semana,
- 2 - Efeito fim-de-semana,
- 3 - Efeitos sazonais,
- 4 - Reversão à média,
- 5 - Volatilidade variante no tempo e “volatility clustering” e
- 6 - Valores extremos.

Escribano, *et al* (2002), da análise de seis mercados, repartidos em vários continentes, argumentam que os diferentes níveis de periodicidades se devem, essencialmente, a dois factores: actividade económica e condições meteorológicas. A sazonalidade (ou periodicidade) identificada na literatura sobre preços de electricidade é de três tipos: diária, semanal e anual.

Dias da semana e fim-de-semana

Para cada hora do dia da semana, há uma percepção diferente do valor da electricidade (Lúcia e Schwartz (2001)). O ciclo económico intra-diário por parte da procura, nomeadamente o horário laboral, impõe diferentes utilizações da *supply-stack* da oferta o que implica preços da energia eléctrica diferentes para cada hora do dia.

Os valores mais baixos da procura durante os fins-de-semana são também um reflexo do abrandamento da actividade económica no fim-de-semana e os preços de electricidade apresentam valores substancialmente diferentes dos dias da semana.

A periodicidade semanal é muito marcada e é reportada, em muita da literatura, grande dificuldade em remover completamente a esta periodicidade.

Sazonalidade anual

A sazonalidade anual é o reflexo da interacção das variações das condições meteorológicas ao longo do ano com a procura de energia eléctrica, que tende a ser maior nos períodos de Inverno por, cumulativamente, coincidir o ciclo económico com a utilização de energia eléctrica para suprir necessidades de aquecimento e, no Verão, suprir necessidades da procura de electricidade para cobrir cargas de arrefecimento. Os meses das estações intermédias coincidem geralmente com as menores níveis de procura de energia eléctrica essencialmente ditado por condições meteorológicas menos extremas. (Knitel e Roberts(2001)).

Estas periodicidades de baixa frequência (quando comparadas com as frequências do ciclo intra-diário ou semanal) são muitas vezes modeladas por funções sinusoidais determinísticas (Pilipovic (1998), Lúcia e Schwartz (2001) e Escribano *et al* (2002)).

Knitel e Roberts (2001) analisaram dois anos do mercado da Califórnia, o *CALPX*, e verificaram que a média condicional variava de forma sistemática ao longo do tempo, a variância dos preços era variante ao longo do ano e a curtose era também variante no tempo. A série exibia *volatility clustering*.

Reversão à Média

Os incrementos na procura levam os preços a subir, incrementando os incentivos económicos à entrada de novos geradores no lado da oferta do sistema, pelo que é expectável um certo grau de reversão à média de longo prazo (Escribano *et al* (2002)). Por outro lado, estes autores argumentam que os preços deverão incorporar reversão à média também devido à influência meteorológica, pois este factor será determinante sobre o consumo de energia eléctrica, tem natureza cíclica e de reversão à média (eventualmente de nível médio variante no ano), e que pode ser de curto prazo, como um choque de temperatura por um dia, por exemplo.

Segundo Escribano, Pena e Villaplana (2002), o grau de reversibilidade à média depende da *supply-stack* desse mercado. Nos mercados com menor capacidade de substituição inter temporal, aqueles em que a hidroelectricidade seja pouco preponderante, deverá ser observado um maior grau de reversão à média, dado que os preços são essencialmente dirigidos pelo lado da procura: reversão à média da procura e/ou da temperatura.

Escribano *et al* (2002) mencionam que os mercados dominados por recursos hídricos têm preços médios menos estáveis. Esta instabilidade nos preços médios deve-se à instabilidade climática anual, como por exemplo no ano de 1996 no *NordPool*, que foi um ano seco. Esta instabilidade climática reduz o grau de reversão à média e o processo pode ser gerado por um modelo com uma raiz perto do círculo unitário.

Volatilidade Variante

Com recurso à série horária de preços de dois anos do *CALPX* e recorrendo a modelação EGARCH, Knitel e Roberts (2001) comprovaram, empiricamente, a existência de um efeito *leverage* inverso.

Para Knitel e Roberts (2001) há, potencialmente, um efeito *leverage* inverso nos mercados de electricidade pelo facto da volatilidade tender a incrementar mais quando há um choque positivo do que quando há um choque negativo o que, segundo os autores, é uma consequência da convexidade dos custos marginais.

Leon e Rubia (2001) apontam vários problemas regulatórios como explicação de alguns dos incrementos de volatilidade encontrados nos preços à vista do OMEL, designadamente no ano 2000.

Valores Extremos

A modelação correcta dos saltos é determinante para a correcta avaliação das medidas de risco pois, caso contrário, poderá haver uma subavaliação do risco do preço (Huisman e Mahieu (2001)). Knittel e Roberts (2001) argumentam que o factor que mais afecta os erros de previsão é a existência de um excesso de curtose, variante ao longo do ano, que provém da presença de saltos no processo. Huisman e Huurman (2003) argumentam que os erros não são normalmente distribuídos ou i.i.d., podendo não existir quarto momento.

A ergodicidade é tipicamente satisfeita por observações que sejam independentes e identicamente distribuídas (IID). Segundo Cont (2000) a não observação de IID e a falha de verificação de ergodicidade existe também em inúmeros sistemas físicos de memória longa, ou dependência longa e também no caso de alguns processos multifractais.

Lúcia e Schwartz (2001) observaram excesso de curtose nas variações dos preços do *Nordpool*, com características sazonais: mais acentuado nas estações frias, sendo mais do que 4,5 vezes superior ao excesso de curtose da estações quentes (em valores absolutos) e cerca de 2,5 vezes em valores relativos (série de logaritmo das variações de preços).

Uma das características da evolução dos saltos no processo de preços de electricidade, é que o preço não se mantém no nível para o qual salta mas é seguido de uma reversão rápida ao valor anterior quando a situação é normalizada.

Para Géman e Roncoroni (2006) a componente de saltos é dependente do nível de preços. Se os preços se encontrarem abaixo de um certo nível poder-se-á interpretar que os preços estão num regime normal. Se os preços ultrapassarem esse nível é porque o mercado experimenta nesse período um determinado desequilíbrio entre a procura e a oferta reflectindo-se em preços anormalmente altos e será expectável a existência de vários saltos (um *cluster* de choques de relativa dimensão com referência aos preços normais, seguidos de acentuado retorno ao nível normal de preços).

2.5 - O Preço à Vista e o Preço Futuro

Segundo Lúcia e Schwartz (2001) a electricidade pode ser considerada como uma *flow commodity* (um fluxo de bens⁹), fortemente caracterizada pelos seus limites de armazenamento (quase nulos) e de transporte (limitação geográfica proveniente das capacidades máximas de interligações entre as redes, ou sub-redes, eléctricas).

Os limites ao transporte da electricidade, no espaço e no tempo, são cruciais para explicar os processos de preços à vista e de derivados da electricidade (Lúcia e Schwartz (2001)). Dado que as ligações de *carry* no tempo e no espaço estão limitadas tecnicamente e, conseqüentemente, a arbitragem no tempo e no espaço ficam fortemente limitadas, é expectável que os preços à vista sejam altamente dependentes das condições da oferta local (condições tecnológicas de geração local e capacidade de transmissão disponíveis localmente) e da procura local (condições climáticas locais que impõem a sazonalidade mas também a aleatoriedade local), ou seja, os preços exibirão uma alta dependência tanto temporal como geográfica (Eydeland e Géman (1998) e Lúcia e Schwartz (2001)).

O argumento de não arbitragem utilizado para estabelecer a relação entre preço à vista e preço no futuro não é válido no caso da electricidade, dado que se requiere que o activo subjacente seja comprado em determinado momento e seja mantido até expiração do prazo do contrato de futuro, não sendo possível realizar uma estratégia deste tipo nos mercados de energia eléctrica sobre contratos com armazenamento e entrega física.

As mencionadas limitações deverão influenciar decisivamente a relação entre os preços à vista e os preços dos derivados, nomeadamente as distribuições estatísticas dos preços de derivados. A utilização da formulação de Black-Sholes (1973) não é aplicável e, segundo Cartea e Figueroa (2005), pode levar a erros grosseiros de avaliação.

A adopção do modelo de Black-Scholes (1973) pressupõe um activo subjacente siga um processo de passeio aleatório, de variáveis independentes e identicamente distribuídas, pelo que a existência da sazonalidade, na média e na volatilidade, levam a colocar estes pressupostos como longe de caracterizar o processo subjacente do activo (Knitel e Roberts (2001)).

⁹ - Há autores que defendem que a electricidade deveria ser caracterizada como um serviço e não um bem.

No caso dos mercados de electricidade, a utilização do pressuposto de choques gaussianos é acentuadamente mais pobre que nos mercados financeiros sendo, no entanto, habitual a adopção por parte dos participantes na indústria, do modelo de Black-Sholes, o que pressupõe que o modelo de preços se baseia em retornos com uma distribuição log-normal, sendo por vezes corrigidos de forma a poderem acomodar o facto empírico das distribuições do activo subjacente exibirem abas pesadas (Cartea e Figueroa (2005)). Utilizar modelos do preço à vista de electricidade pela via do pressuposto de movimento browniano geométrico poderá ter como consequência a introdução de fortes discrepâncias com as propriedades que os preços exibem empiricamente em diversos mercados de energia eléctrica.

Do exposto, ressalta a necessidade de desenvolvimento de maior conhecimento sobre o processo do preço à vista nos mercados de electricidade e da sua dinâmica em diferentes horizontes temporais.

3.- REVISÃO DE LITERATURA

No presente trabalho, realiza-se uma abordagem original sobre a dinâmica multi-escala temporal dos preços e das cargas do mercado à vista de electricidade do OMEL. A análise da dinâmica destes dois processos far-se-á com base na MODWT¹⁰ (*Maximal Overlap Discret Wavelet Transform*) sobre uma série muito longa de dados (70.128 valores de preços e cargas horários, correspondendo a 8 anos). A visão da relação dinâmica destes dois processos, em diferentes horizontes temporais, ainda não foi apresentada na literatura sobre este tema.

A análise (discreta) de onduletas (DWT – *discrete wavelet transform*) é considerada por muitos autores como um passo lógico na decomposição de processos no domínio tempo-escala (inverso da frequência), cuja principal vantagem é a possibilidade de uma descrição precisa das características locais (no tempo) do sinal. A noção de escala na DWT substitui a de frequência na transformada de Fourier.

¹⁰ A transformada discreta estacionária de onduletas MODWT também é conhecida na literatura por transformada discreta estacionária (no sentido de invariante à translação) ou por NDWT (*Non Decimated Wavelet Transform*) (Silverman 1999).

Em finanças e economia, a análise de onduletas tem sido utilizada em vários tipos de estudo, designadamente:

1. Análise de características locais e globais das séries temporais em diferentes graus de resolução, ou seja, dependendo do grau de frequência dos dados;
2. Análise de propriedades de séries temporais económicas e as suas relações em diferentes horizontes temporais perfeitamente definidos (curto prazo e longo prazo são dois exemplos de horizontes temporais consagrados na literatura mas relativamente pouco precisos);
3. Isolamento da tendência e alisamento do sinal;
4. Identificação de sazonalidade e possibilidade de realização de ajustamento da sazonalidade;
5. Análise dos parâmetros de memória longa dos processos;
6. Identificação da natureza fractal de um processo;
7. Identificação de alterações estruturais, *outliers*, pontos de alteração, descontinuidades e *volatility clustering*.
8. Filtragem de ruído para extracção do sinal;
9. Modelação da dinâmica de processos não lineares;

As onduletas têm sido utilizadas como forma de pré-processamento, ou de filtragem prévia, dos dados para posterior aplicação de modelos do tipo AR, ARIMA, TAR, etc. com o objectivo claro de tentar melhorar a performance destes últimos modelos na previsão dos preços de electricidade.

Segundo Conejo *et al* (2005)¹¹, o pré-processamento por onduletas permite obter séries com dinâmica melhor comportada, ou seja, expectavelmente mais fácil de modelar. Para estes autores, os preços de electricidade apresentam características de média e variância não-constante e *outliers* significativos, mas que após aplicação da filtragem por onduletas apresentam variância estável e não apresentam *outliers*, na componente de Aproximação (*Smooth*) que, no caso de uma escala temporal grande, pode ser vista como a Tendência (*trend*).

Stevenson (2001) utilizou a análise de onduletas sobre os preços de cada meia hora do mercado de New South Wales, na Austrália para pré-processamento dos dados. A utilização da DWT-biortogonal serviu, essencialmente, para filtragem de *outliers* de forma a evitar que estes

¹¹ Este trabalho de Conejo *et al* (2005) foi o único trabalho que o autor conhece com recurso a onduletas numa análise sobre o mercado de preços à vista OMEL.

influenciassem os coeficientes de onduleta a obter. Seguindo esta metodologia, Stevenson (2001) justifica que os preços altos, mas de forte reversão à média, possam ser retirados dos níveis de decomposição de menor frequência (ou seja, de maiores escalas temporais).

A transformada de onduleta tem sido, também, utilizada para análise da variância das séries temporais e para o estudo da persistência nas correlações das séries de preços à vista de electricidade, característica que tem sido abundantemente identificada na literatura. Seguindo esta via, existe literatura recente que se debruça na verificação de potencial presença de fractalidade nestes processos. Neste sentido, destacam-se os trabalhos de Simonsen (2003), Weron (2001), Resta e Sciutti (2005).

Neste capítulo de revisão de literatura pretende-se, essencialmente, fornecer alguma intuição sobre o significado dos resultados que se obtêm por análise de onduletas. No anexo A detalhar-se-á com mais pormenor o enquadramento teórico da análise de multi-resolução e da transformada de onduleta.

As onduletas dão a oportunidade de examinar dados, ou funções, em detalhe. As onduletas permitem focar os aspectos locais de uma série temporal em situações em que as metodologias tradicionais, como a análise de Fourier, não conseguem captar detalhes locais. As onduletas introduziram um quadro unificador que permite realizar tipo de análises que são à partida, e aparentemente, muito diferentes (Greenblatt (1994)). Uma das características mais importantes é o facto da metodologia de onduletas ser, por construção, uma metodologia multi-escala, capacitando-a, de forma natural, para análise em diferentes horizontes temporais.

Um destes tipos de análises é a análise de Multiresolução (MRA – *Multiresolution analysis*), baseada na reconstrução dos coeficientes da transformada discreta de onduletas. A análise de multi-resolução permite a observação dos dados utilizando diferentes níveis de ampliação, tal como num microscópio (Greenblat (1994)).

Em teoria, a decomposição por onduletas pode ser realizada para um número j indefinido de escalas diádicas (em potências de 2), ou seja as escalas temporais τ_j que são dadas pela relação $\tau_j = 2^{j-1}$.

Estas j escalas estão relacionadas com as escalas físicas dadas por $\tau_j^* = \tau_j \cdot \Delta t = 2^{j-1} \cdot \Delta t$, onde Δt corresponde ao período de amostragem, ou seja 1 hora, no caso dos preços à vista (e das cargas) do mercado OMEL.

Todavia, as séries com que se trabalha são amostras finitas (com N elementos), pelo que a decomposição em escalas de resolução terá que ter forçosamente um limite.

O limite da decomposição é dado para o maior nível de decomposição J tal que $2^J < N$. Desta forma, fica definida a menor resolução possível (maior escala). Na prática, definir-se-á um valor do nível de decomposição J_0 inferior a J . Daqui se define a transformada parcial de onduleta, pois limitou-se, parcialmente, a escala máxima de decomposição da série. Após a realização da transformada de onduleta, da série original no tempo, obtém-se os coeficientes de onduleta e de escala, no domínio dos coeficientes de onduleta.

Após a decomposição em coeficientes de onduleta, aonde a informação disponível está no domínio dos coeficientes de onduleta e não no domínio do tempo pode-se optar pela reconstrução, por aplicação da transformada inversa de onduleta – iMODWT- sobre os coeficientes de onduleta previamente obtidos, obtendo-se $J_0 + 1$ séries temporais sintetizadas (habitualmente o número de séries será de J_0 séries de detalhe + 1 série de aproximação, podendo ir a um máximo de J_0 séries de detalhe e J_0 séries de aproximação, ou seja um total de $2 J_0$ novas séries).

As séries temporais assim obtidas, denominadas habitualmente na literatura por *Detalhes e Aproximações* de nível j (ou escala τ_j), têm características específicas pois a sua trajectória contém apenas informação na sua escala de resolução temporal. Esta reconstrução constitui a Análise de Multiresolução (MRA - *Multiresolution Analysis*) às escalas temporais adimensionais dadas por $\tau_j = 2^{j-1}$.

Mais formalmente, a Análise de Multiresolução (MRA) em J_0 níveis é dada por:

$$X = \omega^{-1} W = \omega^T W = \sum_{j=1}^{J_0} \omega_j^T W_j + \nu_{J_0}^T V_{J_0} \equiv \sum_{j=1}^{J_0} D_j + S_{J_0} \quad (3.1)$$

onde X é o vector da série temporal com N elementos, W é um vector cujos elementos são os coeficientes resultantes da transformada de onduleta, e ω uma matriz ortogonal de dimensão $N \times N$.

As equações em 3.1 exibem, formalmente, a relação entre os coeficientes de onduleta resultantes da transformação realizada da série temporal pela matriz ω e a reconstrução em funções temporais de detalhe (D_j) e de aproximação (S_{j_0}).

Por outro lado, a MRA é uma decomposição adicionável: basta adicionar à aproximação de menor resolução - S_j (maior escala), os detalhes perdidos nesse nível de resolução - D_j , obtém-se a aproximação do nível de resolução superior, ou seja, na escala imediatamente inferior - S_{j-1} .

A relação entre a aproximação e os detalhes entre duas escalas τ_j e τ_{j-1} é dada por:

$$S_{j-1} = S_j + D_j; \quad (3.2)$$

Ou seja, os detalhes D_j (funções temporais de reconstrução dos coeficientes de onduleta) não são mais do que a diferença entre duas aproximações (funções temporais de reconstrução dos coeficientes de escala S_j e S_{j-1}) em escalas diádicas consecutivas. Por outro lado, quanto maior a escala temporal vão-se perdendo detalhes, ou seja, vamos obter aproximações da função original com menor grau de resolução.

Através da MRA obtém-se várias perspectivas temporais da série original: pode-se dispor da Aproximação (S_{j_0} - que pode ser considerada um tipo de tendência, como por exemplo em Witcher (1998)) e adicionalmente um número J_0 de níveis de informação detalhada às escalas temporais $\tau_j = 2^{j-1}$ (detalhe de nível j - D_j , com $j = 1 \dots J_0$). Assim, podem ser evidenciados diferentes tipos de actuação em diferentes níveis de resolução: tendência, sazonalidade, ciclos, ou extremos. (Chen, Vidakovic, Mavris, (2004)).

A equação 3.1 também permite escrever que

$$X - S_{j_0} = \sum_{j=1}^{J_0} D_j \quad (3.3)$$

Se S_{j_0} pode ser entendido como uma aproximação (ou tendência) da amostra do processo X , então o processo resultante da extracção da aproximação (tendência) será dado pelo somatório dos detalhes. Pode-se provar que os detalhes da amostra têm média nula e que a função de aproximação contém a média da amostra do processo (Percival e Walden (2000)).

As famílias de onduletas apresentam-se sempre aos pares: funções de onduleta (onduleta – mãe) e funções de escala (onduleta – pai). A função de escala $\Phi(t)$, representa a componente suave dando origem a S_{Jo} na reconstrução a partir da função de escala, ou seja, contém as componentes de baixa frequência do sinal, enquanto a função de onduleta $\psi(t)$ captura as componentes de alta-frequência, dando origem, na reconstrução, às funções de detalhe D_j .

As funções de onduleta e de escala não têm, geralmente, uma forma funcional analítica: depois de se impor as desejadas características matemáticas, as funções de onduleta e de escala são obtidas através de operações de translação e de escala de acordo com funções padronizadas. (Stevenson, 2001).

Procuram-se portanto, funções base, com as seguintes características (Gençay *et al* (2002)):

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-k}{s}\right), \text{ centrada em } \underline{k} \text{ (posição) e com escala } \underline{s} \text{ (escala),}$$

Ou seja, a função $g(t, k, s)$ é uma sequência de funções base, mas duplamente indexada, por k e s , onde k denota a sequência de posição sobre a qual a função $g(\cdot)$ é centrada e s é uma sequência de escalas.

A função base $g(\cdot)$ está centrada em k e tem escala s , ou seja, a energia de $g(\cdot)$ está concentrada sobre a vizinhança k de t (o ponto do vector de dados) cuja dimensão (da vizinhança k) é proporcional a s . Quando s aumenta, o suporte temporal de $g(\cdot)$ aumenta. s é denominado factor de dilatação e k é denominado o factor de posição, pelos motivos óbvios acima expostos.

Os coeficientes de onduleta a cada escala são obtidos pela projecção do filtro de onduleta sobre o vector de dados e, para o caso de onduletas da família Daubechies, podem ser consideradas diferenças generalizadas (Gençay *et al* (2002)). Da mesma forma que as funções sinusoidais permitem a projecção dos dados sobre o domínio da frequência, as funções de onduleta permitem projectar a informação dos dados da série temporal, simultaneamente, sobre a frequência e sobre o tempo.

As onduletas estão agrupadas em variadas famílias: Daubechies (onde se englobam várias famílias), Coiflets, Gaussianas, etc. e são elas os blocos de construção para a análise de multiresolução.

Na análise empírica que se apresentará mais à frente utilizar-se-á apenas um tipo de onduleta: a LA(8), que é da família Daubechies. A família LA (*least asymmetric*, também denominada na literatura por *Symlet*) constitui uma classe de filtros que melhora as características estatísticas das onduletas e mitiga a sensibilidade do filtro à sua forma e ao seu comprimento (Cornish *et al*, 2006). O número 8 corresponde à largura (L) do filtro de onduleta, que poderá ser de 2, 4, 6, 8, etc. A maior largura diminui a capacidade de suporte compacto, mas aumenta os momentos de desvanecimento, característica útil para isolar a tendência de uma série (Percival e Walden (2000)).

Os coeficientes à escala 1 ($j=1$ então $\lambda_{j=1} = 2^{j-1} = 2^0 = 1$) podem ser interpretados como uma diferença generalizada de comprimento unitário, ou seja, o filtro de onduleta, na sua essência, realiza a diferença entre 2 observações adjacentes (Percival e Walden, 2000 e Gençay *et al* (2002)). Para o caso da escala 2 (duas unidades de tempo, ou seja $j=2$ então $\lambda_{j=2} = 2^{j-1} = 2^1 = 2$), o filtro de onduleta primeiramente realiza a média entre 2 pares de observações adjacentes ao momento t (ou seja, a média realizada sobre o par nos instantes $t-2$, $t-1$ e a média realizada sobre o par nos instantes $t+1$, $t+2$) e, num segundo passo, realiza a diferença entre as médias desses pares adjacentes. E assim sucessivamente para as escalas superiores.

Naturalmente, daqui se compreende o efeito-fronteira nalguns coeficientes (*boundary coefficients*) quando a projecção de onduleta está nas posições limites da amostra. Dado que as amostras são séries finitas, as projecções sobre as zonas extremas do domínio temporal da série, e dependendo da largura do filtro de onduleta, ou seja, da escala em que se está a realizar a decomposição, corresponderão coeficientes cujo valor não poderá reflectir integralmente os princípios acima definidos, pelo facto da série não estar definida para os pontos $N+n$, ou para os pontos $1-n$ com $n < L$, em que L é a largura do filtro de onduleta.

As onduletas podem ser vistas também como filtros (ver Anexo A para um desenvolvimento e Mallat (1999), Percival e Walden (2000) ou Gençay *et al* (2002)).

A onduleta de nível j comporta-se como um filtro passa-banda para o intervalo de frequências dado por $\left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j} \right]$. Para o caso da função de escala, esta também pode ser vista como um filtro, neste caso um filtro passa-baixo, cuja banda de frequências é dada por $\left[0, \frac{1}{2^{j_0+1}} \right]$, como se apresenta na tabela 3.1.

Tabela 3. 1 – Relação entre os detalhes da análise de multi-resolução e a frequência segundo Gençay *et al* (2002) e Percival e Walden (2000)

Nível de decomposição j	Escala temporal	Detalhe	Frequência	Captura oscilações de Períodos no intervalo compreendido entre (escalas físicas - $\Delta t^*=1$ hora)
1	Escalas intra-diárias	$D1$	$]1/4, 1/2]$	2 e 4 horas
2		$D2$	$]1/8, 1/4]$	4 e 8 horas
3		$D3$	$]1/16, 1/8]$	8 e 16 horas
4 (*)		$D4$	$]1/32, 1/16]$	16 e 32 horas (* na fronteira entre 2 dinâmicas)
5	Escalas Intra-semanais	$D5$	$]1/64, 1/32]$	32 e 64 horas, ou seja, 1,3 e 2,6 dias
6		$D6$	$]1/128, 1/64]$	64 e 128 horas, ou seja, 2,6 e 5,3 dias
7 (*)	Escalas intra-mensais	$D7$	$]1/256, 1/128]$	128 e 256 horas, ou seja, entre 5,3 e 10,6 dias (* na fronteira entre 2 dinâmicas)
8		$D8$	$]1/512, 1/256]$	256 e 512 horas, ou seja, entre 10,6 e 21,2 dias
9 (*)	Escalas intra-anuais	$D9$	$]1/1024, 1/512]$	512 e 1024 horas, ou seja, entre 0,7 e 1,4 meses (* na fronteira entre duas dinâmicas)
10		$D10$	$]1/2048, 1/1024]$	1024 horas e 2048 horas, ou seja, entre 1,4 e 2,8 meses
11		$D11$	$]1/4096, 1/2048]$	2048 horas e 4096 horas, ou seja, entre 2,8 e 5,6 meses, ou seja, trimestral e semestral
12		$D12$	$]1/8192, 1/4096]$	4096 horas e 8192 horas, ou seja, entre 5,6 e 11,2 meses, ou seja, semestral e anual
13	Escala Inter-anual	$D13$	$]1/16384, 1/8192]$	8192 horas e 16384 horas, ou seja, entre 11,2 meses e 22,4 meses, ou seja, escalas supra- anuais

Para se poder realizar um paralelismo, se bem que limitado, entre escalas e frequência, Gençay *et al* (2002) definem que o detalhe $D1$ de onduleta (associado a alterações na escala unitária) captura frequências entre $1/4 < f < 1/2$, ou seja, oscilações com períodos compreendidos entre as 2 e as 4 unidades de tempo. O detalhe $D2$ de onduleta captura frequências entre $1/8 < f < 1/4$, ou seja, oscilações com períodos compreendidos entre as 4 e as 8 unidades de tempo e assim sucessivamente.

A tabela 3.1 detalha o possível conteúdo harmónico das várias funções de reconstrução (detalhes) da MRA dado por $\left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j} \right]$ e as escalas temporais adimensionais dos detalhes dadas por $\tau_j = 2^{j-1}$ e escalas temporais reais de $\tau_j^* = \Delta t \cdot 2^{j-1}$ em que $\Delta t = 1$ hora corresponde ao período de amostragem.

As escalas temporais adimensionais das funções de aproximação S_{J_0} são dadas por $\lambda_{J_0} = 2^{J_0}$ e as respectivas escalas temporais reais das funções de aproximação são dadas por $\lambda_{J_0}^* = \Delta t \cdot 2^{J_0}$ em que $\Delta t = 1$ hora.

Como anteriormente se mencionou, a DWT é uma transformada ortogonal (ver Anexo A para um resumo das características matemáticas desta transformação), permitindo o seguinte tipo de decomposições sobre a amostra de um processo X :

1. Análise de multi-resolução (MRA):

$$X = \omega^{-1}W = \omega^T W = \sum_{j=1}^{J_0} \omega_j^T W_j + \nu_{J_0}^T V_{J_0} \equiv \sum_{j=1}^{J_0} D_j + S_{J_0}, \quad (3.4)$$

ou seja, a transformada discreta de onduleta parcial de facto permite realizar uma decomposição aditiva por escala de resolução e após a realização da transformada inversa (*iDWT*), onde, por definição, D_j corresponde aos detalhes no nível de resolução j e S_{J_0} corresponde à função de aproximação.

2. Análise de variância:

Considerando a energia da série temporal definida como a norma do vector X :

$$\|X\|^2 = X^T X = \sum_{t=1}^N X_t^2, \quad (3.5)$$

Então os coeficientes da transformada de onduleta preservam esta energia e decompõem-na por escalas de resolução, tanto ao nível dos coeficientes da DWT como das séries reconstruídas:

$$\|W\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|W_j\|^2 + \|V_{J_0}\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|D_j\|^2 + \|S_{J_0}\|^2 \quad (3.6)$$

A decomposição da energia da série por escalas permite escrever a seguinte análise por escalas da variância amostral:

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathcal{W}_j\|^2 + \left(\frac{1}{N} \|\mathcal{V}_{J_0}\|^2 - \bar{X}^2 \right) \quad (3.7)$$

Dado que $\|\mathcal{V}_{J_0}\|^2 = N \bar{X}^2$ tem-se que a variância amostral pode ser dada pela seguinte decomposição, ou variância de onduleta

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathcal{W}_j\|^2 \quad (3.8)$$

A adicionar às características que são consequência da ortogonalidade que sumariamente se apresentaram atrás, pode-se demonstrar que os filtros de onduleta de comprimento L da família Daubechies (como a LA(L)) tem uma capacidade embebida de diferenciação igual a $\frac{L}{2} \geq r + 1$, onde r é o grau do polinómio da tendência (Percival e Walden 2000). Ou seja, se o filtro de onduleta tiver um comprimento maior que duas vezes o grau do polinómio que regula a tendência do processo, a decomposição em onduletas permite a obtenção de estimadores não enviesados da variância do processo, nomeadamente de processos de memória longa, eventualmente não estacionários, desde que tenham incrementos estacionários até à ordem r^2 .

Na análise empírica utilizar-se-á a onduleta LA(8) – *least asymmetric* de largura $L=8$, pelo que se terá, por natureza construtiva da própria onduleta utilizada, funções de tendência que possam ser descritas por polinómios até grau 4, devidamente anulados.

