



***Facultad  
de  
Ciencias***

**Aprendizaje basado en proyectos:  
construcción de modelos matemáticos y  
educación STEM/STEAM**  
(Project-based learning: mathematical model  
building and STEM/STEAM education)

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN MATEMÁTICAS**

Autor: Juan Miguel Cano Mazón

Director: Mario Fioravanti Villanueva

Junio - 2021



# Agradecimientos

Me gustaría comenzar agradeciéndole a mi director, Mario Fioravanti, por su tiempo, paciencia, esfuerzo y dedicación. Agradecer a mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, por estar siempre ahí cuando los necesito y apoyarme incondicionalmente. A mis amigos, a los profesores, a todos los que hemos coincidido en este camino, y con los que he compartido momentos. Me quedo con buenos recuerdos de esta etapa de mi vida, he aprendido de todos, por ello GRACIAS.

## Resumen

La desaparición de algunas profesiones y el surgimiento de nuevos empleos hace que también se produzcan cambios en la manera de enseñar. La educación STEAM combina las áreas: Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas, supone una innovación en la enseñanza. En este trabajo se hace una revisión bibliográfica y se presenta un conjunto de actividades que pueden desarrollarse en distintos niveles de la E.S.O y Bachillerato. En las diferentes actividades se hacen propuestas de proyectos, donde se explican los objetivos, así como los datos y los contenidos del currículo que se pueden potenciar.

**Palabras Clave:** Proyecto STEAM, Aprendizaje Basado en Proyectos, Modelización

## Abstract

The disappearance of some professions and the emergence of new jobs also brings changes in the way of teaching. STEAM education combines the areas of Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics, and represents an innovation in teaching. In this work a bibliographical review is made and a set of activities that can be developed in different levels of E.S.O and Bachillerato are presented. In the different activities, project proposals are made, where the objectives are explained, as well as the data and the contents of the curriculum that are intended to be promoted.

**Keywords:** STEAM Project, Project-Based Learning, Modeling

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Objetivos y estructura</b>	<b>3</b>
<b>Marco Teórico</b>	<b>5</b>
El ABP y la educación STEM/STEAM . . . . .	5
El método STEM/STEAM en las aulas . . . . .	6
Dificultades en la implantación de la educación STEM/STEAM . . . . .	8
Modelización matemática . . . . .	10
Currículo y competencias . . . . .	17
Evaluación . . . . .	18
El papel de las nuevas tecnologías . . . . .	20
<b>Actividad 1: proyecto de navegación</b>	<b>22</b>
<b>Actividad 2: determinar el caudal de un río</b>	<b>35</b>
<b>Actividad 3: diseño de tambor y medida del sonido</b>	<b>42</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>46</b>
Referencias . . . . .	47



# Introducción

Los empleos actuales y futuros necesitan personas creativas y competentes para dar solución a los problemas, temas como el calentamiento global, la producción de energía, nuevas tecnologías, etc., precisan un tipo de trabajo colaborativo, adquirir habilidades de análisis crítico y aprender a tomar decisiones.

La educación STEM integra la enseñanza de la ciencia aplicada al mundo real, estos conocimientos son necesarios para la mayoría de empleos.

En la década de los 90, The National Science Foundation agrupó la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, creando el método de enseñanza STEM. Más tarde, a principios del siglo XXI, promovido por la Rhode Island School of Design de Estados Unidos, incluyó el arte dando lugar al método STEAM. Incluir el arte fomentó la creatividad, potenciando el pensamiento libre y el pensamiento crítico.

La mayoría de los empleos que existen están basados en las áreas STEAM: la ciencia investiga en medicina y crea vacunas para combatir la pandemia actual..., investiga fenómenos naturales, sociales, experimenta para dar respuesta a lo desconocido; la tecnología, las habilidades técnicas junto con los conocimientos científicos nos hacen una vida mejor, cada vez tienen más importancia las TIC; la ingeniería, utiliza los conocimientos científicos y técnicos para realizar diseños, es fundamental en la sociedad; las matemáticas, por ejemplo, en ramas como la física, la economía...; y al introducir el arte consigue que llegue a más personas.

Con el paso del tiempo las profesiones están evolucionando y es necesario fomentar vocaciones científicas y tecnológicas, adecuadas a las nuevas demandas laborales. Por eso es importante introducir desde la escuela el método STEAM, con el que los alumnos van aprendiendo de una forma más flexible y amena.

El virus COVID-19 que estamos sufriendo ha servido para dar más importancia a la tecnología: las clases online durante el confinamiento, las videollamadas, el teletrabajo, que también ha aumentado; se han hecho más visibles las carreras científicas: los epidemiólogos estudiando el virus; los matemáticos para conocer la evolución de la pandemia; médicos y enfermeros salvando vidas.

En los tiempos que nos ha tocado vivir, es necesario fomentar la alfabetización di-

gital. Tiene gran importancia empezar a usar la tecnología desde pequeños, en las clases, para coger habilidades, e ir pasando niveles, que serán necesarios para los trabajos del futuro, que cada vez requieren ir actualizando los conocimientos.

La automatización y la inteligencia artificial están transformando el mundo del empleo, el desarrollo de estas nuevas tecnologías provocará que muchos de los empleos actuales desaparezcan, pues no será necesaria la intervención humana. En contrapartida, los trabajos evolucionarán y se crearán nuevos puestos en los que intervengan las nuevas tecnologías. Se buscará gente que cumpla con una serie de habilidades para ejercerlos, que sepa ver las conexiones entre materias, que sepa trabajar en equipo con trabajadores de otras ramas y que entienda la necesidad de los proyectos.

# Objetivos y estructura

Los objetivos que se pretenden conseguir con este trabajo son los siguientes:

- Dar a conocer algunas tendencias de innovación educativas, concienciar al lector sobre la importancia que tiene el profesor a la hora de proponer actividades que promuevan las vocaciones STEM/STEAM.
- Reflexionar sobre las aportaciones y las dificultades de la educación STEM/STEAM en las aulas.
- Analizar el uso de la modelización matemática como herramienta educativa.
- Entender e impulsar el uso de las TIC como herramientas de aprendizaje. (Utilizar las TIC tanto en las propuestas como en el desarrollo de actividades).
- Diseñar propuestas de actividades que fomenten el desarrollo de las competencias STEM/STEAM, propuestas creativas donde el alumno tenga un papel activo y mejore así su atención.
- Mostrar la importancia de la disposición de trabajo en equipo.

Se empieza el trabajo realizando un análisis de la metodología *Aprendizaje Basado en Proyectos*, analizando su influencia en la educación STEM/STEAM, se continúa explicando las maneras y las dificultades de llevar el método STEM/STEAM a las aulas para alcanzar un aprendizaje más profundo. A continuación, se estudia el uso de la modelización matemática como herramienta de unión de varios campos de conocimiento, se presentan algunos aspectos que se han de tener en cuenta a la hora de desarrollar las actividades. Se sigue relacionando con las competencias del currículo y la evaluación. Posteriormente se señala el importante papel de las TIC en este tipo de metodología.

Finalmente, se hacen tres propuestas de actividades que se puedan ajustar al currículo de E.S.O. y Bachillerato, con las que se pretende motivar al alumno en el aprendizaje de temas y contenidos concretos, tratando de fomentar el emprendimiento,

el pensamiento crítico y la creatividad, y se elaboran unas conclusiones, señalando algunos aspectos de mejora educativa que puede introducir esta metodología.

# Marco Teórico

Se comienza detallando un tipo de metodología didáctica que se emplea para llevar el método STEAM a las aulas, el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

## El ABP y la educación STEM/STEAM

El ABP es una metodología didáctica de una cierta antigüedad, que ha cobrado un especial interés en los últimos años (Domènech-Casal, 2016), (Puig, 2016). William Heard Kilpatrick, a principios del siglo XX, en Estados Unidos, hizo famoso el concepto en un texto titulado *The Project Method* (1918), sostenía que el aprendizaje es más eficaz cuando está basado en experiencias. Kilpatrick incluye cuatro categorías de proyectos: elaborar un producto, resolver un problema, disfrutar de una experiencia y obtener un conocimiento (Domènech-Casal, Lope, Mora, y cols., 2019).

En el ABP el profesorado destaca como positivo que mejora la motivación, el compromiso personal y la autonomía. Los alumnos tienen un papel activo, que les lleva a aprender materias de una manera menos rígida que la tradicional, adquieren los conocimientos haciendo prácticas.

Los pasos que se han de tener en cuenta para la realización de los proyectos son los siguientes (Ariño, 2017):

- Elegir un tema que tenga que ver con la realidad de los alumnos para que los motive
- Hacer preguntas para saber qué conocimientos tienen sobre el tema y qué deben investigar
- Formar grupos, intentando siempre que haya un número par de alumnos, para que ninguno se sienta excluido, con diversos perfiles y en el que cada uno trabaje la parte que mejor entienda y así aporte más al grupo
- El profesor tendrá un papel de orientador y actuará de guía

- Los alumnos compartirán ideas, estructurarán la información y buscarán la mejor respuesta
- Después expondrán a los demás compañeros cómo han llegado a encontrar la respuesta, con un guión bien estructurado, que explique claramente la información
- Evaluación mediante rúbricas

En el currículo de la LOMCE, que determina los procesos de enseñanza y aprendizaje, aparece reflejada la resolución de problemas asociada a proyectos de investigación. *“La resolución de problemas y los proyectos de investigación deben ser ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas es una de las capacidades esenciales de la actividad matemática, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinarias reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico”* (MECD, 2015, p. 398).

Por ello, se han de fomentar actividades de trabajo que contribuyan al desarrollo de este tipo de habilidades y competencias relacionadas con la creatividad y la innovación. En las siguientes secciones se explican algunas características, metodologías y dificultades que se pueden encontrar a la hora de ponerlo en práctica.

## **El método STEM/STEAM en las aulas**

Como se señala en el capítulo 2 de (Arce, Conejo, y Muñoz-Escolano, 2019), *Ideas generales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, en la educación existen dos corrientes contrapuestas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, la corriente empirista y la corriente constructivista. Esta última viene desarrollándose desde la segunda mitad del siglo XX hasta la actualidad. El constructivismo tiene sus raíces en filosofía, psicología, sociología y educación. El verbo construir proviene del latín *struere*, que significa ‘arreglar’ o ‘dar estructura’. Este método sostiene que el aprendizaje humano se va construyendo, adquiriendo nuevos conocimientos a partir de la base de enseñanzas anteriores (Requena, 2008).

En la corriente empirista, el alumno aprende lo que el profesor explica en las clases, adquiriendo éste un rol central, el alumno adquiere el rol pasivo, como un mero receptor de conocimientos, que luego tendrá que aplicar, siendo el profesor el proveedor de conocimientos. El aprendizaje es considerado como uno de los saberes que le

proporciona el maestro y el alumno va asimilando y acumulando.

En cambio, en la corriente constructivista, el alumno aprende a través de su acción en situaciones que son planteadas por el profesor. Es el alumno el que tiene un rol principal, no se produce el trasvase de conocimiento profesor-alumno, los alumnos desarrollan e integran sus conocimientos a través de conflictos que deben superar, produciéndose así una evolución de sus estructuras cognitivas.

Mientras que en el empirismo, el conocimiento se transmite de manera lineal, y está ya cerrado y organizado; en el constructivismo, es el alumno el que construye y desarrolla su conocimiento, por medio de las actividades que le plantea el profesor. Otra de las diferencias es que en el empirismo el error es asociado al fracaso, el profesor y el alumno no deben equivocarse. En cambio, en el constructivismo, el error es visto como una circunstancia que proporciona aprendizaje, los conflictos cognitivos a los que se enfrenta el alumno, son vistos como oportunidades para superar y reorganizar sus conocimientos. Es importante que en la corriente constructivista haya una buena interacción entre profesor-alumno y los propios alumnos entre sí. Pues como indica (Arce y cols., 2019), el docente deja de ser la única fuente posible de conocimiento: *“El conocimiento es una función de cómo el individuo crea significados a partir de sus propias experiencias”* (Ertmer y Newby, 1993, p. 14).

La selección de metodologías educativas en cualquier contexto de aprendizaje no es una tarea sencilla, se han de tener en cuenta muchos factores, como el contenido de las asignaturas, los perfiles de los estudiantes, el contexto social, el profesorado, etc. Si se pretende mejorar el aprendizaje autónomo, o el pensamiento crítico de los alumnos, las metodologías basadas en el protagonismo del alumno son las más adecuadas, debido al grado de implicación y compromiso que se le exige. Los trabajos por proyectos son buenas maneras de desarrollar el método STEAM en las aulas, pues permiten el trabajo multidisciplinar, pueden ejercitarse varias competencias y trabajar en varias asignaturas al mismo tiempo.

