

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie électrique et de génie informatique

Contrôle optimal du régime d'opération d'une  
double boîte quantique à électron unique

Mémoire de maîtrise  
Spécialité : génie électrique

Vincent REIHER

Sherbrooke (Québec) Canada

Avril 2021



# MEMBRES DU JURY

Yves BÉRUBÉ-LAUZIÈRE

---

Directeur

Max HOFHEINZ

---

Évaluateur

Michel PIORO-LADRIÈRE

---

Évaluateur



# RÉSUMÉ

La double boîte quantique (DBQ) à électron unique sur silicium est une architecture très prometteuse pour la réalisation d'un qubit physique. D'une part, les très longs temps de cohérence du spin électronique sur semiconducteurs du groupe IV permettent la fabrication de qubits ayant de très longs temps de vie. D'autre part, la susceptibilité électrique des états de charge d'un électron unique dans une DBQ permet de manipuler rapidement l'état du qubit par résonance magnétique de spin, ou encore de faire interagir plusieurs spins distants via un résonateur micro-ondes pour une connectivité accrue au sein du processeur quantique. Un couplage entre les degrés de liberté de spin et de charge de l'électron, médié par le gradient de champ magnétique engendré par un microaimant, permet la réalisation d'un qubit dont le caractère de spin ou de charge peut être contrôlé dynamiquement par la modulation des tensions des grilles du dispositif. Cette versatilité propre à l'architecture, combinée à l'infrastructure déjà en place à l'échelle mondiale pour la fabrication de dispositifs en silicium, font de la DBQ un candidat de qubit très intéressant.

L'opération optimale de ce type de qubit dans le cadre d'un calcul quantique requiert toutefois un degré de contrôle accru sur son régime d'opération, caractérisé par les tensions appliquées aux grilles métalliques qui définissent la DBQ. De façon générale, la modification du hamiltonien d'un système quantique est faite de façon adiabatique, ce qui permet de changer l'espacement relatif des niveaux d'énergie permis sans modifier la population relative de ces états. Or, des travaux dans le domaine du contrôle quantique ont montré que l'application de signaux de contrôle exotiques optimaux permettent d'exécuter ce type de manipulation sans avoir recours au régime adiabatique, atteignant une fidélité d'état plus élevée ou encore des séquences de transfert plus rapides.

Les travaux de recherche détaillés dans le présent mémoire portent sur la mise en place d'un protocole permettant la conception de signaux de contrôle pour la manipulation haute-fidélité du régime d'opération d'un qubit de spin à électron unique sur double boîte quantique. Le protocole repose sur la méthode d'optimisation GRAPE (*GRadient Ascent Pulse Engineering*) pour générer des séquences de contrôle qui modifient le caractère de spin ou de charge du qubit, tout en préservant avec haute fidélité l'information quantique qui y est encodée. Ces signaux de contrôle permettent de transférer le système d'une configuration de spin à une configuration de charge près de quatre fois plus rapidement dans le cas où l'état du qubit est un état-propre de son hamiltonien, et avec une réduction de l'erreur de fidélité de plus de 80% pour un état logique arbitraire.

**Mots-clés :** Contrôle quantique, contrôle optimal, *GRadient Ascent Pulse Engineering* (GRAPE), hybridation spin-charge, qubit de spin, boîtes quantiques, information quantique



À Anne-Marie et Stéphane,  
en retour de leur support inépuisable.





# REMERCIEMENTS

Le succès du projet de maîtrise décrit dans ce document repose sur la participation et le soutien de nombreuses personnes. Je voudrais d'abord remercier mon directeur de recherche Yves Bérubé-Lauzière pour sa disponibilité et son dévouement. Merci de m'avoir transmis ton intérêt pour toutes choses scientifiques, quantiques ou non. Merci du temps que tu consacres à t'assurer que les productions de tes étudiants soient de la plus haute qualité possible. Merci de ta supervision attentive qui laisse tout de même beaucoup de place à la créativité et l'initiative. Merci surtout de t'être lancé dans le domaine du contrôle quantique au moment même où je parlais à la recherche d'un projet de maîtrise, et d'avoir créé cette merveilleuse opportunité.

Merci aux autres membres du groupe de recherche en ingénierie de contrôle quantique - Azouz Aarab, Rémi Azouit, Jonathan Durandau, Maxime Lapointe-Major, Armun Liaghat et Arthur Perret pour les discussions scientifiques qui permettent toujours de surmonter un obstacle, et pour les discussions moins scientifiques qui changent les idées quand il le faut. Ce sont vous qui faites du groupe un environnement si stimulant.

Merci à Marc Leclair et Dominique Parisé de l'INTRIQ qui m'ont permis un merveilleux stage à Paris au tout début de la maîtrise. Merci à Pierre Rouchon et au Centre Automatique et Systèmes de nous avoir accueilli à l'École des Mines de Paris, ça aura sans doute été la meilleure introduction au contrôle quantique que j'aie pu espérer.

Merci à Michel Labrecque-Dias, partenaire d'APP toujours aux études avec moi. Merci à tous les autres collègues du baccalauréat devenus amis : Guillaume, Pascal, Jasmin, Mathieu, Paul, et tous les autres. Merci aussi aux collègues de Michel également devenus amis : Simon, Rémi, Gabriel, Samuel, Maxime, Frédéric et bien d'autres. J'ai hâte de tous vous revoir post-COVID.

Merci à ma famille de me supporter et de s'intéresser à ce projet quantique. Merci de vous assurer indirectement que je comprenne vraiment ce que je fais en me posant toutes sortes de questions qui me forcent à vulgariser. Merci à ma mère Anne-Marie pour toutes les opportunités de jouer de la musique en groupe. Merci à mon père Stéphane de t'assurer encore à ce jour que je mange des légumes verts.

Merci finalement à Laurence qui m'accompagne tranquillement dans la vie depuis neuf ans déjà. Merci pour tous les moments drôles, tristes, stressants, réconfortants qui sont toujours meilleurs (ou du moins, moins pires) avec toi. Merci de m'écouter râler quand rien ne va, et jubiler quand enfin ça marche, même si c'est incompréhensible. Merci d'être la personne qui rend chaque jour un peu meilleur.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Problématique . . . . .	2
1.2	Question et objectifs de recherche . . . . .	3
1.3	Contributions originales . . . . .	4
1.4	Plan du document . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Réalisation physique d'un qubit</b>	<b>7</b>
2.1	Qubits logiques . . . . .	7
2.1.1	État logique . . . . .	7
2.1.2	Mesure d'un qubit . . . . .	8
2.1.3	Décohérence . . . . .	9
2.2	Qubits de spin électronique . . . . .	10
2.2.1	Double boîte quantique à électron unique . . . . .	11
2.2.2	Manipulation de l'état du qubit . . . . .	15
2.3	Cavité micro-ondes . . . . .	16
2.3.1	Modèle d'un résonateur . . . . .	16
2.3.2	Couplage spin-photon . . . . .	17
2.3.3	Mesures dispersives . . . . .	18
2.3.4	Portes logiques à deux qubits . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Contrôle quantique</b>	<b>23</b>
3.1	Trajectoires quantiques . . . . .	23
3.2	Contrôle par rétroaction . . . . .	25
3.3	Contrôle optimal en boucle ouverte . . . . .	26
3.3.1	Méthode GRAPE . . . . .	26
3.3.2	Méthode de Krotov . . . . .	28
3.3.3	Méthode GOAT . . . . .	30
3.3.4	Méthodes d'optimisation sans gradient . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Bilan des connaissances et avenues de solution</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>Protocole de contrôle</b>	<b>35</b>
5.1	Avant-propos . . . . .	35
5.2	Article . . . . .	37
5.2.1	Abstract . . . . .	37
5.2.2	Introduction . . . . .	37
5.2.3	Model . . . . .	38
5.2.4	Decoherence Processes . . . . .	40
5.2.5	Control Objective . . . . .	41
5.2.6	Results . . . . .	43
5.2.7	Conclusion . . . . .	47

5.2.8	Acknowledgments . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Compléments à l'article</b>	<b>49</b>
6.1	Choix de la méthode de contrôle . . . . .	49
6.2	Pulse optimal obtenu par GRAPE . . . . .	49
6.3	Transfert d'états arbitraires . . . . .	50
6.4	Contrôle du transfert inverse . . . . .	53
6.5	Sommaire des compléments . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
7.1	Bilan des principaux résultats . . . . .	55
7.2	Contributions originales . . . . .	56
7.3	Prespectives et travaux futurs . . . . .	56
	<b>LISTE DES RÉFÉRENCES</b>	<b>59</b>

---

# LISTE DES FIGURES

2.1	Représentation d'un état logique sur la sphère de Bloch . . . . .	9
2.2	Modèle schématisé de la double boîte quantique à électron unique . . . . .	12
2.3	Énergies propres de la DBQ à électron unique . . . . .	14
2.4	Couplage effectif spin-photon médié par la charge . . . . .	19
2.5	Force du couplage spin-photon . . . . .	19
3.1	Représentation schématique d'une itération de l'algorithme GRAPE . . . . .	27
3.2	Représentation schématique de la méthode de Krotov numérique . . . . .	30
5.1	Schematic of the device under control . . . . .	39
5.2	Optimized control operator fidelity . . . . .	44
5.3	Qubit eigenstate transfer fidelity . . . . .	45
5.4	Qubit state transfer fidelity for non-eigenstates . . . . .	45
5.5	Random qubit state transfer fidelity . . . . .	46
5.6	Statistical fidelity distribution of the operating regime transfer for random states . . . . .	46
6.1	Séquence de contrôle optimale pour un qubit dans un état-propre . . . . .	51
6.2	Séquence de contrôle optimale pour un qubit dans un état arbitraire . . . . .	51
6.3	Spectre du pulse de contrôle optimal . . . . .	52
6.4	Convergence de la fidélité de transfert optimal pour états aléatoires . . . . .	52
6.5	Courbes de fidélité de transfert linéaire pour états aléatoires . . . . .	53



# LISTE DES SYMBOLES

Symbole	Définition
$t_c$	Couplage tunnel entre les sites d'une double boîte quantique (DBQ)
$\epsilon$	Désaccord ( <i>detuning</i> ) énergétique entre les sites d'une DBQ
$ \uparrow\rangle,  \downarrow\rangle$	État de spin 1/2 vers le haut ( <i>spin-up</i> ) ou vers le bas ( <i>spin-down</i> )
$ L\rangle,  R\rangle$	États associés à la position de la charge unique dans une DBQ dans le site de gauche (L) ou de droite (R)
$ +\rangle,  -\rangle$	États orbitaux de charge correspondant à une superposition symétrique (+) ou antisymétrique (-) des états $ L\rangle,  R\rangle$
$ n\rangle$	État propre à $n$ photons d'un résonateur, souvent appelé état de Fock
$H$	Opérateur hamiltonien
$a, a^\dagger$	Opérateurs d'annihilation et de création d'un oscillateur harmonique
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Opérateurs de Pauli associés au spin 1/2 d'un électron
$\tau_x, \tau_y, \tau_z$	Opérateurs de Pauli associés à l'état de charge d'une DBQ
$g_c$	Coefficient de couplage charge-photon
$\kappa$	Taux total de perte de photons
$\gamma_{1,c}, \gamma_{1,s}$	Taux de relaxation de charge (c) ou de spin (s)
$\gamma_{\phi,c}, \gamma_{\phi,s}$	Taux de déphasage de charge (c) ou de spin (s)
$\omega_r$	Fréquence propre du mode fondamental d'un résonateur
$\omega_d$	Fréquence d'excitation ( <i>drive</i> )
$h$ ( $\hbar$ )	Constante de Planck (réduite)
$\mu_B$	Magnéton de Bohr
$g$	Facteur de Landé
Si	Silicium élémentaire
Ge	Germanium élémentaire





# LISTE DES ACRONYMES

---

Acronyme	Définition
cQED	Électrodynamique quantique en circuit
CQED	Électrodynamique quantique en cavité
CNOT, CZ	<i>Controlled-Not, Controlled-Phase</i> , portes logiques à deux qubits générant de l'intrication
DBQ	Double boîte quantique
EDSR	<i>Electric Dipole Spin Resonance</i>
GOAT	<i>Gradient Optimization of Analytic Controls</i> (algorithme d'optimisation)
GRAPE	<i>GRAdient Ascent Pulse Engineering</i> (algorithme d'optimisation)
NISQ	<i>Near-term Intermediate Scale Quantum</i> , ère du calcul quantique avec peu de qubits imparfaits
Si/SiGe	Structure semiconductrice composée d'une région active en silicium entre deux alliages silicium-germanium

---



# CHAPITRE 1

## Introduction

C'est au début des années 1980, dans les propositions de Yuri Manin et Richard Feynman que prend naissance le domaine de l'information quantique [28, 55]. Cette méthode de calcul se présente alors comme une nouvelle avenue pour la simulation de systèmes quantiques complexes. Selon Feynman, les phénomènes fondamentaux de la nature, elle-même quantique, ne pourront jamais être simulés efficacement par un ordinateur classique ne prenant pas en compte les propriétés de la matière décrites par la mécanique quantique [28], notamment l'intrication et la superposition.

En 1994, Peter Shor propose un tout premier algorithme exploitant ces propriétés particulières de la mécanique quantique [76]. Cet algorithme quantique pour la décomposition de nombres entiers en leurs facteurs premiers dépend polynomialement en coût de calcul de la taille du nombre, alors que les meilleurs algorithmes classiques montrent une dépendance exponentielle. Peu après, Lov Grover propose un algorithme quantique pour la recherche dans une base de données, lui aussi plus rapide que tout homologue classique connu [38]. La démonstration théorique de tels algorithmes appuie l'intuition de Manin et Feynman et justifie dès lors les efforts de la communauté scientifique consentis à la réalisation d'un ordinateur quantique universel.

Alors que le calcul classique repose sur le bit, l'unité fondamentale du calcul quantique est le qubit, littéralement *quantum bit*. Cette unité élémentaire doit être construite de façon à permettre l'emploi de propriétés quantiques à des fins de calcul. Alors que le bit classique ne peut prendre que la valeur 0 ou 1, l'état d'un qubit est en général une superposition des états de base  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Il s'agit plus précisément d'un vecteur complexe dans un espace de Hilbert de dimension deux, qu'on représente habituellement comme un point sur la sphère de Bloch. Il est généralement accepté qu'un dispositif physique doit satisfaire aux cinq critères de DiVincenzo pour le traitement de l'information [24] :

1. le qubit doit permettre deux niveaux d'énergie bien définis ;
2. le qubit doit pouvoir être initialisé dans un état connu ;
3. l'architecture doit permettre la réalisation d'un ensemble d'opérations logiques universel ;

4. les temps de cohérence du système doivent être beaucoup plus longs que la durée nécessaire à l'exécution d'une porte logique ;
5. le qubit doit être mesurable.

En 1996, Dorit Aharonov et Michael Ben-Or publient un théorème selon lequel il existe un taux d'erreur seuil sous lequel il serait possible de corriger les erreurs quantiques plus rapidement que celles-ci surviennent au cours d'un calcul [1]. Ce taux d'erreur admissible, initialement évalué à  $10^{-6}$ , a crû avec le développement de méthodes de correction d'erreur plus sophistiquées et est aujourd'hui évalué à 1% pour le code de surface [30].

Plusieurs dispositifs physiques font aujourd'hui l'objet de recherches théoriques et expérimentales en tant que qubits candidats dans le but de remplir les critères de DiVincenzo en maintenant un taux d'erreur inférieur à 1% ; les ions piégés, les circuits supraconducteurs et les spins électroniques sont quelques-unes des implémentations les plus prometteuses pour la réalisation d'un ordinateur quantique universel.

## 1.1 Problématique

En 1998, la proposition de Daniel Loss et David DiVincenzo d'utiliser le spin-1/2 intrinsèque de l'électron comme unité de base du calcul quantique [53] lance l'idée du qubit de spin. Le spin d'un électron confiné dans une boîte quantique semiconductrice n'admet que deux états de base et est doté de très longs temps de cohérence, particulièrement pour les substrats du groupe IV comme le silicium et le germanium. Ces propriétés font de la boîte quantique semiconductrice un excellent candidat pour la réalisation d'un qubit physique. De plus, l'existence de l'infrastructure mondiale CMOS promet la fabrication fiable et peu coûteuse de grands nombres de processeurs quantiques basés sur cette technologie. Toutefois, les interactions directes entre deux spins, nécessaires à la réalisation d'un ordinateur quantique universel, ne sont possibles que sur de très courtes distances, limitant la complexité des calculs possibles à moins d'avoir recours à de nombreuses opérations d'échange entre boîtes quantiques adjacentes [86, 95]. De plus, le grand nombre de signaux de contrôle nécessaires à la calibration, au fonctionnement et à la mesure de spins contraints à des boîtes quantiques rend très difficile la fabrication d'un grand nombre de qubits dans un petit espace [15, 45, 60].

Une approche proposée pour contourner ce problème s'inspire d'une architecture très populaire pour les qubits supraconducteurs, qui fait usage de résonateurs micro-ondes pour médier des interactions à longue distance entre les atomes artificiels qui composent ce type de dispositif [8, 22, 88]. Cette méthode permet alors une connectivité entre des paires arbitraires de spins et réduit l'importance de fabriquer chaque boîte quantique très près

---

les unes des autres. Cependant, le faible dipôle électrique de l'électron rend très difficile l'atteinte du régime de couplage fort entre un photon micro-ondes et un spin unique, régime pour lequel la force du couplage entre les deux systèmes est plus élevée que les taux de décohérence associés.

Dans une double boîte quantique, cependant, le dipôle effectif de l'état de charge d'un électron dont la fonction d'onde est distribuée entre les deux boîtes est significativement plus élevé. En couplant les degrés de liberté de spin et de charge d'un électron unique contraint à une double boîte quantique, soit par l'interaction spin-orbite naturelle [31, 92] ou par l'ajout d'un microaimant [68, 87], il est possible d'atteindre le régime de couplage fort entre un spin électronique unique et un photon micro-onde [6, 57, 58, 81] et de réaliser des portes logiques à deux qubits sur de longues distances [7, 40, 90]. Or, la configuration électrique qui permet le couplage fort spin-photon augmente également la sensibilité du spin au bruit électrique de son environnement, réduisant la durée de vie de l'information quantique qui y est encodée [5, 6]. Il devient alors intéressant de modifier dynamiquement le régime d'opération de ce type de dispositif afin d'atteindre le régime de couplage fort lorsque nécessaire, et de retrouver les longs temps de cohérence autrement.