Na análise empírica recorreu-se à transformada de onduleta MODWT (*Maximal Overlap DWT*) e não à DWT. A MODWT é também um operador linear de filtragem que transforma a série original num conjunto de coeficientes relacionados com as variações sobre um conjunto de escalas.

A transformada de onduleta MODWT tem a seguinte característica construtiva fundamental que a torna uma variante da transformada DWT: a MODWT obtem-se da mesma forma que a DWT mas elimina-se a decimação ou *downsampling* (sub-amostragem complementada por deixar cair um ponto do sinal por cada dois pontos) pelo que existirão N pontos por cada escala, ao contrário da DWT em que o número de pontos vai diminuindo com o aumento da escala de resolução.

¹² Esta característica provem do facto de nas circunstâncias mencionadas a média dos coeficientes de onduleta a uma determinada escala ser nula, e portanto bem conhecida.

Como atrás se mencionou, os coeficientes de onduleta da DWT podem ser interpretados como a diferença entre médias ponderadas, mas sobre intervalos que estão, *a priori*, rigidamente fixos, pelo que é natural que não exista alinhamento, do ponto de vista temporal, entre os coeficientes de onduleta obtidos e características interessantes da série em exame. No caso da DWT, uma alteração no ponto de arranque da série temporal resulta, quase sempre, em valores dos coeficientes de onduleta diferentes, dado que a justaposição dos intervalos de cálculo das médias generalizadas é predefinido e não se alterará. No caso da MODWT, estes efeitos são mitigados porque, fundamentalmente, esta transformada inclui todas as possíveis localizações dos intervalos de realização das médias generalizadas – daqui a denominação *maximal overlap*. Como consequência a MODWT não é uma transformada ortogonal e é altamente redundante.

No entanto, consegue-se obter uma análise de mutiresolução (a característica de aditividade mantêm-se), tal como para a DWT:

$$X = \omega^{-1}W = \omega^T W = \sum_{j=1}^{J_0} \omega_j^T \tilde{W}_j + \tilde{v}_{J_0} \equiv \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{D}_j + \tilde{S}_{J_0} \quad (3.9)$$

É também possível determinar a contribuição das diferentes escalas temporais para a variância global tendo em conta que se deverá utilizar os coeficientes de onduleta e **não** os detalhes obtidos a partir da reconstrução desses coeficientes, dado que a ortogonalidade não é preservada na transformação MODWT, pelo que a equação 3.6 já não é, em parte, válida

$$\|W\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|\tilde{W}_j\|^2 + \|\tilde{V}_j\|^2 \neq \sum_{j=1}^{J_0} \|\tilde{D}_j\|^2 + \|\tilde{S}_{J_0}\|^2 \quad (3.10)$$

Percival (1995) e Percival e Walden (2000) demonstraram que a variância amostral da transformada de onduleta MODWT pode ser um estimador não enviesado e eficiente da variância de onduleta de um processo estocástico, desde que se utilizem para o cálculo da variância de onduleta MODWT os coeficientes de onduleta não afectados pelas condições fronteira.

Considerando os coeficientes não afectados pelas condições fronteira, a variância de onduleta $v_x^2(\tau_j)$ é definida como o valor esperado de $W_{j,t}^2$, no nível de decomposição j .

A variância de onduleta será independente do tempo apenas se a série temporal for estacionária ou os seus incrementos forem estacionários (Cornish *et al* (2006)). Nestas condições, a

verdadeira variância de onduleta representará a contribuição para a variância total da série original X_t , à escala adimensional $\tau_j = 2^{j-1}$ e a sua estimativa é dada por:

$$\hat{\nu}_{X,u}^2(\tau_j) = \frac{1}{M_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{W}_{j,t}^2, \quad (3.11)$$

onde $M_j = N - L_j + 1$ corresponde ao número de coeficientes de onduleta não afectados pelas condições fronteiras, L_j a largura do filtro de onduleta (no caso em apreço LA(8)) à escala j e u (*unbiased*) denota variância não-enviesada.

Percival e Walden (2000) demonstraram que o estimador não enviesado da variância de onduleta de um processo estocástico é assintoticamente normal, de média igual à variância de onduleta do processo estocástico e é possível obter uma fórmula, para amostras grandes, da variância do estimador, sendo possível calcular intervalos de confiança para o estimador não enviesado da variância de onduleta para cada escala de resolução. Estas características assintóticas serão utilizadas na análise empírica mais à frente.

Segundo Percival e Walden (2000) e Cornish *et al* (2006), a distribuição do estimador pode ser aproximada por uma função χ^2 com η_j graus de liberdade (j – nível da decomposição), que contabiliza a correlação entre os coeficientes de onduleta MODWT. Dos 3 métodos derivados por Percival e Walden (2000), utilizar-se-á para cálculo dos graus de liberdade o mais conservador, dado por:

$$\eta_j = \max \{M_j / 2^j, 1\} \quad (3.12)$$

Com base nesta fórmula de cálculo dos graus de liberdade, o intervalo de confiança, para a verdadeira variância de onduleta $\nu_X^2(\tau_j)$, a um nível dado por $(1-2p) \times 100\%$ pode ser aproximado por (Percival e Walden (2000)):

$$\left[\frac{\eta_j \cdot \hat{\nu}_X(\tau_j)}{Q_{\eta}(1-p)}, \frac{\eta_j \cdot \hat{\nu}_X(\tau_j)}{Q_{\eta}(p)} \right] \quad (3.13)$$

Onde $Q_{\eta}(p)$ é o valor da função χ^2 , com η_j graus de liberdade no ponto $p \times 100\%$. Na análise empírica que se seguirá, utilizar-se-á $p=0,025$ para obtenção de intervalos de confiança a 95%.



A análise de onduleta por MODWT tem as seguintes vantagens sobre a DWT, segundo Gençay *et al* (2002) e Percival e Walden (2000):

1. A MODWT pode ser realizada sobre qualquer comprimento do sinal amostrado e não apenas sobre múltiplos de 2^j .
2. As funções de reconstrução dos detalhes e da aproximação estão associados a filtros de fase zero (caso da LA8), pelo que os eventos no sinal amostrado no momento t podem ser alinhados com as funções detalhe e de aproximação, recorrendo à utilização dos seguintes deslocamentos das séries quando filtradas pela função de escala (G) e ou quando filtradas pelas funções de onduleta (H), para cada um dos níveis de decomposição j :

$$v_j^{(G)} = \frac{(L_j - 1) \cdot (L - 2)}{2(L - 1)} \quad v_j^{(H)} = \frac{-L_j}{2} \quad (3.14)$$

3. A MODWT é invariante a deslocamentos circulares da série original, ou seja, um deslocamento de uma unidade da série original levará ao deslocamento de uma unidade dos coeficientes de onduleta e de escala da transformada MODWT.
4. Pode-se realizar a análise de variância com recurso aos coeficientes de onduleta e de escala da MODWT (esta transformação preserva a energia da série original ao nível dos coeficientes de onduleta) mas não com recurso às funções de detalhe e de escala.
5. O estimador de variância por recurso à transformada MODWT é mais eficiente que o estimador de variância por recurso à DWT.

A variação ao longo do tempo e segundo diferentes horizontes temporais da variância pode ser analisada por recurso à denominada variância acumulada rotativa, que é criada da seguinte forma:

- i.- assegurar que os coeficientes W_j da MODWT estejam alinhados com a série temporal utilizando para tal uma recirculação dos coeficientes W_j em cada escala j ,
- ii.- acumular ao longo do tempo os valores dos quadrados dos coeficientes da transformação MODWT;
- iii.- normalizar essa adição acumulada por $1/N$ e obter $C_{j,t}$ dado por:

$$C_{j,t} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^t W_{j,u+t}^2 \quad (3.15)$$

No final da série, para $t = N$, $C_{j,N-1}$ pode ser visto como a contribuição para a variância amostral à escala j (ou à escala física dada por $\tau_j \Delta t$, com $\Delta t = 1h$ no presente caso) para o conjunto da

variância do processo, então a série $C_{j,t}$ pode ser vista como a trajectória da variância amostral ao longo do tempo.

Percival e Walden (2000) sugerem a utilização gráfica da grandeza $C'_{j,t}$ em vez de $C_{j,t}$, por forma a possibilitar a visualização dos desvios da trajectória dada por $C_{j,t}$ à trajectória normal expectável dada por $[t/(N-1)] (C_{j,N-1})$

$$C'_{j,t} = C_{j,t} - \left[\frac{t}{N-1} C_{j,N-1} \right] \quad (3.16)$$

Esta definição permite realçar as alterações, sazonalidade por exemplo, ao longo do tempo, da variância e nas várias escalas da decomposição ou horizontes temporais. Quando $C'_{j,t}$ é negativo num certo período de tempo é porque a variância cresceu a um ritmo inferior àquele que se obtém para toda a amostra. Quando $C'_{j,t}$ é positivo é porque a variância cresceu, nesse período de tempo, acima do ritmo “médio” daquele que se obtém para a totalidade da amostra.

A extensão natural da análise de variância de onduleta com recurso à MODWT será a análise de covariância de um processo bivariado.

A decomposição da covariância cruzada em escalas de dois processos X_t e Y_t foi desenvolvida por Whitcher (1998) e Serouck e Walden (2000). Para uma determinada escala $\tau^j = 2^{j-1}$ a correlação cruzada de onduleta é dada pela covariância dos coeficientes da transformada de onduleta MODWT ($w_{x,j,t}$, $w_{y,j,t}$) no nível de decomposição j , convenientemente padronizada, como em baixo se escreve :

$$\gamma_{xy}(\tau_j) = \frac{1}{2\tau_j} Cov(w_{x,j,t}, w_{y,j,t}) \quad (3.17)$$

Se o comprimento do filtro de onduleta for suficiente para garantir que as características de não estacionaridade são eliminadas nas duas séries X_t e Y_t então a definição dada pela equação (3.17) pode ser estimada pelo valor expectável, dado que está garantido à partida que os coeficientes de onduleta, em cada escala, têm valor médio nulo.

$$\gamma_{xy}(\tau_j) = \frac{1}{2\tau_j} E(w_{x,j,t}, w_{y,j,t}) \quad (3.18)$$

Assim, a covariância de onduleta decompõe a covariância de um processo bivariado em escalas temporais $\tau^j = 2^{j-1}$, de forma similar à decomposição da variância de onduleta para processos univariados.

Na análise empírica sobre a amostra dos processos preço e carga do OMEL, analisar-se-á a complexidade da relação inter-temporal entre estes dois processos, bem como da sua volatilidade.

A visão da correlação dos dois processos, preço e carga, em diferentes horizontes temporais ainda não foi apresentada na literatura sobre este tema.

Vários autores apresentam a persistência como uma das características importantes no processo dos preços de energia eléctrica.

Halsdrup e Nilsen (2004) estudaram a série de logaritmo natural dos preços horários do *Nordpool* e rejeitaram a hipótese de presença de raiz unitária (estes autores utilizaram os testes *KPSS* e *Philips-Perron*). No entanto, Halsdrup e Nilsen (2004) concluíram, da impressão visual de análise da função de autocorrelação da coexistência de alta persistência e de reversão à média, pela necessidade de utilização de suporte alternativo aos processos *ARMA* para medir a presença simultânea de memória longa e reversão à média pelo que recorreram a processos fraccionalmente integrados.

Malo (2006) estudou a presença de multi-fractalidade no mercado à vista do *Nordpool* e Resta e Sciutti (2005) estimaram o expoente de Hurst de 3 diferentes mercados à vista, incluindo o OMEL, indicando que este último mercado demonstra características de anti-persistência.

Por outro lado, a análise de multi-resolução por transformada de ondulas é uma ferramenta bem talhada para o estudo de processos com características de persistência ou memória longa.

Segundo Abry e Veitch (1998) uma definição comum de dependência de longo prazo é o lento decrescimento, do tipo lei potencial, dos valores da função de autocorrelação para atrasos longos de um processo estacionário X , dado por

$$\gamma_x(k) \approx c_\gamma |k|^{-(1-\alpha)}, \alpha \in (0,1). \quad (3.19)$$

$\gamma_x(k)$ é a série dos coeficientes de autocorrelação, de atraso k ,

Ou seja, a série dos coeficientes de autocorrelação decairá obedecendo a uma lei de potências e porque $\alpha \in (0,1)$, então o expoente será fraccional, levando a que a função de autocorrelação

decaia de forma hiperbólica, e não exponencial como no caso de um processo do tipo AR. Esta característica é assinalada por vários autores em mercados eléctricos (ver, por exemplo, Knittel e Roberts (2001)).

Segundo Gençay, Selçuk e Whitcher (2000) possíveis processos geradores de memória longa poderão ser: ruído gaussiano fraccionado, processos $1/f$, ou processos diferenciados fraccionalmente (em Percival e Walden (2000) encontra-se uma análise sistematizada e aprofundada dos vários tipos de processos geradores de características de dependência longa).

1.- Para o ruído gaussiano fraccionado a densidade espectral é dada por:

$$S(f) = 4\sigma_x^2 C_H \text{sen}^2(\pi f) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|f + j|^{2H-1}} \quad (3.20)$$

onde $-0,5 \leq f \leq 0,5$ e σ_x^2 é a variância do processo, $C_H > 0$ e H é o denominado expoente de Hurst.

2.- Para um processo do tipo $1/f$ a densidade espectral é dada por

$$S(f) = C_s |f|^\alpha \quad (3.21)$$

em que $-0,5 \leq f \leq 0,5$ e $C_s > 0$ e α denominado parâmetro de escala. Quando $\alpha < 1$ o processo é não estacionário e pode ser tornado estacionário por diferenciação.

3.- Para um processo do tipo fraccionalmente diferenciado (FD(d) – *fractionally differenced* de parâmetro d):

$$(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t, \quad (3.22)$$

onde ε_t é ruído branco gaussiano, d é um parâmetro (expoente) que caracteriza o processo de valor fraccional e L o operador de um passo atrás¹³. A densidade espectral de um modelo FD(d) é dada por:

$$S(f) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(4\text{sen}^2(\pi f))^d} \quad (3.23)$$

em que $-0,5 \leq f \leq 0,5$

¹³ $L(x_t) = x_{t-1}$

As relações entre os vários parâmetros são dadas pela tabela 3.2 e pelas seguintes relações algébricas:

$$H = d + \frac{1}{2}, \quad (3.24)$$

$$d = -\alpha / 2, \quad (3.25)$$

$$H = \frac{1}{2}(1 - \alpha), \quad (3.26)$$

Tabela 3. 2: Valores característicos dos parâmetros determinantes dos vários tipos de processos com características de memória longa

Tipo de Processo	Parâmetro	Não Estacionário de Memória Longa	Estacionário de Memória Longa	Ruído branco	Estacionário de Memória Curta
Ruído Gaussiano fraccionado	H	Não definido	$0,5 < H < 1$	$H = 0,5$	$0 < H < 0,5$
Lei potencial ($1/f$)	α	$\alpha \leq -1$	$-1 < \alpha < -0$	$\alpha = 0$	$\alpha \geq 0$
Diferenciado fraccionalmente	d	$d \geq 0,5$	$0 < d < 0,5$	$d = 0$	$d \leq 0$

Quando $d=0$, o processo $FD(0)$ é um ruído branco; Quando $FD(0 < d < 0,5)$ o processo será modelado com memória longa mas estacionário. Para valores de d inferiores a $-0,5$ o processo $FD(d)$ será não invertível (Witcher (Guttorp, Percival (2004))).

Para valores de d superiores a $0,5$ correspondendo a processos não estacionários (e de memória longa) pode-se recorrer à diferenciação, o número de vezes necessário, para que se obtenha $-0,5 \leq d \leq 0,5$.

Um processo auto-similar é também denominado de monofractal. Os processos multifractais estendem a ideia de similaridade permitindo funções de escala mais gerais. Para Xu e Gençay (2002) os processos multifractais incluem tanto as variações extremas ¹⁴ como a memória longa. No caso de processos mono-fractais, estes podem ser modelados por movimento browniano fraccional (FBM – *fractional brownian motion*), que permite criar um contínuo entre o Ruído Branco e o Movimento Browniano (Percival e Walden, 2000).

Alguns literatura aponta a incapacidade de alguns modelos empíricos, tipo GARCH, conseguirem representações consistentes em diferentes escalas temporais. A ideia da presença de

¹⁴ Para alguns autores, as variações extremas estão associadas a forte reversão à média.

multifractalidade em processo financeiros tem sido defendida com base nos seguintes argumentos: 1.- *volatility clustering*; 2. – compatibilidade com a propriedade de martingala dos retornos logarítmicos; 3. – consistência de escala; 4. – presença de consistência multiescala. (Malo (2006)).

A propriedade de multi-escala refere-se ao caso em que o processo não pode ser descrito, em todas as escalas, pelo mesmo expoente de escala (ou expoente de Hurst). Este é o tema central da multifractalidade e que o separa do movimento browniano fracional (caracterizado por um único factor de escala ou expoente de Hurst).

Uma forma relativamente simples de se obter uma estimativa do expoente que caracteriza um proceso do tipo $FD(d)$, é pela utilização de uma regressão linear sobre um gráfico log/log das grandezas da variância de onduleta (utilizar-se-á a estimativa não enviesada desta grandeza) versus a escala desse nível de decomposição. O declive dessa recta (β) está relacionado com o expoente (α) da função de densidade espectral a baixas frequências dada pela relação: $\beta = -\alpha - 1$. Como $\alpha = -2d$, então tem-se $\beta = 2d - 1$, ou seja, $d = 1/2(\beta + 1)$.

Percival e Walden (2000) demonstraram que se pode aproximar a distribuição da soma de variáveis aleatórias gaussianas correlacionadas, de média nula e variância idêntica, por uma distribuição qui-quadrado com o número de graus de liberdade ajustado de forma a contabilizar essa correlação, o que se pode expressar formalmente em:

$$\frac{\eta \hat{\nu}_X^2(\tau_j)^d}{\nu_X^2(\tau_j)} = \chi_{\eta}^2 \quad (3.27)$$

Realizando o logaritmo dos dois lados da expressão acima, e acertando os factores da soma, estes autores demonstraram que o logaritmo da estimativa da variância de onduleta à escala j é identicamente distribuído a

$$\log(\hat{\nu}_X^2(\tau_j)) = \log(\chi_{\eta}^2) + \log(\nu_X^2(\tau_j)) - \log(\eta_j), \quad (3.28)$$

onde

χ^2 é a função de distribuição qui-quadrado com os graus de liberdade equivalentes η_j ;

$\hat{\nu}_X^2(\tau_j)$ - é a variância de onduleta estimada do processo X à escala τ_j .

$\nu_x^2(\tau_j)$ - é a verdadeira variância de onduleta do processo X à escala τ_j .

Os graus de liberdade equivalentes η_j podem ser dados por 3 métodos diferentes (Percival e Walden, 2000 e Gençay *et al*, 2002), tendo-se optado pelo método em que os graus de liberdade equivalentes são dados por: $\eta_j = \max\{M_j / 2^j, 1\}$ onde M_j corresponde ao número de elementos na escala j não influenciados pelas condições fronteira¹⁵.

Realizando o valor esperado da expressão anterior:

$$E\left\{\log(\hat{\nu}_x^2(\tau_j))\right\} = \psi(\eta_j / 2) + \zeta + \beta \log(\tau_j) + \log(\eta_j / 2) \quad (3.29)$$

Em que $\psi(\eta_j / 2)$ é a função digama. Com este resultado em mente, Percival e Walden (2000) definem a grandeza:

$$Y(\tau_j) \equiv \log(\hat{\nu}_x^2(\tau_j)) - \psi(\eta_j / 2) + \log(\eta_j / 2) \quad (3.30)$$

Pelo que se pode definir um modelo de regressão linear dado por:

$$Y(\tau_j) \equiv \zeta + \beta \log(\tau_j) + e_j, \quad (3.31)$$

$$\text{onde o termo de erro } e_j \equiv \log\left(\frac{\hat{\nu}_x^2(\tau_j)}{\nu_x^2(\tau_j)}\right) - \psi(\eta_j / 2) + \log(\eta_j / 2) \quad (3.32)$$

é uma variável aleatória igual em distribuição a

$$\log(\chi_{\eta_j}^2) - \psi(\eta_j / 2) - \log(2) \quad (3.33)$$

Percival e Walden (2000) notam que o termo de erro e_j tem média nula e variância $\psi'(\eta_j)$ (função trigama) e apresenta uma distribuição aproximadamente gaussiana sempre que os graus de liberdade da distribuição qui-quadrado sejam superiores a 10.

¹⁵ Para o presente caso, utilizado-se a onduleta LA(8), o número de coeficientes não afectados pelas condições fronteira é dado por:

Escala	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M_j	70121	70107	70079	70023	69911	69687	69239	68343	66551	62297	55799	41463	12791

4. – DADOS

A amostra de dados utilizada na análise empírica é constituída por valores horários dos preços de energia eléctrica do mercado de energia eléctrica OMEL apenas.

Os dados utilizados correspondem aos valores horários desde 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005 e estão disponíveis em www.omel.es.

Os valores amostrados correspondem aos *clearing prices* atrás descritos. A estes valores de preços de equilíbrio entre a oferta e a procura correspondem valores de equilíbrio das quantidades de energia eléctrica, em megawatt-hora (MWh), transaccionadas no mercado OMEL para cada hora e a entregar no dia seguinte. Aos valores dos volumes de equilíbrio transaccionados serão, no texto que se segue, apelidados de cargas e correspondem às *clearing loads*.

A amostra de dados é assim constituída por 70.128 valores horários de preços de equilíbrio e 70.128 valores horários das cargas de equilíbrio. Nesta análise não se filtram os valores correspondentes aos fins-de-semana ou feriados.

Tabela 4.1 – Relação da Composição do número de dados de cada uma das amostras dos preços e cargas horárias.

ano	dias	horas
1998	365	8760
1999	365	8760
2000	366	8784
2001	365	8760
2002	365	8760
2003	365	8760
2004	366	8784
2005	365	8760
8 anos	2922	70128

O *software* utilizado foi o MATLAB®, versão 7. Este pacote foi escolhido porque tem construído um conjunto de procedimentos (rotinas) de *software* que processam onduletas. Colocada esta vantagem comparativa deste pacote, utilizaram-se as restantes potencialidades do MATLAB® para o tratamento estatístico.

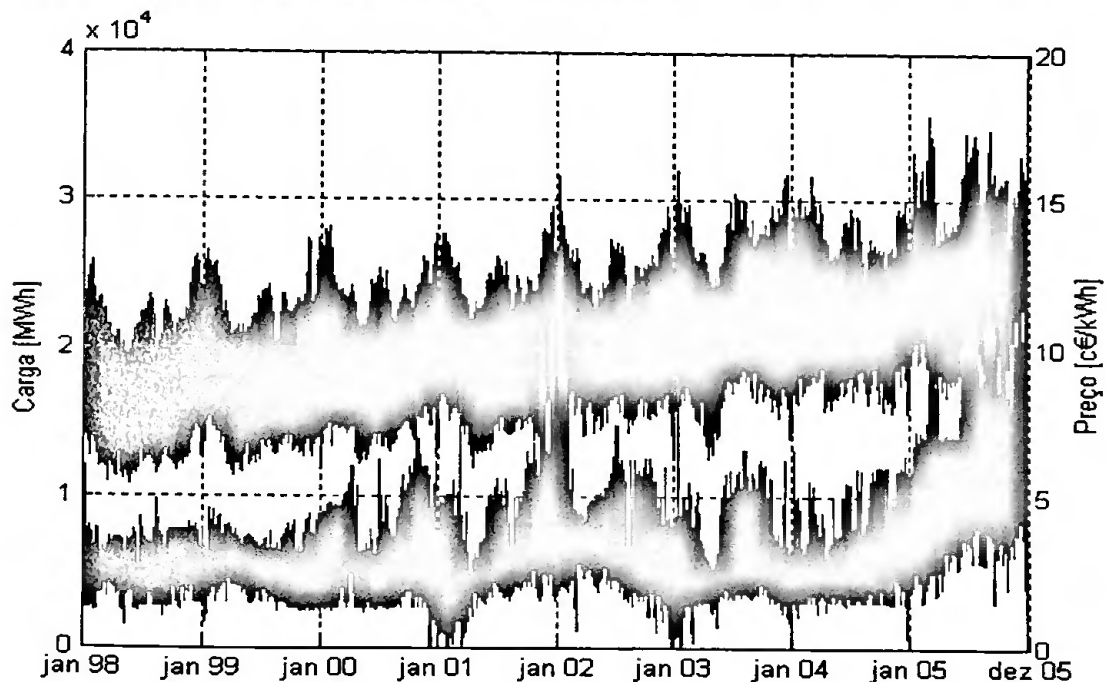
5. – ANÁLISE EMPÍRICA

5.1. – Análise Estatística das Amostras

Trajectórias das Séries Temporais

Para uma visão rápida sobre as séries de preços e de cargas, apresenta-se na figura 5.1 as trajectórias temporais os valores horários dos preços e cargas transaccionados no OMEL de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005.

Figura 5. 1 – Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) desde 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005.



Padronizando as séries de preços e de cargas por subtração da média amostral de cada série e dividindo pelo desvio padrão amostral de cada série:

$$P_{t,std} = (P_t - P_m) / s_p \quad (5.1)$$

$$C_{t,std} = (C_t - C_m) / s_c \quad (5.2)$$

Onde,

$P_{t,std}$, $C_{t,std}$ - são as séries das amostras de preços e cargas padronizadas

P_t , C_t - são as séries das amostras de preços e cargas

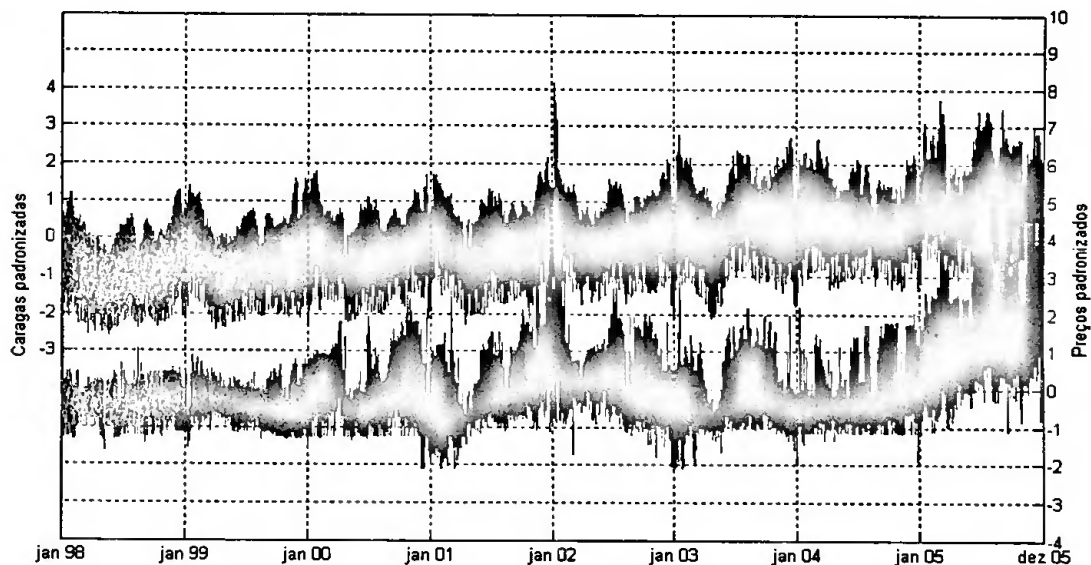
P_m , C_m - são as médias amostrais das séries de preços ou cargas

s_p , s_c - são os valores dos desvios-padrão amostrais dos preços ou cargas

Tabela 5.1 – Factores de padronização das séries de preços e cargas de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005

Amostra	Preço	Carga
Valor médio	3,2512 c€/kWh	20.966 MWh
Desvio-padrão	1,4936 c€/kWh	3.917 MWh

Figura 5.2 – Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços padronizados (linha a verde) e das cargas padronizadas (linha a azul).



Nota-se a tendência e a sazonalidade aparente para o caso da série das cargas e, no caso da série dos preços, a existência de picos pronunciados nos períodos em que, aparentemente, as cargas têm maiores valores.

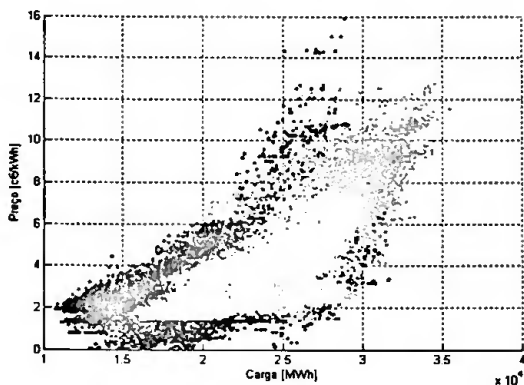
Tal como Simonsen e Weron (2005) afirmam para os preços à vista no Nordpool, é natural a sugestão que para cargas mais elevadas correspondam valores mais elevados dos preços. Neste sentido, repare-se na figura 5.3, em que se apresentam os gráficos de dispersão das relações entre os preços horários de mercado e as cargas horárias transaccionadas, para cada ano.

Atente-se no deslocamento geral da mancha no sentido crescente das cargas e dos preços. Este deslocamento é absolutamente claro no caso dos gráficos mais à direita, tanto para os anos extremos da série: 1998 e 2005 como no caso do crescimento do ano de 2004 para o ano de 2005. Os anos de 2001 e 2002 são anos com gráficos de dispersão muito semelhantes.