Además, este tipo de metodología puede fomentar otras competencias transversales como el aprendizaje cooperativo, un enfoque que trata de organizar actividades para que los estudiantes trabajen en grupo y realicen las tareas de manera colectiva y conviertan las actividades en experiencias de aprendizaje, o la gamificación, una técnica que traslada la mecánica de los juegos al ámbito educativo favoreciendo la atención y la motivación de los alumnos. Entre las ventajas que aporta su puesta en marcha en las clases, está que los alumnos utilizan un razonamiento basado en ejemplos reales, donde adquieren mejor los conocimientos que estudiando y memorizando. De esta forma, los alumnos aprenden haciendo la parte práctica combinando con el aprendizaje teórico mediante investigaciones, debates, etc.

## Dificultades en la implantación de la educación STEM/STEAM

En la actualidad, todavía existen varios obstáculos a superar para implantar de una forma adecuada la educación STEAM. Es por esto, por lo que se debería facilitar desde la dirección de los centros educativos estrategias para que los profesores puedan ponerlo en práctica.

Uno de los mayores problemas estructurales que los profesores se encuentran al implementar la educación STEAM, es la necesidad de modificar los sistemas de evaluación. Las evaluaciones deben estar enfocadas a los procesos, la evaluación mediante rúbricas es de utilidad.

Otro de los problemas que nos encontramos es la rigidez del funcionamiento escolar, los estudiantes no están acostumbrados a aplicar los contenidos de unas asignaturas en otras. Algunos alumnos y profesores piensan que el uso de esta metodología no es una buena idea, pues la elección de un tema concreto que no les sea de interés puede ser vista como una pérdida de tiempo, y que no les va a ser útil. Sin embargo, es importante hacerles ver que en el futuro no van a hacer actividades con fórmulas o funciones aisladas, sino que las encontrarán en situaciones reales, de una manera más transversal. Además, pueden ser buenas oportunidades para trabajar en situaciones reales, potenciar el trabajo en equipo o desarrollar interdisciplinariedad entre asignaturas, aspectos que están en la normativa que establece el currículo.

Como señala (Arce y cols., 2019, p. 31), *“Los docentes han de seleccionar y proporcionar a los estudiantes situaciones, problemas o enigmas que les den oportunidades para involucrarse de forma activa en su resolución, con la suficiente motivación y curiosidad.”*

Los profesores más tradicionales no tienen experiencia en la enseñanza multidisciplinar como el método STEAM, esto también supone un desafío para los profesores, que no están acostumbrados a pensar las disciplinas como trabajos colaborativos, falta formación en el profesorado. El profesorado no solo debe conocer la tecnología, sino que además debe ser capaz de usarla de forma transversal. Se buscan profesores más generalistas, que sean capaces de trabajar con otros profesores con una organización colaborativa. Es importante, pues como indica Font, *“el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus profesores”* (Font, 2011).

Otra de las dificultades con las que se encuentran los profesores es la escasez de recursos, una opción posible para remediarlo es haciendo uso de la imaginación y la creatividad. En la actualidad, el profesorado no dispone de suficientes ejemplos STEAM, esto provoca más trabajo para el docente y la intranquilidad de no saber

si el proyecto escogido se ajusta bien a los contenidos del currículo.

A algunos profesores les resulta difícil evaluar a los alumnos de forma individual a partir de trabajos colectivos y evaluar entre la evolución del proceso y el resultado final (Domènech-Casal y cols., 2019).

En los procesos de enseñanza-aprendizaje intervienen muchos factores: los profesores, los propios estudiantes, el saber y el contexto en el que se desarrollan los procesos y las relaciones existentes entre éstos. El docente debe ser capaz de detectar problemas durante la práctica, no basta con el saber, ha de tener una buena formación disciplinar, didáctica, pedagógica y práctica.

Con el objetivo de dar un mayor significado a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas se puede hacer uso de herramientas de modelización, que permitan dar respuesta a situaciones y problemas reales.

## Modelización matemática

Son muchas las definiciones que se han dado al concepto de modelo matemático. A continuación se muestran algunas de ellas que se recogen en (Villa-Ochoa, 2007).

- Sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y cualificación de ideas del mundo real.
- Construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.
- Es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión.

Todas ellas hacen referencia a la utilización de las matemáticas para explicar la vida real. Podemos entender los modelos matemáticos como representaciones simplificadas, por medio de ecuaciones, funciones o fórmulas, que se utilizan para entender fenómenos naturales, sociales, físicos, etc. Dependiendo del diseño del modelo y el objetivo que se busque, pueden servir para predecir el valor de las variables en el futuro, hacer hipótesis, evaluar los efectos de una actividad, etc.

Las características básicas de un modelo matemático son las siguientes.

- Variables. Son los objetos que se busca entender o analizar. En función de si las variables expresan características y cualidades, o se expresen mediante números, las variables son cualitativas o cuantitativas. Por ejemplo, la producción en una determinada fábrica es una variable cuantitativa.
- Restricciones. Son límites que nos indican que los resultados del análisis son razonables.
- Relaciones entre las variables. Las relaciones son el resultado de diferentes teorías económicas, físicas, químicas, etc.

Uno de los informes más conocidos con los que se evalúa la formación de los alumnos, es el informe PISA (Programme for International Student Assessment), un proyecto de la OCDE, que evalúa a nivel mundial los alumnos cuando llegan al final de la Educación Secundaria Obligatoria, a los 15 años. Las pruebas PISA incorporan la noción de competencia y se basan en el trabajo danés KOM Project, un proyecto del Ministerio de Educación danés que trataba sobre las reformas en la educación danesa. (Niss, 2003). PISA define la competencia matemática como *“la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos.*

*Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. Esto ayuda a las personas a reconocer la presencia de las matemáticas en el mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundamentados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.”*

Las competencias de modelización que establece PISA para el desarrollo de la modelización matemática son las siguientes (Romero, 2004):

- estructurar el campo o situación que va a modelarse
- traducir la realidad a una estructura matemática
- interpretar los modelos matemáticos en términos reales
- trabajar con un modelo matemático
- reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados (incluyendo sus limitaciones)
- dirigir y controlar el proceso de modelización

Las tareas que los docentes proponen a los estudiantes son un medio para estimular el aprendizaje en los alumnos y constituyen una pieza clave en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los elementos principales que se ha de considerar en estas propuestas son el nivel necesario y el tipo de proceso mental requerido. No se debe confundir la dificultad de una actividad con su demanda cognitiva. Mientras que la dificultad está ligada a la proporción de alumnos que resuelven la actividad correctamente, la demanda cognitiva se basa en los procesos mentales requeridos (Rosales Sánchez, Rodríguez Ortega, Romero Ariza, y cols., 2020). Así pues, tareas en las que se requiera exclusivamente replicar procedimientos ya conocidos, exigirán una menor demanda cognitiva, que otras en las que se necesite relacionar varios conceptos matemáticos.

Atendiendo a los niveles de demanda cognitiva que se requieren en las tareas (Smith y Stein, 1998) las divide en cuatro grupos.

- Tareas de memorización. Constituyen el nivel 1, este tipo de tareas implican reproducir fórmulas o definiciones ya trabajadas, por la propia naturaleza de las tareas no pueden ser resueltas usando procedimientos, no hay conexión con los conceptos.

- Tareas de procedimientos sin conexión. Nivel 2, son tareas algorítmicas, donde el procedimiento es evidente, no hay ambigüedad sobre lo que se necesita hacer y cómo hacerlo. La demanda cognitiva que se requiere es limitada. Pretenden producir respuestas correctas, más que desarrollar comprensión. Al igual que en el nivel 1, no hay conexión entre los conceptos.
- Tareas de procedimientos con conexión. Nivel 3. Este tipo de tareas se centran en utilizar procedimientos para aumentar la comprensión de los conceptos. Requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo, los alumnos necesitan involucrarse con las ideas conceptuales implícitas para poder resolver las tareas.
- Producir matemáticas. Nivel 4. Son tareas en las que se requiere un pensamiento no algorítmico y complejo. Requieren un mayor esfuerzo cognitivo, pueden provocar una ansiedad inicial por la naturaleza impredecible del proceso de resolución. No se sugiere un camino a seguir que haya sido ensayado anteriormente. También requieren la autorregulación de sus propios procesos cognitivos: selección de conocimientos, análisis de los posibles procedimientos de resolución.

Las tareas de memorización y tareas de procedimientos sin conexión constituyen el nivel de baja demanda cognitiva, las tareas de procedimientos con conexión y producir matemáticas son consideradas tareas de una alta demanda cognitiva.

Atendiendo a los objetivos de aprendizaje que se pretendan alcanzar, el docente ha de tener en cuenta la selección de la actividad y su diseño, incluyendo un menor o mayor número de tareas de los distintos niveles (Arce y cols., 2019). Por ejemplo, si el objetivo buscado es mejorar la agilidad en el uso de procedimientos, puede ser adecuado el uso de niveles de baja demanda cognitiva. No obstante, sería buena idea plantear tareas que requieran un nivel mayor para que el alumno tenga la oportunidad de desarrollar conceptos, usar diferentes representaciones, establecer conexiones entre conceptos, etc.

Como se señala en (Arce y cols., 2019), la demanda cognitiva no es algo inherente únicamente a la tarea, existen otros factores que influyen, como es la estrategia de resolución utilizada, o su ubicación dentro del aula.

La demanda cognitiva permite agrupar las actividades, según el esfuerzo cognitivo requerido. No obstante, existen diversas tipologías para agrupar las tareas matemáticas.

En (Arce y cols., 2019), se resumen algunos criterios que se pueden adaptar en una tarea, con el fin de disminuir o aumentar su demanda cognitiva.

- Contexto. Según el contexto en el que se ubica la tarea, puede ser un contexto real, cuando se hace referencia a la realidad en la que se encuentra el resolutor y que puede requerir la búsqueda de información y la toma de decisiones; un contexto realista, cuando la tarea se ubica en una situación simulada o susceptible de ser real, pero no hace referencia a la realidad en la que se encuentra el resolutor en ese momento. En el caso de que la situación sea inverosímil, el contexto es fantasista.
- Formato. Atendiendo a la manera de presentar los datos, el formato puede ser: verbal, cuando se utilizan palabras; simbólico, cuando se emplean símbolos matemáticos; tabular, cuando se hace uso de tablas; o visual, con el empleo de gráficos e imágenes. Es frecuente el uso de varios sistemas para representar las tareas.
- Datos contenidos en el enunciado. En función de si en la tarea aparecen únicamente los datos estrictamente necesarios y se tiene información suficiente para resolver la tarea; o contiene datos superfluos, que no son necesarios; o puede tener datos insuficientes si falta algún dato y no se puede tener acceso a él.
- Las soluciones, otro factor que permite clasificar las tareas, es el número de soluciones que posee, si tiene un final cerrado, en el que solo hay una única solución final, aunque existan diversas formas de llegar a ella. Se dice que tiene un final abierto, si existen varias soluciones posibles.

Las tareas de planteamientos de problemas por parte de los estudiantes exigen un alto nivel de demanda cognitiva y constituyen buenas oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, que desarrollan habilidades en la resolución de problemas. Los estudiantes modelizan matemáticamente las situaciones reales, de esta forma, convierten un problema de un contexto real, en un problema en un contexto matemático, que es resuelto mediante técnicas matemáticas y proporciona una solución al problema inicial.

Blum define el proceso de modelización como *un proceso en el que se traslada el mundo real a las matemáticas en ambas direcciones* (Blum y Ferri, 2009). Para resolver los problemas contextualizados en el mundo real, se utilizan las relaciones que se producen entre el Mundo Real y el Mundo Matemático. Estas relaciones se producen en fases, que forman lo que se conoce como el ciclo de modelización.

Esta forma de resolución de problemas relacionados con el mundo real se encuentra presente en las pruebas PISA (Sala y Font, 2019).

A continuación se representan dos ciclos de modelización, el primero es el de los informes PISA y el segundo es el propuesto por Blum y Leiss.

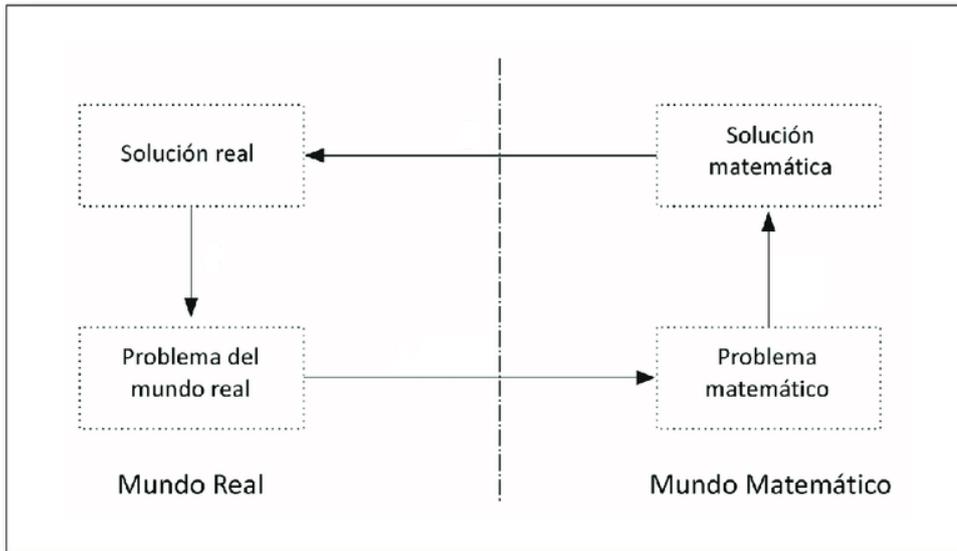


Figura 1: Ciclo de modelización PISA (2003)

Dado un problema en su contexto, se formula un problema matemático, del que se obtienen unos resultados matemáticos. Se interpreta el resultado de la solución obtenida en su contexto y se valora si es razonable en el problema en el contexto dado.