## 1.2 Question et objectifs de recherche

Au sens du contrôle du régime d'opération électrostatique de la DBQ, il sera nécessaire de faire passer le système d'une configuration à une autre tout en préservant l'état logique du qubit, c'est-à-dire l'information quantique qui y est encodée. Il est connu que la modification adiabatique du Hamiltonien d'un système quantique permet d'effectuer ce genre de manipulation avec une fidélité élevée [10]. Toutefois, il est également connu que des méthodes de contrôle quantique permettent en général d'améliorer les résultats obtenus par la conception de signaux de contrôle mieux adaptés (plus de détails au chapitre 3). Le problème se traduit en la question de recherche :

*Est-il possible d'améliorer le transfert du régime d'opération d'une double boîte quantique à électron unique, au sens de la durée de contrôle et de la fidélité d'état logique, en appliquant des algorithmes de contrôle optimal quantique ?*

L'objectif principal du projet concerne donc l'adaptation d'un algorithme de contrôle optimal au problème de transfert du régime d'opération du système à l'étude. Cet objectif se divise en trois parties :

1. Traduire les contraintes et requis concernant le pulse de contrôle en objectif de contrôle vers lequel un algorithme optimal peut converger ;
2. Concevoir l'outil numérique nécessaire pour l'implémentation de l'algorithme d'optimisation choisi ;
3. Caractériser le pulse obtenu et quantifier sa qualité au sens de la fidélité de transfert et de la durée de contrôle.

### 1.3 Contributions originales

La manipulation du régime d'opération électrostatique d'une DBQ est généralement faite dans le régime adiabatique afin d'éviter de perturber l'état du système. La première contribution des travaux présentés dans ce mémoire est de montrer qu'une approche numérique pour la conception de signaux de contrôle non-adiabatiques, par l'application d'algorithmes d'optimisation tels que GRAPE [49], permettent d'effectuer ces transferts avec un meilleur degré de succès ; pour un état-propre du qubit, ces transferts peuvent être effectués beaucoup plus rapidement, et cette approche atteint une fidélité de transfert plus élevée pour un état arbitraire. La seconde contribution est de démontrer que les signaux de contrôle obtenus ne requièrent pas la connaissance de l'état logique du qubit, un avantage critique pour l'application en pratique des techniques de contrôle présentées ici.

Parallèlement, la troisième contribution est une analyse du phénomène de relaxation de charge par émission de phonons longitudinaux acoustiques [6], qui permet d'établir la relation entre le taux de relaxation de charge et l'amplitude des signaux de contrôle, alors que les taux de relaxation de charge disponibles dans la littérature sont généralement décrits comme constants.

### 1.4 Plan du document

La première partie du mémoire détaille le cadre technologique et scientifique du présent projet de recherche. Le chapitre 2 établit d'abord les propriétés qui définissent le qubit au sens de la science de l'information, puis on présente le modèle mathématique de la DBQ à électron unique, qui fait l'objet de cette étude. On décrira également les modèles mathématiques des interactions spin-photon promises par ce dispositif pour des mesures dispersives et des portes logiques à deux qubits médiées par un résonateur, ainsi qu'un modèle du contrôle électrique de l'état de spin par résonance magnétique. Au chapitre 3 est présenté un recensement des méthodes modernes en contrôle quantique et des algorithmes existants pour la conception numérique de signaux de contrôle optimaux en boucle ouverte. Finalement, le chapitre 4 fait le bilan du contexte scientifique dans lequel s'inscrit le projet et détaille davantage les objectifs visés.

---

La seconde partie du mémoire porte sur les résultats. Le chapitre 5 présente l'article publié en fin de projet, qui détaille les principaux résultats obtenus. Un complément à l'article est présenté au chapitre 6, incluant des éléments de solution additionnels n'ayant pas été publiés. Finalement, le chapitre 7 fait la synthèse des réalisations et résultats obtenus dans le cadre de ce projet de recherche et présente quelques-unes des perspectives envisagées pour la suite des travaux.

---





# CHAPITRE 2

## Réalisation physique d'un qubit

La construction d'un qubit physique, avec des propriétés satisfaisant les critères de DiVincenzo [24], relève d'un important effort théorique et expérimental. Déjà à la fin du dernier millénaire, la vision d'un ordinateur quantique universel, but ultime encore à ce jour hors de portée, était bien concrète [69]. Aujourd'hui, les processeurs à petit nombre de qubits imparfaits permettent déjà d'effectuer d'impressionnants calculs, et des algorithmes sont développés pour tirer avantage de l'avantage quantique dans l'ère NISQ (*Near Intermediate-Scale Quantum*) qui approche à grands pas [70].

### 2.1 Qubits logiques

Bien que la réalisation spécifique d'un qubit physique qui remportera la course à la réalisation d'un ordinateur quantique universel soit encore incertaine, tous les qubits se comportent fondamentalement identiquement au sens du calcul quantique. Ce sont des systèmes physiques qui admettent deux niveaux d'énergie discrets distincts, dont l'état peut être initialisé et manipulé de façon cohérente pour exécuter un calcul. L'information résultante d'un tel calcul doit finalement pouvoir être extraite du processeur quantique via une mesure projective.

#### 2.1.1 État logique

Le qubit est un système à deux niveaux, dont l'état logique est une combinaison linéaire complexe normée des vecteurs de base associés à chacun des niveaux. De manière générale, on écrit l'état logique d'un qubit en coordonnées polaires comme

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (2.1)$$

Cet état peut être représenté sur la sphère de Bloch (Fig. 2.1). La manipulation d'un état s'exprime par des rotations autour des axes en trois dimensions sur la sphère de Bloch et l'opérateur associé à une telle manipulation est une combinaison de la matrice identité et des matrices de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

On choisit par convention les états de base  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  comme étant les états propres de  $\sigma_z$ .

La réalisation d'un ordinateur quantique universel requiert un contrôle complet sur l'état de chacun des qubits, c'est-à-dire que l'architecture doit permettre un ensemble universel de portes logiques [61]. Plusieurs tels ensembles existent ; le plus général est composé d'une porte générant de l'intrication, CNOT ou CZ (*Controlled-Not* ou *Controlled-Phase*, qui sont des rotations autour des axes X ou Z respectivement, conditionnées sur l'état d'un qubit de contrôle) plus un ensemble de rotations générant SU(2), soit l'ensemble de rotations unitaires sur une sphère.

### 2.1.2 Mesure d'un qubit

Alors que la mesure classique permet en général simplement d'obtenir de l'information sur l'état du système mesuré, la mesure quantique est une action plus complexe. Le postulat de la mesure quantique [18] indique que le résultat de toute mesure sur un système quantique est fondamentalement probabiliste. De plus, suite à la mesure, le système est projeté sur l'état associé au résultat de la mesure obtenu, un phénomène qu'on appelle effondrement de la fonction d'onde ou action-retour de la mesure quantique.

Mathématiquement, la mesure projective est décrite par une observable  $M$  avec valeurs propres  $m$ . La décomposition spectrale de cette observable s'écrit [61]

$$M = \sum_m m P_m, \quad (2.3)$$

où les opérateurs  $P_m$  sont les projecteurs sur les sous-espaces de  $M$  associés aux valeurs propres  $m$ . Si on mesure l'observable  $M$  d'un système dans l'état  $|\psi\rangle$ , la probabilité d'obtenir le résultat  $m$  est donnée par

$$p(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle. \quad (2.4)$$

Finalement, suite à la mesure, l'état du système est projeté vers

$$|\psi_m\rangle = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \quad (2.5)$$

Dans le contexte de la mesure d'un qubit, on utilisera généralement une mesure sur l'axe de calcul ; cette observable est conventionnellement choisie égale à l'opérateur de Pauli  $\sigma_z$ . Si le qubit est dans un état arbitraire de la forme

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.6)$$

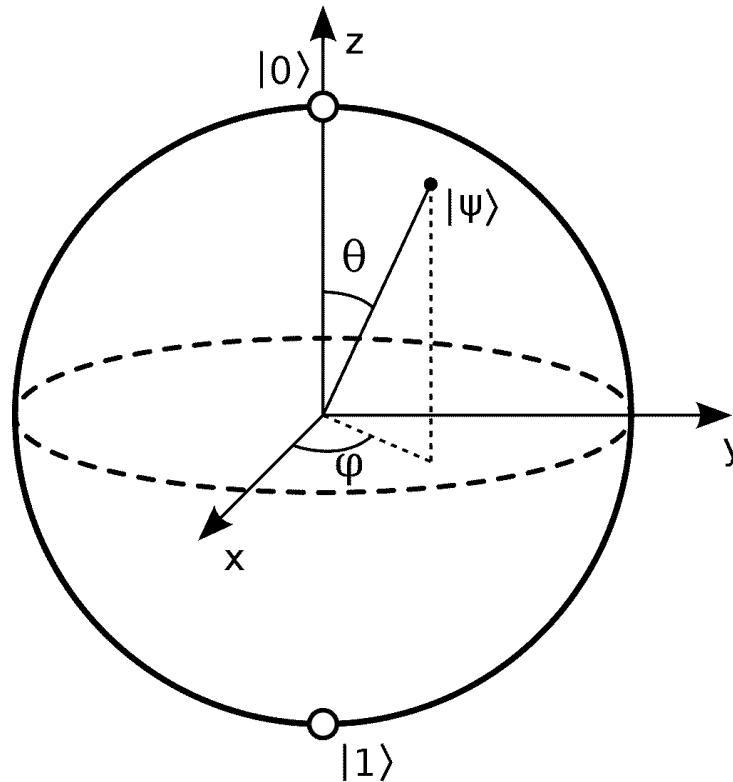


FIGURE 2.1 Représentation d'un état logique sur la sphère de Bloch [80].

on obtient via les éqs. (2.3) à (2.5) que la probabilité de mesurer la valeur propre associée aux états  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  est égale à  $|\alpha|^2$  et  $|\beta|^2$ , et l'état du qubit immédiatement après la mesure sera  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , respectivement.

L'action-retour de la mesure quantique a des ramifications critiques pour l'exécution d'un calcul sur un ordinateur quantique. Puisque la mesure d'un qubit affecte son état de manière immédiate et irréversible, il est impossible de vérifier l'état du processeur quantique durant un calcul sans affecter négativement le calcul, voire même le détruire. Cette particularité quantique a des conséquences cruciales notamment pour les domaines de la correction d'erreur quantique [32] et pour le contrôle quantique, discuté au chapitre 3.

### 2.1.3 Décohérence

Le qubit physique ne peut jamais être parfaitement isolé de son environnement. L'interaction du qubit avec son environnement induit une dynamique parasitique fonctionnellement aléatoire qui provoque une dégradation de l'information encodée dans le qubit avec le temps. Ces effets peuvent généralement s'écrire comme une combinaison d'effets de *bit-flip* et de *phase-flip* [61], qui ajoutent une erreur sur les angles  $\theta$  et  $\phi$  respectivement dans la forme générale de l'état du qubit de l'éq. (2.1).

On définit dans ce contexte les temps de cohérence  $T_1$  et  $T_2$ . Le temps de relaxation  $T_1$  est une constante d'amortissement à partir de laquelle on peut calculer la probabilité de mesurer le qubit dans l'état  $|1\rangle$  au temps  $t$ , s'il était initialement préparé dans l'état  $|1\rangle$ . Le temps de déphasage  $T_2$  indique la durée après laquelle la phase relative  $\phi$  acquiert une erreur suffisamment grande qu'il devient impossible de prédire l'état du qubit. La nature physique des canaux de décohérence, ainsi que la force de leurs effets, est différente pour chaque réalisation physique d'un qubit. Les implémentations offrant les plus grands ratios entre les temps de cohérence et la durée des portes logiques seront les plus intéressantes, puisqu'on pourra effectuer un plus grand nombre de manipulations logiques sur le qubit avant que l'information qui y est encodée ne se dégrade.

## 2.2 Qubits de spin électronique

L'utilisation de spins confinés à des boîtes quantiques est une idée âgée de plus de vingt ans déjà [53]. La proposition originale de Loss et DiVincenzo lance le domaine au tournant du millénaire, et un grand nombre d'architectures voit le jour, d'abord pour des dispositifs GaAs/AlGaAs puis, plus récemment, en Si/SiGe [11, 39, 41, 97]. Le spin-1/2 d'un électron est un candidat naturel pour la réalisation d'un qubit puisqu'il n'admet que deux états de base possibles. De plus, le spin électronique est doté de très longs temps de vie, atteignant l'ordre de la seconde [13, 98, 106] dans des architectures en silicium. Finalement, les petites dimensions de fabrication des dispositifs permettent de placer un grand nombre de spins dans un petit volume, un avantage important pour l'expansion de cette architecture vers un processeur à grand nombre de qubits [101].

Une des difficultés associées à l'utilisation de qubits de spins électroniques sur semiconducteurs est la très petite échelle sur laquelle des interactions d'échange spin-spin, typiquement utilisées pour la réalisation de portes à deux qubits [66], sont possibles, de l'ordre de 100 nm [86, 91]. Une avenue permettant de remédier à ce problème est de recourir à l'électrodynamique en circuits (cQED, *Circuit Quantum Electrodynamics*), similairement à l'approche utilisée pour les qubits supraconducteurs [8]. Cette technologie permet d'implémenter des portes logiques entre deux qubits distants dont l'interaction est médiée par le résonateur, ou encore d'effectuer des mesures dispersives de l'état d'un qubit en mesurant un champ transmis dans la cavité. Cependant, le faible dipôle électrique d'un spin électronique unique rend le couplage au champ électromagnétique d'un résonateur trop faible pour vaincre les temps de déphasage de spin [2, 25, 47]. En utilisant une double boîte quantique contenant un seul électron, il est possible d'hybrider les états de spin et de charge du dispositif et d'exploiter le grand dipôle électrique des états de charge pour atteindre le régime de couplage fort entre un spin unique et un photon micro-ondes [6, 46, 57].

---

### 2.2.1 Double boîte quantique à électron unique

L'architecture spécifique considérée dans le présent ouvrage est celle de Benito *et. al* [6], illustrée à la figure 2.2. Il s'agit d'une double boîte quantique Si-SiGe dans laquelle un seul électron est confiné. Le double puits de potentiel est défini par des grilles en aluminium en surface du dispositif ; les tensions appliquées à ces grilles déterminent la forme du potentiel électrique auquel est soumis l'électron.

De manière générale, l'électron a un degré de liberté de charge, déterminé par sa position physique dans la boîte de gauche ou de droite (états  $|L\rangle$  et  $|R\rangle$ ). La différence de potentiel électrique entre les deux boîtes, souvent appelée désaccord énergétique (*energy detuning* en anglais) est notée  $\epsilon$ . Le couplage tunnel entre les boîtes de gauche et de droite est noté  $t_c$ . Ces deux paramètres sont directement contrôlables en modulant les tensions de grille.

Lorsque le désaccord énergétique  $\epsilon$  augmente, les états propres d'un tel système approchent asymptotiquement des états  $|L\rangle$  et  $|R\rangle$ . Cependant, si le désaccord  $\epsilon$  est faible, la fonction d'onde de l'électron est distribuée entre les deux boîtes quantiques et forme des états de superposition symétrique  $|+\rangle$  et antisymétrique  $|-\rangle$ , qu'on peut écrire

$$|+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |L\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |R\rangle, \quad (2.7)$$

$$|-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} |L\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |R\rangle. \quad (2.8)$$

On a utilisé ici  $\theta$ , l'angle orbital, donné par

$$\theta = \arctan \frac{\epsilon}{2t_c}. \quad (2.9)$$

On définit également la quantité  $\Omega$ , l'énergie orbitale, qui quantifie la séparation énergétique entre les états  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  et qui est donnée par

$$\Omega = \sqrt{\epsilon^2 + 4t_c^2}. \quad (2.10)$$

Le dispositif est également soumis à un champ magnétique homogène longitudinal fort, noté  $B_z$ , qui lève la dégénérescence entre les états de spin intrinsèque  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$  de l'électron par effet Zeeman [3]. Un gradient de champ magnétique transverse faible  $\pm B_x$ , généré par la présence d'un microaimant, introduit une interaction spin-orbite artificielle qui couple les degrés de liberté de spin et de charge de l'électron. L'opérateur hamiltonien de ce