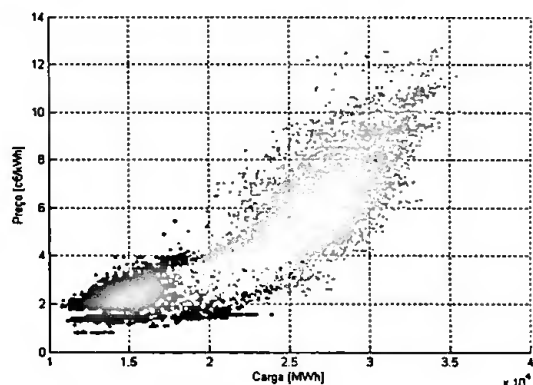
Da observação da figura 5.3 não se pode afirmar que a valores mais elevados das cargas lhes correspondam sempre preços mais elevados. Como se pode reparar, por exemplo, nos gráficos correspondentes aos anos de 2001 e 2002, conseguem-se observar exemplos de cargas mais elevadas que lhes correspondem preços francamente mais baixos que noutros casos inversos, tomando casos de cargas superiores a 26.000 MWh.

Figura 5. 3: Correspondência entre as cargas horárias de equilíbrio transaccionadas (em abcissas) e os preços horários de equilíbrio (em ordenadas) da transacção por cada ano da análise (1998: azul escuro, 1999:verde, 2000: vermelho, 2001: castanho, 2002: rosa, 2003: púrpura, 2004:bege e 2005: azul claro).

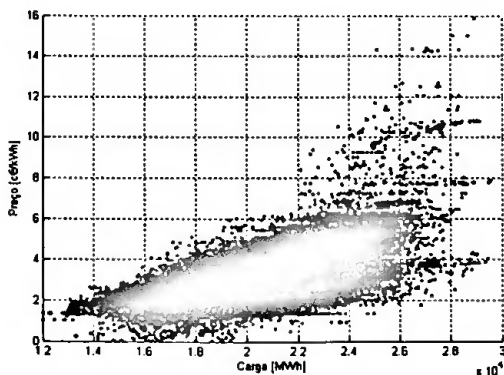
Sobreposição dos 8 anos da série: de 1998 a 2005



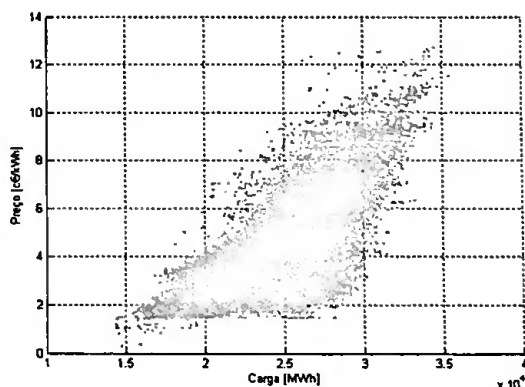
Sobreposição dos 2 anos extremos: 1998 e 2005



Sobreposição de 2 anos: 2001 e 2002



Sobreposição de 2 anos: 2004 e 2005

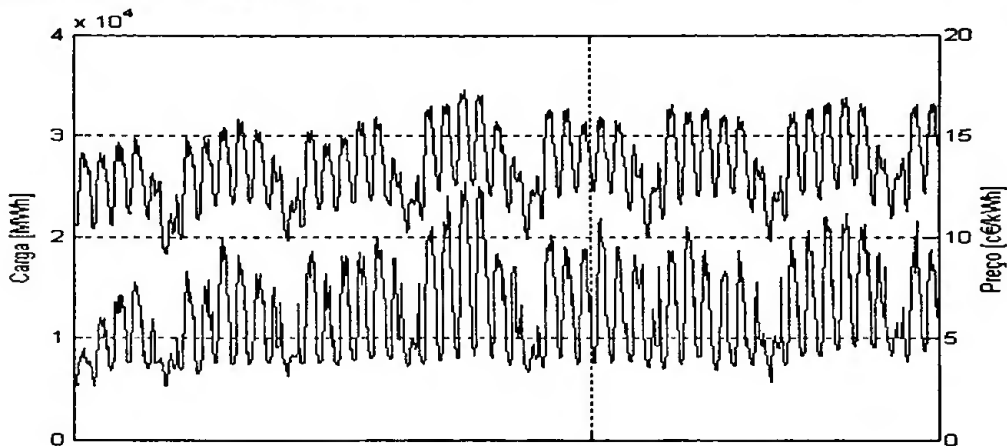


Ciclos intra-semanal e intra-diário

Os ciclos intra-semanal e intra-diário está bem documentado na dinâmica de todos os mercados eléctricos analisados na literatura, e o OMEL apresenta estas mesmas características. Para uma melhor percepção destes dois ciclos representam-se as trajectórias das séries dos preços e da

série das cargas na figura 5.4 num troço de 1200 horas durante a estação do Verão (cerca de 7 semanas).

Figura 5. 4: Trajectórias temporais dos valores horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) desde a amostra horária de 31 de Maio de 2005 a 20 de Julho de 2005 (amostras horárias 64.968 até a 66.168) – unidade em abcissas: mês.



Os fins-de-semana são perceptíveis por corresponderem aos menores valores a seguir a 5 picos de preços e de cargas. O ciclo diário é visível por corresponder aos valores entre duas cavas nas trajectórias.

Análise das sub-séries de cada hora do dia

Antes da pré-análise estatística das séries corridas dos preços e das cargas, analisar-se-ão as sub-séries correspondentes a cada hora do dia, de forma a se ganhar uma visão da eventual homogeneidade das sub-séries. Vários autores consideram a análise dos mercados dos preços de energia eléctrica tendo em conta as 24 séries de preços, cada uma correspondente a cada uma das diferentes horas do dia. Neste sentido, tendo como objectivo verificar as diferenças relativas das estatísticas das sub-séries correspondentes à série de preços e das sub-séries correspondentes à série das cargas, procede-se à padronização dessas séries, tendo em conta as relações dos valores médios amostrais e variâncias amostrais de cada uma das 24 sub-séries horárias para os preços e 24 sub-séries para as cargas.

Para o caso das sub-séries dos preços

$$P_{médio,h} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} P_{i,h} \quad (5.3)$$

$$s^2_{P,h} = \frac{1}{N_d - 1} \sum_{i=1}^{N_d} (p_{i,h} - P_{médio,h})^2 \quad (5.4)$$

onde $p_{i,h}$ é o valor amostrado do preço da hora $h = 1$ a 24 e N_d será igual ao número de dias dos anos em causa ou seja 2.922 dias, $P_{médio,h}$ o valor médio para cada hora do dia e $s_{P,h}$, o desvio-padrão das sub-séries amostradas, para cada hora do dia.

Para o caso das sub-séries das cargas

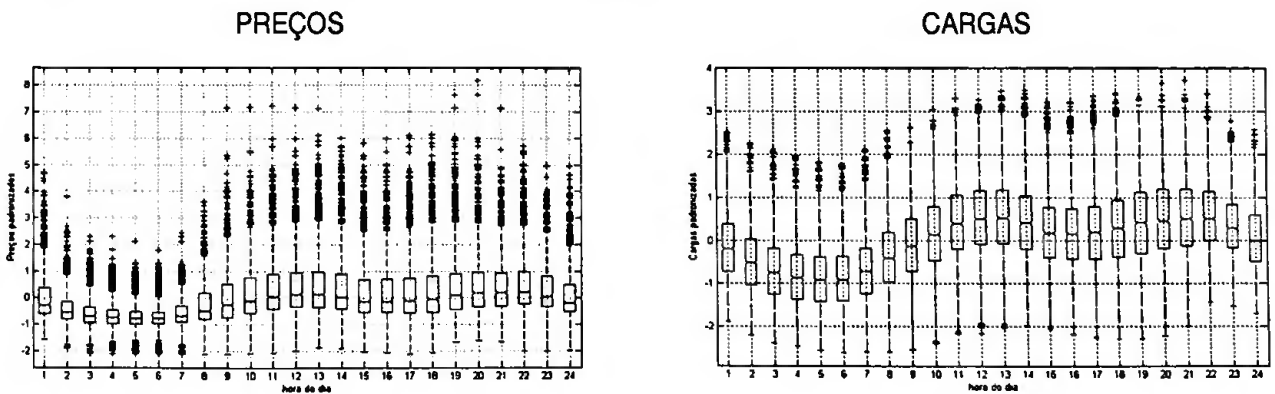
$$C_{médio,h} = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} c_{i,h} \quad (5.5)$$

$$s^2_{C,h} = \frac{1}{N_d - 1} \sum_{i=1}^{N_d} (c_{i,h} - C_{médio,h})^2 \quad (5.6)$$

onde $c_{i,h}$ é o valor amostrado do preço da hora $h = 1$ a 24 e N_d será igual ao número de dias do ano em causa ou de toda a série (2922 dias) $C_{médio,h}$ o valor médio para cada hora do dia e $s_{C,h}$, o desvio-padrão das amostras, para cada hora do dia, das 24 séries de cargas

Sobre cada uma das 24 sub-séries padronizadas dos preços e das cargas realizam-se os gráficos *box-plot*, que se apresentam na figura 5.5.

Figura 5. 5: Ciclo intra-diário dos preços e das cargas - gráficos *box-plot* dos valores médios das séries padronizadas para cada hora do dia considerando todo o comprimento da amostra



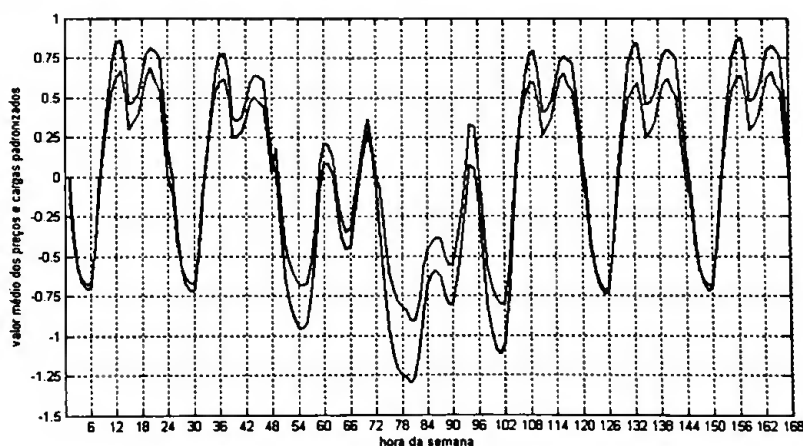
Enquanto as distribuições das cargas para cada hora do dia aparentam uma relativa simetria, no caso dos preços é aparente que a simetria não existe. É aparente uma assimetria positiva em quase todas as horas.

Mas se os valores médios dos preços e cargas padronizados, comparando cada hora do dia, têm comportamentos idênticos (vêr figura 5.6), as dispersões para as cargas horárias e para os preços horários apresentam comportamentos completamente diferenciados. Repare-se que os intervalos inter-quartil nas várias horas do dia e para o caso das cargas são mais ou menos constantes, não se passando o mesmo para o caso dos preços. Adicionalmente, os *outliers* não são tão fortes como no caso da série dos preços. Para esta série padronizada, e de uma forma qualitativa, quanto maior o valor médio horário, maiores os intervalos inter-quartil e mais extremos se apresentam os *outliers*.

Na figura 5.6 pode-se apreciar os valores médios do ciclo semanal dos valores médios das séries horárias padronizadas. Nesta figura é perfeitamente visível a periodicidade semanal – o fim-de-semana corresponde às horas 48 a 96, bem como se pode apreciar a regularidade do ciclo intra-diário médio nos 5 dias úteis da semana (1 semana corresponde a 168 horas).

Os valores médios da série padronizada dos preços horários demonstram um acompanhamento dos valores médios da série padronizada das cargas horárias e uma menor excursão (medida em desvio-padrão) do que a excursão dos valores das cargas. Conjuntamente com os gráficos *box-plot* pode-se concluir que os valores extremos dos preços são a característica mais determinante desta série, em que há um efectivo distanciamento do andamento da série das cargas.

Figura 5. 6: Ciclo intra-semanal - trajectórias temporais dos valores médios horários de equilíbrio dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) padronizados.

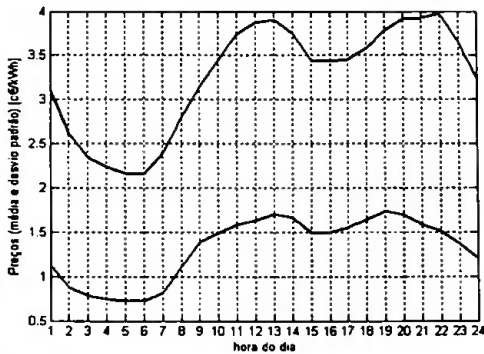


Para uma visão rápida da variação dos vários momentos das distribuições das sub-séries correspondentes às sub-séries de cada hora do dia, optou-se por apresentar os valores dos

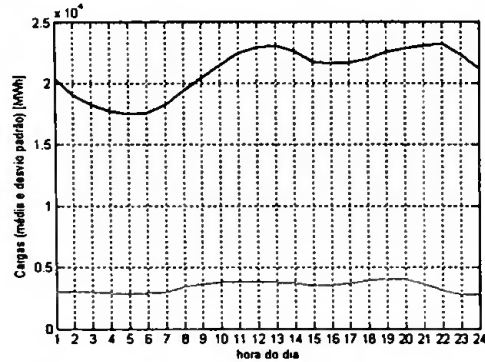
quatro primeiros momentos de cada uma das sub-séries nos gráficos que se apresentam na figura 5.7.

Figura 5. 7: Valores dos quatro primeiros momentos dos preços e das cargas ao longo das horas do dia.

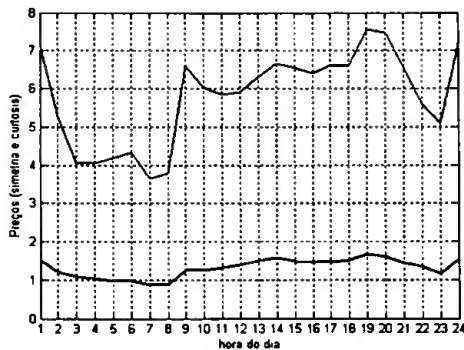
1º e 2º momentos da distribuição dos preços – linha azul e linha verde, respectivamente



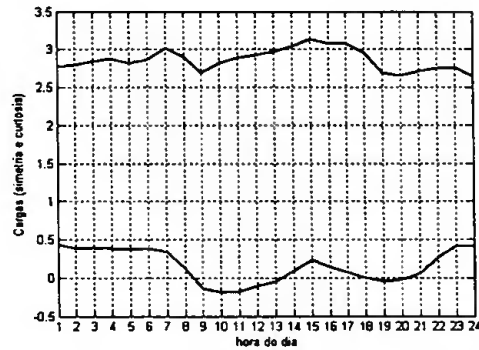
1º e 2º momentos da distribuição das cargas – linha roxa e linha amarela, respectivamente



3º e 4º momentos da distribuição dos preços – linha vermelha e linha azul, respectivamente



3º e 4º momentos da distribuição das cargas – linha preta e linha azul, respectivamente



Para o caso das sub-séries dos preços:

1. O desvio-padrão demonstra um andamento paralelo ao da média no caso dos preços, algo que já se concluíra dos gráficos de *box-plot* da figura 5.5.
2. O coeficiente de assimetria é sempre positivo, sendo mais alto quando os valores médios dos preços são mais altos.
3. Os preços demonstram um alto nível do coeficiente de achatamento, com valores francamente mais altos quando os valores médios dos preços são altos.

Para o caso das sub-séries das cargas:

1. O desvio-padrão é relativamente uniforme para todas as horas.

2. Apresentam um coeficiente de assimetria não nulo, quase sempre positivo (com excepção das horas de maiores valores de carga em que se apresentam quase simétricas ou com coeficiente de assimetria levemente negativo).
3. O coeficiente de achatamento das cargas nas várias horas do dia é perto do valor da distribuição normal (3), com tendência, pouco clara é certo, das abas a tornarem-se menos pesadas do que no caso de uma distribuição normal nas horas do dia com menor procura.

As 24 sub-séries das cargas horárias parecem demonstrar valores congruentes nos momentos superiores ao primeiro.

No entanto, no que diz respeito às sub-séries de preços de cada hora do dia, estes apresentam características bem diferenciadas dependendo da hora do dia:

1. Da hora 3 à hora 6 os preços demonstram uma baixa variância (relativa) e distribuições pouco leptocúrticas. A estas horas correspondem menores valores de carga, pelo que é natural que os geradores que tenham necessidade de se manter operacionais nos ciclos longos, que corresponderão à parte plana da curva de oferta, se mantenham na oferta a baixo custo.
2. Da hora 9 à hora 20, as distribuições têm maior variância (relativa) e são muito leptocúrticas. Nestas horas, porque lhes correspondem maiores valores médios das cargas, com flutuações que poderão ser fortemente positivas, poderão corresponder mais eventos em que a oferta de geradores de maiores custos operacionais e com um número menor de horas de operação anual poderão estar a ditar o preço de mercado, resultando em maiores custos marginais na curva de oferta.
3. As horas 7 a 8 e 21 a 24 são horas de transição entre estes dois períodos do dia, correspondendo-lhe cargas menores, pelo que as distribuições nessas horas demonstram menor peso (relativo) nas caudas.

Conclui-se que as séries corridas dos preços do OMEL são constituídas por sub-séries horárias de características bem diferenciadas para cada hora do dia, em que os valores dos quatro primeiros momentos apresentam um “ciclo” diário. Para o caso das Cargas este “ciclo” não é aparente.

Estimativas da Densidade das Distribuições Amostrais das Cargas e Preços

Para as séries corridas de preços e cargas, que constituem o objecto de análise deste trabalho, estimaram-se as medidas de tendência central e de dispersão bem como se estimam as densidades das distribuições dos preços e cargas horárias.

As estimativas das densidades das distribuições dos preços e das cargas são realizadas recorrendo ao *kernel* gaussiano implementado em rotinas do pacote estatístico MATLAB e apresentam-se na figura 5.8 e, na tabela 5.2, apresentam-se as medidas de tendência central e de dispersão para as cargas e preços.

Figura 5. 8: Densidades de distribuição das séries horárias dos preços e das cargas. Ajustamento às funções de densidade de distribuição para as cargas (ajustamento à normal) e para os preços (ajustamento à distribuição Normal – linha a vermelho, e ajustamento à distribuição Lognormal – linha a azul).

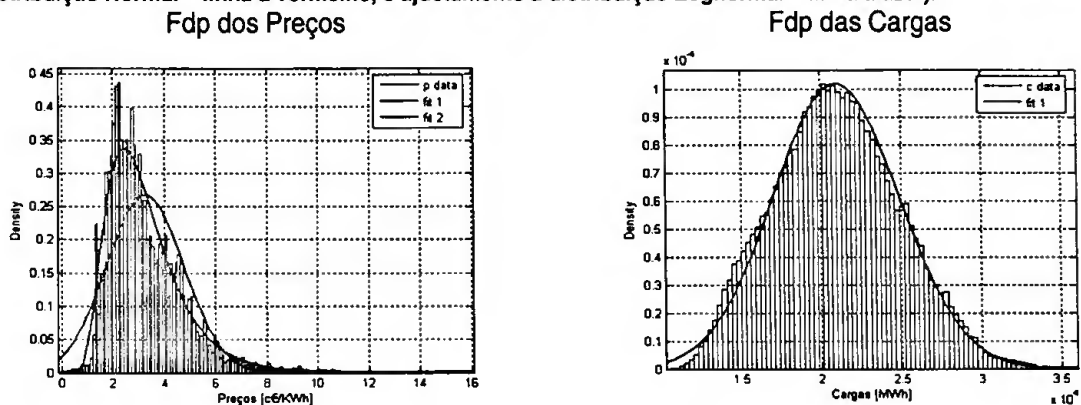


Tabela 5. 2: Resultados dos ajustamentos das funções de densidade de distribuição

Preços			Cargas					
Distribution: Normal			Distribution: Lognormal			Distribution: Normal		
Log likelihood: -127421			Log likelihood: -117711			Log likelihood: -678523		
Domain: $-\text{Inf} < y < \text{Inf}$			Domain: $0 < y < \text{Inf}$			Domain: $-\text{Inf} < y < \text{Inf}$		
Mean: 3.25119			Mean: 3.25871			Mean: 20966.3		
Variance: 2.2307			Variance: 2.26168			Variance: 1.53451e+007		
Parameter	Estimate	Std. Err.	Parameter	Estimate	Std. Err.	Parameter	Estimate	Std. Err.
mu	3.25119	0.00564477	mu	1.08479	0.00166072	mu	20966.3	14.8051
Sigma	1.49355	0.0039915	sigma	0.43941	0.00117432	sigma	3917.28	10.4689

Tabela 5.2 - Medidas Amostrais de Tendência Central e Dispersão para as Cargas e Preços

	Média	Mediana	Intervalo inter-quartil (75% - 25%)	range	Desvio-Padrão	Coefficiente de Assimetria	Coefficiente de Achatamento
Preços [c€/KWh]	3,2512	2,919	1,8065	15,840	1,4936	1,5825	7,2151
Cargas [MWh]	20.966	20.860	5.409	24.922	3.917	0,1707	2,7193

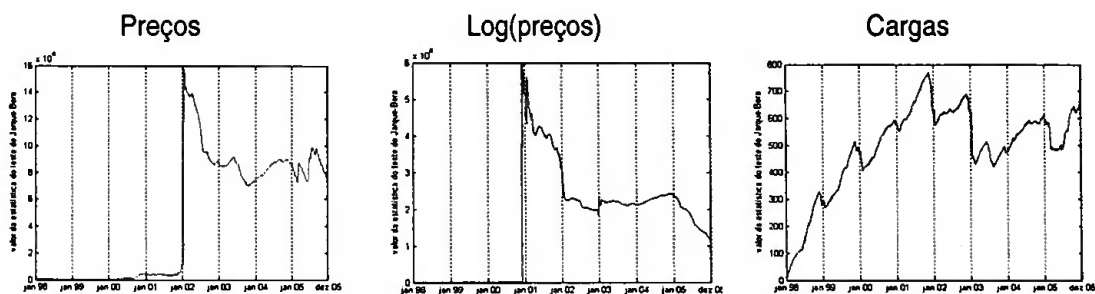
Testes de Normalidade das Distribuições

Os testes de Jarque-Bera com hipótese nula de normalidade são realizados sobre as séries das amostras dos preços e das cargas de um ponto de vista cumulativo, ou seja, sobre uma janela temporal deslizante, com ponto inicial fixo no início de cada amostra.

Na figura 5.9, traça-se a trajetória do teste de normalidade (à trajetória correspondem sucessivos testes de normalidade a variarem com a dimensão das séries) de forma a se poder apreciar se teriam existido alterações significativas a uma situação anterior de potencial normalidade das distribuições das amostras das séries cargas e preços.

O valor crítico da estatística de Jarque-Bera é de 5,996 para um nível de significância de 0,05.

Figura 5. 9: Valores das estatísticas do teste de Jarque-Bera ao longo das séries de preços e de cargas.



Os testes de Jarque-Bera, em que a hipótese nula pressupõe a normalidade dos dados, são sempre rejeitados, com *p-value* nulo a partir das 3.000h, ou seja, para dimensões da amostra minimamente relevantes tanto no caso das cargas como no caso dos preços.

Estacionaridade e Ergodicidade

As condições de estacionaridade de segunda ordem de um processo estocástico y_t são dadas pelas condições bem definidas:

1. $E[y_t]$ é finito, constante e independente do tempo;
2. $\text{Var}[y_t]$ é finita, constante e independente do tempo;
3. $\text{Covar}[y_t, y_{t+h}]$ são finitos, apenas dependem de h e são independentes do tempo.

Num processo estritamente estacionário toda a estrutura probabilística dever-se-á manter constante, ou seja, os quatro primeiros momentos deverão ser mais ou menos constantes ao longo do tempo. No caso da estacionaridade de segunda ordem, apenas é requerido que os dois primeiros momentos sejam finitos e constantes.

A estacionaridade de segunda ordem é uma propriedade estatística necessária para assegurar que se pode misturar dados de diferentes períodos no sentido de estimar momentos estatísticos, mas não é uma propriedade suficiente: é necessário também que se assegure que os momentos empíricos converjam para os valores esperados (Cont (2000)). Para Kyaw, Los e Zong (2004) um processo é ergódico se de uma forma geral se puder afirmar que os momentos amostrados de amostras finitas se aproximam dos valores dos momentos para as populações, com base em realizações de comprimentos cada vez maiores do processo estocástico em causa. Ou seja, se uma série temporal é ergódica então a sua média *ensemble* pode ser substituída por uma média amostral suficientemente longa, cujo smomentos expectavelmente converjam para valores constantes.

Para as séries em estudo e depois dos testes de normalidade atrás efectuados das estimativas das distribuições de densidade das amostras de preços e cargas, realiza-se uma análise da variação dos momentos com a série cumulativa dos dados sobre uma janela temporal deslizante, cujas trajectórias se apresentam na figura 5.10.

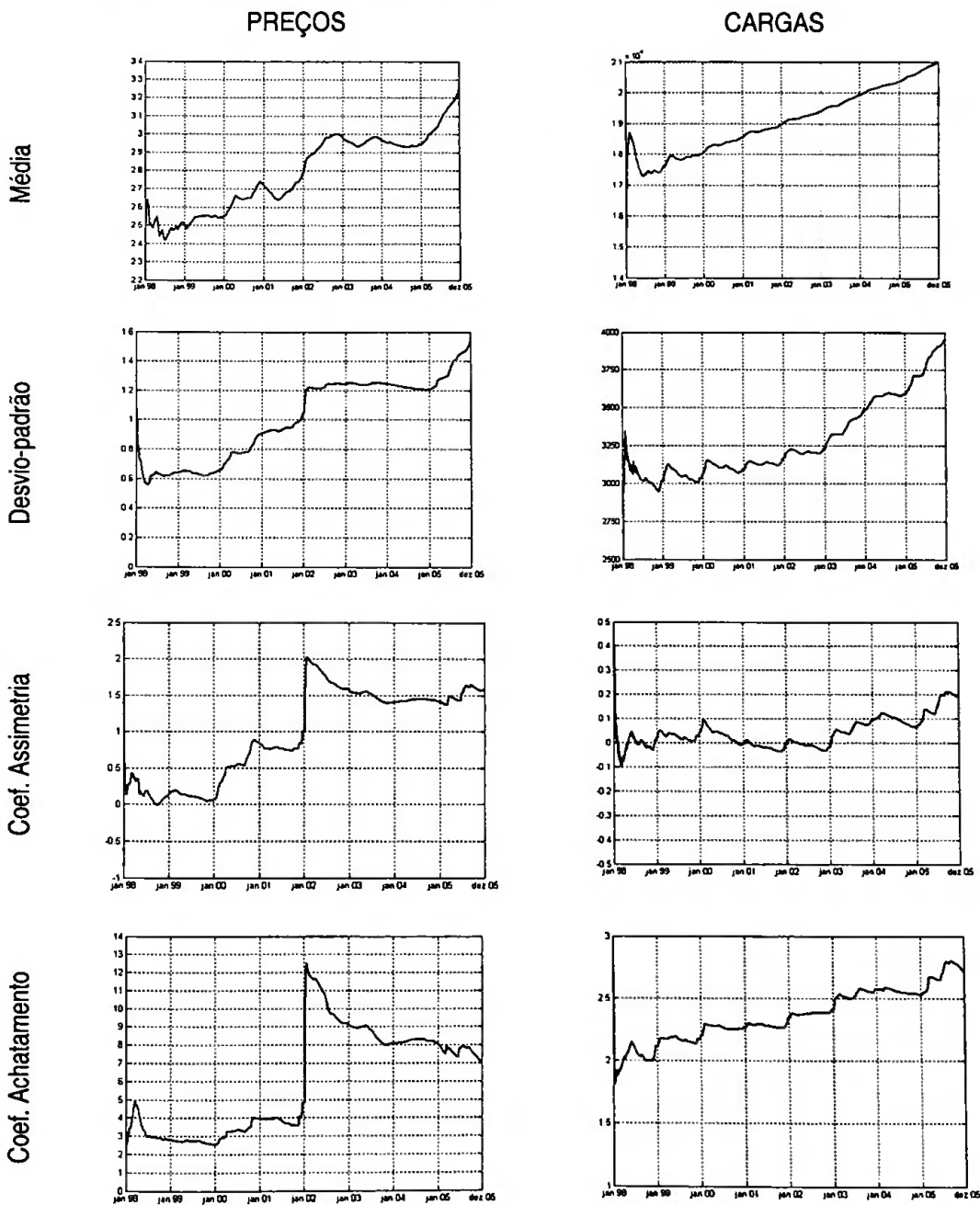
Os quatro momentos de ambas as amostras não parecem convergir para valores estáveis.

Numa apreciação qualitativa a todo o período em análise, note-se que a média da amostra das cargas segue uma trajectória de crescimento bem definida, com alguns períodos que apresentam um crescimento de maior declive que, numa primeira apreciação, se poderá afirmar que acontecem durante o primeiro trimestre de cada ano. O desvio-padrão da carga demonstra também tendência e sazonalidade até final do ano de 2003 e um crescimento acelerado a partir desta data e até ao final do ano de 2005 mas em que a sazonalidade, neste sub período, já não tem expressão aparente.

As possibilidades de eventuais alterações na estrutura da variância do processo das cargas parecem remotas comparativamente ao que se visualiza no caso dos preços. Quanto ao coeficiente de assimetria das cargas, este parece demonstrar um certo padrão anual e uma

estabilidade relativa. O coeficiente de achatamento da série das cargas demonstra um crescimento progressivo que parece acompanhar o crescimento da média, mas com patamares mais ou menos anuais.

Figura 5. 10: As trajectórias dos 4 primeiros momentos acumulados da distribuição dos valores horários dos Preços e das Cargas com recurso a janela temporalmente deslizante sobre todo o comprimento da amostra (70.128 horas), com início fixo em 1 de Janeiro de 1998.



No caso dos Preços, após uma notável estabilidade no seu valor médio durante todo o ano de 1999 notam-se dois incrementos fortes: um durante o primeiro trimestre do ano 2000 e outro no último trimestre do ano 2000, aproximadamente. Tal gerou também um forte crescimento na volatilidade, como se pode observar. Depois desta data e até Maio de 2001 a média dos preços desce de forma relativamente sensível.¹⁶

Voltando à apreciação geral da média dos preços, esta demonstra ter períodos relativamente curtos em que existem fortes incrementos, relevando-se como exemplo desta situação, o último trimestre de 2001 em que a média sobe de forma sólida, correspondendo-lhe um grande salto no desvio-padrão acumulado da série dos preços, num período de tempo muito curto.