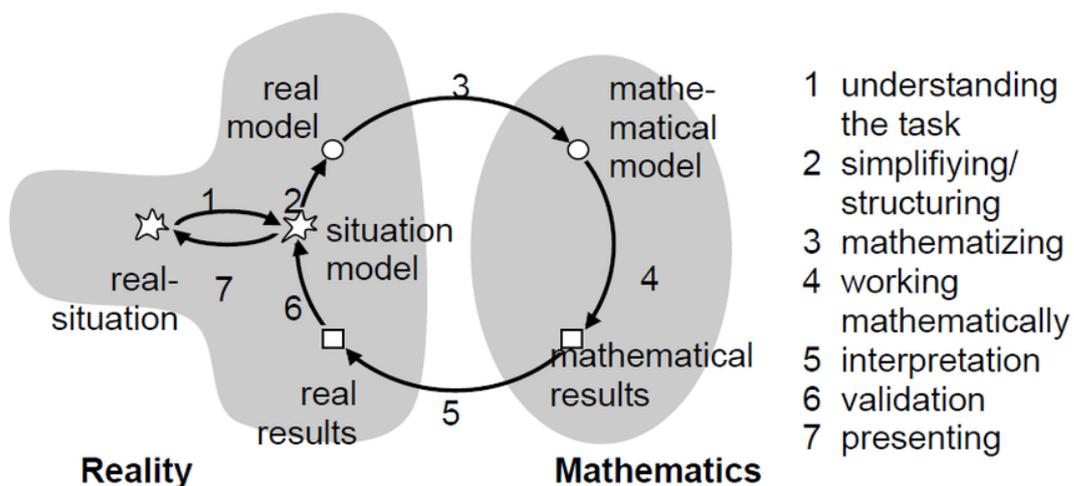


Figura 2: Ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007)

El ciclo de modelización de Blum y Leiss es una extensión del ciclo PISA, a

diferencia del ciclo de modelización PISA, se distingue entre la situación real y el modelo de la realidad.

El proceso de resolución de una tarea de modelización queda estructurado en siete pasos, que no se desarrollan de manera lineal, produciéndose un gran número de idas y venidas.

- comprensión de la situación real
- simplificación de la situación y construcción de un modelo de la realidad
- matematización o conversión del modelo de la realidad en un modelo matemático
- aplicación de procedimientos matemáticos para obtener un resultado
- interpretación de este resultado matemático en la realidad de manera que se obtenga un resultado real
- validación de este resultado respecto a la situación inicial
- comunicación del proceso completo de resolución

Muchos de los problemas que se incluyen en las pruebas PISA son problemas con un nivel alto de demanda cognitiva, que tienen un contexto cerrado y de contexto realista, resolver problemas e interpretar situaciones en contextos personales, profesionales, sociales y científicos. En los enunciados de las tareas se encuentran los datos en distintos tipos de representación (simbólica, numérica, verbal, tabular, gráfica, manipulativa, ejecutable...)

Atendiendo a los procesos matemáticos que describe un alumno cuando resuelve los problemas se pueden dividir en tres categorías (Arce y cols., 2019).

- Formulación matemática de las situaciones. Se recogen los procesos que permiten convertir un problema de la vida real en un problema matemático. El resolutor decide dónde extraer las matemáticas necesarias para resolver el problema real. También incluye las suposiciones que se hacen del problema.
- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos. Los procesos que son realizados por el resolutor dentro del modelo matemático. Incluye los procedimientos matemáticos, la aplicación de proposiciones, o la realización de argumentaciones en el modelo.

- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. Los procesos que están incluidos en esta categoría, permiten al resolutor reinterpretar las soluciones matemáticas obtenidas en el mundo matemático al mundo real, y verificar si los resultados que se han obtenido son razonables en el contexto tratado.

En el siguiente capítulo se detallan las competencias, otro de los aspectos importantes que se ha de tener en cuenta al desarrollar las actividades en el aula.

## Currículo y competencias

El profesor tiene que seguir unas normas y unos contenidos que debe enseñar y evaluar en cada momento. Estos contenidos han ido variando a lo largo de la educación española, durante los últimos 30 años, en función de la ley educativa vigente. Las expectativas de aprendizaje son las capacidades, conocimientos y destrezas que están recogidos en el currículo y se esperan desarrollar en los planes de estudios. Las expectativas de aprendizaje se sostienen en actuaciones, contenidos y tareas. Se dividen en dos, objetivos generales y objetivos específicos, estos últimos expresan lo que se espera de los alumnos en unas edades y niveles concretos (Romero y Gómez, 2014).

(Moreno Verdejo, 2016) define currículo como *“cualquier actividad de planificar y poner en práctica un plan de formación”*.

Los currículos están establecidos a distintos niveles y son regulados por las administraciones educativas, son una forma de programarse de manera adecuada.

Para conseguir que los alumnos mejoren su rendimiento con el ABP las propias instituciones deberían fomentar el cambio, modificando el sistema de evaluación, equilibrando más el peso de los exámenes tradicionales con el ABP, para que así los alumnos le dediquen más tiempo.

Los currículos de educación secundaria resaltan el aprendizaje por competencias. Las siete competencias clave de la LOMCE (Ley Orgánica que Mejora la Calidad Educativa) son:

- Comunicación lingüística.
- Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- Competencia digital.
- Aprender a aprender.
- Competencias sociales y cívicas.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.
- Conciencia y expresiones culturales.

## Evaluación

Otro de los aspectos que tiene gran importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje es la evaluación. La manera en que realiza el profesor la evaluación condiciona la forma en la que los alumnos trabajan y los conocimientos que adquieren, constituye otra de las componentes del currículo. (Sanmartí, 2007) define la evaluación como el motor de aprendizaje, de ella depende tanto qué y cómo se enseña, como el qué y el cómo se aprende.

(Giménez, 1997) indica cuatro funciones que tiene la evaluación.

- **Función social.** Una de las funciones que tiene la evaluación es satisfacer las necesidades sociales, ayudar a todos los agentes sociales. La clasificación, la promoción de los estudiantes o la atención a la diversidad se encuentran dentro de esta función.
- **Función ética y política.** El profesor debe entender la enseñanza como un proceso que se encuentra constantemente revisado por el propio sistema educativo. Además de los aprendizajes en el aula, se han de valorar otros aspectos como las prácticas docentes, o los recursos de la institución.
- **Función pedagógica.** La evaluación permite conocer el aprendizaje de los estudiantes. Esta información se ha de adaptar y tener en cuenta en la planificación del profesorado, considerando las mayores dificultades.
- **Función profesional.** La evaluación tiene una función de control del propio sistema evaluador, se pretende mejorar tanto el currículo como su desarrollo.

Según los objetivos y los momentos de realización, la evaluación se puede clasificar atendiendo a varios aspectos, como el propósito y el momento de realización (Sanmartí, 2007):

- **Evaluación inicial y de diagnóstico.** La evaluación diagnóstica permite conocer el grado de aprendizaje antes de empezar un determinado bloque de contenidos, suele realizarse mediante preguntas en el aula. Se pretende explorar los conocimientos previos de los estudiantes. Ayuda al docente a planificar sus tareas atendiendo a la diversidad que haya en el aula y evitar posibles dificultades que podrían surgir.

- Evaluación de proceso y formativa. La evaluación formativa se puede realizar mediante instrumentos informales, como preguntas en el aula, o con instrumentos formales, como pruebas escritas o proyectos. Tiene como objetivo valorar los avances en los aprendizajes y mejorar en los procesos de enseñanza. Ayuda a los estudiantes a aprender de los errores y dificultades, y a los docentes a ajustar mejor su enseñanza, con el fin de alcanzar las metas de aprendizaje. Los tipos de modalidades de evaluación formativa que se usan son: interactiva, integradas al proceso de enseñanza; retroactiva, se realiza después de una secuencia de enseñanza; o proactiva, con las que se aprenderá en el futuro.
- Evaluación final y sumativa. Suelen emplearse en procesos terminados, como al finalizar un bloque de contenidos. Suelen asignarse una calificación con un valor numérico. Los resultados aportan información sobre los estudiantes y pueden ser utilizadas para la clasificación y la toma de decisiones como la promoción de los alumnos.

Sanmartí destaca la importancia que tiene el aprender a evaluarse, con el objetivo de promover el desarrollo de diferentes componentes o dimensiones de las competencias. Para Sanmartí una de las evaluaciones más importantes es la que realiza el propio alumno, para ello puede ser de utilidad el uso de las rúbricas, que permiten la autoevaluación (Sanmartí, 2007).

Las rúbricas de evaluación son uno de los instrumentos de evaluación más utilizados, son útiles a la hora de evaluar el proceso de aprendizaje desde una perspectiva cualitativa. En las escalas se establecen los criterios que se van a evaluar y se valora con un número en una escala de rango los niveles de desempeño, hacen que la evaluación sea más objetiva y consistente. Son buenos instrumentos de evaluación para la observación, el análisis y valoración de trabajos. Los estudiantes pueden utilizar la información para saber con los criterios que van a ser valorados y les permite enfocarse y poner la atención en los elementos importantes de cierto desempeño.

Existen dos tipos diferentes de rúbricas, analíticas y holísticas. Las holísticas consideran la tarea como un todo, las deficiencias puntuales no afectan a la calidad global, se trata de una evaluación sumativa, describen características globales que ha de tener una producción para asignarle un determinado nivel, además la información que aportan es menos detallada que las rúbricas analíticas, que desglosan diferentes aspectos en la producción sobre los que se establecen niveles.

## El papel de las nuevas tecnologías

La introducción del uso de herramientas de modelización basadas en las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) supone mejoras en el proceso de enseñanza, su desarrollo produce adaptaciones al adquirir los aprendizajes.

Una de las herramientas útiles en las actividades de modelización son el uso de programas como GeoGebra, aunque este tipo de software no fue pensado para la educación STEAM, es un recurso muy potente que cuenta con un gran número de applets abiertos creados por profesores y que puede ser usado para este tipo de educación.

Uno de los lenguajes que se suele emplear en secundaria para facilitar la comprensión de los objetos matemáticos es el sistema de representación gráfico, por ser menos abstracto y más intuitivo que el simbólico, y funciona como puente con otros modos de representación. Muchas de estas representaciones, se pueden hacer mediante dibujos a mano alzada, pero estos recursos útiles facilitan el aprendizaje. Es importante que los docentes fomenten su utilización tratando de llevarlo a las aulas, el objetivo no es simplemente informatizar la misma didáctica, sino que se deben de usar para adquirir el aprendizaje desde otra perspectiva, los estudiantes tienen oportunidades de ampliar su aprendizaje al utilizar las nuevas tecnologías como herramientas para el aprendizaje constructivista (Requena, 2008) (Río y Costa, 2012). El desarrollo de las TIC está contemplado en el currículo, pues suponen una ayuda más al proceso de enseñanza-aprendizaje, permitiendo realizar cálculos tediosos, o mostrar la variación del comportamiento de algún objeto geométrico cuando se avanza en los valores de algún parámetro, lo que sería difícil de mostrar al hacerlo en la pizarra tradicional. Otra de las ventajas que aporta es el ahorro de tiempo, con la enseñanza tradicional, el tiempo en hacer una tabla y graficar es mucho mayor. Una vez que el profesor se asegure que los alumnos han aprendido a realizar por ellos mismos los cálculos, pueden utilizar estas herramientas para comprobar que lo han realizado correctamente. Otro punto a favor de las TIC, es que crea situaciones de enseñanza impersonal, donde los estudiantes pueden cometer errores en privado. Muchas veces el alumno prefiere no salir a la pizarra por el miedo a equivocarse, de esta forma, como cada alumno realiza su actividad con un ordenador, no existe esa vergüenza, de forma que los errores se cometen en privado. Facilitan la autocorrección de los alumnos por ellos mismos, permitiendo que los alumnos se ayuden entre ellos y se pregunten por qué no han obtenido la misma solución, ayudando a adquirir al alumno los conocimientos por él mismo (Sánchez, 2007).

A continuación se desarrollan unas propuestas de actividades que se pueden adaptar en el aula, con las que se intenta motivar al alumno y que vaya adquiriendo conocimientos y afianzando las distintas áreas STEAM.