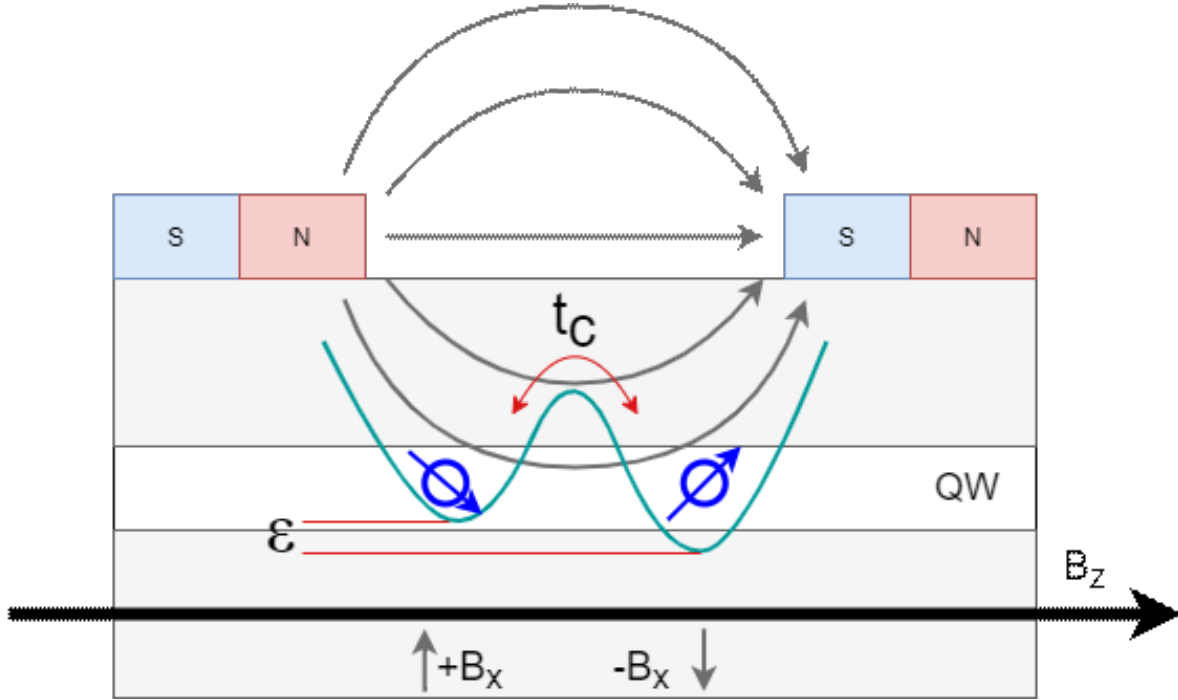


FIGURE 2.2 Modèle schématisé du système d'intérêt dans le présent ouvrage. Un électron unique est confiné dans un potentiel électrique à double puits défini par des tensions de grille et caractérisé par les paramètres  $\epsilon$  et  $t_c$ . Un champ magnétique longitudinal  $B_z$  lève la dégénérescence des états de spin électronique, et un microaimant introduit un gradient de champ  $\pm B_x$  qui couple les états de charge et de spin du système. Figure adaptée de Benito *et. al* [6]

système s'écrit alors

$$H_{DBQ} = \frac{\hbar}{2} (\epsilon \tau_z + 2t_c \tau_x + B_z \sigma_z + B_x \sigma_x \tau_z), \quad (2.11)$$

avec

$$B_{z(x)} = g\mu_B b_{z(x)}. \quad (2.12)$$

Ici,  $\tau_\alpha$  sont les opérateurs de Pauli pour le degré de liberté de charge, et  $\sigma_\alpha$  sont les opérateurs de Pauli pour le degré de liberté de spin. Il s'agit d'un hamiltonien à quatre niveaux. Dans le régime où

$$\sqrt{(\Omega - B_z)^2 + B_x^2} \ll (\Omega + B_z), \quad (2.13)$$

on peut écrire les états propres du hamiltonien

$$|0\rangle \approx |-, \downarrow\rangle, \quad (2.14)$$

$$|1\rangle = \cos \frac{\phi}{2} |-, \uparrow\rangle + \sin \frac{\phi}{2} |+, \downarrow\rangle, \quad (2.15)$$

$$|2\rangle = -\sin \frac{\phi}{2} |-, \uparrow\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |+, \downarrow\rangle, \quad (2.16)$$

$$|3\rangle \approx |+, \uparrow\rangle, \quad (2.17)$$

où  $\phi$  est l'angle de mélange spin-charge égal à

$$\phi = \arctan \frac{g\mu_B b_x \cos \theta}{\Omega - g\mu_B b_z}, \quad \phi \in [0, \pi[. \quad (2.18)$$

Les énergies propres associées aux états propres sont affichées à la figure 2.3. La présence du gradient de champ magnétique transverse  $\pm B_x$  couple les états de charge et de spin de l'électron et introduit des anticroisements à  $\epsilon = \pm \sqrt{B_z^2 - 4t_c^2}$  lorsque la séparation Zeeman des états de spin est plus grande que le couplage tunnel entre les deux boîtes quantiques ( $B_z > 2t_c$ ). C'est ce couplage qui hybride les états  $|+, \downarrow\rangle$  et  $|-, \uparrow\rangle$  pour former les états propres  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  du hamiltonien (éqs. 2.15, 2.16). Comme on souhaite exploiter l'hybridation spin-charge offerte par cette architecture pour la réalisation d'un qubit versatile, il est nécessaire de définir le qubit logique sur la transition  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  ou  $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ . Dans le présent projet, le qubit sera toujours défini sur la transition entre le premier état excité et l'état fondamental du système. Or, la nature physique de cette transition est définie par l'angle  $\phi$ , qui peut être électriquement contrôlé via les paramètres  $\epsilon$  et  $t_c$ .

### Configuration de spin

Par inspection des éqs. (2.14) et (2.15), pour  $\phi = 0$ , on a

$$|0\rangle \approx |-, \downarrow\rangle, \quad (2.19)$$

$$|1\rangle = |-, \uparrow\rangle. \quad (2.20)$$

La transition  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  est alors équivalente à une excitation de spin et le qubit logique est un qubit de spin pur. Il est possible d'approcher cette configuration dans le régime où

$$\cos \theta \rightarrow 0 \implies \epsilon \gg 2t_c. \quad (2.21)$$

L'état logique du système est alors indépendant de l'état de charge de l'électron, ce qui réduit la sensibilité du qubit logique à la relaxation de charge. Le système subit tout

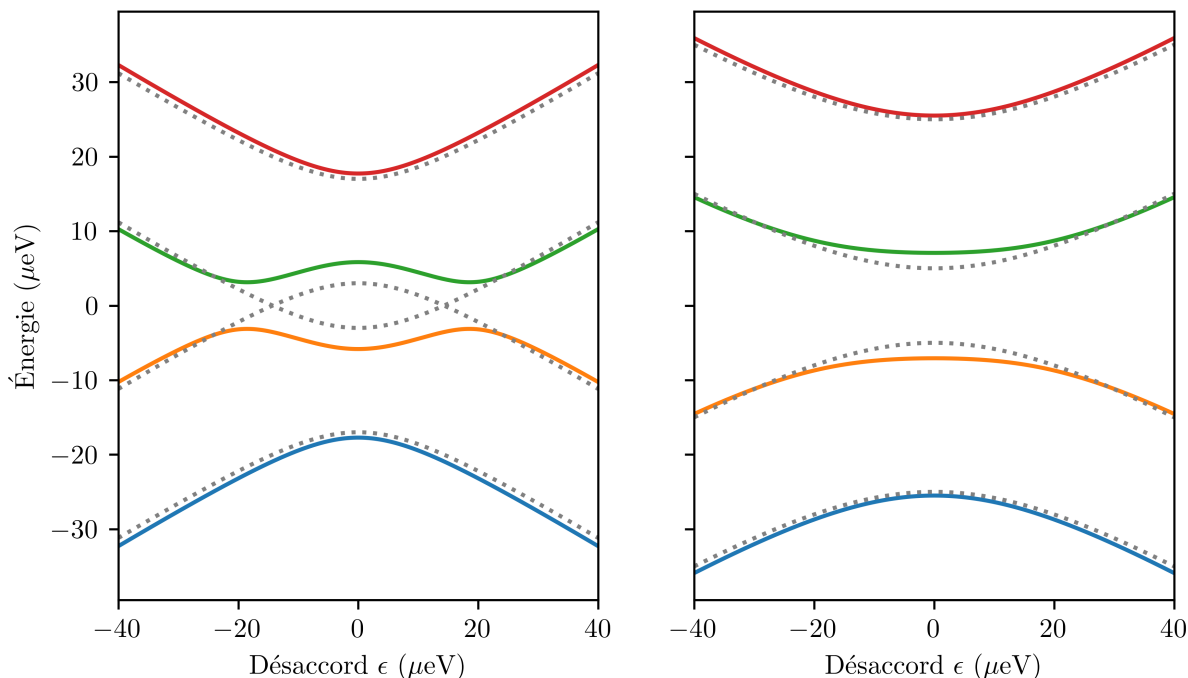


FIGURE 2.3 Énergies propres de la DBQ à électron unique pour  $2t_c < B_z$  (gauche) et  $2t_c > B_z$  (droite) en fonction du désaccord énergétique  $\epsilon$ . Les courbes pointillées montrent les énergies propres en absence d'un couplage spin-charge ( $B_x = 0$ ). La présence du gradient de champ magnétique transverse déforme les courbes d'énergie et introduit des anticroisements dans le spectre énergétique si la séparation Zeeman des états de spin est suffisamment grande.

de même les effets de déphasage dans le sous-espace de spin, principalement dûs aux interactions hyperfines entre le spin électronique et le bain magnétique aléatoire engendré par la présence d'isotopes de Si ayant un spin nucléaire non-nul [17, 83]. Le bruit de charge induit également un bruit magnétique dû au déplacement aléatoire de l'électron dans le gradient de champ magnétique. Ces effets sont toutefois relativement faibles par rapport aux effets de décohérence couplés à la charge dans la DBQ.

### Configuration de charge

À l'inverse, pour  $\phi = \pi$ , on a

$$|0\rangle \approx |-, \downarrow\rangle, \quad (2.22)$$

$$|1\rangle = |+, \downarrow\rangle. \quad (2.23)$$

Dans cette configuration, la transition  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  est plutôt égale à une excitation de charge dans la base orbitale, et le qubit logique devient un qubit de charge pur. En pratique, il est toujours préférable de maintenir le caractère de spin dominant, puisque le degré de



liberté de spin de l'électron a un temps de cohérence beaucoup plus long. Cependant, en modulant les tensions de grille de la double boîte quantique, il est possible d'augmenter le caractère de charge de la transition sur laquelle est définie le qubit logique et ainsi augmenter sa susceptibilité électrique lorsque nécessaire (voir section 2.3.2).

Le degré de liberté de charge de la DBQ est soumis à des taux de relaxation et de déphasage élevés, dûs principalement au couplage charge-phonon dans le substrat et au bruit électrostatique, respectivement. Lorsque le caractère de charge du qubit augmente, ces phénomènes dominent rapidement et deviennent les principaux contributeurs à la réduction du temps de vie du qubit [27, 104].

### 2.2.2 Manipulation de l'état du qubit

L'état de spin de l'électron peut être contrôlé en appliquant une impulsion micro-ondes sur une des grilles de la DBQ [19, 42, 48]. La variation rapide de la forme du double puits induit un déplacement oscillant de la fonction d'onde de l'électron entre les deux sites de la DBQ. La présence du gradient de champ magnétique transverse  $B_x$  soumet l'électron à un champ magnétique total effectif oscillant, induisant une précession du vecteur de spin par résonance magnétique du dipôle électronique (EDSR, *Electron Dipole Spin Resonance*) [26, 48, 67, 71, 82], si la fréquence de l'impulsion micro-onde est près de la fréquence de précession naturelle du spin due au champ  $B_z$ . Des rotations de spin sur deux axes, nécessaires pour la réalisation d'un ensemble de portes logiques universelles [61] peuvent être exécutées en variant la phase relative de deux impulsions.

La fréquence des oscillations de Rabi obtenues par cette méthode dépend elle aussi de l'angle de mélange spin-charge  $\phi$  [5]. Le développement au premier ordre de cette dépendance s'écrit

$$\Omega_s = \frac{2t_c B_x \Omega'_c}{|\Omega^2 - B_z^2|} + \mathcal{O}(B_x^3), \quad (2.24)$$

avec  $\Omega'_c$ , la fréquence de Rabi des états de charge de l'électron induites par un champ électrique externe et donnée par

$$\Omega'_c = \frac{1}{\hbar} e D E_d \cos \theta. \quad (2.25)$$

Ici,  $e$  est la charge élémentaire de l'électron,  $D$  est la distance entre les deux boîtes de la DBQ,  $E_d$  est l'amplitude de l'impulsion oscillante externe et  $\theta$  est l'angle orbital du qubit. La fréquence de précession maximale est obtenue pour  $\theta = 0$  et donc un désaccord énergétique nul entre les boîtes, lorsque les états de charge et de spin du qubit sont à résonance ( $\Omega \approx B_z$ ). Or, lorsque la DBQ est placée dans ce régime, l'hybridation spin-charge est maximisée et le qubit est soumis à des forts taux de décohérence liés au degré

de liberté de charge. Le régime d'opération optimal au sens du facteur de qualité pour effectuer ces rotations de spin par EDSR se trouve donc légèrement hors-résonance spin-charge, un résultat qui présage la solution au problème de couplage spin-photon avec une cavité micro-ondes présentée à la section 2.3.2.

## 2.3 Cavité micro-ondes

L'utilisation de résonateurs supraconducteurs comme médiateurs d'interactions longue-distance est très répandue dans le domaine des qubits supraconducteurs [8, 33]. Ces résonateurs permettent à la fois des mesures dispersives de l'état d'un qubit [23, 89] ainsi que l'exécution de portes logiques à deux qubits, élément critique d'un ensemble universel de portes logiques quantiques [61], entre des paires arbitraires de qubits couplés au même résonateur [79, 88]. L'électrodynamique quantique sur circuits permet donc d'éviter d'avoir à fabriquer les qubits physiquement très près les uns des autres, facilitant l'intégration de grands nombres de qubits sur un même processeur, une tâche qui s'est montrée difficile dans les années récentes [15, 45, 60].

### 2.3.1 Modèle d'un résonateur

On considère le mode fondamental du résonateur, de fréquence propre  $\omega_r$ . Le hamiltonien d'un tel résonateur est donné par

$$H_r = \omega_r a^\dagger a, \quad (2.26)$$

où  $a$  et  $a^\dagger$  sont les opérateurs d'annihilation et de création associés au mode d'oscillation. On écrira l'état de la cavité dans la base des états de Fock, où l'état  $|n\rangle$  correspond à  $n$  photons dans la cavité.

L'effet d'un champ incident interagissant avec le résonateur peut être décrit en définissant un opérateur  $a_{in}$ , de sorte que la quantité  $\langle a_{in}^\dagger a_{in} \rangle$  soit égale au nombre moyen de photons incidents par unité de temps. De façon similaire, un champ sortant sera décrit par l'opérateur  $a_{out}$ , tel que la quantité  $\langle a_{out}^\dagger a_{out} \rangle$  soit égale au nombre moyen de photons réfléchis par unité de temps. On utilise la théorie entrée-sortie (*input-output theory*) pour écrire la relation

$$a_{out} - a_{in} = \sqrt{\kappa} a, \quad (2.27)$$

avec  $\kappa$ , le taux total de perte de photons dans le résonateur. L'interaction entre le champ incident et le résonateur est décrite par le hamiltonien de pompage

$$H_{pump} = i\sqrt{\kappa} (a_{in} a^\dagger - a_{in}^\dagger a). \quad (2.28)$$

Le hamiltonien total qui décrit la dynamique du résonateur est alors la somme des termes  $H_r$  et  $H_{pump}$ . Or, en pratique, le champ incident ainsi que les opérateurs  $a_{in}(t)$  et  $a(t)$  oscillent à la fréquence  $\omega_d$ . Ces termes oscillants rendent le calcul numérique du hamiltonien total très difficile. Pour remédier à ce problème, on passe au référentiel tournant à la fréquence  $\omega_d$  et on obtient le hamiltonien effectif

$$H = (\omega_r - \omega_d)a^\dagger a - i\sqrt{\kappa} \left( a_{in}a^\dagger - a_{in}^\dagger a \right). \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Couplage spin-photon

En employant l'approximation dipolaire, l'interaction entre la DBQ et un résonateur supraconducteur est décrite par le hamiltonien d'interaction

$$H_{int} = g_c(a + a^\dagger)\tau_z. \quad (2.30)$$

Ici,  $g_c$  est le coefficient de couplage entre la charge dans la DBQ et le champ électromagnétique du résonateur. Dans la base des états propres de la DBQ  $\{|m\rangle\}_{m=0}^3 = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ , ce hamiltonien s'écrit plutôt

$$H_{int} = g_c(a + a^\dagger) \sum_{n,m=0}^3 d_{nm}\sigma_{nm} \quad (2.31)$$

avec  $\sigma_{nm} = |n\rangle\langle m|$  et  $d$ , l'opérateur dipolaire. Dans la base orbitale des états-produits de spin et de charge  $\{|-, \downarrow\rangle, |-, \uparrow\rangle, |+, \downarrow\rangle, |+, \uparrow\rangle\}$ , cet opérateur s'écrit

$$d_{orb} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & 0 & -\cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Or, la présence du gradient de champ magnétique transverse couple les états  $|+, \downarrow\rangle$  et  $|-, \uparrow\rangle$ . Dans la base des états propres du hamiltonien de la DBQ, cet opérateur acquiert alors des éléments hors-diagonaux non-nuls :

$$d = \begin{bmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & 0 \\ d_{01} & 0 & 0 & d_{13} \\ d_{02} & 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

signifiant que l'état logique du qubit interagit avec un champ électrique externe. Ces éléments s'approximent par les expressions [6]

$$d_{01} = d_{23} \approx -\sin \frac{\phi}{2}, \quad (2.34)$$

$$d_{02} = -d_{13} \approx \cos \frac{\phi}{2}. \quad (2.35)$$

Si le qubit est défini sur la transition  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ , l'élément approprié est  $d_{01}$  et le couplage effectif entre le spin et un photon micro-onde est donné par

$$g_s = g_c |d_{01}|. \quad (2.36)$$

Le couplage charge-photon  $g_c$  du système est un paramètre intrinsèque dépendant de la fabrication du dispositif; il dépend principalement de la distance entre les deux boîtes quantiques ainsi que de l'impédance du résonateur [5, 73]. Par contre, l'élément  $d_{01}$  de l'opérateur dipolaire peut être modifié dynamiquement en ajustant les tensions de grille régissant les paramètres  $\epsilon$  et  $t_c$ , et donc l'angle de mélange  $\phi$ , un couplage total maximal étant atteint pour  $\phi = \pi/2$  correspondant à une hybridation spin-photon maximale. La figure 2.4 illustre ce phénomène.

Or, lorsque l'angle de mélange  $\phi$  approche  $\pi/2$  et que le caractère de charge de la transition  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  augmente, la sensibilité du qubit aux processus de relaxation et de décohérence rapides liés à la charge électrique augmente également, ne permettant pas d'atteindre le régime de couplage fort, défini par

$$g_s > \sqrt{\frac{\gamma_s^2 + (\kappa/2)^2}{2}}, \quad (2.37)$$

correspondant à ce que le couplage spin-photon total  $g_s$  soit plus fort que le taux total de décohérence du système via la décohérence totale de spin  $\gamma_s$  et le taux de perte de photons dans le résonateur  $\kappa$ . Toutefois, il reste possible d'atteindre ce régime de couplage fort en ne maximisant pas l'hybridation spin-photon [6, 57, 58, 87], tel qu'illustré à la figure 2.5.