Quanto ao desvio-padrão dos preços, e de forma meramente qualitativa, podemos afirmar que este segue, de forma estilizada, a trajectória da média. Aparentemente, houve crescimentos acentuados, e verdadeiros saltos, no caso do final do ano de 2001, colocando-se a possibilidade de terem existido uma, ou mais, alterações estruturais na variância.

Para o caso da série amostral dos preços, os terceiro e quarto momentos parecem convergir para a estabilidade, pelo menos por patamares de relativa extensão, interrompidos por um salto marcante em Janeiro de 2002, sensivelmente. Este comportamento contrasta com o caso do terceiro e quarto momentos das cargas. No caso do quarto momento das cargas este aparenta periodicidade nos saltos no princípio de cada ano.

Cont (2000) questiona a possibilidade da variância teórica de uma variável poder ser finita se a variância das amostras não convergir para um valor estável. No caso dos preços e das cargas de energia eléctrica do mercado OMEL poderemos ser levados a um raciocínio análogo.

As rupturas observadas graficamente ao nível dos quatro momentos podem ser interpretados como demonstrativas de não estacionaridade e não ergodicidade (Los e Yu (2005)).

¹⁶ Leon e Rubia (2001) explicam este forte crescimento na média dos preços com base no receio de alteração em questões legais e de enquadramento regulatório que, no seu essencial, colocavam em causa as expectativas dos agentes produtores nos proveitos futuros.

Teste aDF de Estacionaridade das Séries dos Preços e das Cargas

No teste de aDF (*augmented* Dickey-Fuller) a hipótese nula pressupõe a existência de raiz unitária. A *H0* será rejeitada a favor da *H1*, que pressupõe a existência de estacionaridade de 2ª ordem, se o valor da estatística do teste for mais negativo que o valor crítico, a determinado nível *p* de significância, para os coeficientes da seguinte regressão:

$$H0: \Delta y_t = \varepsilon_t \tag{5.7}$$

$$H1: \Delta y_t = \mu + \delta t + \psi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \tag{5.8}$$

Em que presença de tendência será traduzida pelo coeficiente δ , sendo μ uma constante no modelo e $p \leq 72$ será o número total de passos atrás que se incluirão na regressão.

O número de passos para o teste aDF varia entre 21 e 28, no caso de Leon e Rubia (2001), e 21 no caso de Lúcia e Schwartz (2001) (estes últimos autores com base no teste aDF sobre a série dos preços médios diários e sobre a série do logaritmo natural dos preços médios diários rejeitaram a hipótese nula de existência de raiz unitária no mercado do *Nordpool*).

No presente estudo optou-se pela utilização de $p=24$ o que tendo em conta os gráficos da figura 5.11 parece ser uma boa opção dada a tendência de estabilização dos valores das estatísticas dos testes para os preços e para as cargas a partir do valor de $p = 24$.

Os valores críticos das estatísticas são dados na tabela 5.3, supondo a existência de tendência nos dados dos preços e das cargas e supondo 24 atrasos na regressão:

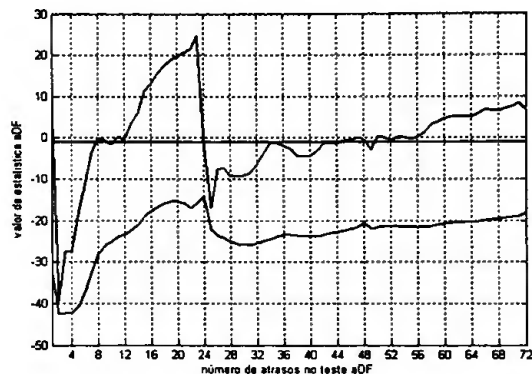
Tabela 5.3: Valores críticos do teste (augmented) Dickey-Fuller (aDF), para 24 atrasos

Valor crítico a 1%	Valor crítico a 5%	Valor crítico a 10%
-3.998	-3.432	-3.162

Em baixo apresentam-se as trajectórias dos valores da estatísticas do teste aDF para as séries dos preços e das cargas a variar com o número de atrasos da regressão realizada nesse teste.

Conclui-se que, para o caso dos preços, o teste aDF leva-nos à rejeição da hipótese nula de existência de raiz unitária, mas a rejeição para o caso das cargas é dependente do número de passos na regressão. No entanto, considerando 24 passos a hipótese nula é fortemente rejeitada.

Figura 5.11: Variação do valor da estatística do teste aDF com o número de atrasos. Preços – linha a verde, Cargas, linha a azul.



Como nota final, destaca-se o trabalho de Leon e Rubia (2001) sobre a série dos logaritmos naturais dos preços médios diários de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2001 do OMEL, onde realizaram vários testes de estacionaridade designadamente o aDF (*augmented Dickey-Fuller*), resultando na rejeição da hipótese nula de existência de raiz unitária, e o KPSS, que resultou na rejeição da H_0 de estacionaridade - há portanto uma dupla rejeição: da estacionaridade e da não estacionaridade.

No presente estudo os gráficos da variação dos primeiros quatro momentos da série das cargas e a variação dos valores das estatísticas do teste aDF não permitem ser absolutamente conclusivo sobre a estacionaridade da série das cargas.

Transformações de Variáveis

Leon e Rubia (2001) propõem a estabilização da variância com recurso às transformações habituais: logaritmo natural dos preços (cargas), $\log(P_t)$, e incrementos do logaritmo natural dos preços (cargas) ou, alternativamente, pode ser denominada por logaritmo dos preços (cargas) relativos que na literatura financeira é denominada, mais habitualmente, por retornos ,

$$\text{Incremento}(P(t)) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (5.9)$$

$$\text{Incremento}(C(t)) = \log(C_t) - \log(C_{t-1}) = \log\left(\frac{C_t}{C_{t-1}}\right) \quad (5.10)$$

Vários autores utilizaram o mesmo tipo de transformações, entre outros destacam-se Lúcia e Schwartz (2001), Escribano *et al* (2001) e Carnero *et al* (2003), onde por vezes estas séries são denominadas séries de retornos (geralmente diários por a literatura ser mais vasta em análises de preços de energia eléctrica médios diários).

Nos gráficos da figura 5.12 pode-se apreciar as trajectórias dos vários momentos das distribuições amostrais das séries dos retornos horários para as cargas e preços, séries obtidas a partir das expressões 5.9 e 5.10.

Da análise da figura 5.12 verifica-se, naturalmente, que os valores de média dos incrementos são muito pequenos pelo facto de estarmos a analisar valores médios dos incrementos horários, pelo que este valor é quase “infinitesimal” para o caso das duas séries de incrementos logarítmicos.

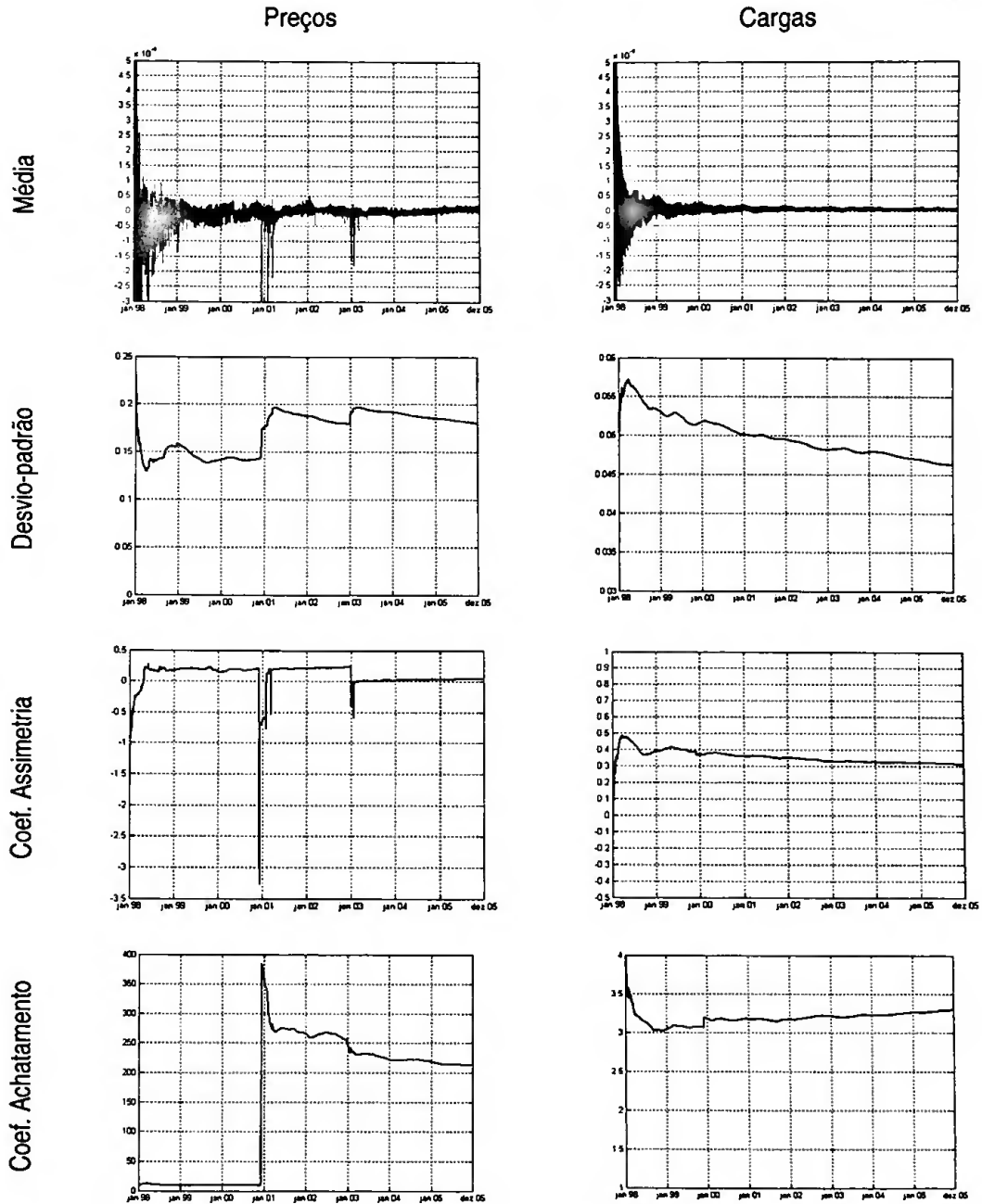
Para o caso dos incrementos das cargas obtém-se uma muito razoável ergodicidade amostral pelo que se pode observar do andamento dos quatro momentos.

Da observação da figura 5.12, conclui-se que a série dos incrementos dos logaritmos dos preços caracteriza-se por saltos na variância e patamares com aparente estabilidade, podendo-se aperceber 3 patamares com duas fronteiras nas datas de Janeiro de 2001 e Janeiro de 2003. Nos períodos definidos entre estas datas pode-se afirmar que estamos perante séries estacionárias de 2ª ordem.

No caso do terceiro e quarto momentos, Cont (2000) menciona que é natural que estes apresentem um comportamento mais errático pois, por exemplo, a variância do quarto momento conterà um polinómio de ordem oito pelo que serão expectáveis elevadas flutuações.

Tendo em conta esta argumentação não se pode deixar de notar a apreciável estabilidade dos coeficientes de assimetria da carga, após a transformação de variáveis mencionada: a assimetria levemente positiva e a existência de algum excesso de curtose (note-se que os dados estão filtrados da sua média, bem como da tendência e sazonalidade intra-anual (Hamilton (1994))).

Figura 5.12: Trajectórias dos 4 primeiros momentos acumulados da distribuição dos valores horários dos incrementos logarítmicos dos preços e das cargas com recurso a janela temporal deslizante sobre todo o comprimento da amostra (70.128 horas), com início fixo em 1 de Janeiro de 1998.



Autocorrelação

Na literatura sobre mercados liberalizados de energia há muitas referências à existência de persistência nas estimativas das funções de autocorrelação.

Knittel e Roberts (2001) apontam para os vários mercados por eles analisados, nomeadamente o CALPX, de potencial existência de persistência da FAC dado existirem coeficientes de valores significativos a mais de mil passos. O OMEL apresenta também estimativas dos valores da função de autocorrelação típicos de dependência longa (memória longa) o que se pode apreciar pelo decaimento lento (tipo hiperbólico) da FAC. No entanto, a existência de ciclos ou periodicidades pode aparentar a persistência nos coeficientes da FAC, ou mascarar-la (Gençay *et al* (2001b)).

O valor da função de autocorrelação (FAC) τ_s da série temporal $\{y_t\}$, para o atraso s é dado por:

$$\tau_s = \gamma_s / \gamma_0 = (1/\gamma_0)(E\{(y_t - E(y_t))(y_{t-s} - E(y_{t-s}))\}) \quad (5.11)$$

com $s = 0, 1, 2, \dots$, e onde γ_s é o valor da função de autocovariância entre o valor do processo no momento t com o valor do processo no momento $t-s$ e γ_0 é o valor da variância do processo. Esta função é uma função par (ver Murteira *et al* (1993)) pelo que se pode representar esta função apenas nos seus valores positivos de s , normalmente denominados de *lags* (que numa tradução literal seriam atrasos).

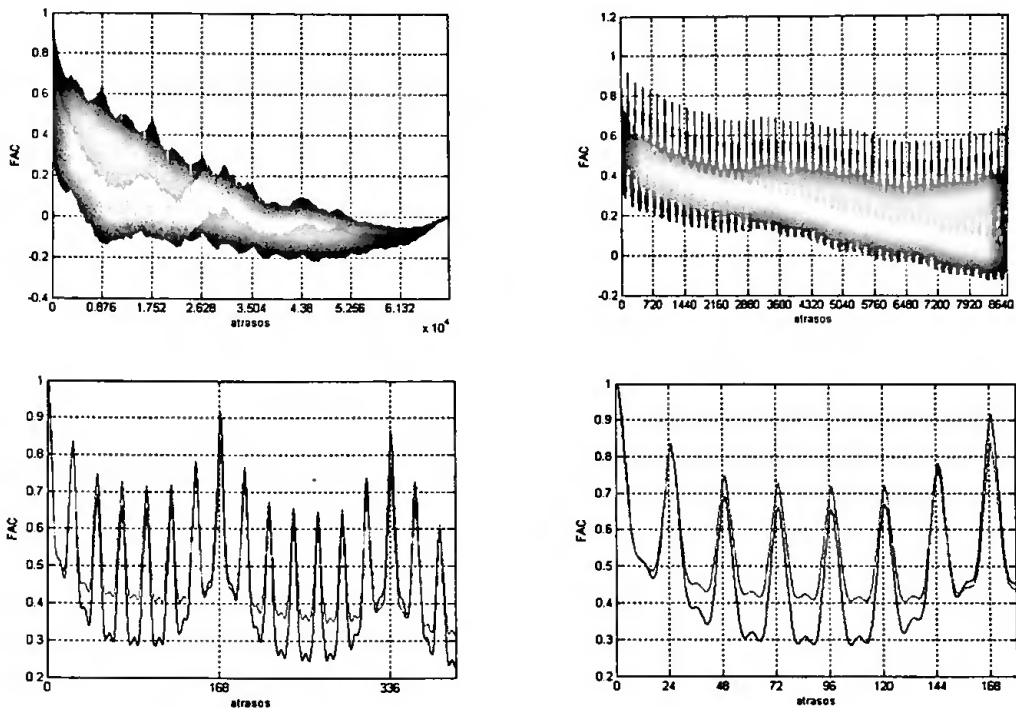
A função de autocorrelação parcial (FACP), que tem em conta apenas a correlação entre y_t e y_{t-s} , depois de se eliminar o efeito que sobre estas autocorrelações poderão ter as variáveis intermédias $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-s+1}$ (Murteira *et al* (1993)). A formulação da FACP pode ser apreciada, por exemplo, em Murteira *et al* (1993).

No gráfico no topo esquerdo da figura 5.13, pode-se apreciar a dependência de longo prazo das duas séries. A sazonalidade anual é marcante na série das cargas, pois apresenta máximos relativos às 8.760 horas de atrasos. Não se apreende a mesma ideia observando a FAC dos preços.

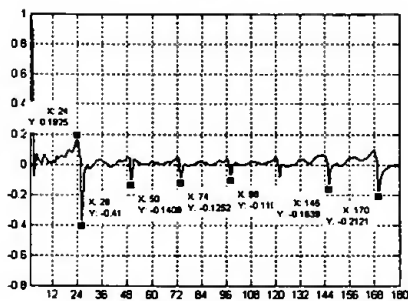
Nos gráficos da linha do meio da figura 5.13, pode-se verificar a periodicidade diária e a forte periodicidade semanal (máximo relativo no atraso 168 horas e seus múltiplos).

Figura 5.13: Funções de autocorrelação estimadas (FAC) e Funções de autocorrelação parciais (FACP) das séries horárias dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) – unidade dos atrasos (*atrasos*) é de 1 hora.

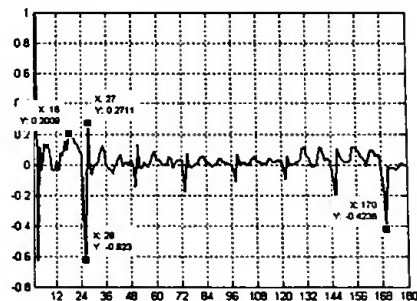
FAC's dos Preços e das Cargas



FACP – Preços



FACP -Cargas



A periodicidade semanal é muito forte e decai pouco. Como se pode apreciar pelo gráfico da esquerda no meio da figura 5.13 o valor do coeficiente de autocorrelação decai muito pouco num intervalo semanal. Mesmo dois meses depois, pode-se apreciar que a periodicidade semanal mantém uma forte influência.

As FACP's das séries de preços e cargas demonstram também que as periodicidades diárias e semanais são fortes.

5.2. - Análise de Multi-Resolução

A análise de multi-resolução tem, como fim primeiro, facilitar a visão sobre estruturas complexas, dividindo-a em estruturas sintetizadas supostamente menos complexas. No presente caso, a análise de multi-resolução permite sintetizar as dinâmicas em diferentes escalas temporais, podendo-se analisar cada uma das dinâmicas temporais por si.

Na presente análise de multi-resolução utilizar-se-à a p MODWT, ou seja, a transformada discreta de onduleta MODWT parcial: este último termo provém do facto de se optar por um nível máximo de decomposição J_0 . A escolha de J_0 deverá ser tal que a escala relacionada com este nível 2^{J_0} seja de dimensão menor que o comprimento da série N :

$2^{J_0} \leq N$, em que J_0 é a escala máxima de decomposição e N o comprimento da série temporal

Segundo Percival e Walden (2000) J_0 deverá ter como limite superior o maior inteiro que satisfaz a seguinte equação:

$$J_0 = \left\lfloor \log_2 \left(\frac{N-1}{L-1} + 1 \right) \right\rfloor, \quad (5.12)$$

em que $\lfloor \cdot \rfloor$ representa o maior inteiro menor que o valor da fórmula nele contida, N é o comprimento da amostra (70128) e L a largura do filtro de onduleta ($L=8$, para o caso da onduleta LA(8)). Para o caso presente, o valor resultante dentro do parênteses da expressão 5.12 é $J_0 = 13,29$, ou seja, $J_0 = 13$ deverá ser o valor máximo de decomposição das séries em estudo;

Na presente análise de multi-resolução optou-se pela escolha do nível $J_0 = 13$. Tal escolha baseia-se no facto da aproximação resultante, S_{13} , reflectir a média sobre a escala física $\lambda_{13} \Delta_t = 2^{13} \cdot 1h = 8.192h = 11,2$ meses, ou seja médias anuais, aproximadamente (ver Tabela 3.1).

No referente aos detalhes, neste nível de decomposição máxima, $J_0 = 13$, serão capturadas as variações inter-anuais mas não as variações intra-anuais, o que leva a uma resolução, na prática, nula (ou quase) da variabilidade intra-anual. Nas séries de preços e cargas de mercados eléctricos a sazonalidade intra-anual está perfeitamente identificada na literatura por variadíssimos autores, pelo que se seguirá a ideia de Chen *et al* (2004) em que a sazonalidade intra-anual será, no presente caso, capturada pelos detalhes $D9$ a $D12$ e outros níveis de ciclos periódicos, como o ciclo semanal ($D6$ e $D7$) e o ciclo diário ($D3$ e $D4$) serão capturados por outros níveis de detalhe (ver tabela 3.1).

Por outro lado, a eventual escolha de $J_0 < 13$ teria como consequência adicionar à função de aproximação S_{J_0} detalhes que contêm variabilidade com dependência sazonal, pelo que mais dificilmente se concluiria do andamento das séries ao longo de vários anos. (Percival e Walden, 2000, Chen *et al* 2004).

A equação da decomposição em coeficientes de onduleta e sua recomposição em detalhes e aproximação é dada pela equação 3.9 que em baixo se reproduz, em que X é o sinal original:

$$X = \omega^{-1}W = \omega^T W = \sum_{j=1}^{J_0} \omega_j^T \tilde{W}_j + \tilde{v}_{J_0}^T \equiv \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{D}_j + \tilde{S}_{J_0} = \tilde{D}_1 + \dots + \tilde{D}_{13} + \tilde{S}_{13}$$

Na figura 5.14 apresenta-se o resultado gráfico da recomposição após a transformação de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8), ou seja, as funções de detalhe e de aproximação $\tilde{D}_1 \dots \tilde{D}_{13}$ e \tilde{S}_{13} .

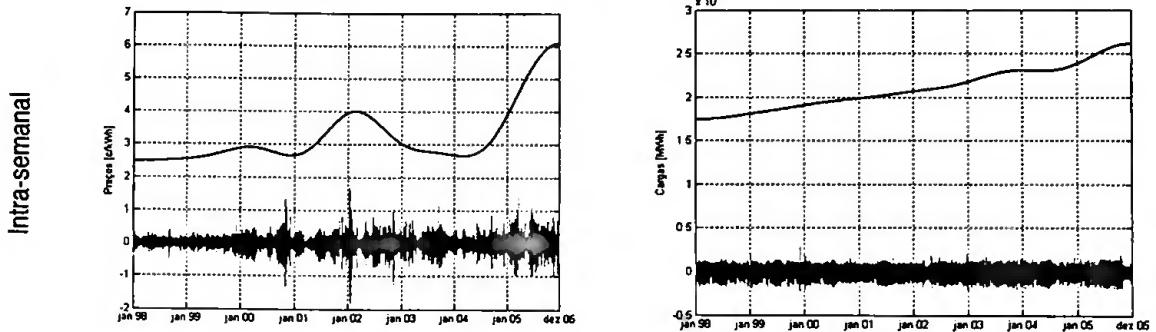
No topo da figura 5.14 pode apreciar-se o andamento da aproximação à escala 13, ou seja, a função S_{13} e em baixo o desenvolvimento dos detalhes às escalas 1 a 13 ao que corresponde as funções de reconstrução $D1$ a $D13$ dos níveis de decomposição 1 a 13, respectivamente.

A propriedade de aditividade das funções detalhes e aproximação obtidas a partir da reconstituição da transformada de onduleta parcial MODWT, permite que se imagine que sobre a função de aproximação se coloquem, literalmente, as funções de detalhe, obtendo-se uma reconstituição, do sinal original, dependendo o rigor da fidelidade do sinal sintetizado de reprodução do sinal original do número de detalhes que se adicionam à função de aproximação.

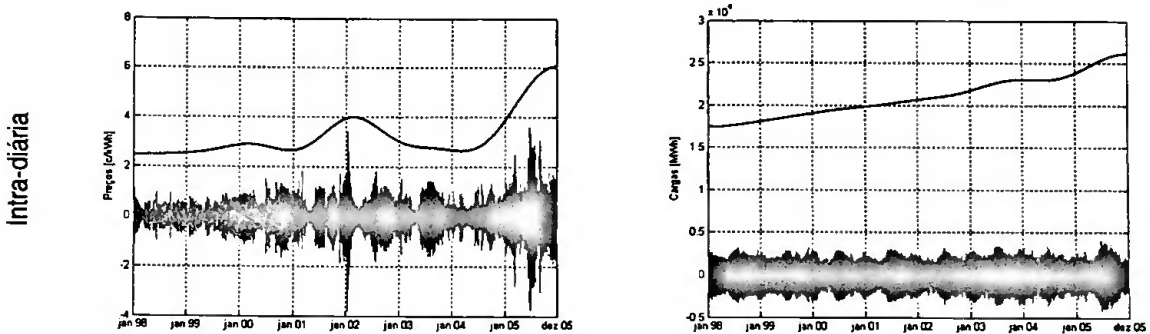
Como primeira análise, repare-se na sazonalidade anual com um pico de Verão e outro de Inverno relativamente bem demarcados em todos os anos da análise, como se pode constatar no detalhe $D11$. Poder-se-á afirmar que há uma razoável regularidade harmónica nestes detalhes, especialmente no caso da série das cargas: um pico no início do ano e outro pico no início do Verão (esta regularidade também será visível na função de aproximação de nível 11 que mais à frente se apresentará). No caso da série dos preços os ciclos não aparentam regularidade do ponto de vista da frequência e da amplitude.

Figura 5.14: Análise de Multi-resolução da série de preços e de cargas do OMEL, de 1 de Janeiro de 1998 a 31 de Dezembro de 2005 (8 anos de valores horários), por recurso à transformação parcial de onduleta J0=13 MODWT LAB

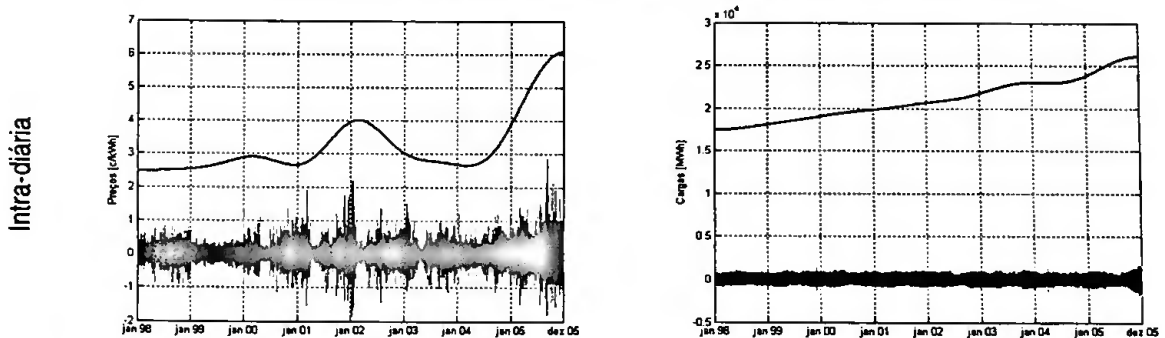
PREÇOS CARGAS
Aproximação: S_{13} – linha azul, Detalhes: D_6 – linha preta, D_5 – linha bege



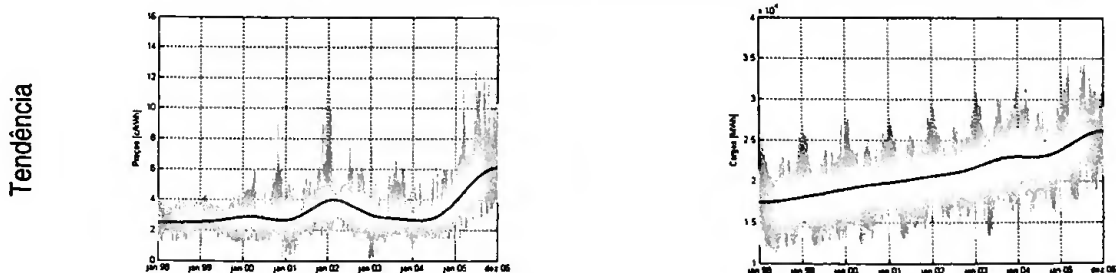
Aproximação: S_{13} – linha azul, Detalhes: D_4 – linha roxa, D_3 – linha azul claro



Aproximação: S_{13} – linha azul, Detalhes: D_2 – linha vermelha, D_1 – linha verde



Aproximações S_{13} (linha azul) sobre as séries originais dos preços e cargas (linha bege)



Note-se a sugestão em Nilsen e Haldrup (2003) de que o *volatility clustering* poderá ser sazonal, para o caso dos preços. Às escalas 11 e 12 corresponde-lhes, pela análise de variância por escalas que se apresentará mais à frente, os valores mais altos de contribuição para a variância da série no horizonte temporal intra-anual (quando excluída a variabilidade das escalas temporais inferiores).

Ao nível dos detalhes $D8$ e $D7$ nota-se uma periodicidade no *volatility clustering* das cargas que não é evidenciado nos preços – parece algo mais aleatório. Por outro lado, e no que concerne a estes detalhes observa-se, do lado dos preços, uma severidade maior na amplitude das oscilações.

Na análise da dinâmica intra-diária das cargas (detalhes $D4$ a $D1$), ressalta que não há aparente *volatility clustering*, nem aparentam sazonalidade ao nível da volatilidade. No entanto, a dinâmica intra-diária dos preços demonstra *volatility clustering* e eventual sazonalidade na volatilidade. Estas características são aparentes em todas as escalas intra-diárias da análise de multiresolução dos preços.

Análise da Tendência

Como atrás se mencionou, o nível máximo J_0 de decomposição parcial deverá ser criteriosamente escolhido. Por outro lado, a função de aproximação desse nível permite-nos verificar a tendência da série ou, como por exemplo em Witcher (2000) adoptar a função de aproximação como função determinística descritiva da tendência da série original (podendo, nalguns casos, ser difícil obter uma expressão analítica para essa função determinística). Para se poder retirar algumas ilações sobre o andamento conjunto dos preços e das cargas, apresentam-se em baixo funções de aproximação a vários níveis, com J_0 variando entre 10 a 13, como sugerido por Greenblatt (1994).