# Actividad 1: proyecto de navegación

Esta actividad tiene como objetivo el uso y el aprendizaje de conocimientos mediante un método más ameno y que se aplica en la vida real, se contextualizan las matemáticas y se hacen más relevantes. Esta metodología de trabajo mejora los rendimientos académicos, las relaciones humanas y la motivación del alumnado. Se plantea para realizarla de forma individual, aunque también podríamos llevarla al aula para trabajar en grupos. Se abordan diferentes contenidos del currículo, pudiendo ir aumentando el nivel de complejidad de la actividad, a medida que se va afianzando el conocimiento y la motivación del alumno.

El tema del trabajo es la navegación. Los contenidos teóricos de esta actividad están extraídos de (De Simón Quintana, 1997). Se trata de una propuesta en la que se trabajan muchos contenidos de geometría. Además, se desarrollan destrezas importantes como la visualización y la orientación, y se proporcionan herramientas para resolver problemas relacionados con el espacio y sus objetos. Mediante este tipo de propuestas se pretende hacer ver a los alumnos que las matemáticas están presentes en la sociedad y en el entorno que les rodea. Se desarrollan conocimientos y comprensión de aspectos del bloque de contenidos que están presentes en el currículo de varias asignaturas de Educación Secundaria de una manera conjunta. Además, fomenta la comprensión de otros campos como la naturaleza o la física. Se trata de una actividad que se sale de la rutina, que obliga a los estudiantes a reflexionar. Algunos contenidos y estándares de aprendizaje que se pueden desarrollar en las distintas asignaturas son los siguientes.

- Dibujo técnico. Visualizar o imaginar objetos tridimensionales representados mediante imágenes planas. Paralelismo, perpendicularidad, ángulos, determinación de lugares geométricos. Resolución gráfica de triángulos. Construcción y utilización de escalas gráficas o aplicaciones de dibujo vectoriales en 2D.
- Física. Realizar cálculos para resolver problemas cotidianos utilizando el con-

cepto de velocidad. Representar la trayectoria y los vectores de posición, desplazamiento y velocidad en distintos tipos de movimiento, utilizando un sistema de referencia. Representar todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, obteniendo la resultante y extraer consecuencias sobre su estado de movimiento.

- Geografía e historia. El medio físico. Analizar e identificar las formas de representación de nuestro planeta: el mapa y localizar espacios geográficos y lugares en un mapa utilizando datos de coordenadas geográficas. Identificar y distinguir las diferentes representaciones cartográficas y sus escalas. Comparar una proyección de Mercator con una de Peters.

La actividad puede ser desarrollada en una clase de 4º E.S.O. El tiempo estimado para su realización es de 2 h 30 min. La actividad se divide en dos sesiones. La primera sesión (1 h) en la que se explican los contenidos teóricos y se pide a los alumnos que busquen información sobre ellos. Y una segunda sesión (1 h 30 min), en la que se realizará en clase un ejercicio propuesto, con la ayuda y orientación del profesor. Para la resolución del ejercicio propuesto, se plantearán los apartados de la actividad en voz alta para toda la clase, y después se dejará un tiempo para resolver cada apartado. Después de la realización de cada apartado, se mostrará una pequeña visualización de la forma de resolución (ver figuras 7, 9, 11 y 12), de esta manera, los alumnos comprobarán su resolución y el resultado, y dispondrán de tiempo para subsanar alguna duda.

En una primera sesión, se comienza pidiendo a los alumnos que busquen información sobre las principales líneas de la esfera terrestre que se muestran a continuación.

La esfera terrestre a pesar de estar achatada por los polos tiene forma esférica, a partir de este dato se describen los principales elementos y ejes, que permiten dar coordenadas a todos los puntos de la superficie terrestre.

- Eje terrestre y polos. Eje es la línea imaginaria sobre la que gira la Tierra que atraviesa la esfera de norte a sur pasando por el centro. Los dos puntos de intersección del eje con la esfera son los polos (polo norte y polo sur).
- Ecuador. Es la circunferencia máxima perpendicular al eje. Divide a la esfera en dos partes.
- Paralelos. Son las circunferencias menores paralelas al Ecuador.
- Meridianos. Son los círculos máximos que pasan por los polos y cortan perpendicularmente al Ecuador. Cabe destacar lo que se conoce como Primer

meridiano o de Greenwich, que es el meridiano que pasa por el distrito Greenwich de Londres.

- **Latitud.** Es la distancia que existe entre cualquier paralelo y la línea del Ecuador expresada en grados. La latitud de un punto se mide hacia el norte o el sur del Ecuador. Se representa por  $l$  y puede medir entre  $0$  y  $90^{\circ}$ .
- **Longitud.** Es la medida del ángulo comprendido entre el meridiano que se toma como  $0^{\circ}$  (Meridiano de Greenwich) y el meridiano que pasa por el punto. Se representa por  $L$  y puede medir entre  $0$  y  $180^{\circ}$ .

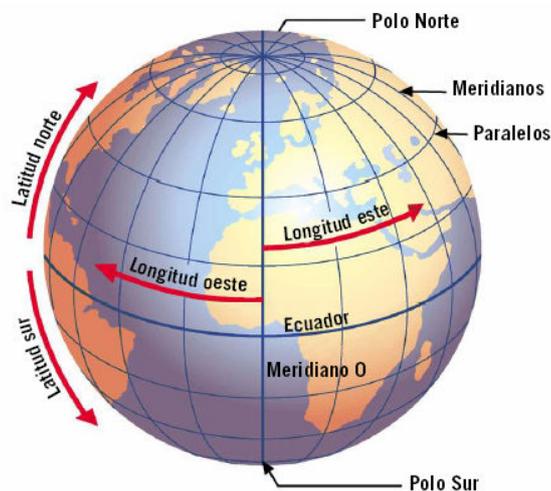


Figura 3: Principales líneas de la esfera terrestre

La latitud y la longitud de un punto permiten situarlo en un mapa. Para representar un punto en el mapa a partir de sus coordenadas, debemos ubicar primero en el mapa el Ecuador y el Meridiano de Greenwich, ya que estos son los que nos dividen el mapa en cuatro cuadrantes y nos permiten dar la posición. Si se desea situar los puntos en una carta se identifican los grados de las latitudes en los márgenes verticales de la carta y las longitudes en los márgenes horizontales, una vez que estén situados los valores de la latitud y la longitud en los márgenes de la carta, con una regla se traza el paralelo y el meridiano del lugar, donde se corten ambas líneas se encuentra el punto.

Se continuará explicando a los alumnos la influencia del magnetismo terrestre en las brújulas, para situar el polo norte magnético y el geográfico. La propia brújula puede tener un desvío por estar cerca de algo que influya en su magnetismo.

Para la realización de esta actividad se proporcionará a los alumnos un mapa, que cuente con información similar al que usan los navegantes (cartas náuticas) para planificar su travesía y situar sus posiciones. (segunda sesión)

Las cartas son representaciones a escala de una porción de la superficie terrestre de mar y costa, que cuentan con las coordenadas, y los signos y abreviaturas para informar a los navegantes. Dependiendo de la superficie que quede representada en la carta pueden ser de punto menor (representan grandes extensiones), o de punto mayor (representan porciones menores); es el navegante el que seleccionará la más adecuada en función del grado de detalle que desee tener. Para medir distancias en las cartas se utiliza la relación de que una milla náutica equivale a un minuto de la latitud del arco terrestre.

Las cartas náuticas se utilizan para conseguir representar sin error apreciable la superficie de la Tierra en un plano. Este tipo de representaciones se suelen realizar mediante dos tipos de proyecciones, la proyección mercatoriana y la proyección gnomónica. La carta mercatoriana es un tipo de proyección cartográfica, que consiste en la proyección de la esfera terrestre en un cilindro tangente al Ecuador, donde se toma como origen de proyección el centro de la Tierra. En este tipo de representaciones los meridianos quedan representados como rectas paralelas separadas igual distancia y perpendiculares al Ecuador y los paralelos se representan como rectas paralelas cuya distancia va aumentando al acercarse a los polos (ver figura 4). Este tipo de cartas distorsionan las zonas que se encuentran próximas a los polos, es por esto, por lo que no es recomendable usarse en zonas con latitudes altas, pudiendo hacer que se perciban realidades que no lo son. Por ejemplo, como que Groenlandia tenga un tamaño similar a África, cuando en realidad la superficie de África es 14 veces superior (Granados, 1995, p. 6). No es posible proyectar una esfera en una superficie de dos dimensiones sin que haya distorsiones, sin embargo, una de las ventajas de la carta mercatoriana es que la representación de los ángulos se mantiene.



Figura 4: Proyección de Mercator

Para reducir las distorsiones en la separación de los paralelos, que se produce al aumentar las latitudes y aproximarnos a los polos, se suele recurrir a inscribir la Tierra en círculos menores.

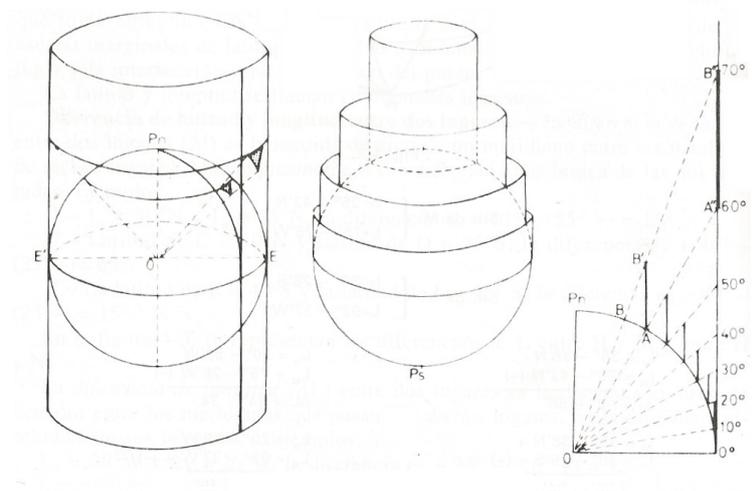


Figura 5: (De Simón Quintana, 2000, p. 6 capítulo 4)

A continuación se definen algunos conceptos que serán necesarios para la actividad que se realiza con el mapa.

- Rumbo. Entre dos puntos A y B, es el ángulo que se forma entre la línea que une A con B, con el meridiano que pasa por B. El rumbo que lleva un barco es el ángulo formado entre la línea que une popa-proa (parte trasera-delantera) del barco con el meridiano que se tome como referencia.
  - Rumbo verdadero. Es el ángulo formado entre la línea que une popa-proa del barco y el meridiano verdadero.
  - Rumbo de aguja. Es el ángulo formado entre la línea que une popa-proa del barco y el norte que marca la aguja del barco (brújula).
- Distancia. Es la longitud del segmento que une A con B.
- Enfilación. Cuando dos puntos de la costa se ven en línea (enfilados). Es el ángulo que se forma entre la línea de enfilación con el meridiano que pasa por uno de los dos puntos contado en sentido horario.
- Demora. Es el ángulo formado entre el norte verdadero y la visual del objeto.

Se comenta la influencia de factores externos como el viento y las mareas tanto en la dirección como en la velocidad.

Aunque en la actualidad se utilicen métodos de posicionamiento (GPS, Galileo...), estos conceptos los podremos interconectar para la resolución de problemas con la dificultad que necesitemos para que el alumno se involucre y afiance conocimientos, como el ejercicio propuesto de entrada del barco Brittany Ferries que se detalla a continuación.

Para la realización del ejercicio se proporcionará el siguiente mapa a los alumnos (ver figura 6), donde se encuentra situado el norte verdadero hacia arriba, para facilitar la ejecución del ejercicio. Los alumnos utilizarán instrumentos de dibujo técnico: compás, escuadra, cartabón y transportador de ángulos.

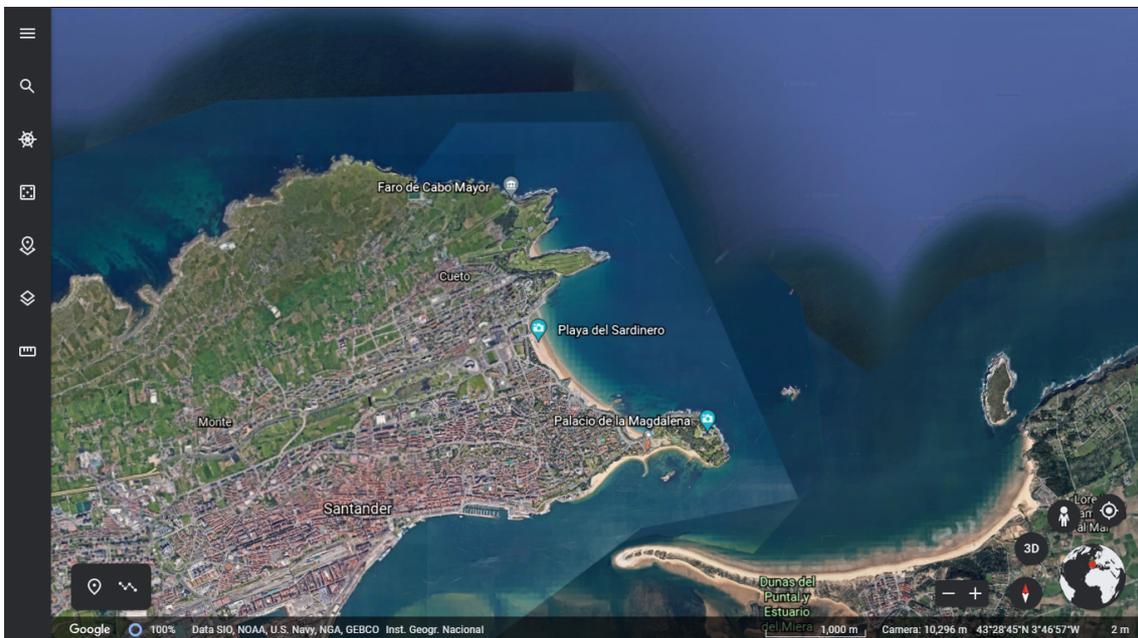


Figura 6: Mapa extraído de Google Earth

El ejercicio propuesto es el siguiente.