### 2.3.3 Mesures dispersives

De façon semblable à l'approche utilisée depuis longtemps déjà pour la mesure non-destructive de qubits supraconducteurs [8, 23], il est possible d'exploiter le couplage fort entre la DBQ et le résonateur pour effectuer des mesures dispersives de spin [4, 6, 21, 57, 65]. On invoque à nouveau la théorie entrée-sortie dans le référentiel de Heisenberg pour décrire le système quantique ouvert composé de la DBQ et du résonateur à l'aide

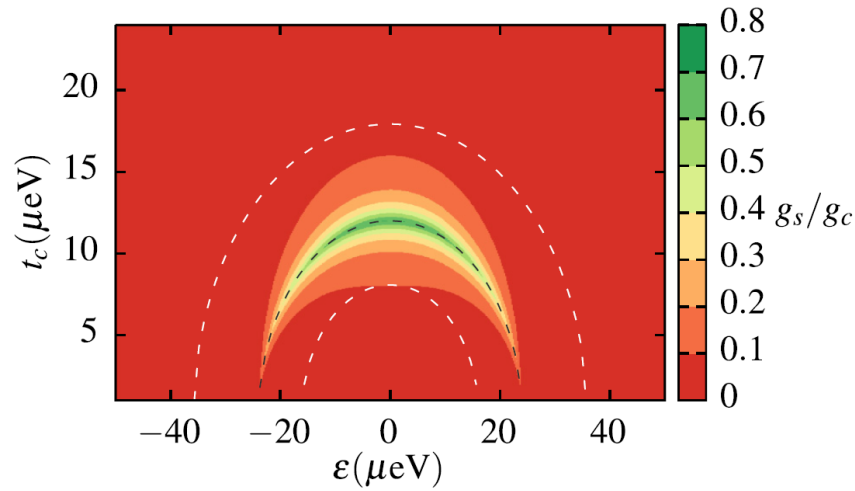


FIGURE 2.4 Couplage effectif entre l'état logique d'une DBQ et un photon micro-ondes dans un résonateur. La ligne pointillée noire correspond à  $\Omega = B_z$  et sépare les régions où  $g_s/g_c = |d_{01}|$  (au-dessus) et où  $g_s/g_c = |d_{02}|$  (en-dessous). Les lignes pointillées blanches délimitent la région où la condition  $\sqrt{(\Omega - B_z)^2 + B_x^2} \ll (\Omega + B_z)$  est respectée. Tirée de Benito *et. al* [6].

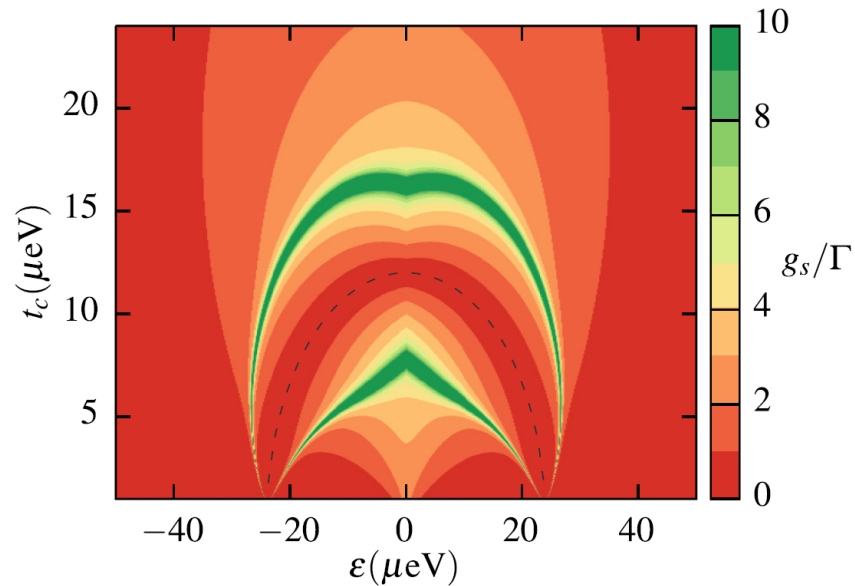


FIGURE 2.5 Force du couplage effectif entre l'état logique d'une DBQ et un photon micro-ondes dans un résonateur évaluée comme le rapport entre le couplage effectif et le taux total de décohérence. La ligne pointillée noire correspond à  $\Omega = B_z$ . Le régime de couplage fort est atteint dans les régions en vert, hors de la limite  $\phi = \pi/2$ . Tirée de Benito *et. al* [6].

des équations de Langevin quantiques pour les opérateurs  $a$  et  $\sigma_{nm}$ , dans un référentiel tournant à la fréquence propre du résonateur  $\omega_R$  [6] :

$$\dot{a} = i\Delta_0 a - \frac{\kappa}{2}a + \sqrt{\kappa_1}a_{in,1} + \sqrt{\kappa_2}a_{in,2} - ig_c e^{i\omega_R t} \sum_{n,m=0}^3 d_{nm} \sigma_{nm}, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{nm} = & i(E_m - E_n)\sigma_{nm} - \sum_{n'm'} \gamma_{nm,n'm'} \sigma_{n'm'} + \sqrt{2\gamma} \mathcal{F} \\ & - ig_c (ae^{-i\omega_R t} + a^\dagger e^{i\omega_R t}) d_{mn} (p_n - p_m). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ici,  $\Delta_0 = \omega_d - \omega_R$  est le désaccord entre la fréquence d'excitation, c'est-à-dire du champ incident au résonateur, et la fréquence de son mode fondamental;  $\kappa$  est le taux total de perte de photons, avec  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  les taux de perte dans les ports d'entrée et de sortie respectivement,  $\mathcal{F}$  est le bruit quantique de la DBQ et  $p_m$  est la probabilité de mesurer le qubit dans l'état  $|m\rangle$ . Finalement, le superopérateur  $\gamma$ , avec éléments de matrice  $\gamma_{nm,n'm'}$  représente les processus de décohérence qui, en général, couplent les équations pour les opérateurs  $\sigma_{nm}$ ; ici, ce superopérateur permet de tenir compte des effets de relaxation de charge et de déphasage de charge et de spin dus au bruit électromagnétique, puisque ceux-ci sont les sources de décohérence les plus importantes dans ce contexte.

On définit l'opérateur  $\hat{\sigma}_{n,n+j} = \sigma_{n,n+j} e^{i\omega_R t}$  pour  $j > 0$  et on emploie l'approximation séculaire pour éliminer les termes à oscillation rapide, ce qui permet de réécrire les équations (2.38) et (2.39) comme

$$\dot{a} = i\Delta_0 a - \frac{\kappa}{2}a + \sqrt{\kappa_1}a_{in,1} + \sqrt{\kappa_2}a_{in,2} - ig_c \sum_{n=0}^2 \sum_{j=1}^{3-n} d_{n,n+j} \sigma_{n,n+j}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{n,n+j} = & -i(E_n + j - E_n - \omega_R)\sigma_{n,n+j} - \sum_{n'j'} \gamma_{n,n+j,n',n'+j'} \sigma_{n',n'+j'} \\ & + \sqrt{2\gamma} \mathcal{F} - ig_c a d_{n,n+j} \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

La solution de ces équations pour obtenir la valeur moyenne des opérateurs  $a$  et  $\sigma_{nm}$  dans la limite stationnaire permet de définir la susceptibilité  $\chi$  et le facteur de transmission  $A$ ,

$$\bar{\sigma}_{n,n+j} = \chi_{n,n+j} \bar{a}, \quad (2.42)$$

$$A = \frac{\bar{a}_{out,2}}{\bar{a}_{in,1}} = \frac{-i\sqrt{\kappa_1\kappa_2}}{-\Delta_0 - i\kappa/2 + g_c \sum_{n=0}^2 \sum_{j=1}^{3-n} d_{n,n+j} \chi_{n,n+j}}, \quad (2.43)$$

où on a considéré  $\langle a_{in,2} \rangle = 0$  et  $\langle \mathcal{F} \rangle = 0$ .

Si on envoie une impulsion micro-onde à la fréquence de la cavité, on peut écrire l'état du système DBQ-résonateur comme [33]

$$|\psi_0\rangle = (c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle) \otimes |\alpha\rangle, \quad (2.44)$$

où  $|\alpha\rangle$  correspond à l'état cohérent du champ incident. L'onde transmise acquiert alors une phase, puisque le coefficient de transmission  $A$  de la cavité est une quantité complexe, et cette phase dépend de la valeur moyenne de  $\bar{\sigma}_{n,n+j}$  et donc de l'état de spin du qubit. Après impulsion micro-onde, l'état du système devient

$$|\psi\rangle = c_\uparrow |\uparrow\rangle |e^{-i\theta}\alpha\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle |e^{i\theta}\alpha\rangle, \quad (2.45)$$

avec  $\theta$ , la phase du coefficient de transmission  $A$ . Il est alors possible d'effectuer une mesure non-destructive de l'état de spin du qubit en mesurant la phase de l'onde transmise.

### 2.3.4 Portes logiques à deux qubits

Similairement aux démonstrations faites à l'aide de qubits supraconducteurs, il est possible d'exécuter des portes logiques contrôlées sur deux qubits distants si leur interaction est médiée par un résonateur [7, 9, 20, 84]. Conceptuellement, l'interaction spin-spin est décomposée en deux interactions spin-photon, c'est-à-dire que l'information encodée dans le premier spin influence un photon micro-onde délocalisé dans le résonateur, lequel interagit ensuite avec le second spin. Il est également possible d'implémenter des interactions spin-spin même lorsque les deux spins ne sont couplés que dispersivement à la cavité, auquel cas leur interaction est médiée par des excitations virtuelles du champ électromagnétique dans le résonateur. Toutefois, le projet présenté dans ce document ne considère en première approche qu'un seul spin couplé à un résonateur, et le modèle d'interaction spin-spin médiée par le champ électromagnétique dans un résonateur n'est pas détaillé ici.





# CHAPITRE 3

## Contrôle quantique

L'automatique quantique est la science qui cherche à développer les méthodes permettant de contrôler l'état d'un système quantique, de façon analogue à l'automatique classique. Fondamentalement, on s'intéresse à comment il est possible d'influencer la trajectoire que suivra un système de sorte que l'état atteigne une cible en considérant les contraintes applicables.

Dans ce chapitre, les développements mathématiques présentés appartiennent à la méthode de contrôle qu'ils concernent et ne tiennent pas compte de la nature du problème de contrôle à l'étude dans le présent document.

### 3.1 Trajectoires quantiques

On peut de façon générale définir une trajectoire quantique comme le chemin suivi par l'état conditionné d'un système quantique qui, si ce n'était des effets de la mesure, suivrait une évolution continue. Un état conditionné ici est dépendant de l'opérateur de mesure et du résultat obtenu. On peut également retrouver l'état non conditionné en prenant la moyenne de tous les états conditionnés possibles.

L'évolution d'un système quantique en l'absence de mesures est markovienne [94] :

$$|\psi(t + T)\rangle = \hat{U}(T) |\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}T} |\psi(t)\rangle, \quad (3.1)$$

où  $\hat{H}$  est le Hamiltonien du système. Cette équation mène à une différentielle finie, donc à une évolution continue. On souhaite généraliser cette évolution en y incorporant l'effet de mesures continues. Pour considérer l'état non conditionné, il sera nécessaire de représenter le système par la matrice densité  $\rho$  plutôt que par un vecteur d'état. L'évolution de la matrice densité est donnée par

$$\rho(t + dt) = \sum_r \mathcal{J} [\hat{M}_r(dt)] \rho(t), \quad (3.2)$$

où le superopérateur  $\mathcal{J}$  est défini par

$$\mathcal{J} [\hat{A}] \hat{B} \equiv \hat{A} \hat{B} \hat{A}^\dagger, \quad (3.3)$$

et l'opérateur  $\hat{M}_r$  est l'effet de la mesure associé au résultat  $r$ . À noter que la mesure doit permettre au moins deux résultats distincts, puisque les effets doivent respecter la relation de complétion

$$\sum_r \hat{M}_r^\dagger \hat{M}_r = \mathbb{1}. \quad (3.4)$$

La forme la plus générale de l'équation différentielle qui découle de l'éq. (3.2) est la forme de Lindblad [93]

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{\mu} \mathcal{D}[c_{\mu}] \rho. \quad (3.5)$$

Ici,  $\mathcal{D}$  est un superopérateur défini par  $\mathcal{D}[\hat{A}] \rho \equiv \hat{A} \rho \hat{A}^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{A}^\dagger \hat{A} \rho + \rho \hat{A}^\dagger \hat{A})$ ,  $H$  est un opérateur hermitien et les opérateurs  $c_{\mu}$  sont complètement arbitraires.

Considérons le cas simple où seulement deux résultats de mesure sont possibles, définis par

$$\hat{M}_0 = \mathbb{1} - \left( \frac{\hat{c}^\dagger \hat{c}}{2} + i\hat{H} \right) dt, \quad (3.6)$$

$$\hat{M}_1 = \sqrt{dt} \hat{c}. \quad (3.7)$$

La probabilité d'obtenir le résultat  $r = 1$  dans un intervalle infinitésimal de temps  $dt$  est alors donnée par

$$p_1(dt) = \text{Tr} \left( \mathcal{J} \left[ \hat{M}_1(dt) \right] \rho \right) = dt \text{Tr} (\hat{c}^\dagger \hat{c}) = \mathcal{O}(dt). \quad (3.8)$$

Comme cette probabilité est infinitésimale, le résultat  $r = 0$  est obtenu pour presque tous les intervalles. Dans ce cas, le système évolue infinitésimalement, mais de façon non-unitaire, sous l'action de l'opérateur  $\hat{M}_0(dt)$ . À des moments aléatoires, et avec une fréquence  $p_1(dt)/dt$ , le résultat  $r = 1$  est obtenu et le système suit une évolution induite par l'opérateur  $\hat{M}_1$ . Cette évolution finie est appelée *saut quantique*, mais ne représente qu'un changement soudain dans la connaissance qu'a l'observateur de l'état du système, pas un évènement physique objectif.

Des mesures réelles correspondant approximativement à ce modèle simple sont effectuées régulièrement, par exemple en optique quantique : si on prend l'opérateur  $\hat{c} = \sqrt{\gamma} \hat{a}$ , alors ce modèle décrit l'évolution d'une cavité photonique en termes de photodétections du champ de sortie. Si on définit  $N(t)$  comme le nombre total de photons détectés jusqu'au

temps  $t$ , on peut décrire l'incrément stochastique  $dN(t)$  par

$$\begin{aligned} dN(t)^2 &= dN(t), \\ E [dN(t)] &= \langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle = dt \langle \psi(t) | \hat{c}^\dagger \hat{c} | \psi(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De ces équations, on tire que  $dN(t)$  doit être 0 ou 1, puisque l'intervalle de temps est infinitésimal, et l'espérance de  $dN(t)$  est égale à la probabilité de détection d'un photon. Selon la détection ( $\hat{M}_1$ ) ou non ( $\hat{M}_0$ ) d'un photon, le système évolue selon

$$\begin{aligned} |\psi_1(t+dt)\rangle &= \frac{\hat{M}_1(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_1^\dagger(dt) \hat{M}_1(dt) \rangle (t)}} = \frac{\hat{c} |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle (t)}}, \\ |\psi_0(t+dt)\rangle &= \frac{\hat{M}_0(dt) |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_0^\dagger(dt) \hat{M}_0(dt) \rangle (t)}} = \left\{ \mathbf{1} - dt \left[ i\hat{H} + \frac{1}{2} \hat{c}^\dagger \hat{c} - \frac{1}{2} \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle (t) \right] \right\} |\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En considérant que  $dN(t)dt = \mathcal{O}(dt)$ , on obtient un équation de Schrödinger stochastique

$$d|\psi(t)\rangle = \left[ dN(t) \left( \frac{\hat{c}}{\sqrt{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle (t)}} - \mathbf{1} \right) + dt \left( \frac{\langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle (t)}{2} - \frac{\hat{c}^\dagger \hat{c}}{2} - i\hat{H} \right) \right] |\psi(t)\rangle. \quad (3.11)$$

C'est une solution à une équation de cette forme qu'on désignera *trajectoire quantique* pour le système.

## 3.2 Contrôle par rétroaction

Les méthodes de contrôle par rétroaction sont extrêmement communes en automatique classique. Elles consistent essentiellement en l'ajout d'un contrôleur externe au système qui effectue des mesures ponctuelles ou continues du système, puis ajustent le signal de contrôle en entrée dans le but de minimiser l'erreur entre l'état du système et l'état visé. Ces méthodes permettent à la fois de corriger l'évolution du système suite à une perturbation ou encore de stabiliser une évolution malgré des incertitudes dans le modèle mathématique.

Dans le cas de systèmes quantiques, l'action-retour de la mesure rend la conception de contrôleurs rétroactifs plus complexe. Il devient nécessaire de choisir les opérateurs de mesure employés judicieusement, de façon à maximiser l'information qu'on peut en retirer sans que l'action-retour de la mesure n'ait d'effet destructif par rapport à l'objectif de contrôle. Malgré les particularités de la mesure quantique, des schèmes de contrôle par rétroaction ont été mis à l'essai expérimentalement et ont mené à des avancées impor-

tantes, par exemple pour la préparation et la stabilisation d'états de Fock dans une cavité optique dans l'expérience révolutionnaire de Haroche *et. al* [74].

Il existe plusieurs classes de contrôle quantique par rétroaction [103]. Or, dans le cadre du présent projet, il n'existe pas d'opérateur de mesure au niveau du dispositif physique qui permettrait d'implémenter une boucle de rétroaction efficace, et on doit abandonner le contrôle par rétroaction.

### 3.3 Contrôle optimal en boucle ouverte

Les méthodes de contrôle optimal en boucle ouverte sont particulièrement intéressantes lorsque la mesure nécessaire à l'implantation d'un contrôleur par rétroaction est impossible ou lorsque les ressources nécessaires sont autrement indisponibles.

La théorie du contrôle optimal est basée sur le principe du maximum de Pontryagin, une généralisation des équations classiques de Euler-Lagrange [34]. Elle vise à déterminer une loi de contrôle qui minimise une fonction-coût (par exemple l'énergie totale ou encore la durée du contrôle) le long d'une trajectoire dans l'espace des états entre un état initial et un état final ou cible, sous l'action de certaines contraintes. Lorsque le problème permet le calcul efficace du gradient de la fonction-coût, on préférera employer des méthodes de descente de gradient (GRAPE, Krotov, GOAT et autres), car celles-ci tendent à converger plus rapidement. Lorsque le gradient est difficile à évaluer, on préférera des méthodes sans gradient.