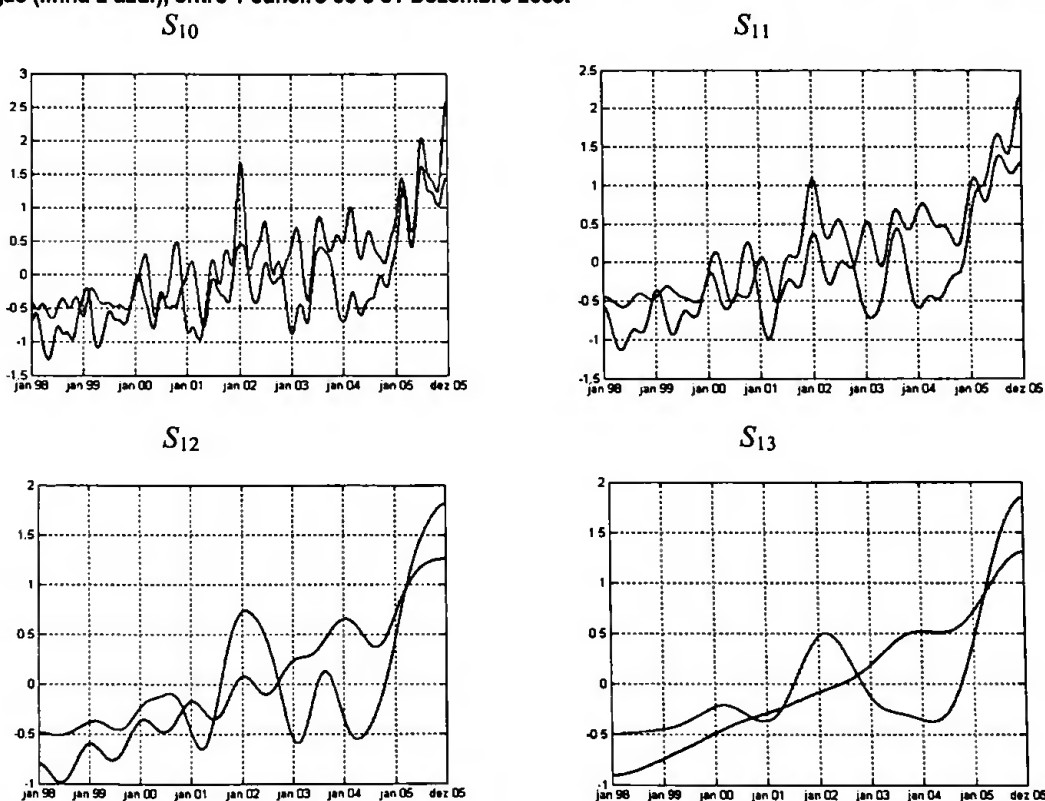
Para permitir uma comparação mais fácil e à mesma escala realiza-se a análise sobre as séries de preços e cargas padronizadas, como atrás se apresentou.

No conjunto de gráficos da figura 5.15, a função de aproximação S_{10} , não contém dinâmica inter-mensal, mas está presente toda a dinâmica intra-anual. Nela, é aparente a sazonalidade intra-anual tanto do nível dos preços e cargas, com um pico de Verão (menor) e outro de Inverno.

As funções de escala (ou aproximações) para $J_0 > 10$ correspondem a suavizações que se realizam sobre esta aproximação S_{10} , como decorre naturalmente da análise de mutiresolução por onduletas.

Analisando a trajectória da Aproximação S_{11} dos preços e cargas verifica-se, por exemplo, que não existiram picos dominantes nos preços no Inverno de 2003-2004 – tanto perto do início de Janeiro de 2003 como no final de Dezembro de 2003 (onde acontecem apenas umas ligeiras perturbações positivas que destoam da restante dinâmica dos Invernos de 2003 que contrastam muito com a dinâmica de Verão de 2003). No entanto, no que respeita às cargas existiu o “tradicional” pico de Inverno nesses dois mencionados períodos e bem demarcados da restante trajectória dos preços nesse ano.

Figura 5.15: Trajectórias temporais das funções de Aproximação S_{10} a S_{12} da recomposição após transformação de onduleta MODWT LA8 para o caso das séries padronizadas dos Preços (linha a verde) e das Cargas (linha a azul), entre 1 Janeiro 98 e 31 Dezembro 2005.



Simonsen e Weron (2003) sugerem que para um nível alto de cargas deverá corresponder um nível alto de preços. Todavia, da inspecção visual das aproximações mais estilizadas, como as de

nível 11 ($S_{1,1}$) e 12 ($S_{1,2}$) que se reportam na figura 5.15, tal não é respeitado em Janeiro de 2001, em Janeiro de 2003 e em Janeiro de 2004, só para mencionar alguns exemplos.

É aparente que quando estão em causa variações em períodos largos, mais do que 1 mês, é aparente a existência de períodos, limitados, de vincado desfasamento entre as cargas e os preços. Mesmo no caso em que se suprime toda a dinâmica intra-anual, (caso da aproximação de nível 13) os preços tiveram valores francamente mais baixos durante todo o ano de 2003, em que lhe correspondeu um máximo local nas cargas. Durante 2003, as cargas tiveram um crescimento acentuado e no entanto os preços médios continuaram a descer durante todo esse ano e até ao final do 1º trimestre de 2004. Mais à frente, na alínea 5.5 apresenta-se a análise de correlação por onduletas entre as séries dos preços e das cargas e verificar-se-á que só existe uma correlação forte para as escalas semanal e inferiores.

A aproximação de nível 13 não contém dinâmica intra-anual, demonstrando assim a existência de uma tendência, crescente, ao nível das cargas, quase linear. Ao nível dos preços a tendência é não linear pois são evidentes sinais de variações supra-anuais.

5.3. - Análise da Variância de Onduletas

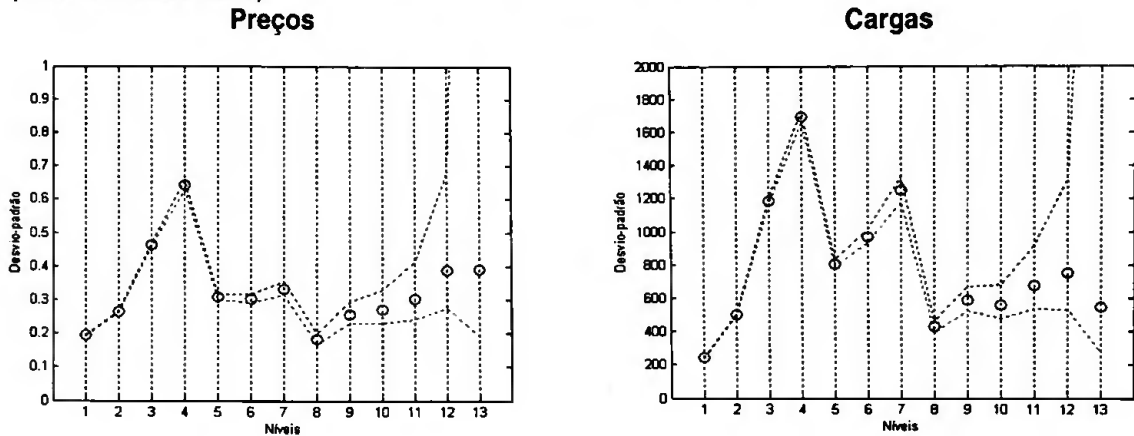
De uma forma qualitativa, tendo em conta que na reconstrução a partir da transformação de onduleta parcial MODWT não existe preservação da energia, apenas a aditividade das funções de detalhe e a aproximação é preservada, recorre-se aos coeficientes da transformação MODWT para se aferir da importância de cada escala para a variabilidade total (variância) das séries originais dos preços e cargas bem como das séries dos seus incrementos logarítmicos (Percival e Walden, 2000).

Posteriormente realizar-se-á uma análise das alterações temporais do crescimento da variância ao longo da série temporal, nas várias escalas temporais.

A decomposição do desvio-padrão¹⁷, apresenta-se na figura 5.16.

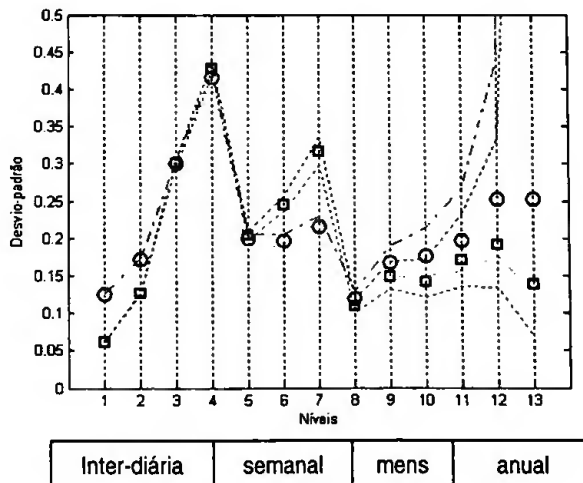
¹⁷ Preferiu-se representar o desvio-padrão dada a relação com as unidades do processo. A decomposição de onduleta do desvio-padrão é dada pela raiz quadrada da variância de onduleta para cada escala (Percival e Walden (2000))

Figura 5.16 – Decomposição do desvio-padrão, em escalas de nível 1 a 13, das séries de preços e cargas pela utilização da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8) e respectivos intervalos de confiança a 95% (linhas vermelha e verde)



Para se poder comparar mais facilmente os conteúdos por escala da variância das séries dos preços e cargas apresenta-se, na figura 5.17, um gráfico conjunto da decomposição do desvio-padrão das séries padronizadas de preços e cargas.

Figura 5.17 – Decomposição do desvio-padrão, em escalas de nível 1 a 13, das séries padronizadas de preços (linha a verde) e cargas (linha a azul) pela utilização da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8) e respectivos intervalos de confiança a 95% (linhas a traço interrompido)



Da figura 5.17 pode-se concluir que os processos têm uma decomposição do desvio-padrão muito semelhante. Para escalas superiores à oitava as decomposições são indistinguíveis, pois os intervalos de confiança das estimativas dos valores do desvio-padrão, nessas escalas,

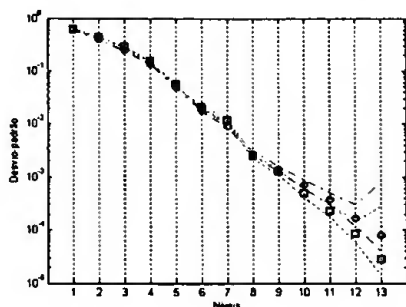
entrecruzam-se. As escalas 3 e 4 têm igual contribuição para a variância total das séries dos preços e das cargas.

A diferença mais substancial existe no nível 7 (e em menor grau no nível 6), em que existe uma mais forte variância das cargas nesse nível, ou seja, o ciclo semanal é mais demarcado na série das cargas que na série dos preços. No nível 1 e 2 os preços demonstram uma maior variância que as cargas.

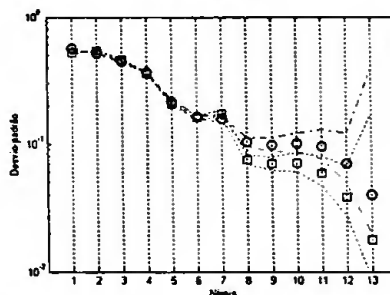
Para as séries dos incrementos logarítmicos dos preços e cargas optou-se pela apresentação da decomposição do desvio padrão por escala mas em que o eixo vertical está em escala logarítmica¹⁸. Na figura 5.18 exhibe-se, também, a decomposição de um *proxy* da volatilidade da série das variações (ou valores relativos) dos logaritmos dos preços e das cargas, dado pelo valor absoluto (módulo) da variação do logaritmo dos preços e das cargas.

Figura 5.18— Decomposição do desvio-padrão pela utilização da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8), das séries padronizadas das variações dos logaritmos dos preços (linha a verde) e das cargas (linha a azul) e das volatilidades dessas grandezas - intervalos de confiança a 95%

Variações dos logaritmos dos preços e cargas



Volatilidade das variações dos logaritmos dos preços e cargas



O recurso à diferenciação das séries padronizadas leva a concluir que as decomposições do desvio-padrão das duas séries sejam indistinguíveis (note-se que os intervalos de confiança a 95% se entrecruzam em todas as escalas).

A decomposição nas várias escalas da volatilidade dos preços e das cargas é, de forma semelhante ao que se concluiu para os níveis de carga e preço, idêntica nas duas séries¹⁹.

¹⁸ Apesar de não se apresentar o gráfico da figura 5.17 em escala logarítmica no eixo vertical, foi verificado que não existem diferenças significativas no andamento geral quando utilizada escala vertical logarítmica.

¹⁹ Note-se que apenas nas escalas 8, 9 e 10 não há cruzamento dos intervalos de confiança, mas não se pode afirmar que exista uma diferença relevante mesmo nesses três níveis da decomposição.

5.4. - Análise das Variações Temporais da Variância

Seguidamente realiza-se a análise das alterações temporais da variância no tempo com recurso à “variância rotativa de onduleta”²⁰. Percival e Walden, (2000), sugerem a utilização da variância rotativa acumulada dos coeficientes de onduleta da transformação MODWT para o estudo da dependência temporal da variância em cada escala.

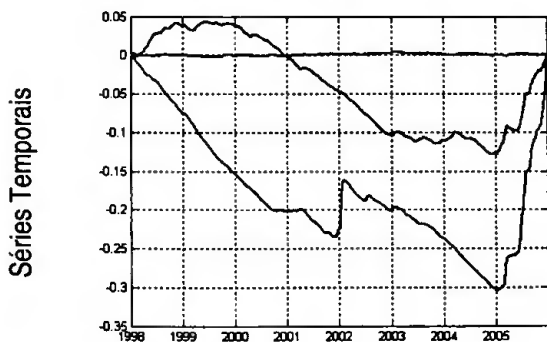
A análise dos gráficos da figura 5.19 com a trajectória dos desvios da variância ao crescimento temporal expectável é essencialmente qualitativa (Percival e Walden (2000)). A linha zero em cada gráfico, e ao nível de cada escala aí representada, é dada pelos extremos do gráfico nos ponto $t = 0$ e $t = N-1$, pois nesses pontos o valor de $C'_{j,t}$ é forçosamente nulo.

Na linha superior coloca-se a mesma informação obtida no gráfico da variância (desvio-padrão) da figura 5.10, mas colocada numa perspectiva de alterações às trajectórias para as séries temporais originais da carga e do preço padronizadas.

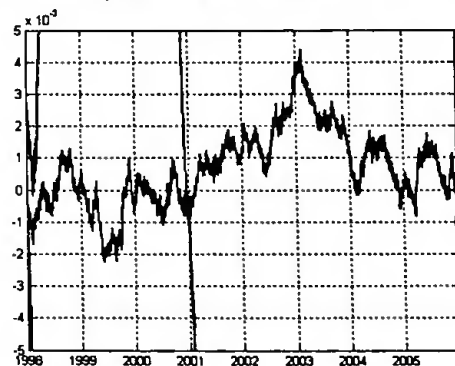
Na linha superior da figura 5.19 representam-se também os desvios à trajectória da variância para uma amostra aleatória gaussiana padrão de igual comprimento das séries de preços e de cargas. Naturalmente, os desvios são ínfimos comparativamente aos das séries dos preços e das cargas.

Figura 5.19 – Desvios das trajectórias temporais do crescimento da variância no comprimento da amostra nas várias escalas da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8)

Séries de preços (verde) e cargas (azul) padronizadas e série gerada a partir de uma distribuição normal de média nula e desvio-padrão unitário (vermelho)

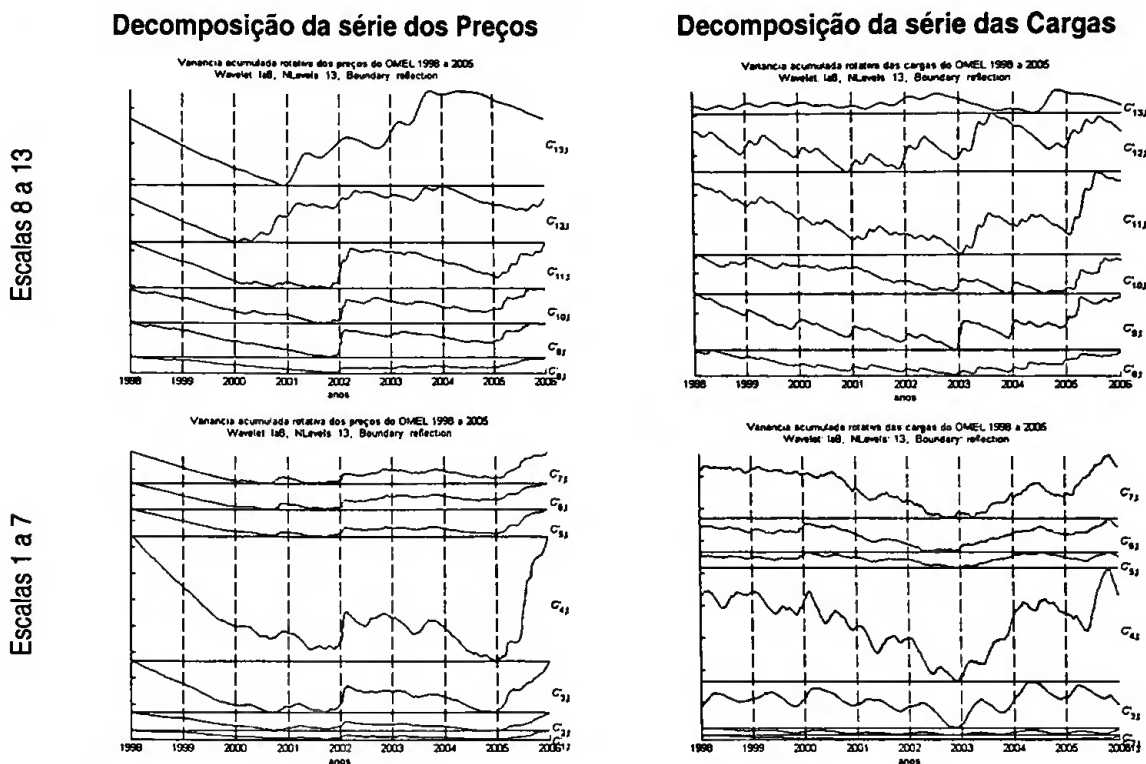


Pormenor das alterações da variância da série gerada a partir de uma distribuição normal de média nula e desvio-padrão unitário (vermelho)



²⁰ Ver equação 3.16.

Figura 5.19 – Desvios das trajectórias temporais do crescimento da variância no comprimento da amostra nas várias escalas da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8)



Da análise do conjunto de gráficos da figura 5.19 ressalta o seguinte:

- 1.- As perturbações às escalas 1, 2 e 8 são negligenciáveis na sua trajectória em toda a dimensão da amostra tanto na série dos preços como na série das cargas, o que permite concluir que, nestas escalas, a variância comporta-se de forma regular.
- 2.- As perturbações observáveis nas escalas 5, 6 e 7 (apenas para o caso dos preços no caso desta última escala) são também diminutas quando comparadas com as restantes escalas.
- 3.- Os maiores desvios dão-se à escala 4 (dinâmica do ciclo diário) da decomposição para ambas as séries, à escala 13 (dinâmica supra-anual) para a série dos preços e à escala 11 (dinâmica inter-anual) para a série das cargas.
- 4.- A variância dos preços não demonstra qualquer tipo de sazonalidade em qualquer das escalas analisadas. Nem sequer naquelas escalas em que se observa maiores desvios à trajectória normal como no caso da escala 4.
- 5.- Há, aparentemente, sazonalidade anual (não muito demarcada) nos desvios à trajectória de crescimento da variância das cargas no nível 3 e, talvez, no nível 4. Note-se

que está subjacente a estes níveis dinâmicas intra-diárias, estando em causa alterações anuais da variância dessa dinâmica intra-diária com uma sazonalidade anual.

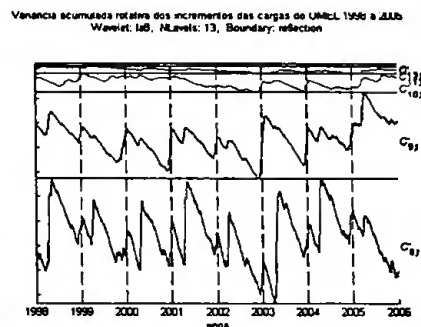
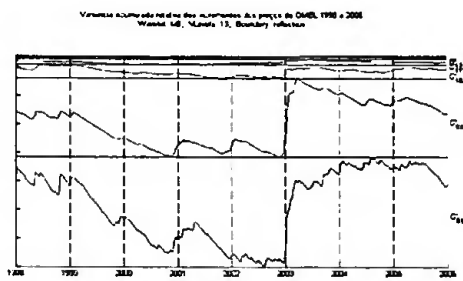
6.- É aparente a sazonalidade anual, pouco vincada note-se, nos níveis 8 a 12 para o caso da série das cargas. Existem, anualmente, dois máximos locais mas pouco demarcados.

7.- Os desvios à trajectória temporal do crescimento da variância das cargas não são seguidos por desvios à trajectória do crescimento da variância dos preços, qualquer que seja a escala temporal analisada.

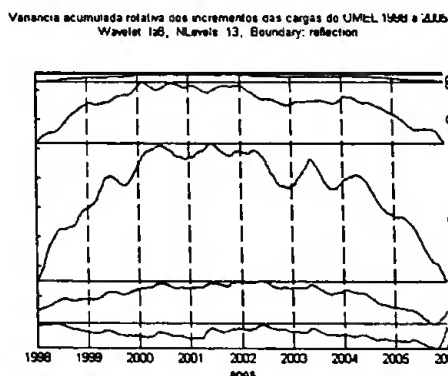
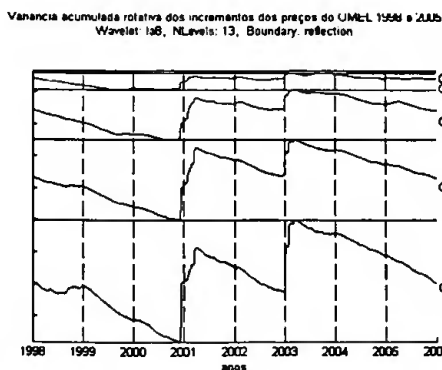
Diferenciando as séries originais dos preços e das cargas, e analisando o comportamento do crescimento da variância rotativa de onduleta nas várias escalas temporais, cujo resultado se exhibe na figura 5.20.

Figura 5.20 – Desvios das trajectórias temporais do crescimento da variância com a dimensão da amostra nos vários níveis dos valores dos coeficientes de onduleta das transformadas de onduleta J0=13 MODWT LA(8)
Incrementos dos Preços **Incrementos das Cargas**

Escalas 8 a 13



Escalas 1 a 7



Os incrementos dos preços exibem características regulares de crescimento da variância nas escalas 1 a 7 excepto quando são interrompidas com saltos nos Invernos de 2001 e 2003. Tal não acontece do lado dos incrementos das cargas.

Fica clara a sazonalidade ao nível da série das cargas nas escalas 8 e 9, não existindo idêntico comportamento na série de incrementos dos preços.

5.5. – Correlações Cruzadas Preços - Cargas

Seguindo-se as sugestões da literatura de que os níveis das cargas podem influenciar o nível dos preços e a volatilidade dos preços, verificar-se-ão quais os níveis de correlação cruzada entre as seguintes variáveis:

1. Entre níveis de preços e níveis de cargas;
2. Entre a volatilidade dos preços e a volatilidade das cargas;
3. Entre o nível dos preços e a volatilidade dos preços;
4. Entre o nível das cargas e a volatilidade das cargas;
5. Entre a volatilidade dos preços e o nível das cargas;
6. Entre o nível de preços e a volatilidade das cargas;

Toma-se como *proxy* da volatilidade o valor absoluto dos incrementos dos logaritmos das séries.

A função de covariância cruzada $Cov\{X_s, Y_t\}$, de dois processos estacionários de segunda ordem X_t e Y_t , existe e é apenas função da diferença dos instantes s e t e pode ser estimada por:

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}), \text{ com } k = 0, +/- 1, +/- 2, \dots \quad (5.13)$$

Obtendo-se o estimador para a correlação cruzada²¹ dado por:

$$\hat{\rho}_{xy}(k) = \hat{\gamma}_{xy}(k) / \sqrt{\hat{\gamma}_{xx}(0) \hat{\gamma}_{yy}(0)}, \text{ com } k = 0, +/- 1, +/- 2, \dots \quad (5.14)$$

Os valores das correlações cruzadas para as séries temporais originais dos preços e cargas e das volatilidades dos preços e das cargas apresentam-se na tabela 5.5.

²¹ As propriedades da função de correlação cruzada podem ser encontradas em detalhe em, por exemplo, Murteira et al (1993).

Tabela 5.4 – Coeficientes de correlação cruzada das séries de preços, cargas, volatilidade dos preços e volatilidade das cargas.

	Séries	Coeficiente de correlação	Correlação ²²	p-value	Intervalo de Confiança a 95%	
1	Nível dos preços e nível das cargas	0.6797	Positiva substancial	0	0.6758	0.6838
2	Volatilidade dos preços e volatilidade das cargas	0.3414	Positiva moderada	0	0.3349	0.3414
3	Nível dos preços e volatilidade dos preços	-0.0497	Negativa ínfima	0	-0.0570	-0.0423
4	Nível das cargas e volatilidade das cargas	-0.0715	Negativa ínfima	0	-0.0788	-0.0641
5	Volatilidade dos preços e nível das cargas	0.0138	Positiva ínfima	0.003	0.0064	0.0212
6	Nível de preços e volatilidade das cargas	-0.0369	Negativa ínfima	0	-0.0443	-0.0295

Da tabela 5.4 conclui-se que todas as correlações são estatisticamente diferentes de zero e demonstram as seguintes potenciais relações lineares:

1. A correlação entre o nível dos preços e das cargas é francamente elevada e positiva, ao que poderá corresponder a hipótese de a altos (baixos) valores das cargas corresponderem altos (baixos) valores de preços;
2. A correlação entre as volatilidades dos preços e a volatilidade das cargas é relativamente elevada, podendo se inferir que a alta volatilidade das cargas pode corresponder muitas vezes a alta volatilidade dos preços;
3. A correlação entre o nível dos preços e a sua volatilidade é muito baixa, de valor negativo, ao que haverá alguma (muito fraca) tendência para que a preços altos (baixos) lhe corresponda um nível baixo (alto) de volatilidade.
4. A correlação entre o nível das cargas e a volatilidade das cargas corresponde a uma situação semelhante àquela que existe para a correlação entre o nível de preços e o nível da volatilidade dos preços;
5. A correlação entre a volatilidade dos preços e o nível das cargas, é muito pequena, mas positiva, ou seja, haverá uma fraca tendência de a valores altos (baixos) do nível das cargas corresponder valores altos (baixos) da volatilidade dos preços;
6. A correlação entre o nível dos preços e a volatilidade das cargas é negativa e muito pequena, pelo que haverá uma tendência semelhante àquela que se mencionou para o caso do nível dos preços e da sua volatilidade.

²² Seguiu-se a caracterização dada em Newbold (1995).

Além dos valores de correlação cruzada no instante de simultaneidade entre as duas séries (sem atraso relativo de uma em relação à outra) interessa verificar de que forma essa correlação pode variar no tempo.

Para uma análise rápida das estruturas das várias correlações cruzadas definidas na tabela 5.5 (1 a 6) e que se apresentam na figura 5.21.

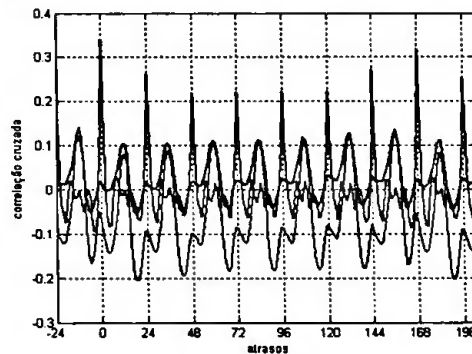
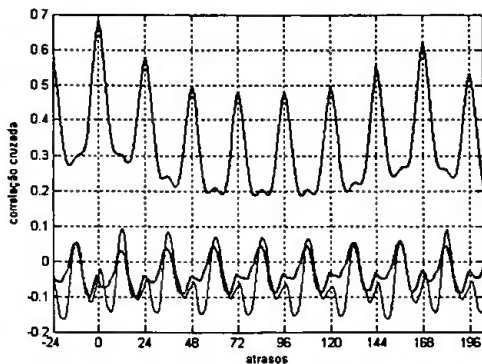
O panorama das relações 3 a 6 descritas na tabela 5.4 não se altera substancialmente com a introdução de defasamentos entre as duas variáveis protagonistas nessa relação, pois as ordens de grandeza mantêm-se e existem inversões de ciclo de correlação com uma dinâmica intra-diária.

A correlação entre o nível dos preços e o nível das cargas demonstra periodicidade diária e semanal, com uma banda de variação razoável ao longo do tempo.

Figura 5. 21– Funções de correlação cruzada entre as várias séries (unidade em abcissas – hora).

Correlação cruzada dos preços com a série das cargas (linha a azul), com a volatilidade da carga, (linha a roxo) e com a volatilidade dos preços (linha a verde)

Correlação cruzada da volatilidade dos preços com a volatilidade das cargas (linha a vermelho), com o nível das cargas, (linha a preto) e entre o nível das cargas e a volatilidade das cargas (linha a rosa)



A correlação entre a volatilidade dos preços e a volatilidade das cargas demonstra periodicidade diária e semanal mas também alguma complexidade na dinâmica intra-diária, com eventuais inversões na relação, mas pouco expressivas, e com uma com uma banda de variação razoável ao longo do tempo.

Desta informação faz sentido verificar os valores de correlação cruzada decompostos em várias escalas temporais, recorrendo à transformada parcial de onduleta MODWT LA(8), de forma a

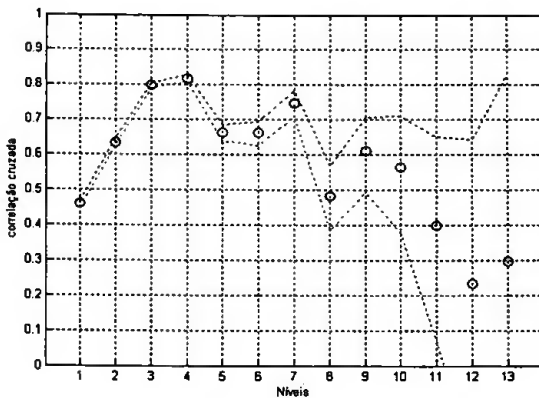
melhor se poder identificar o tipo de complexidade da estrutura de correlação cruzada das séries temporais.