El barco Brittany Ferries se encuentra entrando por el Sardinero, navegando con un rumbo de brújula de  $142.5^{\circ}$ , a las 16:00 h pasa perpendicular al faro de Cabo Mayor, a una distancia de 2.46316 km de dicho faro. A) Determinar la situación a las 16:00 h. El barco lleva una velocidad de máquina de 40 km/h. Se levanta un viento del nordeste de 10 km/h, B) ¿qué rumbo debemos de poner en la brújula para

contrarrestar el abatimiento (ángulo que nos desplaza el viento), si pretendemos seguir navegando por la misma derrota (siguiendo la misma dirección) hasta situarnos a una demora de  $241^{\circ}$  del Faro de la Isla de Mouro?, ¿en qué punto nos situaremos?

C) Situados en el punto B cambiamos el rumbo a  $225^{\circ}$  y bajamos la velocidad de máquina a 20 km/h, ya que el viento nos abate por la popa y nos aumenta la velocidad en 10 km/h. ¿Cuánto tardaremos en ir desde B hasta que estemos perpendiculares al faro de la Punta del Puerto?

D) En este punto, tomamos rumbo con dirección al semáforo de enfilación del antiguo edificio de Tabacalera (Muelle del Almirante), dentro de las boyas que indican la canal para una navegación segura con cualquier altura de marea. La amplitud de la marea de Santander es de unos 3 metros. Al entrar en la canal y estrecharse la bahía, tenemos la corriente en bajamar con una velocidad de 4 km/h y cesa el viento que deja de abatirnos por el resguardo de la bahía. Se recoge al práctico ¿Qué rumbo hemos de poner para ir hacia el semáforo de enfilación? Cuando estamos perpendiculares al club marítimo reducimos la velocidad de máquina a 10 km/h. Sigue actuando sobre nosotros la corriente de bajamar de 4 km/h. Y empezamos con las maniobras para atracar paralelos a la estación marítima en el muelle del Almirante.

### Resolución gráfica apartado A

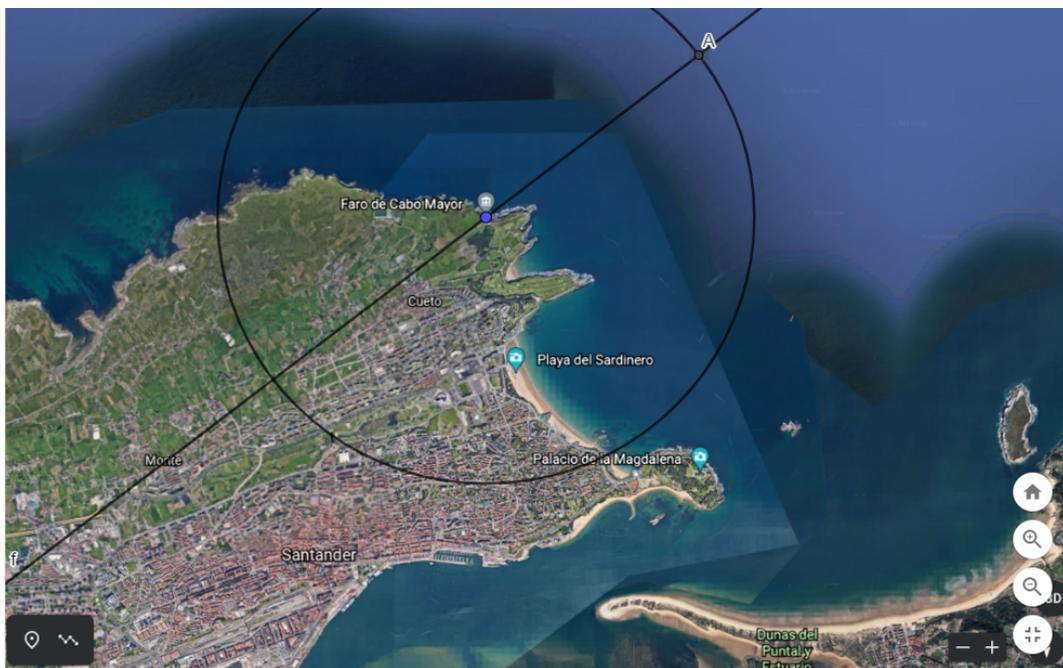


Figura 7: Resolución gráfica del apartado A: Situación del barco Brittany Ferries a las 16:00 h. Elaboración propia.

Para determinar la situación en el mapa a las 16:00 h se traza una circunferencia con radio 2.46316 km. Como en ese momento pasa perpendicular al faro y navega con rumbo  $142.5^{\circ}$ , trazamos una recta perpendicular al rumbo que pase por el faro. La recta interseca a la circunferencia en dos puntos, uno de ellos en tierra, por lo que se obtiene que el barco está a las 16:00 h en la posición A.

## Resolución gráfica apartado B

Se localiza en el mapa la Isla de Mouro (M).



Figura 8: Isla de Mouro. Imagen extraída de Google Earth

Se localiza el punto pedido B, para ello se traza la demora de  $241^{\circ}$  en el Faro de la Isla de Mouro. Se traza el rumbo de brújula desde A hasta que corte la demora, obteniendo la situación B.

A continuación, se calcula el rumbo que se ha de poner en la brújula para seguir navegando con la misma derrota (manteniendo la dirección) hasta llegar a situarnos en B:

Se realiza una suma de vectores, de la velocidad del barco y de la velocidad del viento. Para ello se traza desde B un vector con el módulo y el sentido contrario de donde viene el viento. Como el desplazamiento que ejerce el viento es una cuarta parte que el que ejercen los motores del barco, se traza una circunferencia con radio  $1/4$  del segmento AB y donde corte con la dirección del viento tendremos un punto, que nos dará el rumbo de brújula que hay que poner al barco para contrarrestar el abatimiento del viento, para llegar al punto pedido.

Se traza la recta que une A con V y se mide el rumbo pedido:  $128.33^{\circ}$ .

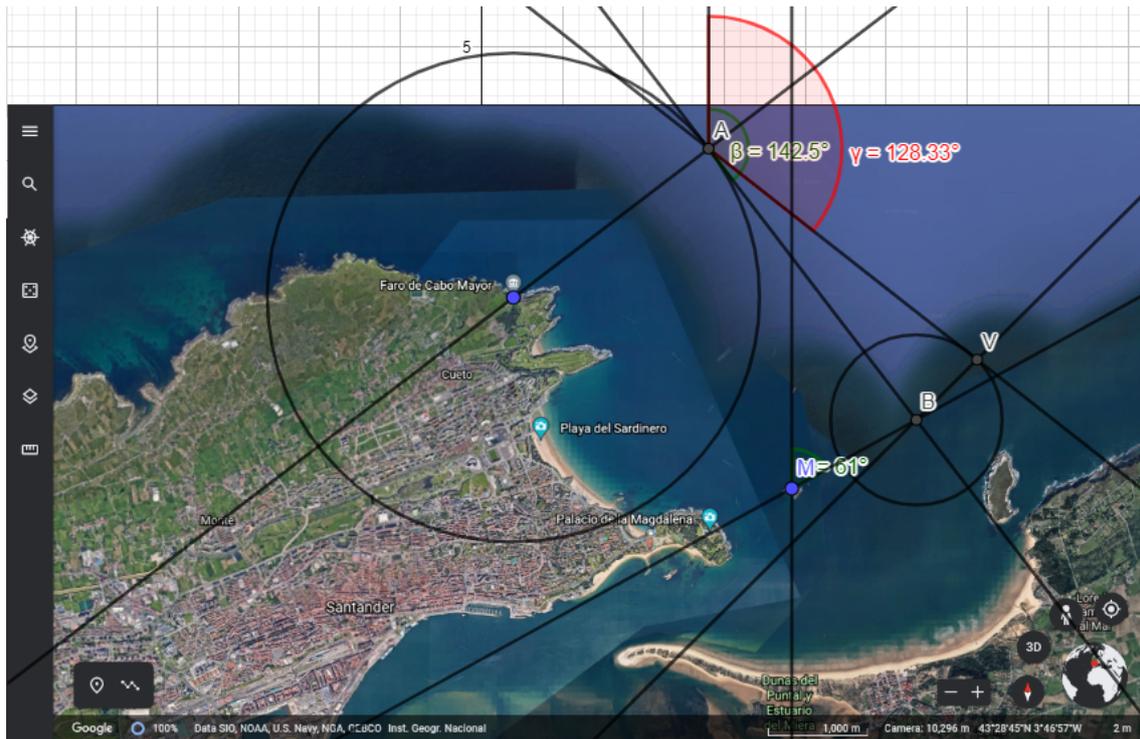


Figura 9: Resolución gráfica del apartado B: Localización del punto B y rumbo que se ha de poner para mantener la dirección. Elaboración propia.

### Resolución gráfica apartado C

Se localiza en el mapa la Punta del Puerto (P).

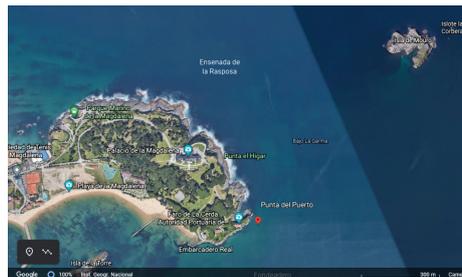


Figura 10: Punta del Puerto. Imagen extraída de Google Earth

El rumbo del barco y la dirección del viento coinciden, se suman las velocidades. Se traza el rumbo del barco, y posteriormente, una perpendicular al rumbo que pase por P, donde se corten se tiene la situación C.

Para calcular el tiempo en recorrer BC, se mide la distancia entre BC aplicando la escala. Y la velocidad a la que se desplaza el barco es la suma de la velocidad del motor y la velocidad del viento, 30 km/h, ya que el viento nos da por la popa. Pudiendo así saber el tiempo que hemos tardado entre B y C.

Se obtiene un tiempo de 4 min. 39 s.

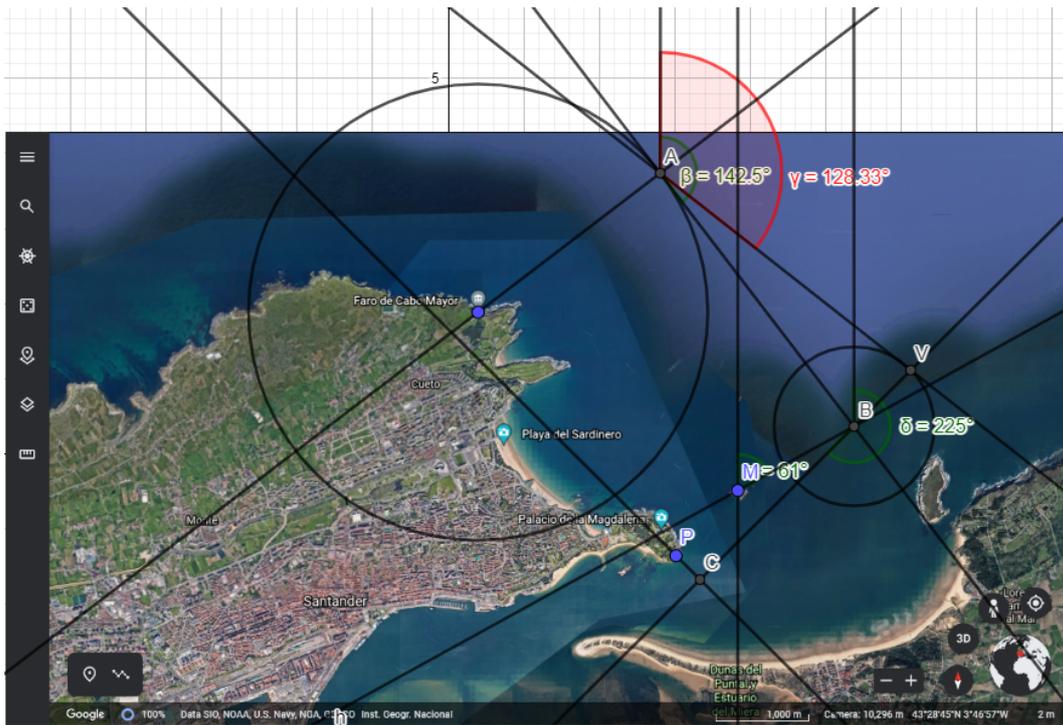


Figura 11: Resolución gráfica del apartado C: Situación de los puntos B y C con los que se obtiene el tiempo empleado. Elaboración propia.