Dans le cas du contrôle optimal quantique pour le traitement de l'information, on cherchera souvent à maximiser la fidélité d'une opération par rapport à une transformation unitaire souhaitée, dans le but d'optimiser des séquences de pulses permettant d'implémenter ces opérations.

#### 3.3.1 Méthode GRAPE

Les méthodes de descente (ou d'ascension) de gradient basées sur les algorithmes d'optimisation de Newton ou quasi-Newton, visent à modifier simultanément les champs de contrôle pour tous les intervalles de temps  $\Delta t$  de l'impulsion. La méthode la plus largement utilisée est GRAPE (*GRAdient Ascent Pulse Engineering*), initialement développée pour la spectroscopie à résonance nucléaire magnétique [49]. Cette méthode prend généralement une forme d'impulsion initiale posée par intuition et modifie la forme de l'impulsion itérativement afin de maximiser la fidélité entre l'opérateur synthétisé par cette impulsion et un opérateur ciblé  $C$  ; l'itération s'arrête lorsque la fidélité atteint un seuil donné.

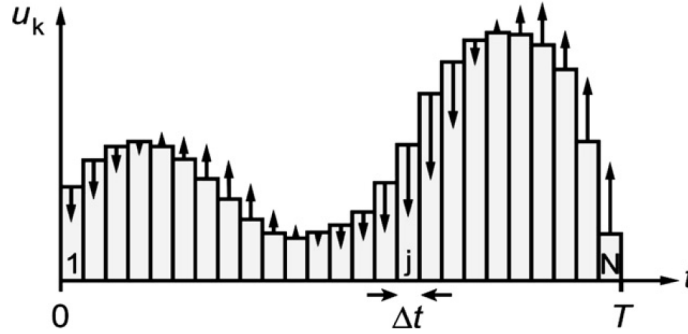


FIGURE 3.1 Représentation schématique d'une itération de l'algorithme GRAPE [49]. L'amplitude du champ  $u_k$  est ajusté à la hausse ou à la baisse pour chaque intervalle de temps  $\Delta t$  afin de maximiser la fidélité totale.

Mathématiquement, on exprime l'état du système par sa matrice densité, avec l'équation de Liouville-von Neuman en absence de décohérence :

$$\dot{\rho}(t) = -i \left[ \left( H_0 + \sum_{k=1}^m u_k(t) H_k \right), \rho(t) \right]. \quad (3.12)$$

On souhaite alors amener l'état initial  $\rho(0) = \rho_0$  à un état-cible  $C$ , en considérant que le système évolue à la fois sous l'action de son Hamiltonien libre  $H_0$  et de  $k$  champs de contrôle, d'amplitude  $u_k(t)$  et auxquels sont associés les Hamiltoniens de contrôle  $H_k$ . La fidélité de la manipulation est alors mesurée par le produit scalaire standard

$$\phi_0 = \langle C | \rho(T) \rangle = \text{Tr} \{ C^\dagger \rho(T) \}. \quad (3.13)$$

On peut calculer l'état atteint au temps  $t$  en appliquant séquentiellement l'opérateur d'évolution du  $j^e$  intervalle

$$U_j = \exp \left\{ -i \Delta t \left( H_0 + \sum_{k=1}^m u_k(t) H_k \right) \right\} \quad (3.14)$$

et donc écrire, puisque la trace est invariante sous permutations cycliques,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \langle C | \rho(T) \rangle = \langle C | U_N \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_N^\dagger \rangle \\ &= \langle U_{j+1}^\dagger \dots U_N^\dagger C U_N \dots U_{j+1} | U_j \dots U_1 \rho_0 U_1^\dagger \dots U_j^\dagger \rangle \\ &= \langle \lambda_j | \rho_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En variant au premier ordre l'amplitude des champs au temps  $j$ , on peut évaluer la dépendance de la fidélité

$$\frac{\delta\phi_0}{\delta u_k(j)} = -\langle \lambda_j | i\delta t [H_k, \rho_j] \rangle. \quad (3.16)$$

On trouve donc que le facteur de performance, c'est-à-dire la fidélité de l'état final, augmente lorsqu'on modifie l'amplitude en suivant la loi

$$u_k(j) \rightarrow u_k(j) + \epsilon \frac{\delta\phi_0}{\delta u_k(j)}, \quad (3.17)$$

avec  $\epsilon$ , un petit pas. C'est sur ce développement que repose toute la méthode GRAPE.

Cette méthode a déjà largement fait ses preuves en contrôle quantique, ayant entre autres été utilisée pour réaliser un qubit encodé dans le champ électromagnétique d'un résonateur supraconducteur, avec une fidélité inférée de 98,5% [44].

### 3.3.2 Méthode de Krotov

Contrairement à la méthode GRAPE, les méthodes de type Krotov modifient séquentiellement les champs de contrôle aux intervalles de temps  $\Delta t$  plutôt que simultanément [75]. Mathématiquement, les méthodes de Krotov cherchent à minimiser une fonction-coût de la forme [35]

$$J \left[ \{|\phi_k^{(i)}(t)\rangle\}, \{\epsilon_l^{(i)}(t)\} \right] = J_T \left( \{|\phi_k^{(i)}(T)\rangle\} \right) + \sum_l \int_0^T g_a \left( \epsilon_l^{(i)}(t) \right) dt + \int_0^T g_b \left( \{|\phi_k^{(i)}(t)\rangle\} \right) dt. \quad (3.18)$$

Ici,  $\{|\phi_k^{(i)}(T)\rangle\}$  sont les états évolués sous les champs de contrôle  $\epsilon_l^{(i)}(t)$  de la  $i^e$  itération, avec  $k$  états soumis à ces  $l$  champs de contrôle. La fonction  $J_T$  est la partie principale de la fonction-coût, qui considère l'état final. Dans le cas où on cherche à implémenter une porte unitaire générale  $U$ , la forme typique de  $J_T$  est donnée par

$$J_T = 1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^N \tau_k \right], \quad (3.19)$$

avec  $\tau_k = \langle \phi_k(T) | \phi_k^{tgt} \rangle$ ,  $|\phi_k^{tgt}\rangle = U |\phi_k\rangle$  et  $N$ , la dimension du sous-espace logique de  $U$ . On prend la partie réelle de cette expression pour tenir compte de la phase globale de la porte réalisée.

Le second terme et la fonction  $g_a$  permettent de fixer le coût des champs de contrôle. L'expression la plus couramment utilisée est

$$g_a \left( \epsilon_l^{(i+1)}(t) \right) = \frac{\lambda_{a,l}}{S_l(t)} \Delta \epsilon_l^2(t), \quad (3.20)$$

où  $\Delta \epsilon_l(t) = \epsilon_l^{(i+1)}(t) - \epsilon_l^{(i)}(t)$  est la différence entre les amplitudes des champs de contrôle d'une itération à l'autre,  $\lambda_{a,l}$  est la taille du pas inverse pour la mise à jour des champs de contrôle et  $S_l(t) \in [0, 1]$  est une fonction dont la valeur permet de fixer les conditions aux frontières pour  $\epsilon_l^{(i+1)}$ .

Finalement, le troisième terme et la fonction  $g_b$  permettent de pénaliser la population de certains sous-espaces [64]. En pratique, cette option est rarement utilisée; on préférera utiliser des Hamiltoniens non-hermitiens pour éliminer ces populations dans des sous-espaces interdits pendant l'évolution. On prendra donc généralement  $g_b = 0$ .

La méthode de Krotov repose sur l'équation de mise à jour des champs de contrôle, définie telle que la valeur de la fonction-coût diminue à chaque itération, par construction [51]. Cette méthode garantit donc la monotonie de la convergence. Pour la fonction  $g_a$  de l'équation (3.20), la dérivation arrive à l'équation de Krotov

$$\Delta \epsilon(t) = \frac{S(t)}{\lambda_a} \operatorname{Im} \left[ \sum_{k=1}^N \langle \chi_k^{(i)}(t) | \left( \frac{\partial H}{\partial \epsilon} \Big|_{\substack{\phi^{(i+1)}(t) \\ \epsilon^{(i+1)}(t)}} \right) | \phi_k^{(i+1)}(t) \rangle \right]. \quad (3.21)$$

L'équation du mouvement pour la propagation de  $|\phi_k\rangle$  sous l'effet des champs de contrôle optimisés est alors

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi_k^{(i+1)}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H^{(i+1)} |\phi_k^{(i+1)}(t)\rangle. \quad (3.22)$$

Également, les co-états  $|\chi_k^{(i)}(t)\rangle$  sont propagés en temps inverse sous l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} |\chi_k^{(i)}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H^{\dagger(i)} |\chi_k^{(i)}(t)\rangle + \frac{\partial g_b}{\partial \langle \phi_k |} \Big|_{\phi^{(i)}(t)} \quad (3.23)$$

avec la condition frontière

$$|\chi_k^{(i)}(T)\rangle = -\frac{\partial J_T}{\partial \langle \phi_k |} \Big|_{\phi^{(i)}(t)}. \quad (3.24)$$

Ces équations considèrent des champs de contrôle continus; en pratique, il est souvent nécessaire de diviser le temps de contrôle en intervalles de temps finis pour parvenir à la méthode itérative de la figure 3.2.

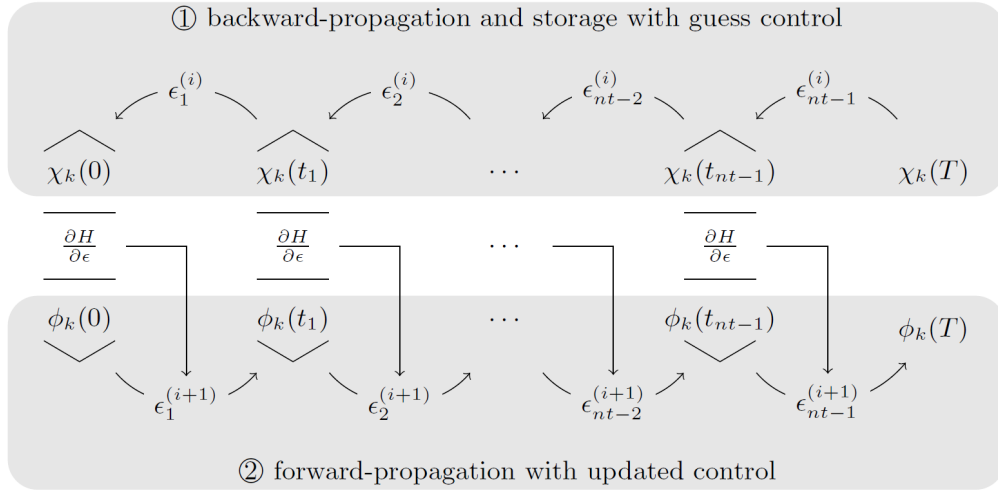


FIGURE 3.2 Représentation schématique de l'implémentation numérique de la méthode de Krotov [35].

### 3.3.3 Méthode GOAT

Une nouvelle méthode a été ajoutée plus récemment à l'arsenal des méthodes d'optimisation avec gradient disponibles pour le contrôle quantique en boucle ouverte [54]. Cette méthode, nommée GOAT (*Gradient Optimization of Analytic Controls*), évite l'approximation PWC (*Piece-Wise Constant*) selon laquelle l'amplitude des champs de contrôle reste constante au cours de chaque intervalle de temps; cette approximation, et donc les méthodes de descente de gradient ou de Krotov qui l'emploient, augmente drastiquement le nombre de paramètres d'optimisation numérique tout en demandant une bande passante infinie pour la reproduction expérimentale du résultat de l'algorithme, puisque l'amplitude doit varier instantanément entre chaque élément de temps  $\Delta t$ . Cette nouvelle méthode n'est pas basée sur le principe variationnel et est présentée comme seule méthode répondant aux trois principaux critères de performance d'une méthode de contrôle optimal quantique : rapidité, flexibilité et précision numérique.

La fonction-coût utilisée, correspondant à l'infidélité entre l'unitaire cible  $U_{goal}$  et l'unitaire implémentée  $U(T)$ , est donnée par [63]

$$g(\bar{\alpha}) = 1 - \frac{1}{\dim(U)} |\text{Tr}((U_{goal}^\dagger U(T)))| \quad (3.25)$$

avec  $U(t)$ , l'opérateur d'évolution

$$U(\bar{\alpha}, T) = \exp\left(\int_0^T -\frac{i}{\hbar} H(\bar{\alpha}, t) dt\right). \quad (3.26)$$



Le gradient de la fonction-coût est alors donné par

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} g(\bar{\alpha}) = -\operatorname{Re} \left[ \frac{g^*}{|g|} \frac{1}{\dim(U)} \operatorname{Tr} \left( U_{goal}^\dagger \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} U(\bar{\alpha}, T) \right) \right] \quad (3.27)$$

et l'unitaire  $U(t)$  évolue selon l'équation du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U \\ \partial_{\bar{\alpha}} U \end{pmatrix} = -\frac{i}{\hbar} \begin{pmatrix} H & 0 \\ \partial_{\bar{\alpha}} H & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \partial_{\bar{\alpha}} U \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

On peut donc obtenir les valeurs de  $U(\bar{\alpha}, t)$  et  $\partial_{\bar{\alpha}} U(\bar{\alpha}, t)$  par intégration numérique de ce système pour ensuite évaluer la fonction-coût  $g(\bar{\alpha})$  et son gradient au temps  $t$ . Ces évaluations seront utilisées par un algorithme de minimisation, par exemple la méthode L-BFGS [29], pour parvenir au contrôle optimal. À noter encore qu'il n'y a aucune assumption ou requis sur la forme des signaux de contrôle et il est donc possible de choisir des fonctions de base qui peuvent être aisément reproduites au laboratoire, par exemple des signaux gaussiens.

### 3.3.4 Méthodes d'optimisation sans gradient

Il existe également un certain nombre de méthodes d'optimisation sans gradient, incluant la méthode CRAB (*Chopped RAndom-Basis*) basée sur le simplex de Nelder-Mead [14]. Ces méthodes peuvent être très efficaces lorsque le nombre de paramètres est petit, ou lorsque le gradient ne peut pas être évalué efficacement. Cependant, des plans d'optimisation hybrides recommandent fréquemment l'application de quelques itérations de CRAB ou équivalents pour obtenir la forme initiale des champs de contrôle rapidement lorsqu'on n'a pas l'intuition nécessaire pour poser ce paramètre [36]. Le contrôle peut alors être optimisé davantage par application de méthodes avec gradient.



# CHAPITRE 4

## Bilan des connaissances et avenues de solution

La double boîte quantique à électron unique est une architecture très versatile et un excellent candidat pour la réalisation d'un ordinateur quantique universel. Elle implémente fondamentalement un qubit de spin, doté de très longs temps de cohérence. L'utilisation d'une double boîte et d'un gradient de champ magnétique transverse, couplant les degrés de liberté de spin et de charge de l'électron, permettent de doter le qubit du caractère de charge nécessaire pour effectuer des rotations rapides de l'état de spin par contrôle électrique, ou encore de placer le spin dans un régime de couplage fort avec un résonateur supraconducteur pour des mesures dispersives de l'état du qubit ou pour médier des interactions spin-spin à connectivité accrue par rapport aux interactions directes d'échange.

Cette architecture présente donc plusieurs points d'opération électrostatiques intéressants, puisque la modulation des tensions de grille permet de contrôler en temps réel la quantité de dynamique de charge que l'on souhaite incorporer au qubit logique. On entrevoit donc la nécessité, au cours de l'exécution d'un calcul quantique sur une telle architecture, de modifier ce régime d'opération pour coupler le qubit à un résonateur pour des mesures dispersives ou pour des interactions spin-spin longue distance, ou encore pour manipuler l'état du qubit par résonance magnétique de spin. Or, lors d'un tel transfert d'un régime d'opération à un autre, il sera nécessaire de préserver l'état logique et l'information que cet état représente. Compte tenu du contexte théorique et expérimental présenté précédemment, on répondra à la question de recherche énoncée à la section 1.2 en abordant les éléments de solution suivants :

1. Comment peut-on traduire le transfert de régime d'opération dans le formalisme d'un objectif de contrôle ?
2. Quelle méthode de contrôle quantique est-elle la mieux adaptée à ce type de problème ?
3. Quelles sont les contraintes auxquelles devra satisfaire le signal de contrôle ?
4. Quels sont les avantages offerts par un pulse de contrôle optimal par rapport à une méthode simple comme le transfert adiabatique ?

Les réponses principales à ces questions sont présentées dans un article soumis au journal *Physical Review Letters* et présenté au chapitre 5. Des détails additionnels sous la forme de compléments à l'article se trouvent au chapitre 6.



# CHAPITRE 5

## Protocole de contrôle

### 5.1 Avant-propos

#### Auteurs et affiliations :

- Vincent Reiher, Étudiant à la maîtrise, Département de génie électrique et de génie informatique, Faculté de génie, Université de Sherbrooke ;
- Yves Bérubé-Lauzière, Professeur titulaire, Département de génie électrique et de génie informatique, Faculté de génie, Université de Sherbrooke.

**Date de soumission :** 28 avril 2021

**État de la soumission :** En cours d'édition.

**Revue :** Physical Review Letters

**Référence :** [72]

**Titre français :** Contrôle optimal du point d'opération d'une double boîte quantique à électron unique

#### Contribution au mémoire :

Cet article détaille l'ensemble des résultats techniques obtenus dans le cadre du projet de maîtrise faisant l'objet de ce mémoire. En se basant sur le modèle physique du système d'intérêt tel que détaillé à la section 2.2.1, il présente d'abord le modèle de bruit utilisé en simulation, avec en particulier une analyse approfondie de l'effet de la variation des paramètres électriques sur le taux de relaxation de charge par émission de phonons longitudinaux acoustiques. Il décrit également l'approche mathématique utilisée pour définir l'objectif de contrôle et clôt sur une caractérisation complète de la qualité du contrôle obtenu en la comparant à un contrôle linéaire standard sur les plans de la fidélité et du temps de transfert.