A covariância de onduleta decompõe a covariância de um processo bivariado em escalas temporais adimensionais $\tau^j = 2^{j-1}$, que se apresentam nas figuras 5.22 a 5.24.

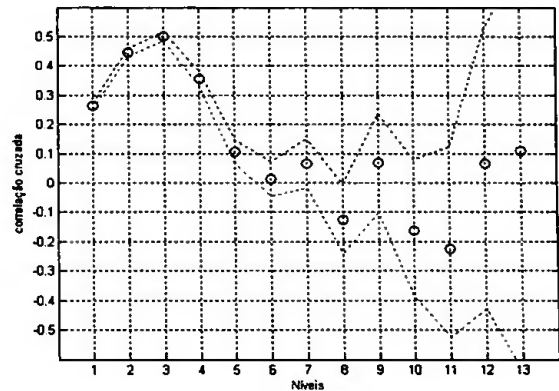
Como se pode observar pelas figuras 5.22 a 5.24 nem sempre todos os níveis de correlação são significativamente diferentes de zero para todos os horizontes temporais.

Figura 5.22: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8) das séries dos níveis dos preços e das cargas e da sua volatilidade

Correlação cruzada entre o preço e a carga
(Intervalos de confiança a 95%)



Correlação cruzada entre a volatilidade do preço e a volatilidade da carga (Intervalos de confiança a 95%)



Da análise dos gráficos da figura 5.22 tem-se que:

a) - Para o caso dos níveis de preços e de níveis de cargas:

1. As correlações dos coeficientes da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8) nos vários níveis de decomposição entre as cargas e os preços apresentam valores elevados, sendo predominantes as correlações fortes às escalas 3, 4 e 7 (escalas diárias e semanal). Nestas escalas sim, transparece a hipótese de a altos valores de carga corresponder altos valores de preços, mas apenas numa dinâmica diária (escala 3 e 4) e semanal (escala 7);
2. O valor da correlação para os restantes níveis de decomposição acima de 9, ou seja, para as grandes escalas decai bastante.
3. A partir do nível 11, o valor da correlação entre níveis de carga e de preço, bem como das respectivas volatilidades, não é significativamente diferente de zero.

b) - Para o caso da volatilidade dos preços e volatilidade das cargas:

- No caso da volatilidade das cargas e da volatilidade dos preços note-se que apenas as escalas intra-diárias e a diária têm níveis de correlação significativamente não nulos e positivos, sendo a escala 3 (inter-diária) dominante.

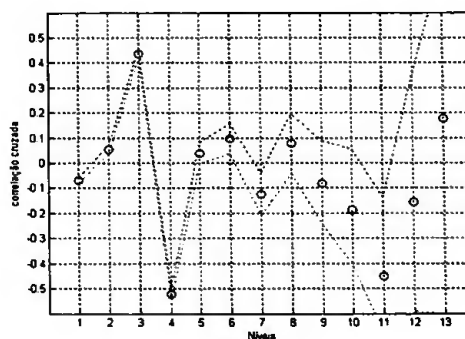
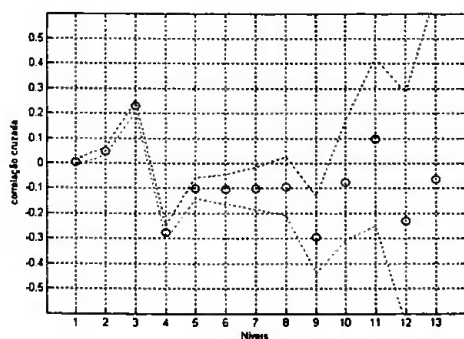
Conclui-se que a dinâmica de correlação cruzada, de atraso nulo, entre os preços e as cargas tem uma estrutura temporal dominada pelo ciclo diário e pelo ciclo semanal e é portanto, dependente do horizonte temporal, mas sempre positiva. Os valores de correlação forte às escalas diária e semanal estavam mascarados por valores de correlação mais baixos às escalas grandes, mensal e superior, que levam a que a correlação global das duas amostras sejam significativamente mais baixa do que para as escalas dominantes²³.

Da tabela 5.4 observou-se que o coeficiente de correlação cruzada entre os preços e a volatilidade dos preços é muito baixo. No gráfico da esquerda da figura 5.23 representa-se a análise da decomposição da correlação cruzada para os preços e para a volatilidade dos preços realizada da mesma forma que para o caso das séries de preços e cargas.

Figura 5.23: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta J0=13 MODWT LA(8) das séries dos níveis dos preços e da volatilidade dos preços, e dos níveis das cargas e volatilidade das cargas .

Correlação cruzada entre os preços e a volatilidade dos preços (Intervalos de confiança a 95%)

Correlação cruzada entre as cargas e a volatilidade das cargas (Intervalos de confiança a 95%)



²³ Stevenson (2001) incorpora no seu modelo de variações de preços a variação das cargas. Seguiu-se esta ideia e realizou-se também a correlação entre os incrementos dos preços e os incrementos das cargas e não foi apreciada nenhuma diferença qualitativa em relação à decomposição de onduleta da correlação cruzada entre preços e cargas. Pode-se afirmar, sem perda de generalidade, que o gráfico da decomposição de onduleta da correlação cruzada entre preços e cargas é o mesmo para as variações dos preços e variações das cargas.



Da análise dos gráficos da figura 5.23 analisa-se com maior detalhe a razão da conclusão sobre a infima correlação cruzada entre os preços e a volatilidade dos preços patente na tabela 5.4:

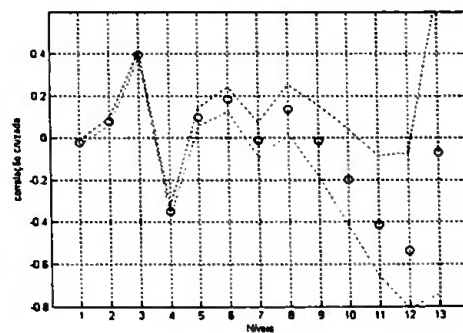
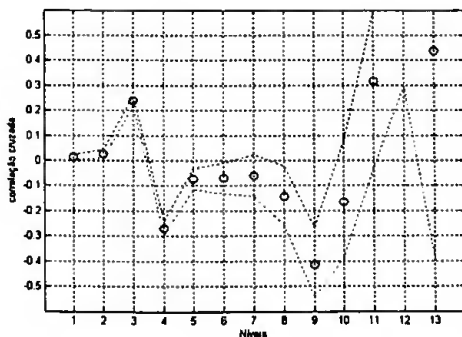
1. A partir da escala 7 (semanal), a correlação não é estatisticamente diferente de zero.
2. Para as escalas intra-diárias, escalas 2 e 3, a correlação cruzada é substancialmente positiva pelo que se pode concluir que quando os preços são altos (baixos) há uma tendência para a volatilidade ser alta (baixa), o que está em acordo com o sugerido por Simonsen e Weron (2003), mas não parece constituir uma forte relação.
3. Por outro lado, apesar da periodicidade diária do nível dos preços, bem como da sua correlação cruzada desfasada no tempo, há uma inversão da correlação no nível 4 com peso idêntico ao da escala 6. Os valores de contribuição para a correlação global simétricos em escalas diferentes resultam em anulação mútua, pelo que o valor global de correlação apresentava-se mascarado por esta dinâmica.
4. Para o caso das cargas e da sua volatilidade o comportamento é semelhante, mas mais vincado.

Sobre a questão da correlação cruzada entre a volatilidade dos preços e o nível das cargas, representa-se no gráfico da figura 5.24 a decomposição da correlação cruzada entre os coeficientes da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) da série da volatilidade dos preços e do nível das cargas.

Figura 5.24: Decomposição em escalas temporais da correlação cruzada dada pelos coeficientes da transformada de onduleta $J_0=13$ MODWT LA(8) das séries da volatilidade dos preços e dos níveis das cargas e das séries dos níveis dos preços e da volatilidade das cargas.

Correlação cruzada entre a volatilidade dos preços e o nível das cargas. (Intervalos de confiança a 95%)

Correlação cruzada entre os preços e a volatilidade das cargas (Intervalos de confiança a 95%).



No que concerne à correlação cruzada do par volatilidade dos preços e nível das cargas e do par nível dos preços e volatilidade das cargas conclui-se que:

1. No nível de decomposição 3 e 4 o comportamento é semelhante ao caso anterior da correlação entre o nível dos preços (cargas) e a volatilidade dos preços (cargas). De uma forma qualitativa pode-se afirmar que, para as escalas superiores, os coeficientes não são significativamente diferentes de zero, com excepção da escala 12, em que se pode concluir que a níveis altos de cargas corresponderão níveis altos de volatilidade dos preços, numa dinâmica anual, ou seja, anos em que a média do nível de cargas é elevado corresponder-lhe-á anos de volatilidade média elevada. (Repare-se-que para o caso da dinâmica semanal tal não se pode afirmar).

Da análise realizada às várias correlações de onduleta entre as séries originais e as volatilidades tem-se que as correlações que demonstram mais significado, de um ponto de vista qualitativo, são:

1. A correlação entre preços e cargas (dominada pelas escalas 2 a 7);
2. A correlação entre a volatilidade dos preços e das cargas (dominada pelas escalas 1 a 4).
3. A correlação entre a volatilidade dos preços com o nível dos preços, nas escalas 3 e 4, apenas e com simetria entre as duas escalas consecutivas;
4. A correlação entre a volatilidade dos preços e o nível das cargas, apenas na escala 12.

5.6. - Memória Longa

Das várias metodologias possíveis para obtenção de uma estimativa do expoente H ou do expoente d de um processo fraccional $FD(d)$ elegeram-se a proposta por Percival e Walden (2000), simples e que se socorre de uma regressão linear aproveitando-se a decomposição por escalas da variância de onduleta.

Por outro lado, a decomposição em escalas do desvio-padrão apresentada nas figuras 5.17 e 5.18, levam a suspeitar que exista presença de um processo com características de auto-similaridade (Percival e Walden (2000)), dada por uma lei potencial do tipo

$$\nu(\tau_j) \propto \tau_j^{-\alpha-1}, \quad (5.14)$$

pelo que se ensaiará inferir se os valores dos logaritmos da variância (por escala) resultarão, de forma estatisticamente significativa, numa lei relacional linear entre escalas.

Na figura 5.25 representa-se a grandeza dada pela equação 3.30 para o caso dos preços e das cargas e que seguidamente se reproduz devidamente adaptada para cada uma das séries em causa:

$$Y_{Preço}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{Preço}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.15)$$

$$Y_{Carga}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{Carga}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.16)$$

Para o caso dos incrementos logarítmicos dos preços e cargas (ou retornos), realizar-se-á estimativa semelhante com recurso a equação similar, tendo em conta a decomposição da variância dos retornos dos preços e cargas:

$$Y_{retP}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{retP}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.17)$$

$$Y_{retC}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{retC}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.18)$$

Para o caso da volatilidade, dada pelo valor absoluto dos incrementos logarítmicos dos preços e cargas, realizar-se-á estimativa semelhante com recurso a equação similar, tendo em conta a decomposição da variância das séries dos valores absolutos dos retornos dos preços e cargas:

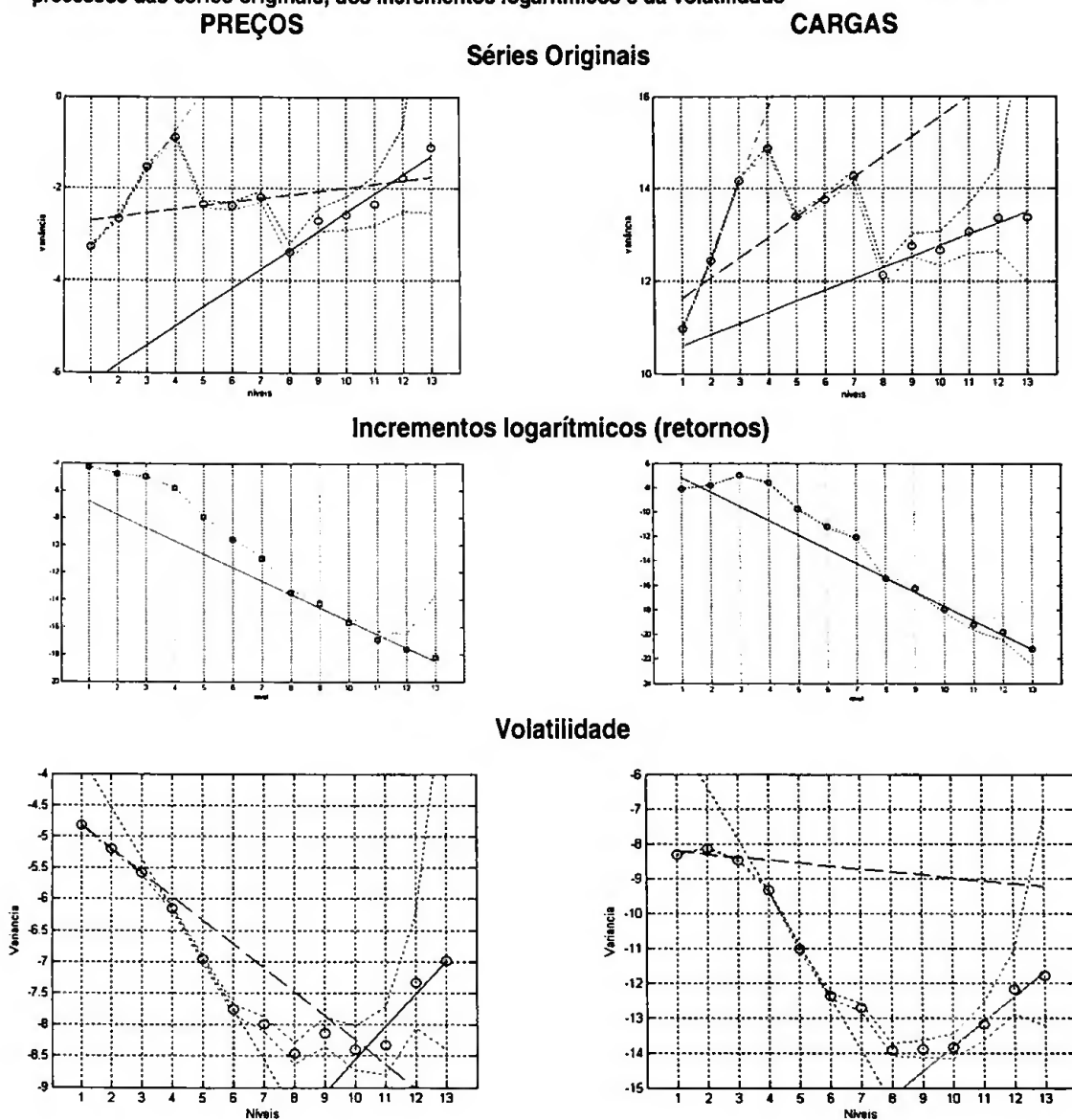
$$Y_{volP}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{volP}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.19)$$

$$Y_{volC}(\tau_j) \equiv \log(\hat{v}_{volC}(\tau_j)) - \psi(\eta_j/2) + \log(\eta_j/2) \quad (5.20)$$

No conjunto de gráficos da figura 5.25 são também representados os valores dos intervalos de confiança a 95% das grandezas mencionadas, tendo em mente o facto dos valores do logaritmo da variância de onduleta $\log(\hat{v}_X^2(\tau_j))$, em cada escala, serem valores estimados.

Os resultados da regressão deverão garantir que o segmento de recta que une as escalas em causa esteja contido dentro dos intervalos de confiança obtidos nas estimativas da variância (Percival e Walden (2000)), pelo que daqui surge o principio de selecção do subconjunto de escalas a utilizar para a verificação de existência de fractalidade ou multifractalidade.

Figura 5.25: Representação gráfica das grandezas $Y(\tau_j)$ definidas pela equação 5.15 a 5.20 para os processos das séries originais, dos incrementos logarítmicos e da volatilidade



As inclinações das rectas (β) obtidas da interpolação linear estão relacionadas com os parâmetros d dos processos fracionalmente integrados e do expoente H da seguinte forma:

$$d = 1/2\beta + 1/2 \tag{5.21}$$

$$H = d + 1/2 = 1/2\beta + 1 \tag{5.22}$$

Na tabela 5.5²⁴ apresentam-se os resultados dos valores das inclinações das rectas (*b*) obtidos por regressão e o correspondente *p-value* desse coeficiente, bem como a sua relação com os parâmetros *d* e *H*.

Tabela 5.5: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries dos Preços e das Cargas

PREÇOS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p-value</i>	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 3	1,2567	0,1025	<i>H não definido</i>	1,13	Não significativo
5 a 7	0,1122	0,4473	<i>H não definido</i>	0,56	Não significativo
8 a 13	0,5916	0,0009	<i>H não definido</i>	0,80	Memória Longa, não estacionário

CARGAS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p-value</i>	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 3	2,3025	0,0313	<i>H não definido</i>	1,65	Memória Longa, não estacionário
5 a 7	0,6312	0,0582	<i>H não definido</i>	0,82	Não significativo
8 a 13	0,3486	0,0040	<i>H não definido</i>	0,67	Memória Longa, não estacionário

(Nota - Quando indicado "não significativo" será porque o *p-value* do valor estimado não garante um nível de significância de 0,05).

Deve-se tomar em linha de conta que no caso da série dos preços a trajectória do conjunto de escalas 1 a 3 não permite realizar uma regressão linear dentro dos critérios mencionados pois pode-se verificar pelo gráfico da direita da figura 5.25 que a recta de regressão não está contida nos intervalos de confiança do valor de variância (corrigida) do nível 2.

Para o caso da série de níveis de preços:

1. Não existe um expoente de Hurst Global que abranja todas as escalas (1 a 13). A existir fractalidade, ela deverá ser multi-fractal.
2. Não se conseguiram provas de evidência empírica que apontem para fractalidade ao nível das escalas da dinâmica intra diárias (1 a 3) nem nas escalas intra-semanais (5 a 7).
3. Para as escalas grandes, tudo aponta para um processo de memória longa não estacionário, pois $d > 0.5$ (*H* não está definido para valores superiores a 1). O valor de *d* estimado aponta que haverá necessidade de diferenciar o conjunto desta dinâmica, devendo-se obter um processo do tipo anti-persistente ($d' = d - 1 = -0,2$).

Para o caso da série de níveis das cargas:

1. Não existe um expoente de Hurst Global que abranja todas as escalas (1 a 13). A existir fractalidade, ela deverá ser multi-fractal.
2. Para todos os conjuntos de escalas tudo aponta para a existência de processos não estacionários, de memória longa, mas de diferente grau, pois os valores de *d* diferem

²⁴ No Anexo B encontram-se os resultados estatísticos completos das regressões.

razoavelmente entre os 3 diferentes agrupamentos de escalas apresentados na tabela 5.13.

Nos testes aDF (*augmented* Dickey-Fuller) tinha-se concluído pela estacionaridade da série, ou seja pela rejeição de um processo integrado I(1), havendo uma contradição com os valores obtidos na presente alínea, pelo menos no caso da série dos preços. Leon e Rubia (2001) tinham concluído pela rejeição e pela não rejeição da hipótese de estacionaridade, consoante a hipótese nula do teste utilizado (aDF ou KPSS). Tudo aponta que a dinâmica do processo dos preços (e das cargas) não poder ser modelada com um só parâmetro para as várias escalas, podendo esta razão mascarar os testes efectuados por Leon e Rubia (2001).

Na tabela 5.6 apresentam-se os resultados para o caso dos incrementos dos logaritmos dos preços e das cargas.

Tabela 5.6: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries dos incrementos logarítmicos (retornos) dos preços e das cargas

INCREMENTOS LOGARÍTMICOS DOS PREÇOS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p</i> -value	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 4	-0,6983	0,0258	0,650841315	0,15	Memória Longa, estacionário
5 a 7	-2,2067	0,0310	<i>H não definido</i>	-0,60	Anti-persistente, não invertível
8 a 13	-1,4372	0,0001	0,281422044	-0,22	Anti-persistente, estacionário

INCREMENTOS LOGARÍTMICOS DAS CARGAS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p</i> -value	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 4	0,3445	0,3402	<i>H não definido</i>	0,67	Não significativo
5 a 7	-1,6625	0,0898	0,168763482	-0,33	Não significativo
8 a 13	-1,6753	0,0001	0,162359237	-0,34	Anti-persistente, estacionário

Note-se o facto destas séries corresponderem à primeira diferença das séries (logaritmos) dos preços e das cargas. Assim sendo, é expectável que os novos valores do parâmetro fraccional *d*, por exemplo *d'*, estejam relacionados²⁵ com os valores de *d* das séries originais por

$$d' = d - 1 \quad (5.22)$$

sendo fácil verificar dos valores de *d* das tabelas 5.5 e 5.6 que essa relação existe.

Na tabela 5.7 apresentam-se os resultados para o caso dos valores absolutos dos incrementos dos logaritmos dos preços e das cargas, *proxy* da volatilidade de cada uma das séries.

Tabela 5.7: Resultados da regressão linear para obtenção do expoente de Hurst para o caso das séries das volatilidades dos preços e das cargas

²⁵ Ver, por exemplo, Percival e Walden (2000) ou Gençay *et al* (2002).

VOLATILIDADE DOS PREÇOS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p</i> -value	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 3	-0,5492	0,0014	0,73	0,23	Memória Longa, estacionário
4 a 6	-1,1612	0,0010	0,42	-0,08	Anti-persistente, estacionário
8 a 13	0,7581	0,0478	<i>H não definido</i>	0,88	Memória Longa, não estacionário

VOLATILIDADE DAS CARGAS					
Escalas	<i>b</i>	<i>p</i> -value	<i>H</i>	<i>d</i>	Observações
1 a 3	-0,1230	0,6850	0,94	0,44	Não significativo
4 a 6	-2,1829	0,0412	<i>H não definido</i>	-0,59	Anti-persistente, não invertível
8 a 13	1,0241	0,0132	<i>H não definido</i>	1,01	Memória longa, não estacionário

Para o caso dos valores absolutos dos incrementos dos logaritmos dos preços (volatilidade dos preços):

1. Não existe um expoente de Hurst Global que abranja todas as escalas (1 a 13) ou um conjunto alargado de escalas. A existir fractalidade, ela deverá ser multi-fractal.
2. Para o caso da volatilidade dos preços, conseguiram-se provas de evidência empírica que apontam para fractalidade ao nível das escalas mais pequenas, dinâmica inter-diária, com valores de *H* que apontam para a existência de memória longa ($H > 0,5$ ou $d > 0$).
3. Para as escalas inter-semanais (níveis 4 a 6) conclui-se pela presença de um processo estacionário de memória curta, auto-regressivo, pois $H < 0,5$.
4. Para as escalas grandes, conclui-se por um processo de memória longa não estacionário, pois $d > 1/2$ (*H* não está definido para valores superiores a 1).

Para o caso dos valores absolutos dos incrementos dos logaritmos das cargas (volatilidade das cargas):

1. Não existe um expoente de Hurst Global que abranja todas as escalas (1 a 13) ou um conjunto de escalas. A existir fractalidade, ela deverá ser multi-fractal.
2. Não se conseguiram provas de evidência empírica que apontam para fractalidade ao nível das escalas mais pequenas.
3. Para as escalas inter-semanais (níveis 4 a 6) conclui-se pela presença de um processo estacionário de memória curta (anti-persistente), não invertível, pois $d < -0,5$. (Witcher, Guttorp, Percival (2004))
4. Para as escalas grandes, tudo aponta para um processo de memória longa não estacionário, pois $d > 0,5$ (*H* não está definido para valores superiores a 1).

Para o caso das séries que se apresentam com um expoente de Hurst característico de processos de memória longa mas não estacionários, a estacionarização far-se-á por diferenciação. No

entanto, o que estará em causa na série da volatilidade dos preços e das cargas, e se em presença de efectiva multifractalidade, a diferenciação levará à obtenção de processos fortemente anti-persistentes (ou seja, fortemente regressivos) pois afectará todas as escalas. No caso presente, e para alguns dos conjuntos de escalas acima definidos, a diferenciação levaria à obtenção de processos não invertíveis pois o valor de d será inferior a $-1/2$ (Witcher, Guttorp, Percival (2004)).

Podemos concluir que tudo indica estarmos em presença de processos de dinâmica que não pode ser descrita por um modelo do tipo fraccional com um só parâmetro do tipo $FD(d)$. A dinâmica em causa deverá contemplar mais do que a presença de memória longa e poder-se-á estar na presença de processos multi-fractais.

6. – CONCLUSÕES E TÓPICOS PARA INVESTIGAÇÃO FUTURA

Analisaram-se as dinâmicas, em diferentes escalas temporais, sobre séries de oito anos dos preços e das cargas transaccionadas no OMEL, de 1998 a 2005, que correspondem aos valores resultantes de cada transacção horária (*clearing load* e *clearing price*), tendo-se utilizado para tal a transformada de onduleta MODWT,

Da pré-análise das séries, verificou-se que a série dos preços poderá ser não ergódica, pois apresenta saltos nos primeiros 4 momentos. No entanto, os testes de estacionaridade aDF apontam para a estacionaridade de segunda ordem de ambas as séries originais.

Recorreu-se à análise de onduletas MODWT para verificar os andamentos das dinâmicas dos preços e das cargas segundo diferentes horizontes temporais, tendo-se obtido análises sobre dinâmica global de alta-frequência correspondentes às variações intra-diárias, semanais, mensais e intra-anuais.

A análise de multi-resolução demonstrou a possibilidade de sazonalidade no *volatility clustering*, como apontado por alguma da literatura, e parece ser só aparente no caso das cargas, e apenas para as escalas inter-anuais (níveis de decomposição 8 e 9) como parece ficar demonstrado na análise dos desvios dos incrementos da variância com o tempo. No entanto, as escalas 8 e 9, são

as escalas com muito baixa contribuição para a variância total da série, pelo que este efeito, pelo menos no mercado OMEL, poderá ser negligenciável.

Isolaram-se as tendências de longo prazo dos preços e das cargas e verificou-se que as cargas demonstram um crescimento quase linear mas os preços demonstram a incorporação de uma dinâmica supra-anual.

Analisou-se a variabilidade das séries segundo vários horizontes temporais e conclui-se que a dinâmica das séries de preços e das cargas são indistinguíveis do ponto de vista da sua composição em variância a partir da escala 8 e longo prazo, ou seja, a mais de um mês, e com algumas diferenças na dinâmica semanal, essencialmente.

A dinâmica diária é aquela que maior contribuição dá para a variância total dos preços e das cargas. A dinâmica semanal é também preponderante para o caso das cargas, mas é-o menos para o caso dos preços.

Apesar da decomposição da variância ser semelhante, os desvios no crescimento da variância ao longo da amostra dos preços não parece ter uma relação estreita com os desvios no crescimento da variância para o caso das cargas.

Analisaram-se várias correlações-cruzadas entre as séries dos níveis dos preços e das cargas e respectivas volatilidades, e resumem-se as conclusões na tabela abaixo.

	Relação entre Séries	Global	Dinâmicas separadas por horizontes temporais				
		Nível de Correlação	Intra-diária	Diária	Semanal e intra-semanal	Intra-anual	Supra-anual
1	Nível dos preços e nível das cargas	Positiva substancial	Positiva forte	Positiva forte	Positiva forte	Positiva moderada a nula	Nula
2	Volatilidade dos preços e volatilidade das cargas	Positiva moderada	Positiva moderada	Positiva moderada	Nula	Nula	Nula
3	Nível dos preços e volatilidade dos preços	Negativa ínfima	Positiva baixa	Negativa baixa	Nula	Nula	Nula
4	Nível das cargas e volatilidade das cargas	Negativa ínfima	Positiva moderada	Negativa moderada	Nula	Nula	Nula
5	Volatilidade dos preços e nível das cargas	Positiva ínfima	Positiva baixa	Negativa baixa	Nula	Positiva substancial	Nula
6	Nível de preços e volatilidade das cargas	Negativa ínfima	Positiva moderada	Negativa moderada	Nula	Nula	Nula

Com base na variância de onduleta estimaram-se os expoentes fractais dos processos dos preços, dos seus incrementos logarítmicos e das correspondentes volatilidades. As dinâmicas de alguns dos sub-conjuntos de escalas aparentam características diferentes de escala, pelo que se aponta para a necessidade de incorporar modelos de preços e de cargas com mais do que um expoente fractal, pelo que se concluiu pela presença de processos multi-fractais, de características diferenciadas em conformidade com o sub-conjunto de escalas temporais, em conformidade com a tabela em baixo.

Escalas	SÉRIES ORIGINAIS		INCREMENTOS LOGARITMICOS		VOLATILIDADE	
	PREÇOS	CARGAS	PREÇOS	CARGAS	PREÇOS	CARGAS
1 a 4	NS	MLNE	MLE	NS	MLE	NS
5 a 7	NS	NS	APNI	NS	AP	APNI
8 a 13	MLNE	MLNE	AP	AP	MLNE	MLNE

NOTAS

MLE	<i>Memória longa estacionário</i>	AP	<i>Anti-persistente</i>
MLNE	<i>Memória longa não-estacionário</i>	APNI	<i>Anti-persistente não invertível</i>
NS	<i>nível de significância superior a 0,05</i>		

Como tópicos para futura investigação aponta-se a necessidade de investigar mais sobre:

1. Realizar o presente estudo sobre as 24 sub-séries horárias dos preços e das cargas, nomeadamente na decomposição da variância de onduleta, na decomposição da correlação cruzada de onduleta e na presença de multi-fractalidade de cada um desses "sub-processos";
2. Comparar com outros mercados eléctricos as decomposições da variância de onduleta e as suas correlações cruzadas, nomeadamente sobre o *Nordpool*, mercado eléctrico que tem sido tomado como referência;
3. A sazonalidade e a sua relação com os expoentes fractais obtidos;
4. A modelação ARIMA, ou FARIMA, sobre as séries formadas pelos subconjuntos de escalas de igual expoente fractal;
5. A introdução na especificação dos modelos em 3. da variável exógena das cargas;
6. A verificação de potencial cointegração das variáveis preços e cargas sobre a dinâmica global e sobre a dinâmica a cada escala temporal.
7. A análise da trajectória dos quatro primeiros momentos levanta a suspeita de existirem alterações na estrutura da variância da série dos preços horários do OMEL pelo que se deverá investigar a existência de potenciais alterações na estrutura da variância e as suas consequências observadas na persistência.