### Resolución gráfica apartado D

Finalmente se calcula el rumbo que se ha de poner para llegar al semáforo de enfilación. Se localiza en el mapa el semáforo (T).

Se traza una recta que une C con T y se mide el rumbo de brújula que se ha de poner: 255.87º.

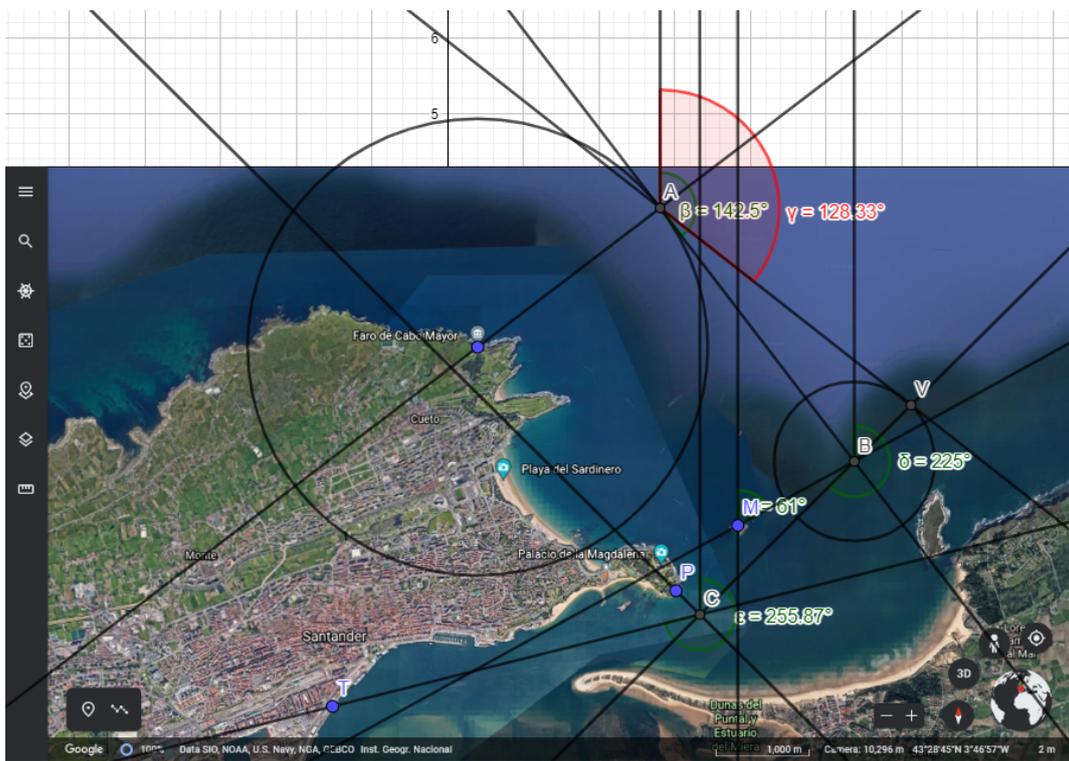
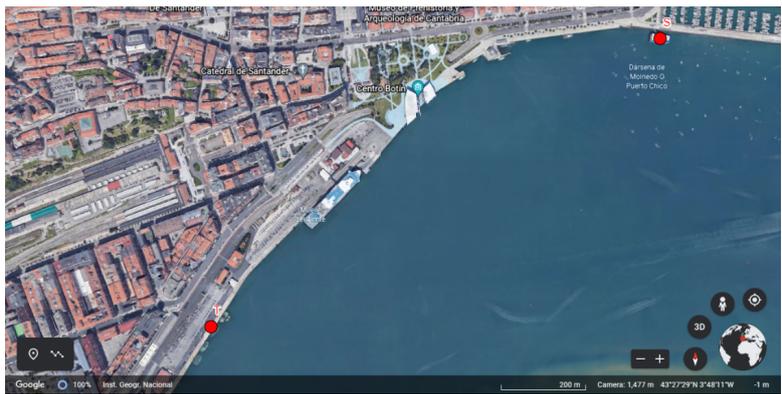


Figura 12: Resolución gráfica del apartado D: Trazado del rumbo al semáforo de enfilación, en el muelle del Almirante. Elaboración propia.

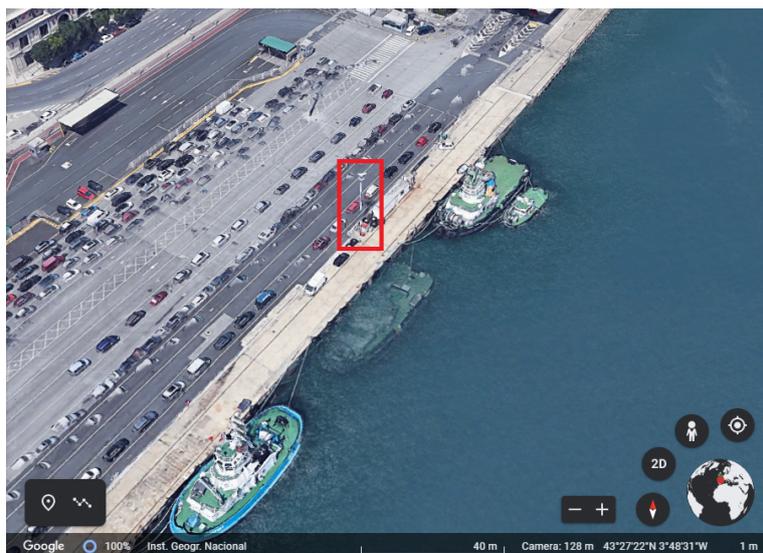


Figura 13: Semáforo de enfilación del muelle del Almirante. Imagen extraída de Google Earth

Atendiendo a los niveles de demanda cognitiva que establece Smith y Stein, la actividad se encontraría dentro de las tareas de procedimientos con conexión (nivel 3), pues se trata de una tarea en la que se utilizan procedimientos para aumentar la comprensión de los conceptos. En la actividad se trabajan distintas competencias de la LOMCE:

- Comunicación lingüística. Los alumnos amplían su vocabulario, y aprenden a diferenciar aquello relevante de la información recibida. También contribuye al desarrollo de esta competencia las instrucciones que se les da a los alumnos para la realización de la actividad.
- Competencia matemática. Los alumnos tendrán que aplicar sus conocimientos matemáticos que ya conocen para resolver la actividad planteada.
- Conciencia y expresiones culturales. Para esta actividad se elige un entorno significativo como es la bahía de Santander.
- Aprender a aprender. Es una de las competencias que más se trabaja de forma indirecta, los alumnos tienen que enfrentarse a sus propios conocimientos, y aunque al principio les parezca que no saben resolverlo cuando se ponen a ello son capaces de resolver la actividad.

La evaluación de la actividad se realizará de forma individual. A continuación, se muestra una rúbrica de evaluación, que se entregará al comienzo de la actividad, para que los alumnos sepan los elementos que se van a evaluar, y dejar claro desde el comienzo qué se espera de ellos.

Escala de valoración: 1-Valoración mínima; 4-Valoración máxima

	1	2	3	4
Interpreta el ejercicio de una forma adecuada				
Se orienta en el mapa tomando los puntos de referencia				
Consigue llegar a los objetivos marcados				
El tiempo empleado para la resolución de cada apartado es el adecuado				
Dedica tiempo a reflexionar su respuesta				
Realiza autónomamente y con iniciativa la actividad				
Está atento y concentrado durante la actividad				

## Actividad 2: determinar el caudal de un río

La siguiente representación gráfica (ver figura 14) muestra el caudal de agua de un río medido en  $m^3/s$ , durante una tormenta de 12.5 horas de duración. El objetivo de la actividad es determinar el caudal de agua que hubo en esa zona. La propuesta de esta actividad ha sido adaptada de (Hall y Lingefjärd, 2016). Se trata de una actividad de un contexto realista. Esta actividad se puede extrapolar para uso en la energía hidráulica, maremotriz y su relación en la ingeniería de turbinas, se podría utilizar para estudiar la viabilidad de la energía maremotriz en la bahía de Santander, o en cualquier río.

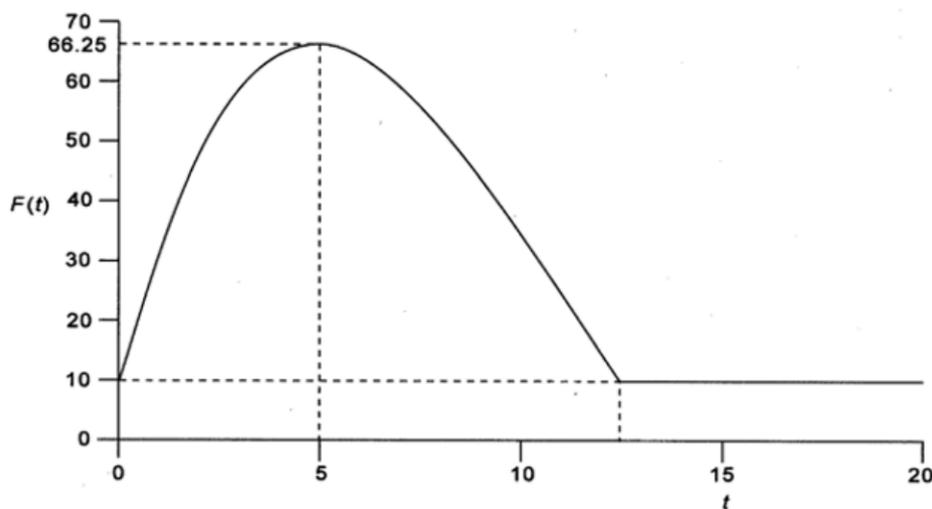


Figura 14: Caudal de un río. Extraído de (Hall y Lingefjärd, 2016)

La actividad se puede desarrollar en una clase de 1º Bachillerato. Puede utilizarse como una actividad de evaluación retroactiva, para realizarse en clase, después de explicarse el tema de integrales, permitiendo así reforzar el concepto de integral definida, contenido del bloque 3 de Análisis de la asignatura de Matemáticas.

El tiempo estimado de realización es de 1 h 30 min.

Mediante la información de la gráfica se construye un modelo matemático que describa el caudal de agua,  $F(t)$ , durante ese periodo. Para la propuesta de resolución se hace uso de GeoGebra, que permite modelar desde una imagen y comparar la gráfica con un modelo. Cada alumno puede realizarla en su propio ordenador, permitiendo que los alumnos se ayuden entre ellos y debatan si no obtienen la misma solución.

Se parte de la idea de que los alumnos no están habituados a trabajar con GeoGebra, el profesor comenzará explicando cómo utilizar el programa.

Se inserta la imagen en GeoGebra. (ver figura 15)

Como la función que se representa en el gráfico no es simétrica, se utilizará un polinomio de grado 3 para interpolar la función.

Se definen los puntos  $C, D, E$  y  $F$ .

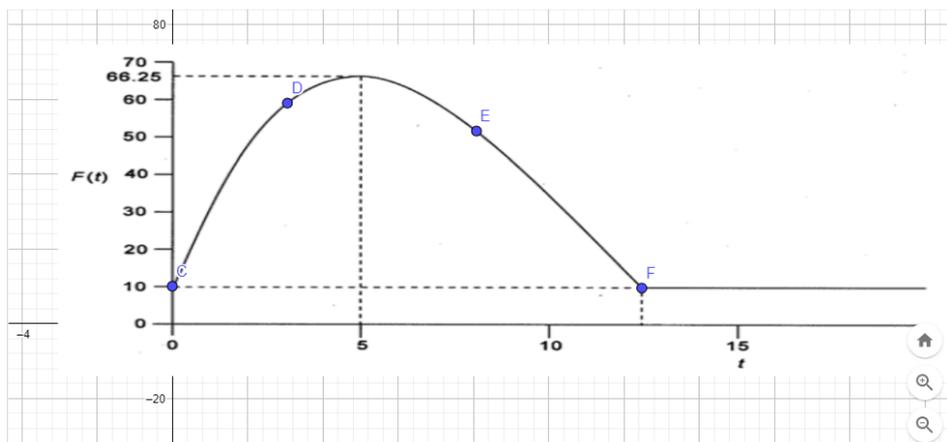


Figura 15: Se inserta la figura en GeoGebra y se definen los puntos  $C, D, E$  y  $F$ .

Y se crea una lista con esos puntos  $PLista = \{C, D, E, F\}$

Una vez creada, se utiliza el comando  $FitPoly$ , con el siguiente formato:

$FitPoly(< ListaDePuntos >, < GradoDelPolinomio >)$

Para nuestro caso, adaptamos el comando,  $FitPoly(PLista, 3)$ , obteniendo así el polinomio que pasa por los cuatro puntos.