#### Résumé français :

La double boîte quantique bénéficie des avantages à la fois du qubit de spin et du qubit de charge, tout en offrant des moyens permettant de mitiger leurs inconvénients. Il est possible de donner à la dynamique de ce dispositif un caractère de spin ou de charge, menant à dans

longs temps de cohérence avec le premier ou permettant des rotations électriques de spin ou des interactions cohérentes avec un photon micro-ondes avec le second. Nous démontrons que les signaux de contrôle optimaux générés via l'algorithme GRAPE peuvent permettre des transferts de régime d'opération avec une fidélité supérieure à ce qu'il est possible d'atteindre par des méthodes linéaires.

## 5.2 Article

### 5.2.1 Abstract

The double quantum dot device benefits from the advantages of both the spin and charge qubits, while offering ways to mitigate their drawbacks. Careful gate voltage modulation can grant greater spinlike or chargelike dynamics to the device, yielding long coherence times with the former and high electrical susceptibility with the latter, for electrically driven spin rotations or coherent interactions with microwave photons. We show that optimal control pulses generated using the GRAPE algorithm can yield higher-fidelity operating regime transfers than can be achieved using linear methods.

### 5.2.2 Introduction

Ever since Loss and DiVincenzo's proposal to use the electron spin as the fundamental building block for quantum computing [53], important efforts have been devoted to the development of spin qubit architectures [12, 39, 59, 78]. The long coherence times of electron spins, which have reached the order of seconds in silicon [39, 83, 85, 106], as well as the existing fabrication infrastructure of the silicon industry, make them great candidates for physical qubit implementations. However, although high-fidelity initialization, manipulation and readout of small numbers of spins isolated within quantum dots has been demonstrated [56, 59, 77, 91, 96, 102], the fabrication of 2-D arrays of interconnected spins, required for quantum information processing and error correction, remains an outstanding challenge [15, 45, 60].

One avenue to solving this challenge lies in using microwave photons in superconducting resonators to mediate long-range spin-spin interactions, as has been demonstrated for superconducting qubits [8, 22, 88]. Coherent interactions between single spins and microwave photons have already been shown using the large electric dipole of the electron charge state in a double quantum dot (DQD) through spin-charge hybridization [6, 57, 87]. Conversely, the increased electrical susceptibility of such a device can be used to drive spin state rotations via electric dipole spin resonance (EDSR) by quickly displacing the electron wave function in a local transverse magnetic field gradient [5, 19, 68, 100]. Additionally, gate voltages can be modulated to reshape the double-well potential and reach the single dot regime, decoupling the spin and charge degrees of freedom and recovering long coherence times [5, 6].

The single electron DQD therefore presents itself as a promising architecture for quantum computation, with two outstanding operating regimes :

- A regime wherein the electron is strongly localized in one of the two wells of the DQD due to a large interdot energy detuning. In this regime, the qubit dynamics approach that of a pure spin and are largely decoupled from environmental charge noise, recovering the long natural coherence times of electron spins in silicon ;
- A regime corresponding to a set of configurations wherein the electron charge state is delocalized across the two dots of the DQD. When the electron orbital and Zeeman energies approach resonance, this regime allows fast manipulation of the electron spin state via EDSR to realize one-qubit gates, or reaching the strong coupling regime between the electron spin and a microwave photon for long-range interactions between distant spins or for dispersive measurement of the qubit state.

It is expected that, in the context of a quantum computation, such a device would be transferred many times between these operating regimes. It is therefore crucial that this transfer be made quickly and that it preserves maximal state fidelity in the logical basis. This is the problem which will be dealt with in this paper. It will be demonstrated that control signals obtained with the GRAPE algorithm [49] allow faster and higher-fidelity operating regime transfers than can be attained using standard linear approaches. This is achieved independently of the qubit's state and therefore does not require a priori knowledge of the qubit state, which is of prime importance in practice.

The remainder of this paper is organized as follows : Section 5.2.3 describes the model of the DQD device considered herein. Section 5.2.4 discusses the decoherence processes affecting the device and the noise model used in the simulations. The control objective used to optimize control pulses to alter the device's operating regime while preserving its logical state is formulated in Section 5.2.5. Section 5.2.6 provides the results obtained from the application of optimal control pulses to transfer between the different operating regimes of the system.

### 5.2.3 Model

The physical system consists of a gate-defined DQD in silicon, tuned to the single electron regime (Fig. 5.1), as described in Benito *et. al* [6]. The device is subjected to a strong homogeneous longitudinal magnetic field  $B_z$ , and a weak transverse magnetic field gradient  $B_x$ . Gate voltages directly control the tunnel coupling  $t_c$  between the left and right dot as well as the energy detuning  $\epsilon$  between the two dots. The DQD system Hamiltonian can be written as

$$H = \frac{\hbar}{2}(\epsilon\tau_z + 2t_c\tau_x + g\mu_B B_z\sigma_z + g\mu_B B_x\sigma_x\tau_z), \quad (5.1)$$



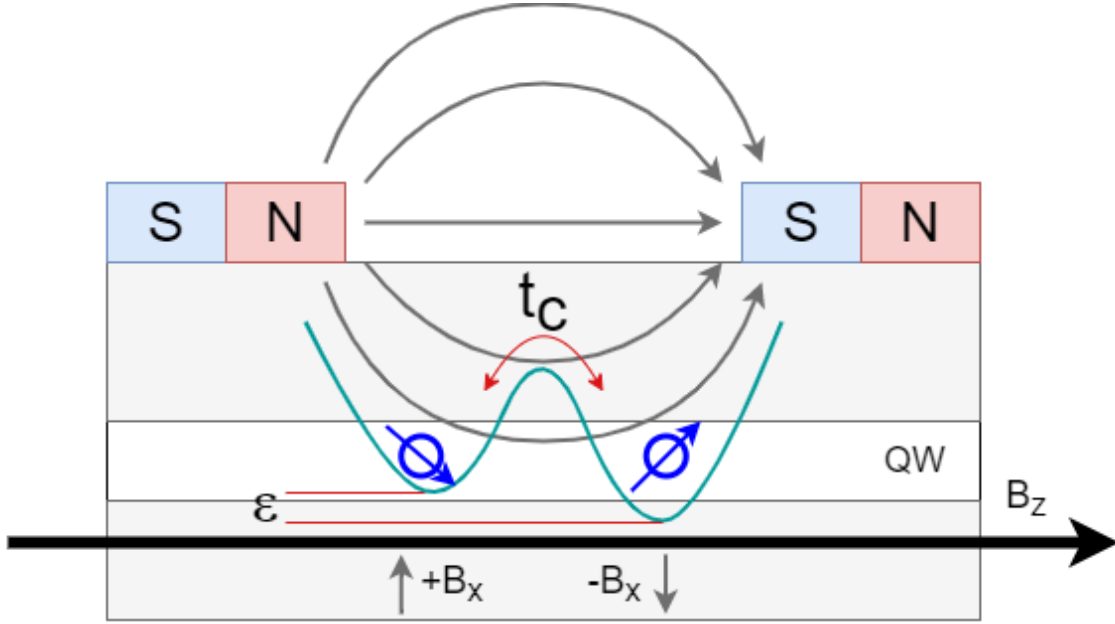


FIGURE 5.1 Schematic of the device under control. A single electron is trapped within a double well potential. The device is influenced by an external magnetic field  $B_z$ , a local magnetic field gradient  $B_x$  and gate voltages controlling the detuning energy  $\epsilon$  and tunnel coupling  $t_c$ . Figure adapted from [6].

where  $\tau_\alpha$  are the Pauli matrices for the charge degree of freedom, in the left-right basis, and  $\sigma_\alpha$  are the Pauli matrices for the spin degree of freedom. The valley degree of freedom is neglected here, as recent measurements on similar devices have shown sufficiently large valley splittings [16]. The eigenstates of this four level Hamiltonian form the computational basis and are written as [6]

$$|0\rangle \approx |-, \downarrow\rangle, \quad (5.2)$$

$$|1\rangle = \cos \frac{\phi}{2} |-, \uparrow\rangle + \sin \frac{\phi}{2} |+, \downarrow\rangle, \quad (5.3)$$

$$|2\rangle = -\sin \frac{\phi}{2} |-, \uparrow\rangle + \cos \frac{\phi}{2} |+, \downarrow\rangle, \quad (5.4)$$

$$|3\rangle \approx |+, \uparrow\rangle, \quad (5.5)$$

with  $\phi$ , the spin-orbit mixing angle. For the purposes of the present work, the qubit is defined on the  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  transition. The spin-orbit mixing angle describes the spinlike or chargelike character of the qubit : it is readily seen that for  $\phi = 0$ , this transition forms a pure spin qubit, and that for  $\phi = \pi$ , this transition forms a pure charge qubit. The

spin-orbit mixing angle is given by

$$\phi = \arctan \frac{g\mu_B B_x \cos \theta}{\Omega - g\mu_B B_z}, \quad (5.6)$$

where  $\Omega = \sqrt{\epsilon^2 + 4t_c^2}$  is the orbital energy, and  $\theta = \arctan \frac{\epsilon}{2t_c}$  is the orbital angle. Due to the transverse magnetic field gradient, the electron dipole operator acquires off-diagonal elements which couple the  $|-, \uparrow\rangle$  and  $|+, \downarrow\rangle$  states, leading to anticrossings in the energy spectrum as the detuning energy  $\epsilon$  varies [6].

### 5.2.4 Decoherence Processes

The single-electron DQD is in general subject to dephasing and relaxation in both the spin and charge subspaces. Direct spin relaxation is typically a very slow process [43], and is neglected in this work. Spin dephasing via hyperfine interactions and charge dephasing due to quasistatic charge noise in the device are stable processes and do not vary appreciably over the duration of a control sequence; they can therefore be approximated to constant rates.

While experimental values are readily found in literature for each of the primary decoherence channels affecting this device, noise models for the DQD always assume constant values for the energy detuning  $\epsilon$  and tunnel coupling  $t_c$ . However, charge relaxation via emission of longitudinal acoustic (LA) phonons in the silicon lattice is dependent on the control amplitudes via the electron orbital energy  $\Omega \equiv \Omega(\epsilon, t_c)$ ; it is therefore necessary to investigate the exact dependence so that appropriate relaxation rates can be used in simulations.

The rate of charge relaxation via emission of LA phonons can be obtained by writing the charge-phonon interaction Hamiltonian and using Fermi's golden rule at 0 K, yielding [6]

$$\gamma_{1,c} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}} |c_{\vec{k}}|^2 \delta(\Omega - E_f) = \frac{2\pi}{\hbar} |c_k|^2 D(\Omega). \quad (5.7)$$

This equation shows an implicit dependence of the charge relaxation rate on the orbital energy  $\Omega$ , which we now make explicit by using the Debye model for the phonon density of states [50]

$$D(\Omega) = \frac{V\Omega^2}{2\pi^2\hbar^2\nu_s^3}, \quad (5.8)$$

and the expression for the coefficient  $c_k$  [104]

$$|c_k|^2 = \frac{d^2}{2\rho\nu_s^2V} \hbar\nu_s k. \quad (5.9)$$

In Eqs. (5.8) and (5.9),  $d$  is the deformation potential,  $V$  is the device volume,  $\Omega$  is the orbital energy,  $\nu_s$  is the speed of sound in the crystal,  $\rho$  is the crystal density and  $k$  is the wave vector modulus. Using the dispersion relation

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\Omega}{\hbar\nu_s}, \quad (5.10)$$

the charge relaxation rate can be written in energy units as

$$\gamma_{1,c} = \frac{1}{2\pi\hbar^3} \frac{\Omega^3 d^2}{\rho\nu_s^5}. \quad (5.11)$$

It is thus seen that the charge relaxation rate via emission of LA phonons has cubic dependence on the orbital energy of the qubit, and therefore depends on the amplitude of the control voltages applied to the gates. To the best of the author's knowledge, this is the first time this exact dependence is presented in the literature.

In the simulations presented in section 5.2.6, the rate of charge relaxation via emission of LA phonons is approximated to a constant in order to very significantly reduce the computational cost of generating optimal control pulses; a worst-case value is used instead. According to Eq. (5.11) and given the parameter space considered for  $\epsilon$  and  $t_c$ , the value of  $\gamma_{1,c}$  is set to  $\gamma_{1,c}/2\pi = 45$  MHz. The charge and spin dephasing rates are set to  $\gamma_{\phi,c}/2\pi = 36$  MHz and  $\gamma_{\phi,s}/2\pi = 1.2$  MHz, respectively, according to literature [6, 57]. This is not an attempt to provide an exact decoherence model for this device; an approximation of the dominant noise channels with realistic rates is resorted to instead.

### 5.2.5 Control Objective

The aim is to transfer the qubit between an initial and a final operating regime while preserving the qubit's logical state. Each operating regime is defined by its spin-orbit mixing angle  $\phi$  or by its orbital energy  $\Omega$  and orbital angle  $\theta$ . These parameters in turn define values for the inter-dot energy detuning  $\epsilon$  and tunnel coupling  $t_c$ , which are the directly electrically controlled parameters.

The control objective is therefore to preserve the initial logical state. Let the initial qubit logical state be written as

$$|\Psi_i\rangle = \alpha_i |0_i\rangle + \beta_i |1_i\rangle, \quad (5.12)$$

where  $|0_i\rangle$ ,  $|1_i\rangle$  are eigenstates of the DQD Hamiltonian in the initial operating regime. Using the initial and final Hamiltonian eigenbases as logical bases

$$\mathcal{L}_{i,f} = \{|0_{i,f}\rangle, |1_{i,f}\rangle, |2_{i,f}\rangle, |3_{i,f}\rangle\}, \quad (5.13)$$

the column vectors containing the coefficients of the initial and final logical qubit states which represent these states with respect to the initial and final eigenbases are written as

$$[\Psi_i]_{\mathcal{L}_i} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.14)$$

$$[\Psi_f]_{\mathcal{L}_f} = \begin{bmatrix} \alpha_f & \beta_f & \gamma_f & \delta_f \end{bmatrix}^T. \quad (5.15)$$

However, in order to preserve the qubit's logical state through the operating regime transfer, it is necessary that the total effect of the control in the logical basis be equal to the identity; that is,

$$[\Psi_f]_{\mathcal{L}_f} = \mathbb{1}_{\mathcal{L}_f \mathcal{L}_i} [\Psi_i]_{\mathcal{L}_i} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (5.16)$$

where  $\mathbb{1}_{\mathcal{L}_f \mathcal{L}_i}$  is an identity matrix with ones on its diagonal. The coefficients of the logical qubit state in the initial eigenbasis are therefore preserved, and population of the higher excited states is kept to  $\gamma_f = \delta_f = 0$ , protecting the quantum information encoded within the qubit state.

Considering instead the effect of the control in the product basis of the DQD charge and spin states, henceforth referred to as the physical basis,

$$\mathcal{P} = \{|L\rangle, |R\rangle\} \otimes \{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}, \quad (5.17)$$

the evolution of the initial physical state to the final physical state in this basis is written as

$$[\Psi_f]_{\mathcal{P}} = \mathbf{U}_{\mathcal{P}\mathcal{P}} [\Psi_i]_{\mathcal{P}}, \quad (5.18)$$

with  $\mathbf{U}_{\mathcal{P}\mathcal{P}}$ , the evolution operator expressed in the physical basis and obtained by the usual exponentiation of the integral of the Hamiltonian operator over the evolution time. The exact expression is not important here, as will be seen next; however, this is the operator which must be synthesized via optimal control. Using the basis change matrix  $\mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_{i,f}}$  from the initial or final logical basis to the physical basis, the total effect of the operating regime transfer in the logical basis is given by

$$[\Psi_f]_{\mathcal{L}_f} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{P}} \mathbf{U}_{\mathcal{P}\mathcal{P}} \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_i} [\Psi_i]_{\mathcal{L}_i}. \quad (5.19)$$

Recall that  $\mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_i}$  contains in its columns the coefficients of the basis vectors of  $\mathcal{L}_i$  decomposed along the basis vectors of  $\mathcal{P}$  (the notation in [52] is used here). Identification

of Eq. (5.19) with Eq. (5.16) as a condition on the effect of the control yields

$$\mathbb{1}_{\mathcal{L}_f \mathcal{L}_i} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{P}} \mathbf{U}_{\mathcal{P} \mathcal{P}} \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_i}, \quad (5.20)$$

which in turn leads to an analytical expression for the target control operator

$$\mathbf{U}_{\mathcal{P} \mathcal{P}} = \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_f} \mathcal{P}_{\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{P}}. \quad (5.21)$$

It is this operator towards which the optimization algorithm must converge.

The following time-dependent Hamiltonian is used as a starting point for optimization :

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} (\epsilon(t) \tau_z + 2t_c(t) \tau_x + g\mu_B B_z \sigma_z + g\mu_B B_x \sigma_x \tau_z), \quad (5.22)$$

along with the controls

$$\epsilon(t) = \epsilon_i + \frac{t}{T} (\epsilon_f - \epsilon_i) + u_\epsilon(t), \quad (5.23)$$

$$t_c(t) = t_{c_i} + \frac{t}{T} (t_{c_f} - t_{c_i}) + u_{t_c}(t). \quad (5.24)$$

It is seen that each of these controls consists of a linearly ramped part (which is customarily used) plus an additional control term  $u_\epsilon(t)$  or  $u_{t_c}(t)$ . These additional terms are to be iteratively optimized using the GRAPE (*G*radient *A*scent *P*ulse *E*ngineering) [49] algorithm such that the operator representing the overall effect of the controls converges towards operator  $\mathbf{U}$ . Due to uncontrollable Hamiltonian evolution of the spin degree of freedom, the operator fidelity curve (Fig. 5.2) exhibits an oscillating behavior and it is expected that high fidelity operating regime transfers can only be executed for some precise pulse durations.

## 5.2.6 Results

The optimized control pulses are now applied to noisy evolution of the device model, using the decoherence channels discussed in Section 5.2.4, to simulate the operating regime transfer from the pure spin qubit configuration to the flopping-mode qubit configuration with strong chargelike dynamics. The spin qubit operating regime corresponds to a strongly detuned double well potential with  $\epsilon = 40 \mu\text{eV}$ ,  $t_c = 10 \mu\text{eV}$ , whereas the flopping-mode configuration is defined as  $\epsilon = 0 \mu\text{eV}$ ,  $t_c = 16 \mu\text{eV}$ . This symmetric configuration increases the spin-charge hybridization, yielding strong coupling of the electron spin to the electric field while keeping the added charge noise sensitivity to a minimum, as discussed in [6]. The static magnetic fields used are  $g\mu_B B_x = 1.62 \mu\text{eV}$  and  $g\mu_B B_z = 24 \mu\text{eV}$ .