7. – BIBLIOGRAFIA

Abry, P., Veitch, D (1998): Wavelet Analysis of Long-range-dependent Traffic. IEEE transactions on Information Theory 44, 2-15.

Black, F., Scholes, M. (1973) - The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy, vol 81, Sigue 3, 673-654.

Borenstein, S. (1999.) - Understanding Competitive Pricing and Market Power in Wholesale Electricity Markets. Working Paper University of Berkeley

Bystrom, H. (2001) Extreme Value Theory and Extremely Large Electricity Price Changes. Working paper Lund University

Carnero, M., Koopman S. J., Ooms, M. (2003) – Periodic Heteroskedastic reg ARFIMA Models for Daily Electricity Spot Prices. Discussion paper, Tinbergen Institute

Cartea, A., Figueroa, M. (2005) - Pricing in Electricity Markets: a mean reverting jump diffusion model with seasonality. Working paper Birbeck College, University of London

Chen, H., Vidakovic, B., Mavris, N.D (2004): Multiscale forecasting method using ARMAX models. Technological Forecasting and Social Change, 2004, accepted paper.

Cont, Rama (2001) – Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, Quantitative Finance, volume 1 (2001) 233-236, Institute of Physics Publishing.

Craigmile, P., Percival, D., Guttorp, P. (2004) - The Impact of wavelet coefficient correlations on fractionally differenced process estimation. Technical report 049, The National Research Center for Statistics and the environment. [http:// www.nrcse.washington.edu](http://www.nrcse.washington.edu).

Craigmile, P., Percival, D., Guttorp, P. (2004) - Wavelet trend estimation for trend contaminated fractionally differenced processes. Technical report 077, The National Research Center for Statistics and the environment. [http:// www.nrcse.washington.edu](http://www.nrcse.washington.edu)

Craigmile, P., Percival, D. (2002) - Asymptotic Decorrelation of Between Scale wavelet coefficients. Submitted for review, Ohio, State University. <http://www.stat.ohio-state.edu>

Conejo, A., Plazas, M., Espínola, R., Molina, A.(2005) – Day- Ahead Electricity Price Forecasting Using the Wavelet Transform and ARIMA Models, IEEE Transactions on Power Systems, vol.20, nº2, May 2005

Cornish, C.R., Bretherton, C.S., Percival, D.B. (2006) – Maximal Overlap Wavelet Statistical Analysis with Application to Atmospheric Turbulence, *Boundary-Layer Meteorology*, 119, no. 2, pp. 339-74.

Deng, S. (1999) – Stochastic model of energy commodity prices and their applications: mean reversion with spikes. Unpublished Manuscript, Georgia Institute of Technology

Escribano, A., Pena, J., Villaplana, P. (2002) - Modelling Electricity Prices: International Evidence. Working

paper, Universidad Carlos III de Madrid

Eydeland, A e Géman, H (1998) - Some Fundamentals of Electricity Derivatives Working paper. Working paper ESSEC.

Géman, H. Roncoroni, A, forthcoming (2006) - Understanding the Fine Structure of Electricity Prices. Journal of Business, vol 79, nº6.

Gençay, R, Selcuk, F., Whitcher, B. (2001) - Scaling properties of foreign Exchange Volatility. Physica A 289, 249-266

Gençay, R, Selcuk, F., Whitcher, B. (2001b) – Differentiating intraday seasonalities through wavelet multi-scaling. Physica A 289, 543-556

Gençay, R, Selcuk, F., Whitcher, B. (2002) - An Introduction to Wavelets and other Filtering Methods in Finance and Economics. Academic Press.

Goto, M., Bystrom, H. (2004) - Understanding Electricity Price Volatility Within And Across Markets. Working paper Lund University

Granger, C., Hyung, N. (1999) - Occasional Structural Breaks and Long memory. Discussion paper 99-14, University o California, San Diego. <http://www.econ.uscd.edu>

Greenblatt, S. (1994)– Wavelets in Econometrics: An application to outlier testing, working paper, University of Reading, 1994

Guthrie, G., Videbeck, S. (2004) - Electricity Spot Price Dynamics: Beyond financial models. Working paper Victoria University of Wellington

Haldrup Niels, Nilsen Morten (2004) – A Regime Switching Long Memory Model for Electricity prices – Working Paper

Hamilton, J .D. (1994) – Time Series Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Hosking, J.R.M (1981) - Fractional Differencing. Biometrika 68, 165-176

Huisman, R., Huurman, C. (2003) - Fat Tails in Power Prices. Working paper ERIM (Erasmus Research Institute of Management)

Huisman, R., Mahieu, R. (2001) - Regime Jumps in Electricity Prices. Working paper Energy and Power Risk management, ERIM.

Hull, J. (2003) - Options, Futures, and other Derivatives. Prentice Hall

Jensen, M. – Whitcher, Brandon (2000): Time-Varying Long-Memory in Volatility: Detection and Estimation with Wavelets. Technical report, University of Missouri and Eurandom. <http://www.cgd.ucar.edu>

Jensen, M. (1999) - Using Wavelets to Obtain Consistent Ordinary Least Squares Estimator of the Long-Memory parameter. Journal of Forecasting 18, 17-32.

Kanamura, T., Ohashi, K. (2004) - On Transition Probabilities of Regime Switching in Electricity Prices.

Working paper Hitotsubashi University

Keynes, J.M. (1930) *Trestise on Money*. London: Macmillan

Knittel,C., Roberts, M. (2001) - *An Empirical Examination of Deregulated Electricity Prices*. *Energy Economics*

Kyaw N., Los Cornelis A., Zong S. (2004) – *Persistence Characteristics of Latin American Financial Markets*, working paper, Kent State University.

Leon e Rubia (2001) – *Comportamiento del Precio y Volatilidad en el Pool Eléctrico Espanol* – Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, SA. (working paper).

Los, Cornelis A. e Yu, Bing (2005) – *Persistence of the Chinese Stock Markets*, working paper, 2005.

Lucia, J., Schwartz, E. (2001) - *Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange*. *Review of Derivatives Research*, 5. pp 5-50

Mallat, S. (1999) - *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd edition, Academic Press

Malo, P. (2006) - *Multifractality in Nordic Electricity Markets*, working paper.

Murteira B., Muller D., Turkman K. (1993) – *Análise de Sucessões Cronológicas* – Editora McGraw-hill de Portugal, Lda

Newbold, P. (1995) – *Statistics for business and economics*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Niemeyer, V (2000) - *Forecasting Long-term Electric Price Volatility for valuation of Real Power Options* – *Proceedings of the 33rd Hawaii International Conference on System Sciences* – 2000

OMEL (2004) – *Memoria2004.pdf*. www.omel.es

Percival, D. – Walden, A. (2000) - *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press., 2000.

Pilipovic, D. (1998) – *Energy Risk*.

Ramsey, Lampart (1998) - *The Decomposition of Economic relationships by time Scale using Wavelets: Money and Income*. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* 3, 23-42.

Resta,M. Sciutti,D.(2005) - *Spot price dynamics in deregulated power markets*, working paper.

Routledge, B.r., Seppi, D., Spatt, C.S (2001) - *The “spark spread”: An Equilibrium model of cross-Commodity Price Relationship in Electricity*. Working paper, Carnegie Mellon University.

Saraiva, João Silva, José e Leão, M. Teresa (2002) - *Mercados de Electricidade – Regulação e Tarifação de Uso da Redes* – FEUPedições – 2002.

Serroukh, A., Walden, A., Percival D. (2000) - *Statistical Properties and Uses of the Wavelet Variance Estimator for the Scale Snalysis of Time-series*, *Journal of the American Statitical Association* 95, 184-196.

Silverman (1999) – *Wavelets in statistics: beyond the standard assumptions*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*.

- Simonsen, I.(2003) - Measuring anti-correlations in the Nordic electricity spot markets by wavelets. *Physica A*, 2003
- Simonsen, I. Weron, R. (2005): Blackouts, risk and fat-tailed distributions, in "Practical Fruits of Econophysics: Proceedings of The Third Nikkei Econophysics Symposium", ed. H. Takayasu, Springer, Tokyo, 215-219
- Stevenson, M. (2001) – Filtering and Forecasting Spot Electricity Prices in the Increasingly Deregulated Australian Electricity Market – Quantitative Finance Research Papers, 63,, University of Technology Sidney
- Vidakovic, Bani (1999) - Statistical Modelling by Wavelets. John Wiley & Sons, New York.
- Weron, R. (2000) - Energy price risk management, *Physica A* 285 (2000) 127-134.
- Weron, R. (2001) - Measuring long-range dependence in electricity prices, arXiv:cond-mat/0103621 v1, 30Mar2001
- Whitcher, B (1998) - Assessing Nonstationary Time Series Using Wavelets, Ph.D thesis, University of Washington
- Whitcher, B. (2000) - Wavelet-based Estimation for Seasonal Long Memory. Technical Report 00-14 Eurandom, The Netherlands.
- Whitcher, B., Byers, S. , Guttorp, P., Percival, D. (1998): Testing for Homogeneity of variance in Time Series: Long Memory, Wavelets and Nile River. Technical Report 9, National Research Center for Statistics and the Environment
- Whitcher, B. Guttorp, P. Percival, D. (2004) Testing for Homogeneity of Variance in Time Series: Long Memory, Wavelets and the Nile River, *Water Resources Research*, 38, no. 5, pp. 10.1029/2001WR000509
- Villaplana, P. 2003. Pricing Power Derivatives - A two factor Jump-Diffusion Approach. Working paper Universidad Carlos III de Madrid.

A. ANEXO A – Análise de Multiresolução e Transformada Discreta de Onduletas

A.1 - Análise de Multiresolução

Como atrás se afirmou, a análise de multiresolução constitui, no entanto, não só uma ferramenta de análise como é também o meio de se obter a construção de uma base ortonormada diferente da base de funções trigonométricas utilizada na transformada de Fourier. Nesta alínea, formalizar-se-á os aspectos qualitativos atrás mencionados.

Uma forma útil de utilização da decomposição de onduleta é a análise de multiresolução (MRA – *Multiresolution Analysis*). Em termos muito gerais, a MRA permite analisar os dados num número diferente de resoluções. É como ver dois mapas da mesma zona em diferentes escalas: numa escala maior, tem-se uma ideia geral; numa escala menor, vêem-se os detalhes com rigor (Greenblatt (1994)).

No que se seguirá utilizou-se como base o trabalho de Greenblatt (1994) (que se baseou essencialmente no trabalho de Mallat (1989b,1989c)) na monografia de Vidakovic (1999) e, mais essencialmente, Percival e Walden (2000)) e Mallat (1999).

Defina-se um operador de aproximação A_{2^j} , que aproxima um sinal $f(x)$ em $L^2(\mathfrak{R})$ no nível de resolução 2^j . As suas propriedades são:

1.- A_{2^j} é um operador linear de projecção. Se for formada a aproximação $A_{2^j}f(x)$ de $f(x)$ com a resolução 2^j , então esta aproximação não será afectada se a aplicarmos recursivamente, ou seja, $A_{2^j} \circ A_{2^j} = A_{2^j}$. A_{2^j} é portanto um operador de projecção no espaço vectorial $V_{2^j} \subset L^2(\mathfrak{R})$. Dado que não é especificada nenhuma forma funcional em particular para a função $f(x)$, então V_{2^j} é o conjunto de todas as possíveis aproximações na resolução 2^j das funções em $L^2(\mathfrak{R})$.

2.- A aproximação que se obtém pela aplicação de A_{2^j} é a melhor aproximação (a mais próxima) do sinal original que se pode formar quando se trabalha com a resolução definida 2^j , ou seja, é verdadeira a seguinte afirmação:

$$\forall g(x) \in V_{2^j}, \|g(x) - f(x)\| \geq \|A_{2^j}f(x) - f(x)\|. \quad (\text{a.1})$$

Ou seja, este operador é um operador de projecção ortogonal no espaço vectorial V_{2^j} .

Dado que se perde informação sempre que o nível de resolução é mais baixo (escalas maiores), é óbvio que a aproximação do sinal na resolução 2^{j+1} contém toda a informação necessária para a formulação da aproximação do mesmo sinal na resolução mais baixa, ou seja na escala imediatamente anterior 2^j . Esta afirmação pode ser definida como:

$$\forall j \in Z, V_{2^j} \subset V_{2^{j+1}} \quad (\text{a.2})$$

em que Z corresponde ao conjunto dos inteiros e j a um determinado nível de resolução

As aproximações nos vários níveis de resolução estão relacionadas entre si de uma forma particular: os espaços das funções de aproximação são derivados de uma para a outra escala de resolução pelo rácio dos respectivos níveis de resolução, ou seja:

$$\forall j \in Z, f(x) \in V_{2^j} \Leftrightarrow f(2x) \in V_{2^{j+1}} \quad (\text{a.3})$$

Pode-se caracterizar a aproximação A_{2^j} do sinal $f(x)$ por 2^j observações amostradas por unidade de comprimento. Se trasladarmos $f(x)$ por 2^{-j} unidades de comprimento, então A_{2^j} é trasladada pela mesma quantidade..

Assim, de uma forma sucinta, podem-se definir as seguintes propriedades de translação da MRA:

B. Há um isomorfismo I de V_j em $L^2(Z)$,

C. A translação da aproximação pode ser dada por:

$$\forall k \in Z, A_1 f(x - k), \text{ onde } f_k(x) = f(x - k) \quad (\text{a.4})$$

D. A correspondente translação das observações amostradas pode ser descrita por:

$$I(A_1 f(x)) = (\alpha_i)_{i \in Z} \Leftrightarrow I(A_1 f_k(x)) = (\alpha_{i-k})_{i \in Z} \quad (\text{a.5})$$

E. Há medida que se caminha para maiores escalas, perde-se informação, ou seja a resolução diminui e, eventualmente, no seu limite inferior a informação contida na aproximação será nula, ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_{2^j} = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_{2^j} = \{0\} \quad (\text{a.6})$$

A afirmação acima pode ser reescrita de outra forma equivalente: com o incremento da resolução o sinal tenderá para o sinal original. Ou seja:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_{2^j} = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_{2^j} \text{ é denso em } L^2(R) \quad (\text{a.7})$$

Qualquer conjunto de vectores que satisfaça as propriedades 1 a 4 pode ser considerado uma aproximação de multiresolução em $L^2(R)$ e os seus operadores associados A_{2^j} podem definir uma aproximação a qualquer função em $L^2(R)$ e em qualquer nível de resolução 2^j .

O teorema em baixo, demonstrado por Mallat (1989), demonstra que uma base V_{2^j} pode ser definida por dilatação e translação de uma função única $\phi(x)$ (a função de escala que se procura). Este teorema permite caracterizar numericamente a projecção ortogonal (Greenblatt (1994), ou ver demonstração em Mallat (1999), pag. 229).

Teorema 1: Se $(V_{2^j})_{j \in \mathbb{Z}}$ é uma aproximação de multiresolução em $L^2(R)$ então existe uma função única $\phi(x) \in L^2(R)$, denominada função de escala, tal que $\phi_{2^j}(x) = 2^j \phi(2^j x)$ para $j \in \mathbb{Z}$ (a que corresponde a dilatação de $\phi(x)$ por 2^j , então $(\sqrt{2^{-j}} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$) é uma base ortonormal de V_{2^j} .

Caracterizada a função de escala $\phi(x)$ é necessário ter uma forma de capturar a informação perdida pelas sucessivas aproximações quando se caminha para cada vez menores resoluções (ou seja, cada vez maiores escalas).

Até este ponto ainda não foi necessária uma definição de onduleta, mas ela vai ser necessária para se poder definir a informação perdida pelas escalas de resolução mais finas (Greenblatt (1994)).

A informação perdida é definida como os *detalhes* perdidos. Ou seja, à medida que se caminha para aproximações mais grosseiras, como menos detalhe, perde-se, por cada nível de aproximação, um conjunto de informações de detalhe.

A informação de detalhe é, portanto, a diferença entre a informação de duas aproximações sucessivas.

A informação de detalhe, à escala de resolução 2^j pode ser definida como o complemento ortogonal entre V_{2^j} e $V_{2^{j+1}}$. Se W_{2^j} for o complemento ortogonal com as seguintes propriedades:

$$1. \quad W_{2^j} \text{ é ortogonal a } V_{2^j}; \quad (\text{a.8})$$

$$2. \quad W_{2^j} \oplus V_{2^j} = V_{2^{j+1}}; \quad (\text{a.9})$$

ou seja se adicionarmos a aproximação aos detalhes obtêm-se a função de aproximação com o nível de resolução imediatamente superior (escala imediatamente inferior – em 3.9 descreve-se a relação entre as funções de escala de níveis consecutivos com recurso à escala de Mallat, no entanto na análise empírica que se apresentará mais à frente e em grande parte da literatura mais recente, utiliza-se a escala de Daubechies em que a adição dos coeficientes de onduleta de nível j aos coeficientes de escala de nível j dá origem à função de aproximação de menor nível (maior resolução), convenção que é mais próxima de utilização em programação de computador);

$$3. \quad W_{2^i} \text{ é ortogonal a } W_{2^j}, \text{ para todo } i \neq j; \quad (\text{a.10})$$

Dado que no mais baixo nível de resolução a informação é nula, pode-se construir qualquer nível de aproximação a uma escala inferior, ou maior grau de resolução, adicionando novamente os detalhes nessa aproximação. Uma forma concisa de colocar esta afirmação é escrever:

$$V_{2^j} = \bigoplus_{k=-\infty}^{j-1} W_{2^k} \quad (\text{a.11})$$

Dado que $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_{2^j} = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_{2^j}$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$, então o limite da soma directa dos

detalhes é também densa em $L^2(\mathbb{R})$.

É necessário, de forma semelhante ao que se fez para a função de escala, estabelecer uma base ortonormal para W_{2^j} . Neste sentido, Mallat (1989) demonstrou que a onduleta ortonormal correspondente à função de escala e dada por $(\sqrt{2^{-j}} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n))_{n \in \mathbb{Z}}$ (ver teorema 1) é também uma base ortonormal para W_{2^j} . Segue então que $(\sqrt{2^{-j}} \phi_{2^j}(x - 2^{-j}n))_{(n,j) \in \mathbb{Z}^2}$ é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{R})$. (Greenblatt (1994)).

Um espaço vectorial V_j cuja resolução é dada por $2^0 = 1$, pode-se decompor em dois sub espaços ortogonais e portanto pode-se escrever:

$$V_1 = V_{2^{-1}} \oplus W_{2^{-1}} = V_{\frac{1}{2}} \oplus W_{\frac{1}{2}} \quad (\text{a.12})$$

Decomposição esta que se obterá por dilatação e translação da função de escala $\phi(x)$ e da função de onduleta $\varphi(x)$.

Segundo Greenblat (1994) este modo de ver as onduletas tem muita utilidade computacional, dado que os algoritmos de decomposição e de reconstrução são muito mais rápidos.

A.2.- Transformada Discreta de Onduleta

Nesta alínea seguir-se-á, essencialmente, Percival e Walden (2000).

Se um sinal X for dado por $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$, onde por conveniência se supõe que N é um inteiro múltiplo de 2^{J_0} , então pode-se definir uma matriz ortogonal \mathcal{W} de dimensão $N \times N$ tal que:

$$W = \mathcal{W}X, \quad (\text{a.13})$$

em que W é um vector cujos elementos são os coeficientes resultantes da transformada de onduleta.

Dado que se impôs a ortonormalidade a \mathcal{W} então pode-se escrever que $X = \mathcal{W}^T W$, logo $X \Leftrightarrow W$, ou seja, W constitui uma decomposição fiel de X .

Realizando uma partição diádica do vector W dos coeficientes de onduleta

$$W = [W_1 \dots W_{J_0-1}, W_{J_0}, V_{J_0}]^T \quad (\text{a.14})$$

Nas primeiras J_0 partições do vector W , cada W_j contem $N_j = N/2^j$ coeficientes de onduleta relacionados com as alterações nas médias nas escalas temporais diádicas j : $\tau_j = 2^{j-1}$. Os coeficientes em cada escala têm entre si, em cada escala, um intervalo de 2^j unidades de tempo.

A última partição V_{J_0} do vector W contém $N_{J_0} = N/2^{J_0}$ coeficientes de escala relacionados com as médias à escala $\lambda_{J_0} = 2^{J_0}$ e estão intervalados no tempo por 2^{J_0} unidades.

As onduletas podem ser vistas como filtros passa-banda.

Filtrando um sinal $X = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$, obtendo-se

$$2^{j/2} \tilde{W}_{j,t} \equiv \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{t-l \bmod N} \quad \text{para } t = 1, \dots, N \quad (\text{a.15})$$

Em que L é a largura do filtro de onduleta na escala j tal que $h_0 \neq 0$ e $h_{L-1} \neq 0$ e em que se assume que L é par e que $h_l = 0$ para $l < 0$ ou $l > L$ e onde $h_{j,l}$ é um filtro de onduleta, no nível j de decomposição, do tipo passa-banda nas frequências $\left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j} \right]$.

O filtro de onduleta h_l tem 3 propriedades fundamentais:

1. $\sum_{l=0}^{L_j-1} h_l = 0$, ou seja, tem soma nula na sua largura; (a.16)

2. $\sum_{l=0}^{L_j-1} h_l^2 = 1$, ou seja, tem valor de energia unitário; (a.17)

3. $\sum_{l=0}^{L_j-1} h_l h_{l+2n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l h_{l+2n} = 0$, ou seja, garante ortonormalidade a deslocamentos pares para todos os inteiros diferentes de zero. (a.18)

As propriedades 2 e 3 são denominadas propriedades de ortogonalidade.

Os coeficientes de onduleta são obtidos a partir da realização por sub amostragem:

$$W_{j,t} = 2^{j/2} \tilde{W}_{j,2^j(t+1)-1} \quad \text{para } t = 1, \dots, N \quad (\text{a.19})$$

Com esta definição pode-se formular um algoritmo piramidal para obtenção mais rápida da DWT e, de uma forma implícita, obter-se a matriz de transformada de onduleta \mathcal{W} .

O filtro de escala g_l pode ser obtido através do filtro de onduleta, fazendo:

$$g_l \equiv (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \quad (\text{a.20})$$

As propriedades anteriormente mencionadas para o filtro de onduleta h_l vão implicar as seguintes propriedades do filtro de escala g_l .

$$1. \sum_{l=0}^{L_j-1} g_l = \sqrt{2} \quad (a.21)$$

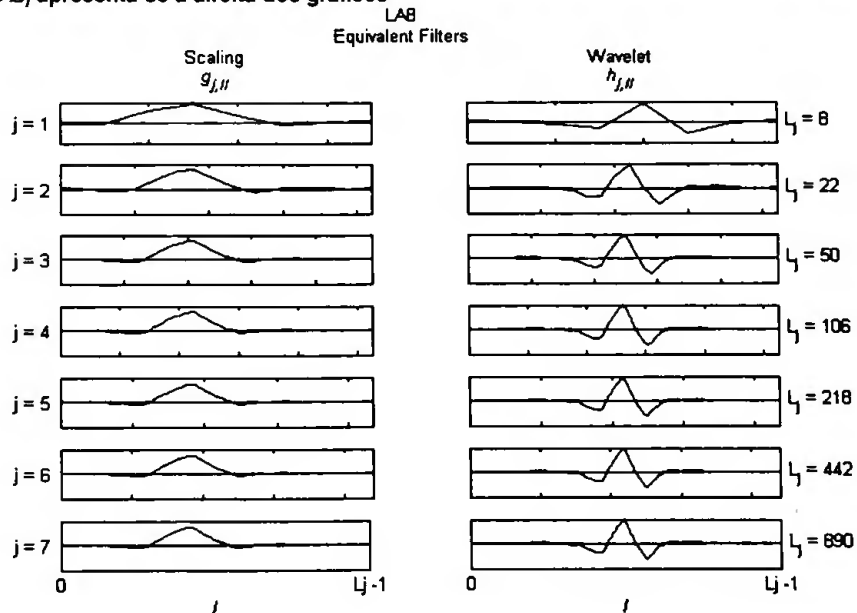
$$2. \sum_{l=0}^{L_j-1} g_l^2 = 1, \text{ ou seja, tem valor de energia unitário} \quad (a.22)$$

$$3. \sum_{l=0}^{L_j-1} g_l g_{l+2n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l g_{l+2n} = 0, \text{ ou seja, garante ortonormalidade a deslocamentos pares para todos os inteiros diferentes de zero.} \quad (a.23)$$

$$4. \sum_{l=0}^{L_j-1} g_l h_{l+2n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l h_{l+2n} = 0 \text{ ou seja, garante ortonormalidade a deslocamentos pares para todos os inteiros.} \quad (a.24)$$

Os filtros de escala e os filtros de onduleta para a onduleta de Daubechies LA(8) (*Least Asymmetric level 8*, também denominada *Symlet 8*) apresentam-se na figura 3.2.

Figura A. 26 – Trajectórias temporais Filtros equivalentes de escala e de onduleta para a família LA8 – *Least Asymmetric* para 7 níveis de decomposição j . Em abcissas estão os valores dos comprimentos dos filtros (l) cujo valor limite L_j apresenta-se à direita dos gráficos



Da figura A.1 pode-se observar o facto do filtro de escala e de onduleta serem diferentes de zero em comprimentos relativamente curtos. Cada onduleta é essencialmente uma função não nula apenas em particulares intervalo de tempo, $[t - \tau, t + \tau]$. Nesse intervalo de tempo, a onduleta deverá despende um período de tempo igual tanto acima de zero como abaixo de zero, pelo que o seu aspecto será o de uma pequena onda. Para o caso da função de escala ela deverá somar $2^{1/2}$, o que se pode admitir pela observação dos gráficos da esquerda da figura A.1.

Por outro lado, para níveis de escala maiores (menor resolução) a largura do filtro vai aumentando (deve-se ter em conta que as unidades em abcissas são relativas ao valor L_j que é apresentado do lado direito e é diferente para cada nível de resolução, o que corresponde à dilatação – ou alongamento - do filtro). Pode-se definir a transformada de onduleta para níveis superiores ao unitário com base na seguinte concepção: “esticando” os filtros das onduletas e de escalas para que sejam duas vezes mais largos sempre que se sobe um nível de escala.

As funções trigonométricas têm suporte infinito (daí se apelidarem habitualmente estas funções como ondas) e servem como funções base para definir, no domínio da frequência, as funções de decomposição da transformada de Fourier (Stevenson, 2001). As onduletas têm suporte compacto (são muito localizadas) o que permite capturar a dinâmica mais localizada da série temporal de forma localizada também, pelo que os coeficientes de onduleta, para uma mesma escala, terão valores diferentes consoante a sua localização no tempo. Está-se perante outra forma de partição do plano tempo-frequência.

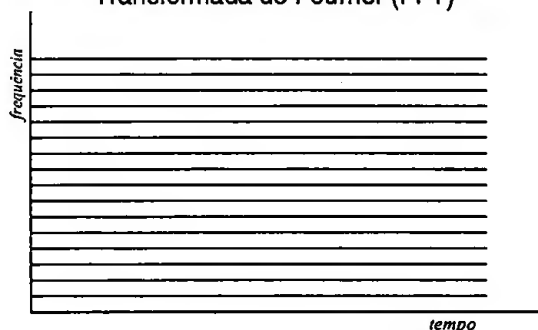
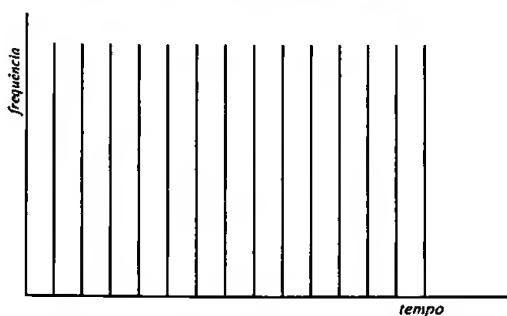
Gençay *et al* (2002) (ver Mallat (1999) para uma demonstração mais rigorosa da partição do plano frequência-tempo) demonstram a partição do plano frequência-tempo de forma sugestiva para que se possa apreciar, de forma comparativa com outros tipo de análise, a vantagem da análise por transformada de onduleta sobre a análise no tempo ou sobre a análise espectral (análise de Fourier) ou sobre uma sua derivada a *short-time fourier transform (STFT)*. Na figura A.2 reproduz-se esta forma de representação.

Numa análise no domínio do tempo, todas as frequências poderão estar presentes em qualquer momento (daqui a representação das linhas verticais e a indeterminação do conteúdo espectral, ou seja, do conteúdo na frequência), ou seja, não existe resolução no domínio da frequência. O intervalo de tempo entre duas linhas verticais corresponde ao período de amostragem da série temporal em estudo e será, naturalmente, o maior grau de resolução temporal que se consegue.

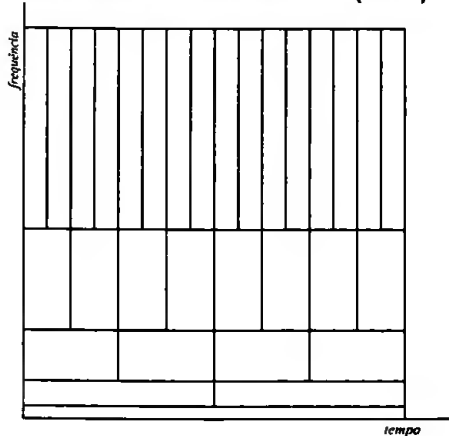
Na análise em frequência, por recurso à FFT (*Fast Fourier Transform*), tem-se indeterminação ao nível temporal: ou seja, não poderemos saber em que momentos do tempo estão presentes determinadas frequências perfeitamente determinadas – é eliminada a resolução no domínio do tempo.