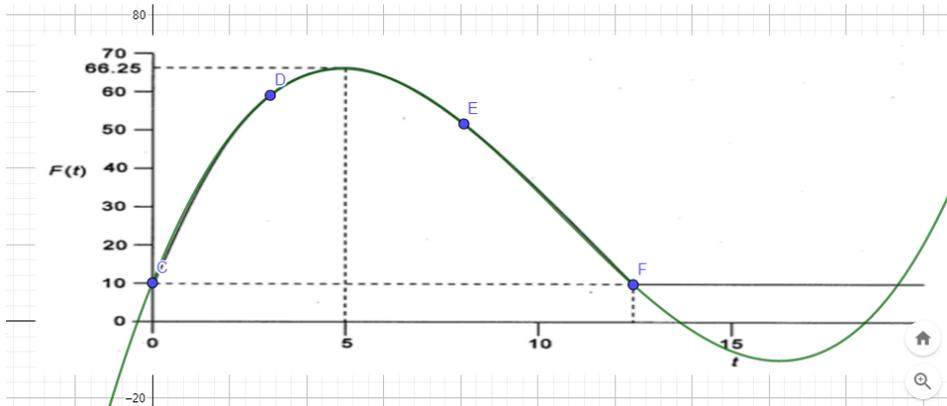


Figura 16: Se dibuja el polinomio interpolador

El polinomio obtenido es el siguiente. (El polinomio puede variar ligeramente en función de los puntos escogidos.)

$$f(x) = \text{FitPoly}(\text{PLista}, 3)$$

$$\rightarrow 0.1x^3 - 3.33x^2 + 25.23x + 10$$

Una vez visto que la aproximación es buena, se calcula el área bajo la curva, que puede ser calculada utilizando el comando integral. (ver figura 17)

$$\text{Area} = \text{Integral}[f, 0, 12.48]$$

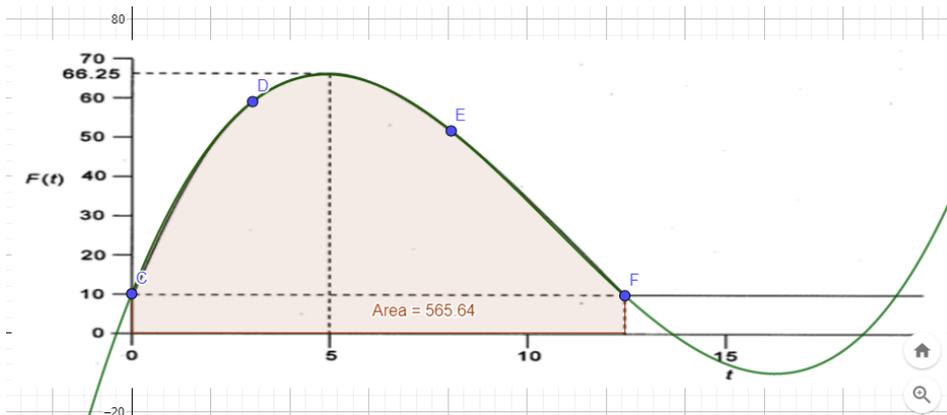


Figura 17: Área bajo la curva.

Obteniendo como resultado un área de 565.64. Es importante considerar que el área representa la cantidad total de lluvia, para calcular el volumen de agua que cayó durante la tormenta debemos restar los  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  de cauce normal del río por hora.  $565,64 - (10 * 12,5) = 440,64 \text{ m}^3/\text{s}$

Lo que nos da una respuesta de  $440,64 * 3600 = 1586304 \text{ m}^3$

Posteriormente, se les enseñará a los alumnos otro método aproximado para el cálculo del área bajo la curva, un método exhaustivo, un procedimiento geométrico de aproximación al resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida que avanza el cálculo.

Se definen los puntos:  $A = (0, 0)$  y  $B = (12.48, 0)$ . Se crea un deslizador (a), introduciendo como valor mínimo 1, como valor máximo 40, y como incremento 1.

Los comandos que se utilizarán serán SumaInferior y SumaSuperior:

$\text{SumaInferior}(\langle \text{Función} \rangle, \langle \text{ExtremoInferior} \rangle, \langle \text{ExtremoSuperior} \rangle, \langle n \rangle)$

$\text{SumaSuperior}(\langle \text{Función} \rangle, \langle \text{ExtremoInferior} \rangle, \langle \text{ExtremoSuperior} \rangle, \langle n \rangle)$

siendo  $n$  el número de rectángulos, en nuestro caso  $a$ , el valor del deslizador.

Se comienza con el comando SumaInferior, adaptándolo a nuestro ejemplo:

$\text{SumaInferior}(f, x(A), x(B), a)$

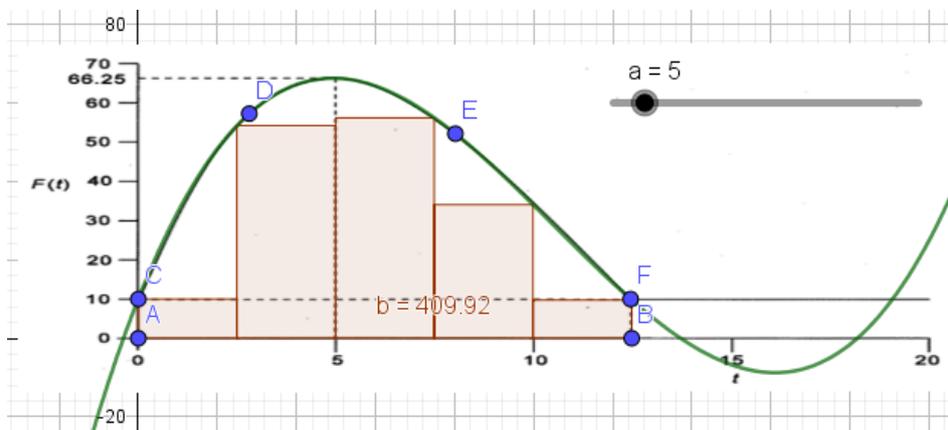


Figura 18: Aproximación del área utilizando el comando SumaInferior, con un valor del deslizador  $a=5$ . Elaboración propia.

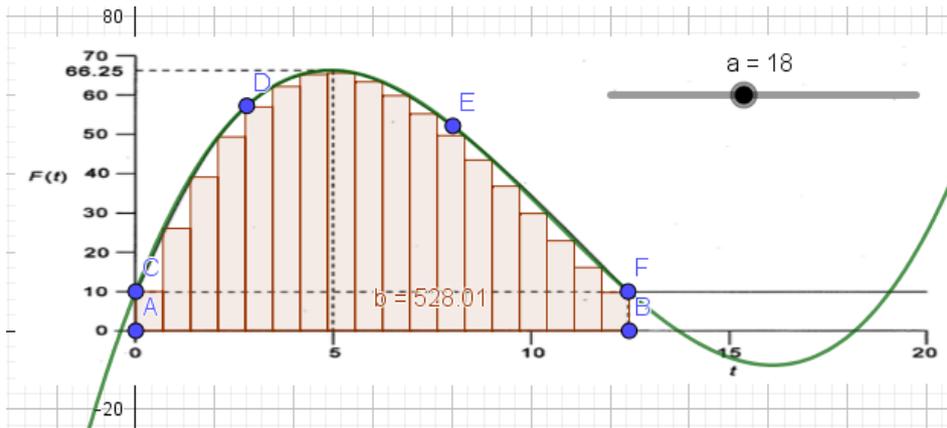


Figura 19: Aproximación del área utilizando el comando SumaInferior, con un valor del deslizador  $a=18$ . Elaboración propia.

Se repite la misma operación con el comando SumaSuperior:

$$\text{SumaSuperior}(f, x(A), x(B), a)$$

Mediante estos comandos los alumnos pueden observar como al aumentar el valor del deslizador, el área pintado de naranja (b) se va haciendo más grande, y el área pintada de azul (c), cada vez es más pequeño, acercándose cada vez más al valor obtenido con el comando integral.

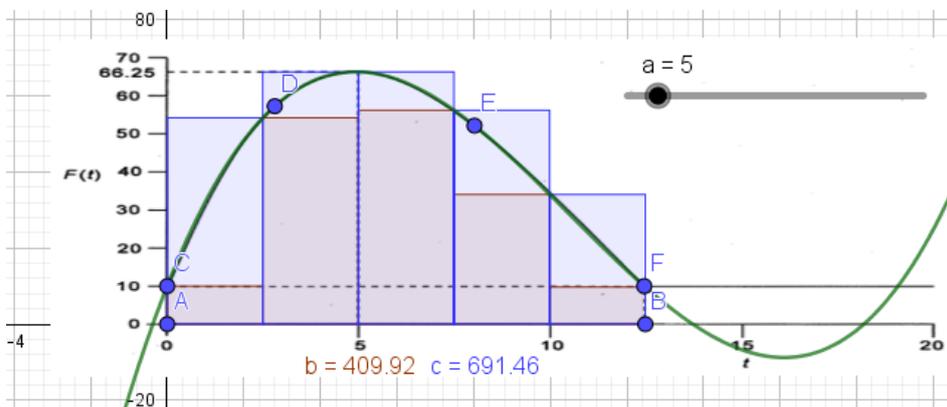


Figura 20: Aproximación del área utilizando los comandos SumaInferior y SumaSuperior, con un valor del deslizador  $a=5$ . Elaboración propia.

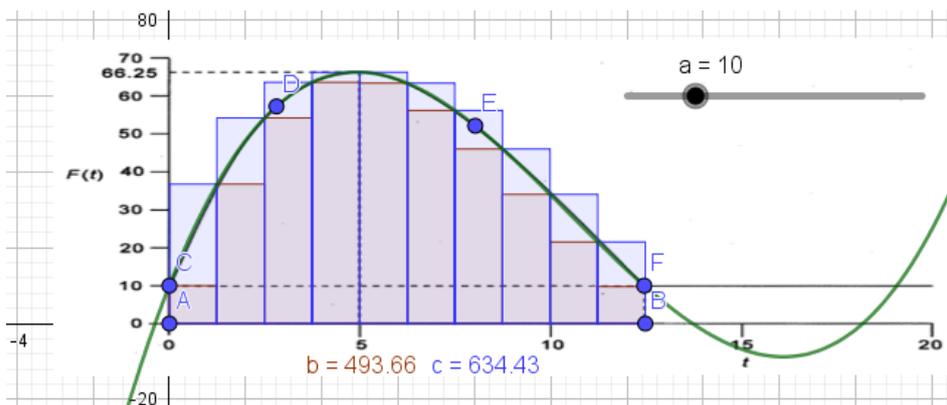


Figura 21: Aproximación del área utilizando los comandos SumaInferior y SumaSuperior, con un valor del deslizador  $a=10$ . Elaboración propia.

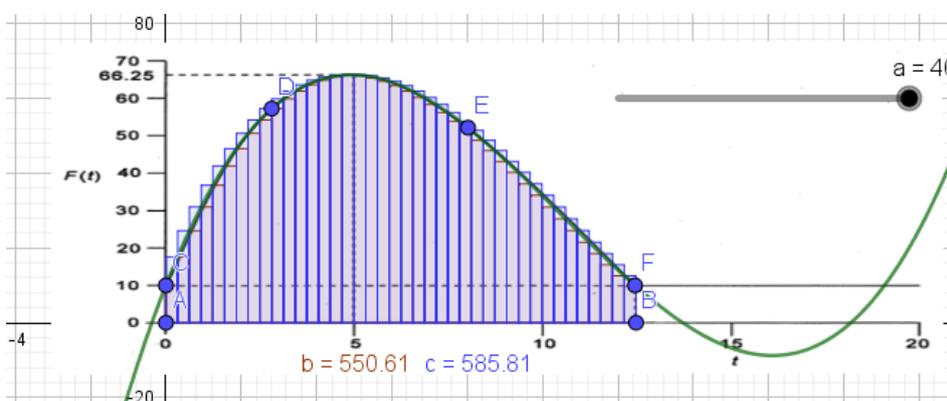


Figura 22: Aproximación del área utilizando los comandos SumaInferior y SumaSuperior, con un valor del deslizador  $a=40$ . Elaboración propia.

Mediante esta actividad se pretende desarrollar contenidos del currículo, favoreciendo el uso de las nuevas tecnologías en el desarrollo de los contenidos.

*“Los centros educativos promoverán las medidas necesarias para que en las distintas materias de esta etapa se favorezca el uso y la integración de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza y aprendizaje.”* (MECD, 2015, p. 174).

Atendiendo a los niveles de demanda cognitiva que establece Smith y Stein, la actividad se encontraría dentro de las tareas de procedimientos con conexión (nivel 3), pues se trata de una tarea en la que se utilizan procedimientos para aumentar la comprensión del concepto integral.

Algunas competencias clave que se pueden trabajar con esta propuesta son:

- Comunicación lingüística. La actividad favorece el aprendizaje de vocabulario relativo a la actividad: interpolar, integral... También contribuye a esta competencia la lectura y comprensión del enunciado de la actividad.
- Competencia digital. Los alumnos tendrán que manejar GeoGebra para realizar la actividad.
- Aprender a aprender.