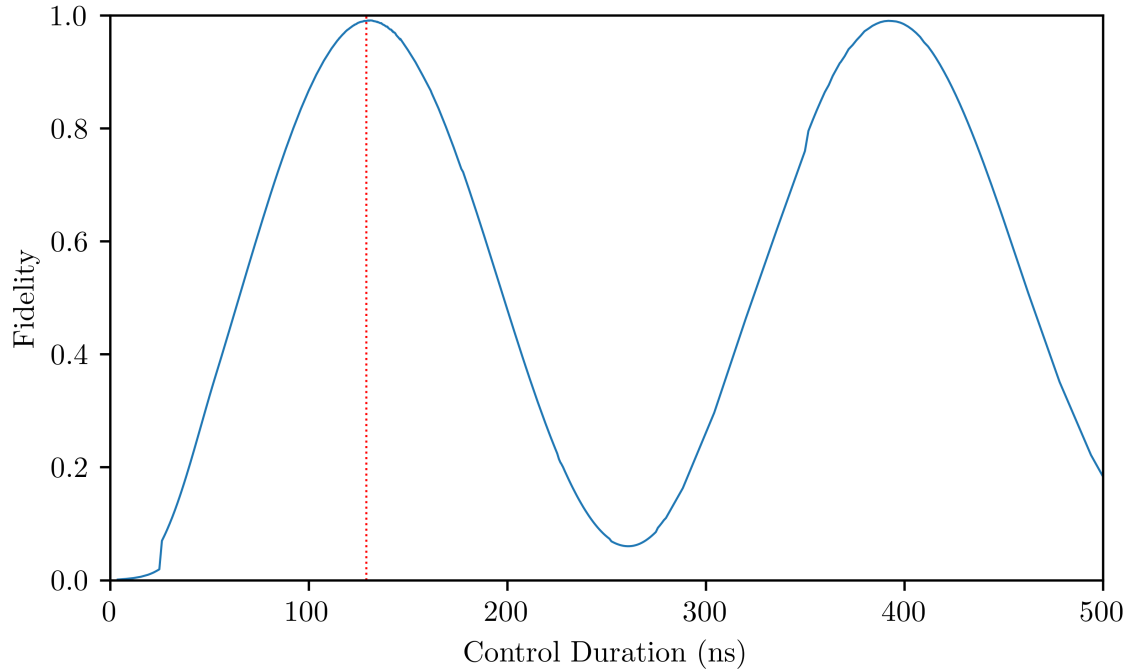


FIGURE 5.2 Optimized control operator fidelity as a function of pulse duration. This particular simulation aims to design the pulse required to transfer the device from the spin qubit configuration to the flopping-mode configuration. Peak control operator fidelity of 99% is first reached for a 129 ns control pulse duration (vertical dotted line).

### Qubit Eigenstate Transfer

When the qubit state is initially prepared in an eigenstate ( $|\Psi_i\rangle = |0_i\rangle$  or  $|\Psi_i\rangle = |1_i\rangle$ ), it is found that the optimal control pulses generated previously reach high-fidelity operating regime transfers much faster than regular linear ramping of the electrical parameters  $\epsilon$  and  $t_c$  (Fig. 5.3). Using GRAPE-designed control pulses represents a 72% reduction in the time required to execute this operating regime transfer while also allowing higher-fidelity preservation of the qubit state.

### Arbitrary Qubit State Transfer

In the context of a general quantum information processing sequence, the qubit state cannot be assumed to be an eigenstate. In this case, optimal control pulses do not significantly accelerate high-fidelity operating regime transfers; however, maximal fidelity is increased (Fig. 5.4).

In the case of completely unknown qubit states, simulated by applying the control pulses to logic states of the general form  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  with  $\alpha, \beta$  randomly generated complex numbers, it is found that peak fidelity is always reached with 134.6 ns control pulses,

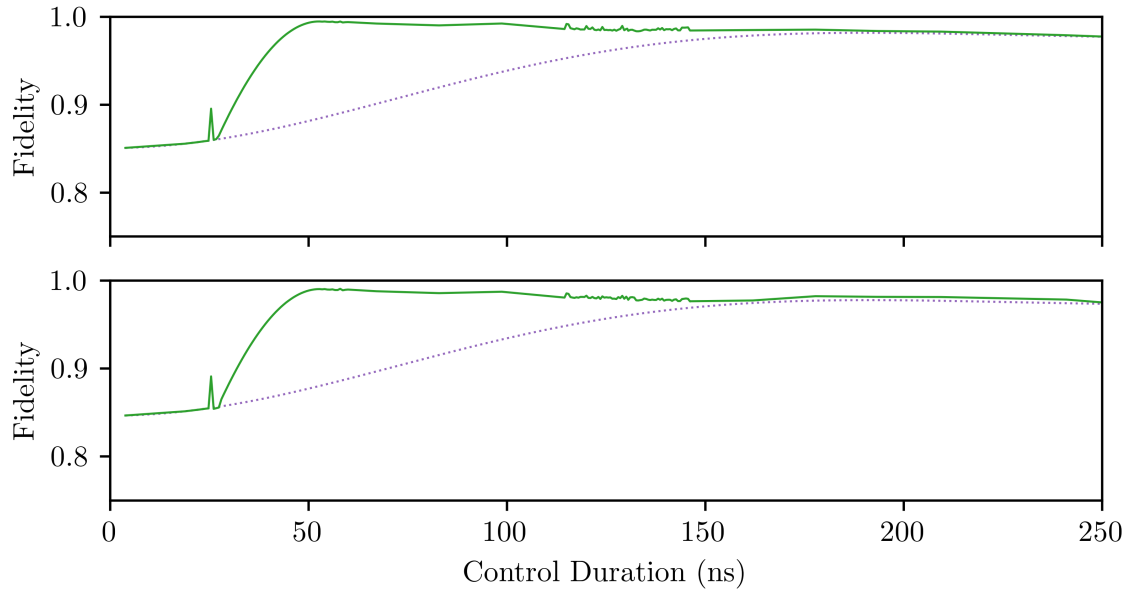


FIGURE 5.3 Operating regime transfer for qubit eigenstates  $|0\rangle$  (top) and  $|1\rangle$  (bottom), from the spin configuration to the flopping-mode configuration. In both cases, peak controlled fidelity greater than 99% is reached for a 52.8 ns pulse duration (solid line), whereas linear ramping of the electrical parameters (dotted line) reaches a peak fidelity of 97.7% for 193 ns pulses.

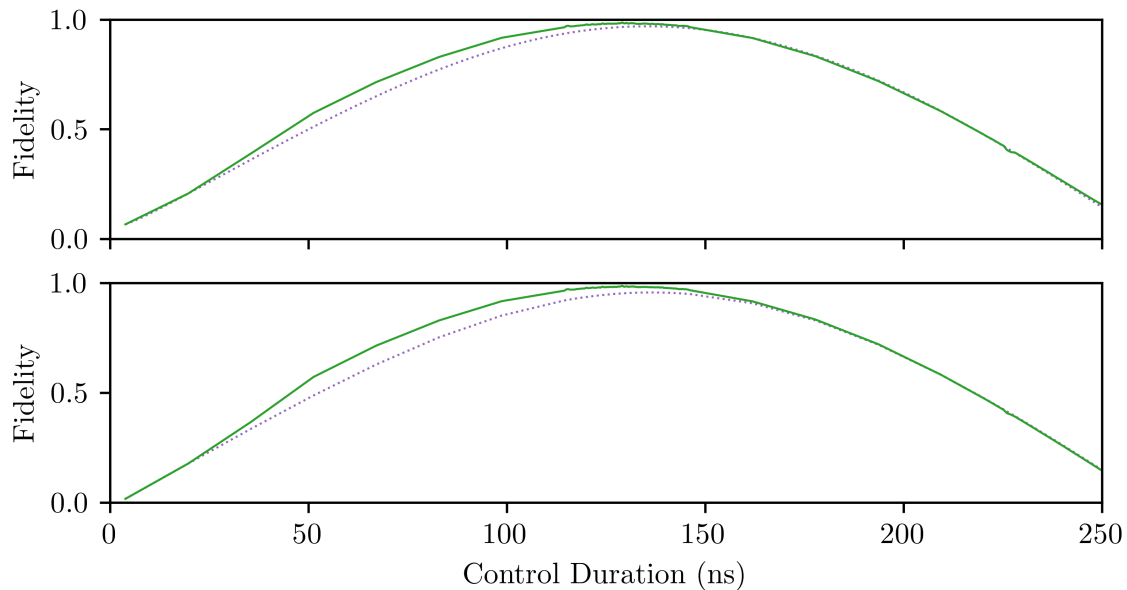


FIGURE 5.4 Operating regime transfer operation for non-eigenstates  $|0\rangle + |1\rangle$  (top) and  $|0\rangle + i|1\rangle$  (bottom), from the spin configuration to the flopping-mode configuration. In both cases, a 134.6 ns optimal control pulse (solid line) reaches a fidelity of 98.6%, whereas the linear ramp (dotted line) reaches a maximal fidelity of 96.9% (top) and 95.6% (bottom).

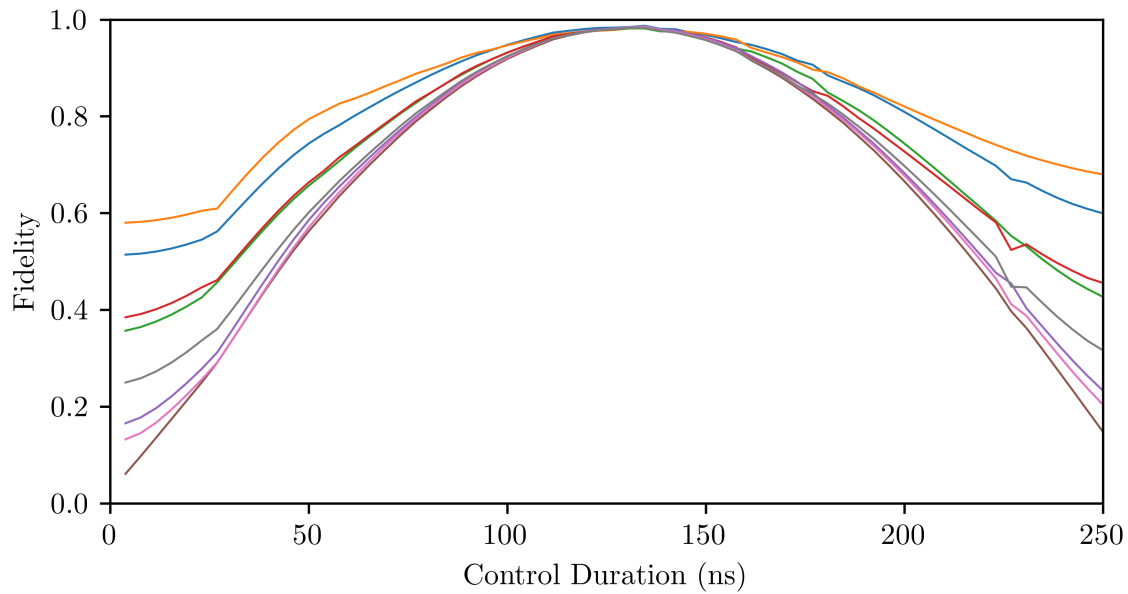


FIGURE 5.5 Operating regime transfer operation for eight randomly-generated logical qubit states. GRAPE-generated optimal control pulses reach a peak fidelity greater than 99% for 134.6 ns pulses regardless of the logical qubit state.

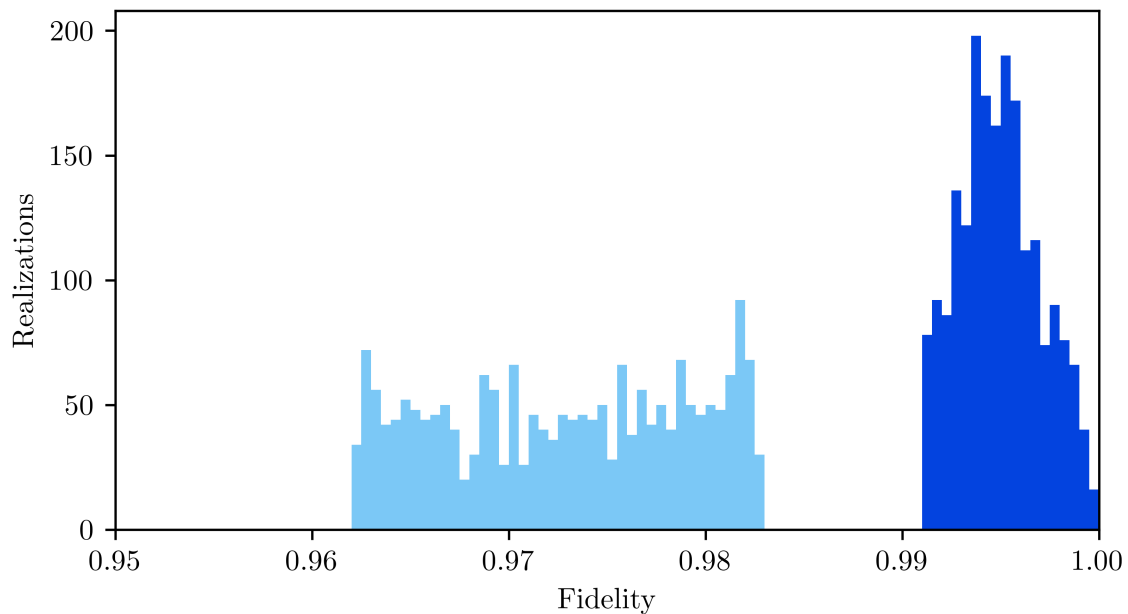


FIGURE 5.6 Evolution statistics for 1000 randomly-generated logical states. The GRAPE-optimized 136.4 ns control pulse (dark blue) leads to a 2.2% increase in average state fidelity, corresponding to a 81.3% reduction in average error, and a 67% reduction in standard deviation over linear ramping of the electrical parameters over the same duration (light blue), showing an improved state robustness.



showing that the operator approach to optimal pulse design yields state-agnostic controls (Fig. 5.5), which is not the case in general for linearly ramped controls.

When the optimal 134.6 ns control pulse is applied to a large number of randomly generated logic states, it is found that this approach designs a state-robust pulse, with high fidelity, low variance operating regime transfers, which do not require a priori knowledge of the qubit's state (Fig. 5.6). This is crucial for quantum computation applications, as the qubit's operating regime will need to be transferred several times during a computation, without having access to the qubit's state.

### 5.2.7 Conclusion

It was shown that an algorithmic approach to designing control pulses by iterating towards a target operator rather than a target state leads to state-robust control pulses for DQD operating regime transfers. Qubit eigenstate transfers can be executed 72.5% faster using this optimal control approach relative to adiabatic transfers, reducing the control time from 193 ns to 52.8 ns. For any arbitrary state, average transfer fidelity is increased from 97.3% to 99.5%, without requiring a priori knowledge of the qubit state.

### 5.2.8 Acknowledgments

VR acknowledges financial support via B1X - Bourses de maîtrise en recherche from the Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies and Bourse VoiceAge pour l'excellence académique aux études supérieures from Université de Sherbrooke. YBL additionally acknowledges support from the Canada First Research Excellence Fund and Institut quantique at Université de Sherbrooke.

---



# CHAPITRE 6

## Compléments à l'article

Ce chapitre discute d'éléments complémentaires aux travaux de recherche qui n'ont pas été publiés dans l'article présenté au chapitre 5. Spécifiquement, la forme optimale du pulse obtenue via l'algorithme GRAPE présente certaines propriétés qui méritent d'être étudiées davantage, surtout dans le contexte de travaux futurs liés au présent projet.

### 6.1 Choix de la méthode de contrôle

En considérant que le projet à l'étude dans le présent document porte sur le contrôle du qubit de spin basé sur la double boîte quantique à électron unique, dans le but de transférer le régime d'opération du système entre une configuration qui permet les mesures dispersives non-destructives de l'état du qubit et une autre configuration dans laquelle le qubit est fortement isolé de son environnement, on se voit obligés d'abandonner le contrôle par rétroaction. En effet, l'architecture spécifique considérée dans ces travaux, soit celle présenté dans [6], ne permet pas de mesures non-destructives de l'état du qubit sauf via la cavité micro-ondes à laquelle la DBQ est couplée. Il est donc impossible de mesurer l'état du qubit pendant le transfert, et donc d'implémenter une boucle de rétroaction.

Il existe plusieurs algorithmes de contrôle optimal quantique en boucle ouverte, dont les principaux ont été présentés au chapitre 3. La méthode GRAPE a été choisie parce qu'elle a déjà démontré son applicabilité à divers problèmes de contrôle quantique comparables à celui auquel on s'intéresse dans ce projet [37, 62, 99, 105]. De plus, l'algorithme est déjà implémenté dans sa forme la plus générale dans la librairie python QuTiP.

En rétrospective, il est possible que l'utilisation de l'algorithme GOAT aurait permis de parvenir à des signaux de contrôle mieux adaptés à l'implémentation expérimentale des résultats. Il est prévu dans un futur proche d'intégrer cet algorithme alternatif aux outils numériques développés dans ce projet afin de comparer la performance des signaux optimaux, mais ces travaux dépassent le projet présenté dans cet article et dans ce document.

### 6.2 Pulse optimal obtenu par GRAPE

Suite au développement des outils de simulation, le projet parvient à deux séquences de contrôle optimales telles que décrites à la section 5.2.6. La première, d'une durée de 52,84 nanosecondes, permet d'effectuer le transfert du régime d'opération de la double boîte

quantique lorsque le qubit est préparé dans un état-propre de son Hamiltonien, c'est-à-dire dans l'état  $|0\rangle$  ou dans l'état  $|1\rangle$ . La seconde séquence de contrôle, d'une durée de 134,6 nanosecondes, permet d'effectuer un transfert à haute fidélité du régime d'opération du qubit pour un état logique arbitraire, permettant alors de modifier les paramètres électrostatiques de la DBQ sans endommager l'état logique du qubit, même si cet état reste inconnu. Ces séquences de contrôle sont illustrées aux Figs. 6.1 et 6.2 respectivement.