Na análise por STFT (*Short Time Fourier Transform*), introduz-se a resolução no tempo à transformada de Fourier recorrendo-se, complementarmente, à utilização de uma janela fixa no tempo, que assim realiza a partição, no domínio do tempo, da série temporal em análise. No entanto, quaisquer eventos que possam acontecer, no domínio do tempo, na fronteira da janela fixa, não terão resolução temporal nesta representação.

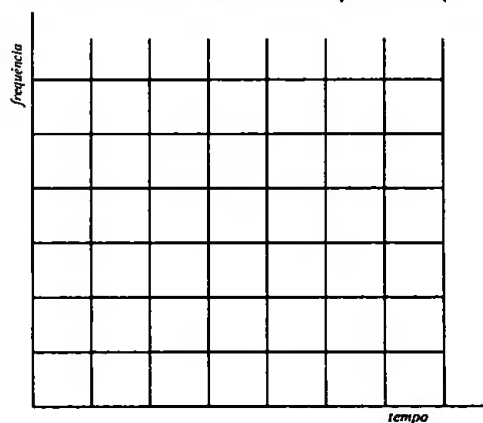
Figura A. 2 – Comparação gráfica da resolução no plano tempo e frequência das várias transformadas.
Análise no domínio do tempo



Transformada de onduleta (DWT)



Transformada de Fourier de tempo curto (STFT)



Na análise por STFT (*Short Time Fourier Transform*), introduz-se a resolução no tempo à transformada de Fourier recorrendo-se, complementarmente, à utilização de uma janela fixa no tempo, que assim realiza a partição, no domínio do tempo, da série temporal em análise. No

entanto, quaisquer eventos que possam acontecer, no domínio do tempo, na fronteira da janela fixa, não terão resolução temporal nesta representação.

Para solucionar o problema de resolução temporal da STFT surge a transformada de onduleta DWT que, por recurso à função base (onduleta-mãe) e por dilatação (alongamento) e translação dessa função base, consegue varrer todo o plano frequência-tempo, mas com diferentes graus de resolução, tanto no tempo como na frequência, com se pode apreciar pelo gráfico correspondente da figura A.2.

Repare-se que, no gráfico correspondente à transformada de discreta de onduleta (DWT) na figura A.2, para baixas frequências, perto do zero, a resolução temporal é baixa e que, aumentando o grau de resolução temporal, obtêm-se intervalos na frequência cada vez mais alargados e com frequências cada vez maiores, o que faz sentido para a captura de detalhes, geralmente relacionados com fenómenos transitórios no domínio do tempo sendo intuitivo que, nestes casos, necessitemos de maiores frequências para captura do sinal transitório. No limite, consegue-se o mesmo grau de resolução temporal, mas não se consegue que estejam presentes todas as frequências (zona superior do gráfico correspondente à DWT).

Repare-se que a notação LA(8) corresponde a $L = 8$, o comprimento do filtro. Cada uma das “janelas” correspondente aos filtros de onduleta e de escala que percorrerão, por translação, todo o comprimento da série. Não se apresentam as fórmulas correspondentes à função de transferência e ao ganho quadrático da mesma preferindo-se o recurso aos gráficos da figura A. 3. que demonstram as características do Ganho Quadrático da função de transferência.

Figura A.3.: Ganho Quadrático da função de transferência dos filtros equivalentes de escala e de onduleta para a família LA8, em 4 níveis de decomposição

Do ponto de vista da função de transferência apresenta-se na figura A.3 a função de Ganho Quadrática $\mathcal{H}(f)$ da função de transferência $H(f)$ do filtro de onduleta e do filtro de escala para cada escala de resolução ($j=1..4$).

As linhas verticais correspondem às demarcações das frequências de corte da largura de banda do filtro ideal e o conjunto de frequências que estejam para a esquerda ou para a direita dessas linhas verticais corresponderão a perdas na frequência. As linhas verticais correspondem aos limites mencionados na tabela 3.1.

Note-se que, do ponto de vista de ganho de amplitude, o filtro LA(8) é praticamente simétrico (*least asymmetric* – menor assimetria).

Nos extremos dos 4 níveis de decomposição temos o filtro passa-alto $\mathcal{H}_1(f)$ (leva a zero as baixas frequências menores do que 0,25, idealmente) e o filtro passa-baixo $\mathcal{G}_4(f)$ (leva a zero as frequências superiores a 0,05, idealmente). Note-se o afirmado anteriormente sobre a figura 3.1, quando se compara o nível 2 com o nível 4, por exemplo: o aumento do parâmetro de escala (menor resolução temporal) leva a função de onduleta a ter um estreitamento no domínio da frequência e o seu intervalo de frequência tende para menores frequências.

No caso do nível 1 da função de onduleta e da função de escala de nível 4, estamos na presença de dois filtros extremos: um passa-alto e outro passa-baixo, respectivamente, como se pode apreciar na figura A.3.

Do ponto de vista da fase, o filtro de onduleta e de escala LA(8) é denominado de fase zero, ou seja, na prática (quase) não introduz atrasos no sinal filtrado o que permite que se realize um alinhamento (quase perfeito) entre os coeficientes de onduleta e o sinal original.

Mais detalhes sobre as características dos filtros equivalentes de onduleta e de escala podem ser encontrados em Percival e Walden (2000) e em Gençay *et al* (2002).

Coeficientes fronteira

A transformada de onduleta utiliza o princípio de filtragem circular, ou seja, a série temporal é tratada como se fosse uma porção de uma sequência periódica de comprimento igual ao da série em causa. A extensão da influência dos coeficientes de onduleta afectados pelas condições fronteira (Percival e Walden (2000)) que por sua vez influenciarão a recomposição em análise de multi-resolução pode ser dada matematicamente, como em baixo se apresentam:

Número de coeficientes afectados pelas condições fronteira na transformação MODWT

nível	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coef. Inferiores	3	10	24	52	108	220	444	892	1.788	3.580	7.164	14.332	28.668
coef. Superiores	70.005	69.998	69.984	69.956	69.900	69.788	69.564	69.116	68.220	66.428	62.844	55.676	41.340
nº total de coef. afectados	6	20	48	104	216	440	888	1.784	3.576	7.160	14.328	28.664	57.336

No entanto, Percival e Walden (2000) anotam que a influência da circularidade poderá ser muito menor do que a apontada pois o comprimento das regiões extremas é muito conservador.

Uma das formas de obviar esta situação é pela utilização de reflexão dos dados nos dois extremos da série temporal e trincar na reconstrução ao comprimento original da série. Este formato é o implementado nas rotinas de cálculo da análise de multi-resolução em Matlab utilizadas no presente trabalho.

B. ANEXO B – Estatísticas de Regressão dos parâmetros β , para a memória longa

SUMMARY OUTPUT PREÇOS - ESCALAS 8 A 13

Regression Statistics							
Multiple R	0,975400965						
R Square	0,951407042						
Adjusted R Square	0,939258903						
Standard Error	0,193850959						
Observations	6						

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	2,942990917	2,942990917	78,31645	0,000900228
Residual	4	0,150312778	0,037578194		
Total	5	3,093303693			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95.0%	Upper 95.0%
Intercept	-6,219349214	0,447275396	-13,9049661	0,000155	-7,461184797	-4,977513631	-7,461184797	-4,977513631
X Variable 1	0,591623646	0,06685271	8,849658421	0,0009	0,406010767	0,777236525	0,406010767	0,777236525
	delta	0,80						
	H	1,30						

SUMMARY OUTPUT PREÇOS - ESCALAS 5 A 7

Regression Statistics							
Multiple R	0,763130793						
R Square	0,582368608						
Adjusted R Square	0,164737215						
Standard Error	0,093116856						
Observations	3						

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	0,012090978	0,012090978	1,394456	0,447322392
Residual	1	0,008670749	0,008670749		
Total	2	0,020761727			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95.0%	Upper 95.0%
Intercept	-2,700028508	0,333576928	-8,094170424	0,078255	-6,938525255	1,538468239	-6,938525255	1,538468239
X Variable 1	0,112173039	0,094991791	1,180870872	0,447322	-1,094812107	1,319158186	-1,094812107	1,319158186
	delta	0,56						
	H	1,06						

SUMMARY OUTPUT PREÇOS - ESCALAS 1 A 3

Regression Statistics							
Multiple R	0,987074914						
R Square	0,974316885						
Adjusted R Square	0,948633771						
Standard Error	0,200000837						
Observations	3						

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,517458205	1,517458205	37,93609	0,102466224
Residual	1	0,040000335	0,040000335		
Total	2	1,55745854			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95.0%	Upper 95.0%
Intercept	-3,36405	0,18257495	-18,42558354	0,034517	-5,683884699	-1,044215301	-5,683884699	-1,044215301
X Variable 1	1,256654404	0,204027914	6,159227826	0,102466	-1,33576604	3,849074848	-1,33576604	3,849074848
	delta	1,13						
	H	1,63						

SUMMARY OUTPUT CARGAS - ESCALAS 8 A 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,947652472
R Square	0,898045208
Adjusted R Square	0,87255651
Standard Error	0,170271473
Observations	6

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,021490502	1,021490502	35,23307485	0,004038673
Residual	4	0,115969498	0,028992375		
Total	5	1,13746			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	10,5938165	0,392870074	26,96519076	1,12452E-05	9,503034304	11,68459869	9,5030343	11,68459869
X Variable 1	0,348552522	0,056720934	5,935745518	0,004038673	0,185517072	0,511587972	0,18551707	0,511587972
delta	0,67							
H	1,17							

SUMMARY OUTPUT CARGAS - ESCALAS 5 A 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,995824221
R Square	0,991665879
Adjusted R Square	0,983331758
Standard Error	0,056720745
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	0,382815424	0,382815424	118,9886617	0,058198945
Residual	1	0,003217243	0,003217243		
Total	2	0,386032667			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	11,6138355	0,203193414	57,15655489	0,01113704	9,032018387	14,19565262	9,03201839	14,19565262
X Variable 1	0,631178923	0,057862834	10,90819241	0,058198945	-0,104038088	1,366395934	-0,10403809	1,366395934
delta	0,82							
H	1,32							

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0,998791982
R Square	0,997585424
Adjusted R Square	0,995170848
Standard Error	0,111043535
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	5,094432	5,094432	413,1513841	0,031295039
Residual	1	0,012330667	0,012330667		
Total	2	5,106762667			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	10,91766667	0,101368415	107,7028448	0,005910721	9,629658832	12,2056745	9,62965883	12,2056745
X Variable 1	2,302531919	0,11327943	20,32612565	0,031295039	0,863180295	3,741883544	0,8631803	3,741883544
delta	1,65							
H	2,15							

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DOS PREÇOS - ESCALAS 8 A 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,990179609
R Square	0,980455658
Adjusted R Square	0,975569572
Standard Error	0,294184222
Observations	6

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	17,36623391	17,36623391	200,6628	0,000144187
Residual	4	0,346177426	0,086544357		
Total	5	17,71241133			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-6,594138699	0,678775929	-9,714750358	0,000629	-8,478722804	-4,709554593	-8,478722804	-4,709554593
X Variable 1	-1,437155912	0,101454296	-14,16555016	0,000144	-1,718838195	-1,15547363	-1,718838195	-1,15547363
delta	-0,22							
H	0,28							

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DOS PREÇOS - ESCALAS 5 A 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,998815496
R Square	0,997632395
Adjusted R Square	0,99526479
Standard Error	0,105377321
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	4,679027427	4,679027427	421,3677	0,030988908
Residual	1	0,01110438	0,01110438		
Total	2	4,690131807			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-1,902735627	0,377498174	-5,04038366	0,124685	-6,699304711	2,893833457	-6,699304711	2,893833457
X Variable 1	-2,206660747	0,107499124	-20,52724393	0,030989	-3,572566629	-0,840754865	-3,572566629	-0,840754865
delta	-0,60				-1,29	0,08		
H	-0,10				-0,79	0,58		

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DOS PREÇOS - ESCALAS 1 A 4

Regression Statistics	
Multiple R	0,974200938
R Square	0,949067468
Adjusted R Square	0,923601202
Standard Error	0,177292256
Observations	4

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,171416539	1,171416539	37,26763	0,025799062
Residual	2	0,062865088	0,031432544		
Total	3	1,234281628			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-4,239725702	0,148334261	-28,58224175	0,001222	-4,877956514	-3,60149489	-4,877956514	-3,60149489
X Variable 1	-0,698317369	0,114389704	-6,10472225	0,025799	-1,19049654	-0,206138198	-1,19049654	-0,206138198
delta	0,15							
H	0,65							

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DAS CARGAS - ESCALAS 8 A 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,993994413
R Square	0,988024893
Adjusted R Square	0,985031116
Standard Error	0,267400676
Observations	6

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	23,59790635	23,59790635	330,02624	5,39923E-05
Residual	4	0,286012486	0,071503122		
Total	5	23,88391883			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-7,289605346	0,616977827	-11,81501996	0,000293733	-9,002610414	-5,5766	-9,00261041	-5,57660028
X Variable 1	-1,675281526	0,092217547	-18,16662434	5,39923E-05	-1,931318482	-1,419245	-1,93131848	-1,41924457
	delta	-0,34						
	H	0,16						

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DAS CARGAS - ESCALAS 5 A 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,990067061
R Square	0,980232784
Adjusted R Square	0,960465569
Standard Error	0,231422177
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	2,655789636	2,655789636	49,58881428	0,089803685
Residual	1	0,053556224	0,053556224		
Total	2	2,70934586			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-5,266411783	0,829034639	-6,352462897	0,099400494	-15,80029564	5,267472	-15,8002956	5,267472069
X Variable 1	-1,662473036	0,236081931	-7,041932567	0,089803685	-4,662178381	1,337232	-4,66217838	1,337232309
	delta	-0,33						
	H	0,17						

SUMMARY OUTPUT INCREMENTOS LOGARITMICOS DAS CARGAS - ESCALAS 1 A 4

Regression Statistics	
Multiple R	0,659822174
R Square	0,435365298
Adjusted R Square	0,153047947
Standard Error	0,429946956
Observations	4

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	0,285066377	0,285066377	1,542113143	0,340177826
Residual	2	0,369708771	0,184854385		
Total	3	0,654775148			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-8,008440237	0,359721656	-22,26288049	0,002011525	-9,556197603	-6,460583	-9,5561976	-6,46068287
X Variable 1	0,344484881	0,277403571	1,241818482	0,340177826	-0,84908635	1,538056	-0,84908635	1,538056113
	delta	0,67						
	H	1,17						

Dinâmica de preços à vista de electricidade: uma análise empírica

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DOS PREÇOS - ESCALAS 10 a 13

Regression Statistics								
Multiple R	0,95223298							
R Square	0,906747648							
Adjusted R Square	0,860121472							
Standard Error	0,266445968							
Observations	4							

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,380622492	1,380622492	19,44718	0,04776702
Residual	2	0,141986908	0,070993454		
Total	3	1,5226094			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-13,28929417	1,258212263	-10,56204471	0,008845	-18,7029446	-7,875643744	-18,7029448	-7,875643744
X Variable 1	0,758086874	0,17190585	4,409895718	0,047767	0,018435697	1,49773805	0,018435697	1,49773805
	delta	0,88						
	H	1,38						

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DOS PREÇOS - ESCALAS 4 a 6

Regression Statistics								
Multiple R	0,999998707							
R Square	0,999997414							
Adjusted R Square	0,999994828							
Standard Error	0,001830536							
Observations	3							

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,295728196	1,295728196	386685,2	0,001023767
Residual	1	3,35086E-06	3,35086E-06		
Total	2	1,295731547			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-3,737705158	0,00528424	-707,3307175	0,0009	-3,804847792	-3,670562525	-3,804847792	-3,670562525
X Variable 1	-1,161220593	0,001867394	-621,8402048	0,001024	-1,184948082	-1,137493104	-1,184948082	-1,137493104
	delta	-0,08						
	H	0,42						

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DOS PREÇOS - ESCALAS 1 a 3

Regression Statistics								
Multiple R	0,999997582							
R Square	0,999995163							
Adjusted R Square	0,999990326							
Standard Error	0,00118392							
Observations	3							

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	0,289788845	0,289788845	206745,9	0,001400106
Residual	1	1,40167E-06	1,40167E-06		
Total	2	0,289790247			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-4,828483333	0,001080766	-4467,648398	0,000142	-4,84221577	-4,814750897	-4,84221577	-4,814750897
X Variable 1	-0,549159634	0,001207759	-454,6931999	0,0014	-0,564505662	-0,533813605	-0,564505662	-0,533813605
	delta	0,23						
	H	0,73						

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DAS CARGAS - ESCALAS 10 a 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,986763758
R Square	0,973702714
Adjusted R Square	0,960554072
Standard Error	0,184462346
Observations	4

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	2,519770036	2,519770036	74,05347677	0,013236242
Residual	2	0,068052714	0,034026357		
Total	3	2,58782275			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-20,21253726	0,871068859	-23,20429325	0,001852062	-23,96044406	-16,46463	-23,96044406	-16,46463045
X Variable 1	1,024146201	0,119011583	8,60543298	0,013236242	0,512080689	1,5362117	0,512080689	1,536211713
delta	1,01							
H	1,51							

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DAS CARGAS - ESCALAS 4 a 6

Regression Statistics	
Multiple R	0,997903019
R Square	0,995810435
Adjusted R Square	0,99162087
Standard Error	0,13879695
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	4,578967967	4,578967967	237,688274	0,041235218
Residual	1	0,019264593	0,019264593		
Total	2	4,59823256			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-4,866256415	0,400667659	-12,14536863	0,052298701	-9,957221718	0,2247089	-9,957221718	0,224708888
X Variable 1	-2,182938884	0,141591668	-15,41714221	0,041235218	-3,982031608	-0,3838462	-3,982031608	-0,38384616
delta	-0,59							
H	-0,09							

SUMMARY OUTPUT VOLATILIDADE DAS CARGAS - ESCALAS 1 a 3

Regression Statistics	
Multiple R	0,474865863
R Square	0,225497588
Adjusted R Square	-0,549004825
Standard Error	0,223434289
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	0,014535125	0,014535125	0,291151562	0,684993148
Residual	1	0,049922882	0,049922882		
Total	2	0,064458007			

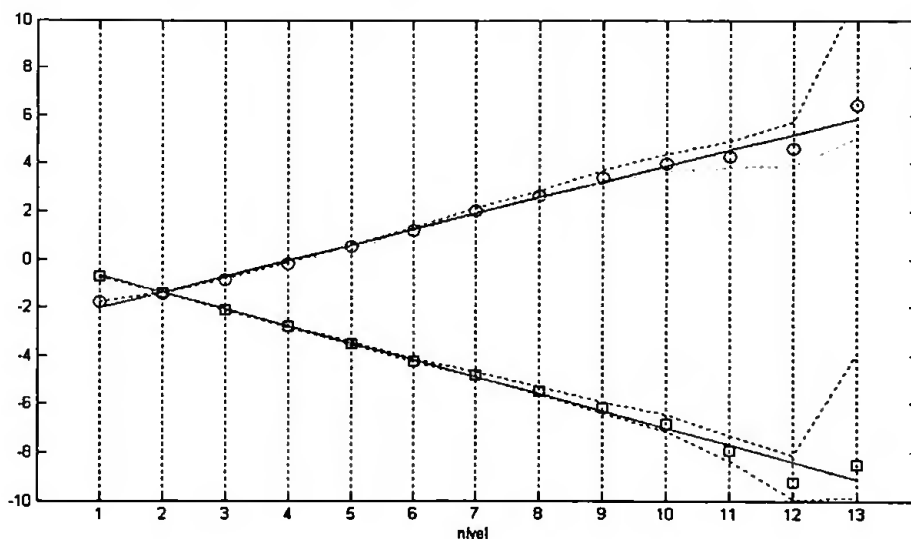
	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-8,232883333	0,203966667	-40,36386651	0,015768796	-10,82452557	-5,6412411	-10,82452557	-5,641241099
X Variable 1	-0,122989252	0,227933205	-0,53958462	0,684993148	-3,019155223	2,7731767	-3,019155223	2,773176719
delta	0,44							
H	0,94							

C. ANEXO C – Estimativa de expoentes fractais para ruído branco, movimento browniano, e de dois índices financeiros

C.1.- RUIDO BRANCO GAUSSIANO E MOVIMENTO BROWNIANO

Para um simples teste à metodologia empregue para a estimativa dos expoentes fractais das séries das cargas e dos preços, estimaram-se, pela mesma metodologia, os expoentes fractais para ruído branco gaussiano (RBG) e movimento browniano (MB). O RBG é dado por 1 amostra com 70.128 unidades de comprimento. O MB é dado pelo soma acumulada do RBG e tem também igual comprimento de amostra.

Para o caso do ruído branco (círculos azuis) e movimento browniano (círculos roxos), os gráficos log-log baseados na equação 3.30 representam-se na figura abaixo.



SUMMARY OUTPUT RUIDO BRANCO GAUSSIANO - ESCALAS 1 A 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,993594538
R Square	0,987230106
Adjusted R Square	0,986069207
Standard Error	0,325334262
Observations	13

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	90,00847185	90,008472	850,401	9,07354E-12
Residual	11	1,1642662	0,1058424		
Total	12	91,17273805			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-0,653594415	0,170521162	-3,8329226	0,00278	-1,028908963	-0,278279868	-1,028908963	-0,278279868
X Variable 1	-1,014564433	0,034791066	-29,161636	9,07E-12	-1,091139053	-0,937989812	-1,091139053	-0,937989812
	delta	-0,01						
	H	0,49						

SUMMARY OUTPUT MOVIMENTO BROWNIANO - ESCALAS 1 A 13

Regression Statistics	
Multiple R	0,994116884
R Square	0,988268378
Adjusted R Square	0,987201867
Standard Error	0,292206578
Observations	13

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	79,1205899	79,1205899	926,6367944	5,68883E-12
Residual	11	0,939231524	0,085384684		
Total	12	80,05982142			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-2,016031657	0,153157571	-13,16312113	4,47035E-08	-2,353129197	-1,678934	-2,353129	-1,678934
X Variable 1	0,951223777	0,03124841	30,44070949	5,68883E-12	0,88244649	1,020001	0,882446	1,020001
	delta	0,98						
	H	1,48						

Tendo em conta que se realizaram as estimativas apenas sobre uma amostra de ruído branco gaussiano os resultados estão muito próximos dos teóricos.

DOIS ÍNDICES FINANCEIROS

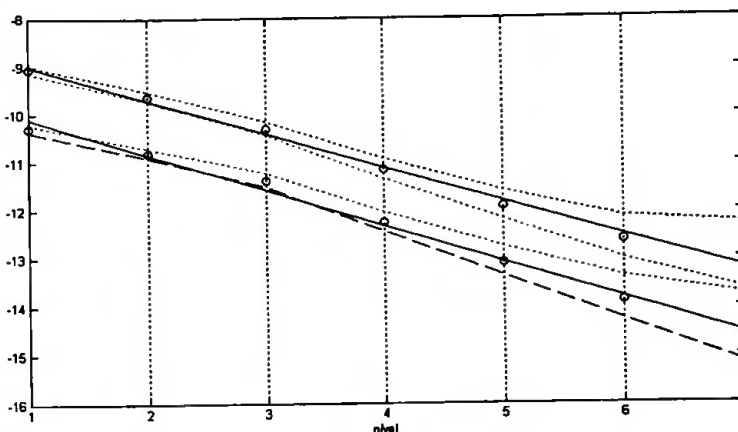
De forma a se poder realizar uma análise comparada entre os expoentes fractais característicos de séries financeiras versus os expoentes estimados para o mercado OMEL, realizam-se em baixo as duas estimativas dos expoentes fractais constituídas pelos retornos dos logaritmos dos preços diários de fecho do NYSE e NASDAQ²⁶.

Para que se tenha sensibilidade à análise multi-escala destas séries, coloca-se em baixo atabela com a relação entre a escala temporal e o nível da análise de multi-resolução.

Nível	1	2	3	4	5	6	7
Periodos	2 a 4 dias	4 a 8 dias	1 a 2 semanas	2 a 4 semanas	1 a 2 meses	2 a 4 meses	4 a 8meses

Para o caso dos retornos diários logarítmicos do NYSE (círculos vermelhos) e NASDAQ (círculos azuis), os gráficos log-log baseados na equação 3.30 representam-se na figura abaixo.

²⁶ Foram utilizadas duas amostras dos preços de fecho diário do NYSE e NASDAQ disponíveis no MATLAB.



SUMMARY OUTPUT retornos do NYSE - escalas 1 a 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,997041472
R Square	0,994091697
Adjusted R Square	0,992910037
Standard Error	0,135361506
Observations	7

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	15,41430917	15,414309	841,2667	9,12965E-07
Residual	5	0,091613686	0,0183227		
Total	6	15,50592286			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-10,11096803	0,092233209	-109,62394	1,2E-09	-10,34806104	-9,873875015	-10,34806104	-9,873875015
X Variable 1	-1,070429396	0,036905507	-29,004598	9,13E-07	-1,165298021	-0,975560771	-1,165298021	-0,975560771
delta	-0,04							
H	0,48							

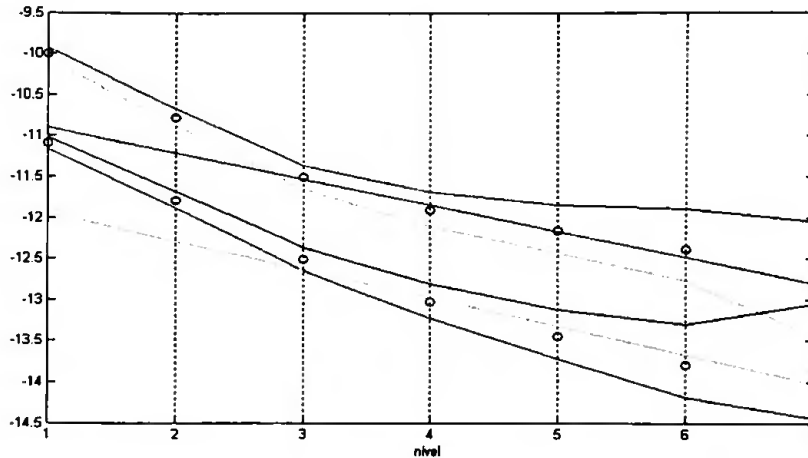
SUMMARY OUTPUT retornos do NYSE - escalas 1 a 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,99766784
R Square	0,995341119
Adjusted R Square	0,994409343
Standard Error	0,113812115
Observations	7

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	13,83685231	13,83685231	1068,219046	5,03857E-07
Residual	5	0,064765988	0,012953198		
Total	6	13,90161829			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-9,010651233	0,077549792	-116,1918167	8,95533E-10	-9,20999932	-8,811303	-9,209999	-8,811303
X Variable 1	-1,014179078	0,031030194	-32,68362046	5,03857E-07	-1,093944731	-0,934413	-1,093945	-0,934413
delta	-0,01							
H	0,49							

Para o caso da volatilidade dos índices (dada pelo valor absoluto dos retornos diários logarítmicos do NYSE e NASDAQ), tem-se alguma evidência de persistência para as escalas grandes



SUMMARY OUTPUT volatilidade do NYSE - escalas 1 a 3

Regression Statistics	
Multiple R	0,999930981
R Square	0,999861966
Adjusted R Square	0,999723933
Standard Error	0,0118392
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,0153125	1,0153125	7243,609	0,007479674
Residual	1	0,000140167	0,0001402		
Total	2	1,015452667			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-11,08416667	0,010807662	-1025,5841	0,000621	-11,22149103	-10,9468423	-11,22149103	-10,9468423
X Variable 1	-1,027916035	0,012077586	-85,109393	0,00748	-1,181376319	-0,874455752	-1,181376319	-0,874455752
delta	-0,01							
H	0,49							

SUMMARY OUTPUT volatilidade do NYSE - escalas 3 a 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,972045919
R Square	0,944873269
Adjusted R Square	0,926497692
Standard Error	0,152848358
Observations	5

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,201307339	1,2013073	51,42006	0,005586917
Residual	3	0,070087861	0,0233626		
Total	4	1,2713952			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	Lower 95,0%	Upper 95,0%
Intercept	-11,94401477	0,205066276	-58,244656	1,11E-05	-12,59662718	-11,29140236	-12,59662718	-11,29140236
X Variable 1	-0,500034348	0,069732229	-7,1707782	0,005587	-0,721953423	-0,278115273	-0,721953423	-0,278115273
delta	0,25							
H	0,75							

SUMMARY OUTPUT volatilidade do NASDAQ - escalas 1 a 3

Regression Statistics	
Multiple R	0,999911293
R Square	0,999822595
Adjusted R Square	0,999645189
Standard Error	0,01428869
Observations	3

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,1506445	1,1506445	5635,809796	0,008479618
Residual	1	0,000204167	0,000204167		
Total	2	1,150848667			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	ower 95,0%	pper 95,0%
Intercept	-10,00683333	0,01304373	-767,1757568	0,000829822	-10,17256964	-9,841097	-10,17257	-9,841097
X Variable 1	-1,094279737	0,014576397	-75,07203072	0,008479618	-1,279490424	-0,909069	-1,27949	-0,909069
	delta	-0,05						
	H	0,45						

SUMMARY OUTPUT volatilidade do NASDAQ - escalas 3 a 7

Regression Statistics	
Multiple R	0,991324703
R Square	0,982724668
Adjusted R Square	0,976966224
Standard Error	0,076808117
Observations	5

ANOVA					
	df	SS	MS	F	Significance F
Regression	1	1,00679474	1,00679474	170,6580204	0,000968711
Residual	3	0,01769846	0,005899487		
Total	4	1,0244932			

	Coefficients	Standard Error	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	ower 95,0%	pper 95,0%
Intercept	-10,901408	0,103048241	-105,7893647	1,86211E-06	-11,22935349	-10,57346	-11,22935	-10,57346
X Variable 1	-0,457765693	0,035041274	-13,06361437	0,000968711	-0,569282666	-0,346249	-0,569283	-0,346249
	delta	0,27						
	H	0,77						