A continuación se muestra una rúbrica de evaluación, que se entregará a los alumnos al comienzo de la actividad, para realizar una evaluación individual, de esta forma sabrán los elementos que se van a evaluar, y se deja claro desde el principio qué se espera de ellos.

Escala de valoración: 1-Valoración mínima; 4-Valoración máxima

	1	2	3	4
Maneja el software de GeoGebra correctamente				
Consigue llegar al objetivo marcado				
Realiza autónomamente y con iniciativa la actividad				
Dedica tiempo a reflexionar su respuesta				
El tiempo de resolución para resolver la actividad es el adecuado				
Está atento y concentrado durante la actividad				

## Actividad 3: diseño de tambor y medida del sonido

Esta propuesta de actividad está enmarcada en un aprendizaje basado en proyectos, con los que se puede favorecer el trabajo en pequeños grupos. Como indica (Pujolàs y cols., 2011) el aprendizaje cooperativo es también un contenido que hay que enseñar, pues facilita y potencia el desarrollo de algunas competencias básicas. La idea de la actividad ha sido tomada del profesor de matemáticas Marcial Cordero Quirós (Quirós, 2020). La actividad se puede desarrollar para alumnos de 1º E.S.O. Los objetivos generales de la actividad son potenciar la educación STEAM, integrar distintas áreas curriculares, aprender jugando, desarrollar la creatividad y la autonomía de los alumnos, involucrar al alumno en su propio aprendizaje y favorecer el trabajo cooperativo. Se trata de una actividad muy manipulativa, y está basada en la gamificación. La propuesta del proyecto STEAM consistirá en la construcción de un tambor, para ello se utilizan distintos materiales: plástico, cartón, vidrio etc., se construyen distintos modelos de tambor con los distintos materiales y se procede a medir el sonido al golpearlos con una baqueta. Para medir los decibelios se puede utilizar una aplicación de teléfono móvil que funcione como sonómetro. Posteriormente se anota en una hoja las distintas medidas que se obtienen y se elabora un gráfico.

En el proyecto intervienen las distintas áreas de un proyecto STEAM, la tecnología, con el uso de la aplicación móvil; la ingeniería, en cómo están contruidos los tambores; el arte, en el proceso de construcción; y las matemáticas al elaborar un gráfico con los resultados obtenidos.

A continuación se detalla una metodología para llevarlo a la práctica. Para la realización se utilizará una metodología basada en una planificación de (Pujolàs y cols., 2011), que permite alcanzar objetivos más ambiciosos. El tiempo estimado para realizar la actividad será de 2 horas. Se realizará en clase.

Se comenzará explicándoles a los alumnos las aptitudes que se pretenden desarrollar con esta actividad, como son el trabajo en equipo y la interconexión de diferentes

asignaturas. También se les explicará los contenidos del currículo que se van a usar, así como las competencias que se quieren trabajar.

- Competencias sociales y cívicas. Trabajo en grupo, coordinación y distribución de tareas.
- Sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor. Desarrollo de un tambor incluyendo diseño, montaje.

Cada alumno tendrá un rol en el grupo, ya que es una actividad grupal.

Se pretende desarrollar una actividad en la que se despierte el interés de los alumnos y se les motive a realizar la actividad. La actividad mejora la atención, ayuda a mejorar la interacción de los alumnos y a asumir roles y tareas.

Para el desarrollo de la actividad se formarán grupos, que serán escogidos por el profesor, se formarán grupos heterogéneos, evitando que sean los alumnos los que decidan los grupos. Para su formación se tendrán en cuenta las compatibilidades e incompatibilidades de los alumnos. Se divide a la clase en 3 grupos:

- Alumnos capaces de ayudar a los demás
- Alumnos con dificultades de aprendizaje
- Resto de alumnos

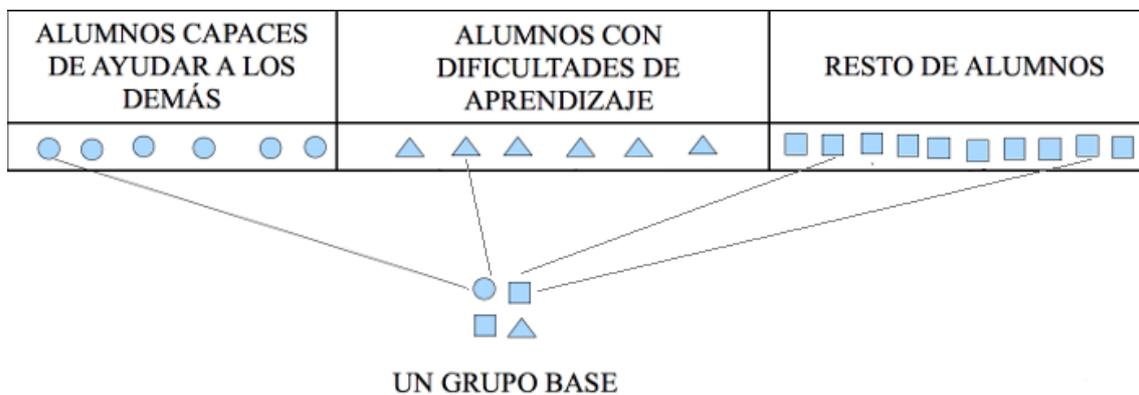


Figura 23: Organización de los grupos en el aula.

Cada grupo estará formado por un alumno aventajado, un alumno con dificultades de aprendizaje y dos alumnos del grupo resto de alumnos. Al alumno más aventajado se le asignará el rol de jefe del grupo. Todos harán su aportación y contribuirán a la actividad.

Una posible planificación de la actividad es la siguiente:

Planificación del proyecto.

Nombre (o número) del Equipo:

Curso:

Grupo:

Año académico:

Periodo:

Formado por:

Nombre y apellidos	Responsabilidad dentro del Equipo
Alumno 1	Confeccionar los tambores con distintos materiales
Alumno 2	Confeccionar los tambores con distintos materiales
Alumno 3	Se encargará de la tecnología
Alumno 4	Se encargará de elaborar la gráfica

A continuación se muestra dos rúbricas. La primera puede ser utilizada para la evaluación en grupo, y la segunda para una valoración individual de los alumnos. Se les proporcionará a los alumnos al comienzo de la actividad para que tengan la información de cómo van a ser evaluados.

Escala de valoración: 1-Valoración mínima; 4-Valoración máxima

	1	2	3	4
<p>El proyecto ha sido bien diseñado</p> <p>Que todos los miembros del equipo progresen en su aprendizaje</p> <p>Que todos los miembros del equipo colaboren</p> <p>Que aprovechen el tiempo y pidan y den ayuda</p> <p>Dedican tiempo a reflexionar su respuesta</p> <p>El tiempo de resolución para resolver la actividad es el adecuado</p> <p>Terminar en el tiempo previsto</p>				
<p>No distraer a los compañeros</p> <p>Mostrarse más extrovertido trabajando en equipo e interactuar con el resto de compañeros</p> <p>Prestar ayuda a los compañeros</p> <p>Tener una actitud de escucha activa</p> <p>El tiempo de resolución para resolver la actividad es el adecuado</p> <p>Tener un hábito de trabajo continuo</p> <p>Participar activamente en las actividades y aportar ideas relevantes</p> <p>Mostrar motivación e interés en la realización de las actividades</p>				

Cuando terminan evalúan el resultado, detectan si hay errores que no se han podido corregir y preparan una presentación del proyecto.

Presentación del proyecto. Presentan al resto de compañeros el proyecto que han realizado y la evaluación que han hecho de él. Y responden a las dudas que se les planteen.

Evaluación. El profesor tiene en cuenta además de su propia evaluación la autoevaluación del equipo que ha realizado el proyecto y la evaluación de los demás compañeros.

Atendiendo a los niveles de demanda cognitiva que establece Smith y Stein, la actividad se encontraría dentro del nivel 2, el procedimiento es evidente, no hay ambigüedad sobre lo que se necesita hacer y cómo hacerlo. La demanda cognitiva que se requiere es limitada.

Algunas competencias clave que se pueden trabajar con esta actividad son:

- Comunicación lingüística. Mediante la actividad desarrollada en equipo los alumnos mejoran su comunicación lingüística, para comunicarse con eficacia.
- Competencia digital. Cada grupo tendrá que manejar un dispositivo electrónico para desarrollar la actividad (sonómetro).
- Competencias sociales y cívicas. Organización en grupo, con lo que ello supone, el aprendizaje de la toma de decisiones, el cumplimiento de responsabilidades etc.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor. Con esta actividad se presentan a los alumnos oportunidades para desarrollar la iniciativa, planificar actividades, con el diseño y construcción de un tambor.

# Conclusiones

Mediante este trabajo se pretende mostrar la necesidad de una educación desde una perspectiva más activa por parte del alumno, ofrecer oportunidades y experiencias, para que puedan crear, manipular, comprender, preguntarse, investigar, proponer, etc., de una forma más motivadora y entretenida.

El desarrollo de las actividades adecuadas puede cambiar la visión negativa de la enseñanza que tienen algunos alumnos. Se pretende hacer ver la necesidad de un cambio en la idea de la enseñanza, proponiendo alternativas que aborden los contenidos de una forma activa y participativa, partiendo de un reto donde se aprenda en el contexto de una situación o problema.

El docente ha de ser capaz de detectar problemas durante la práctica; analizar, reflexionar y profundizar sobre estos de una forma consciente y argumentada, y proponer soluciones o mejoras en la práctica, fomentar este tipo de actividades que mejoren la capacidad de pensamiento y autocrítica, de cara a futuros empleos, que ayuden a establecer relaciones más cercanas con los compañeros, adquiriendo aptitudes que les serán necesarias en el futuro.

## Referencias

- Arce, M., Conejo, L., y Muñoz-Escolano, J. (2019). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Madrid: Síntesis*.
- Ariño, M. L. (2017). Aprendizaje colaborativo.
- Blum, W., y Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45–58.
- De Simón Quintana, J. (1997). *Patrones de yate*. Barcelona.
- De Simón Quintana, J. (2000). *Patrones de embarcaciones de recreo*. Barcelona.
- Domènech-Casal, J. (2016). Apuntes topográficos para el viaje hacia el ABP. *Cuadernos de Pedagogía*, 742, 59–62.
- Domènech-Casal, J., Lope, S., Mora, L., y cols. (2019). Qué proyectos STEM diseña y qué dificultades expresa el profesorado de secundaria sobre Aprendizaje Basado en Proyectos.
- Ertmer, P., y Newby, T. (1993). Conductismo, cognitivismo y constructivismo: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. *Performance improvement quarterly*, 6(4), 50–72.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 9–25.
- Giménez, J. (1997). Evaluación en matemáticas. *Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.
- Granados, C. (1995). La visión mercatoriana del mundo y las cambiantes relaciones de poder global. *Estudios*(12-13), 181–192.
- Hall, J., y Lingefjärd, T. (2016). *Mathematical Modeling: applications with GeoGebra*. John Wiley & Sons.
- MECD, C. Y. D., Ministerio de Educación. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.
- Moreno Verdejo, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Comercial Grupo ANAYA, SA.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124).
- Puig, N. S. (2016). Trabajo por proyectos: ¿filosofía o metodología? *Cuadernos de Pedagogía*(472), 44–46.
- Pujolàs, P., Lago, J. R., Naranjo, M., Pedragosa, O., Riera, G., Soldevila, J., ...

- Rodrigo, C. (2011). El programa CA/AC (“cooperar para aprender/aprender a cooperar”) para enseñar a aprender en equipo Implementación del aprendizaje cooperativo en el aula. *Barcelona: Universitat Central de Catalunya. Stracted*, 4(02), 2018.
- Quirós, M. C. (2020). <https://www.youtube.com/watch?v=BDGMEoJ9wi4>.
- Requena, S. H. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, 5(2), 26–35.
- Río, L. S. d., y Costa, V. A. (2012). GeoGebra como instrumento de modelización matemática en la enseñanza de la noción de función. En *XII Simposio de Educación Matemática (SEM)(Chivilcoy, Buenos Aires, 2012)*.
- Romero, L. R. (2004). Evaluación de competencias matemáticas: proyecto PISA/OCDE 2003. En *Investigación en educación matemática: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): La Coruña, 9-11 septiembre 2004* (pp. 89–102).
- Romero, L. R., y Gómez, J. L. L. (2014). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza editorial.
- Rosales Sánchez, E. M., Rodríguez Ortega, P. G., Romero Ariza, M., y cols. (2020). Conocimiento, demanda cognitiva y contextos en la evaluación de la alfabetización científica en PISA.
- Sala, G., y Font, V. (2019). El papel de la modelización en una experiencia de enseñanza de matemáticas basada en indagación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 16, 73–85.
- Sánchez, M. J. P. (2007). Ventajas e inconvenientes de las TIC en la docencia. *Revista Digital: Innovación y experiencias educativas*.
- Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender* (Vol. 1). Graó.
- Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Reflections on practice: Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school*, 3(5), 344–350.
- Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, 63–86.