On observe clairement en étudiant la forme du pulse optimal les principaux défauts de l'algorithme GRAPE pour la réalisation de pulses de contrôle qu'on souhaiterait réaliser expérimentalement. L'utilisation de l'approximation constante par morceaux simplifie grandement le calcul numérique qui parvient au pulse optimal; cependant, la réalisation d'ondes carrées est expérimentalement difficile, surtout dans un environnement cryogénique. Ces signaux en ondes carrées se traduisent par un contenu haute-fréquence important, illustré à la Fig. 6.3, en plus de très fortes discontinuités au début et à la fin de la séquence de contrôle, à la fois sur les paramètres  $\epsilon$  et  $t_c$ . Il n'existe aucun moyen, dans le formalisme de GRAPE, de corriger ces effets dans le but d'obtenir des signaux de contrôle plus aisément réalisables expérimentalement, c'est-à-dire sans forte discontinuités et avec un contenu haute-fréquence faible ou nul. D'autres approches, par exemple l'algorithme GOAT [54] qui génère des signaux lisses qui sont des sommes de pulses gaussiens, seraient alors nécessaires.

### 6.3 Transfert d'états arbitraires

On identifie à la section 5.2.6 un des avantages additionnels du contrôle optimal obtenu via GRAPE par rapport aux contrôles linéaires standard comme étant une uniformisation du temps de contrôle optimal par rapport à l'état logique initial du qubit. Cette convergence de fidélité maximale pour un pulse de contrôle de 134,6 nanosecondes est mise en évidence à la Fig. 6.4. Au contraire, le contrôle linéaire des paramètres électriques du qubit ne permet pas d'exécuter un transfert à fidélité maximale sans connaître l'état du qubit au préalable, puisque la durée optimale de la rampe est différente pour chacun des états logiques initiaux, tel qu'illustré à la Fig. 6.5. Or, puisqu'on ne peut pas en général assumer qu'il sera possible de connaître l'état du qubit préalablement à l'exécution d'une séquence de transfert en raison de l'action-retour de la mesure quantique qui perturbe l'état logique du qubit en cours de calcul, il est extrêmement désirable de pouvoir générer des signaux de contrôle indépendants de l'état du qubit, ce qui est atteint par GRAPE.

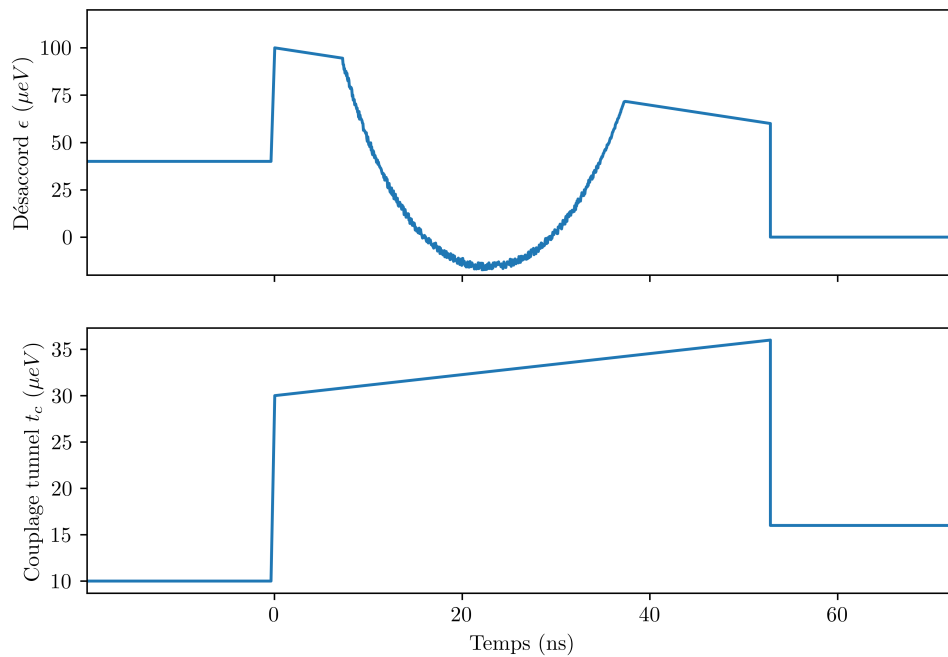


FIGURE 6.1 Séquence de contrôle optimale obtenue par l'algorithme GRAPE, d'une durée de 52,84 ns, permettant le transfert de régime d'opération pour un qubit préparé dans un état propre du Hamiltonien.

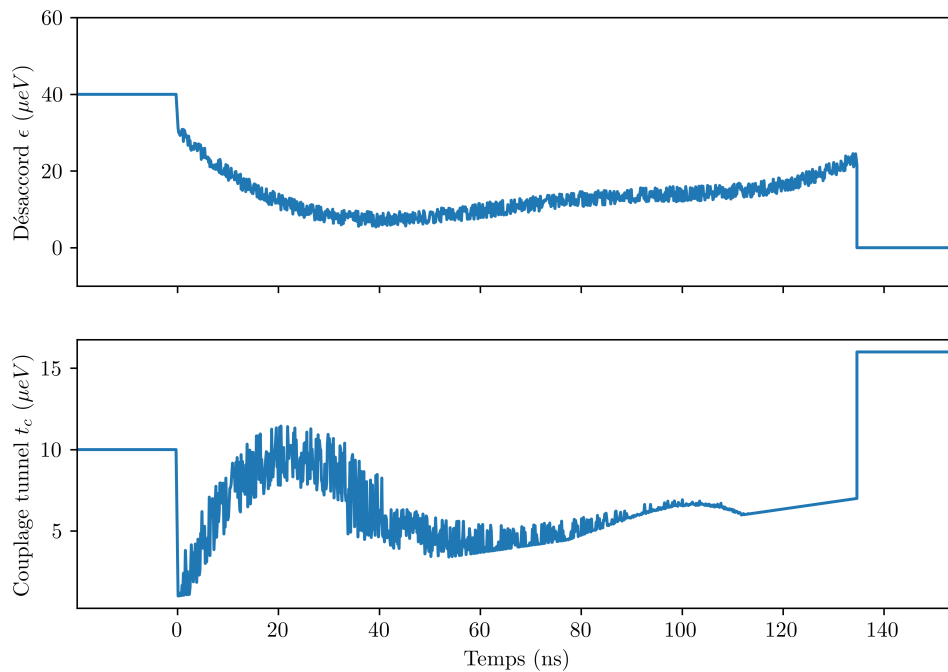


FIGURE 6.2 Séquence de contrôle optimale obtenue par l'algorithme GRAPE, d'une durée de 134,6 ns, permettant le transfert de régime d'opération pour un qubit préparé dans un état logique arbitraire.

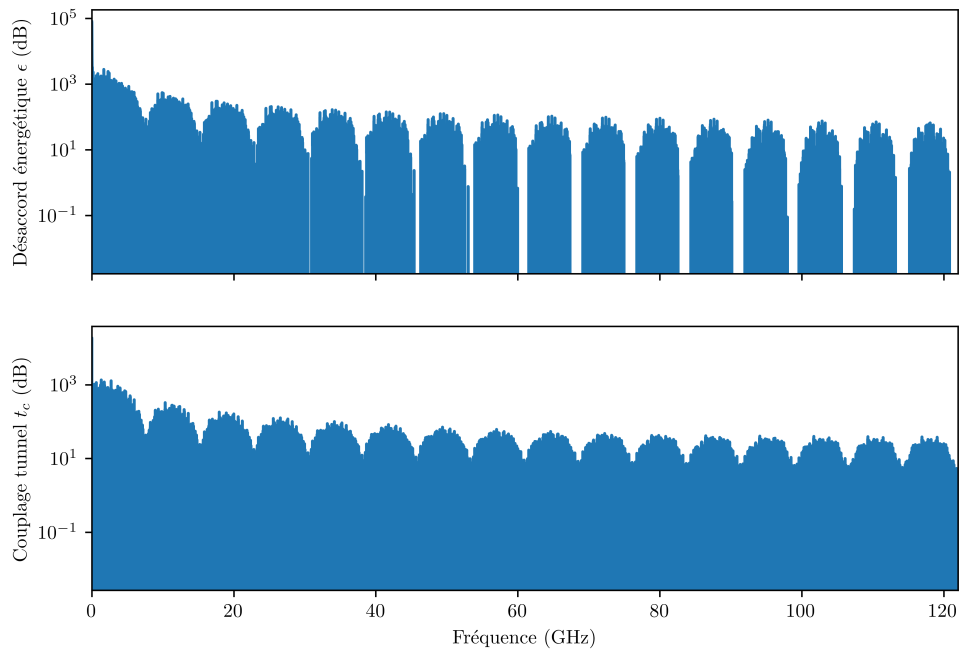


FIGURE 6.3 Spectre du pulse de contrôle optimal de 134,6 nanosecondes permettant le transfert de régime d'opération pour un qubit dans un état arbitraire. L'approximation constante par morceaux signifie que le pulse de contrôle optimal a un spectre infini, impossible à réaliser idéalement en laboratoire.

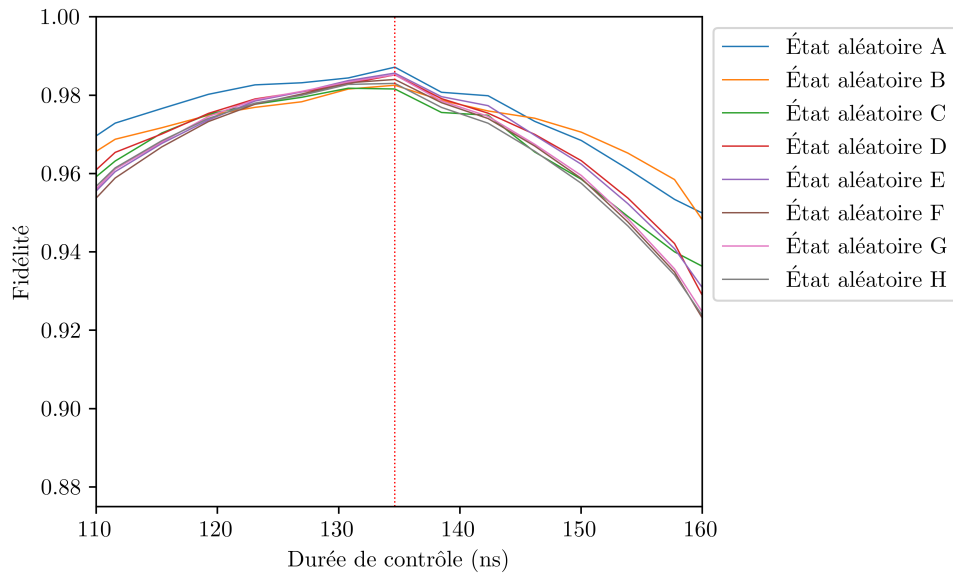


FIGURE 6.4 Courbes de fidélité pour huit états arbitraires dont le régime d'opération est transféré via des pulses de contrôle optimisés par l'algorithme GRAPE. Le pic de fidélité se trouve à la même durée de contrôle pour tous les états.

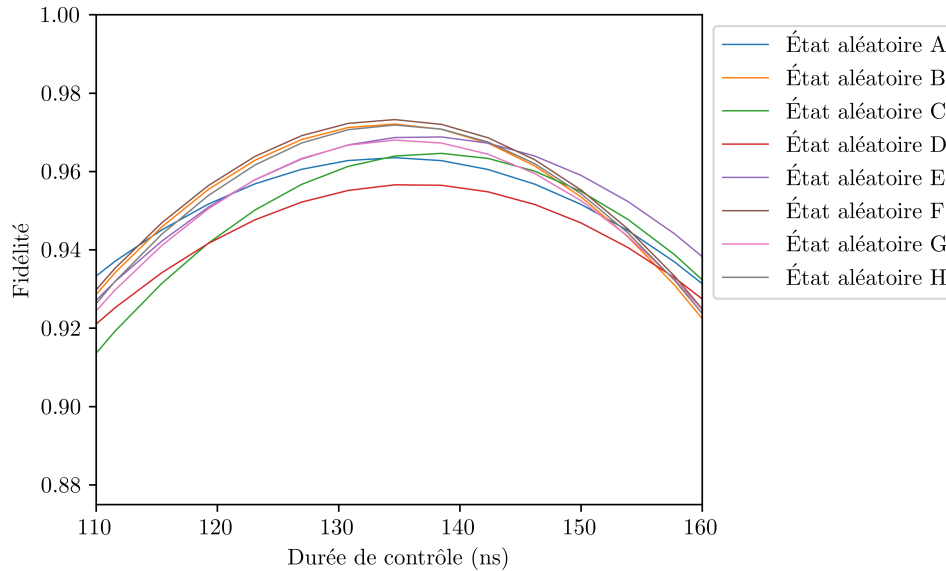


FIGURE 6.5 Courbes de fidélité pour huit états arbitraires dont le régime d'opération est transféré via un contrôle linéaire. Il n'y a pas de temps de contrôle optimal qui permet d'atteindre la fidélité maximale pour tous les états initiaux du qubit.

## 6.4 Contrôle du transfert inverse

On a démontré à la section 5.2.5 comment parvenir à l'expression analytique de l'opérateur-objectif de contrôle, réécrit ci-bas :

$$\mathbf{U}_{\mathcal{P}\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_f} \mathcal{P}_{\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{P}}. \quad (6.1)$$

Cet opérateur est l'opérateur d'évolution qu'on applique au qubit via l'action du Hamiltonien de la DBQ et des champs de contrôle, de sorte que l'état logique du qubit, dans la base logique finale  $\mathcal{L}_f$  composée des vecteurs-propres du Hamiltonien de la DBQ dans son régime d'opération final, soit égal à l'état logique initial dans la base  $\mathcal{L}_i$  composée des vecteurs-propres du Hamiltonien dans la configuration initiale.

Si on souhaite exécuter la manipulation inverse, c'est-à-dire quitter le régime d'opération final et revenir à la configuration initiale, on devra synthétiser l'opérateur

$$\mathbf{U}'_{\mathcal{P}\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{L}_i} \mathcal{P}_{\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{P}}, \quad (6.2)$$

obtenu par identification avec l'Éq. (6.1), où on a simplement inversé les bases logiques initiale et finale. Or, on a la propriété des matrices de passage

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}} = \mathcal{P}_{\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}, \quad (6.3)$$

et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_{\mathcal{D} \mathcal{D}} &= \mathcal{P}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{L}_i} \mathcal{P}_{\mathcal{L}_f \leftarrow \mathcal{D}} \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{D}}^{-1} \mathcal{P}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{L}_f}^{-1} \\ &= (\mathcal{P}_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{L}_f} \mathcal{P}_{\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{D}})^{-1} \\ \mathbf{U}'_{\mathcal{D} \mathcal{D}} &= \mathbf{U}_{\mathcal{D} \mathcal{D}}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

De plus, sachant que l'inverse de l'opérateur d'évolution est égal à [18]

$$\mathbf{U}^{-1}(t_0, t_1) = \mathbf{U}(t_1, t_0), \quad (6.5)$$

on a que la séquence de contrôle qui réalise cette manipulation inverse avec fidélité maximale est la séquence de contrôle optimale utilisée pour réaliser  $\mathbf{U}_{\mathcal{D} \mathcal{D}}$ , inversée dans le temps.

## 6.5 Sommaire des compléments

Malgré qu'un qubit puisse en théorie être préparé dans une infinité d'états différents, l'optimisation de signaux de contrôle pour le transfert de régime d'opération de la DBQ via l'algorithme GRAPE permet d'atteindre des fidélités de transfert plus élevées que le transfert par contrôle linéaire. Additionnellement, le contrôle optimal est indépendant de l'état logique du qubit et le transfert inverse optimal peut être obtenu simplement par application du signal initial inversé dans le temps. Ceci signifie qu'on peut préparer à l'avance tous les signaux de contrôle nécessaires à l'opération d'un ordinateur quantique basé sur cette architecture, puisqu'on n'a besoin que d'une étape d'optimisation par paire de points d'opérations (définis par un point  $(\epsilon, t_c)$  dans l'espace des paramètres électriques). Le signal optimal est également agnostique par rapport à l'état initial du qubit, ce qui signifie à la fois que l'application de cette méthode de contrôle ne requiert pas la connaissance préalable de l'état du qubit et également que ces manipulations ne sont pas vulnérables à des erreurs logiques sur le qubit.



# CHAPITRE 7

## Conclusion

La double boîte quantique (DBQ) à électron unique sur silicium est un excellent qubit-candidat pour la réalisation d'un ordinateur quantique universel, puisqu'elle permet de tirer profit des longs temps de cohérence naturels du spin électronique dans le silicium tout en offrant un régime d'opération dans lequel l'état du qubit est électriquement contrôlable et peut atteindre le régime de couplage fort avec le champ électromagnétique dans un résonateur micro-ondes. Ce régime d'opération permet alors d'exécuter des rotations rapides de spin ainsi que d'implanter des portes logiques à deux qubits pour des paires de qubits distants ou encore de faire des mesures dispersives de l'état du qubit médiées par des photons micro-ondes, éléments technologiques importants pour l'opération d'un processeur quantique qui ne sont pas possibles pour des spins purs.

### 7.1 Bilan des principaux résultats

Le projet faisant l'objet du présent document a mené à la mise au point d'une méthode de contrôle optimal basée sur l'algorithme GRAPE. Cette méthode permet de générer des signaux de contrôle qui transfèrent le qubit d'un régime d'opération à un autre, notamment pour passer de la configuration dans laquelle le qubit se comporte comme un spin pur avec des longs temps de cohérence à la configuration dans laquelle le qubit acquiert un fort caractère de charge, permettant alors de contrôler le spin via EDSR ou d'atteindre le régime de couplage fort avec un résonateur.

Les signaux de contrôle optimaux résultants permettent de transférer un qubit préparé dans un état-propre via un pulse de 52,8 nanosecondes avec une fidélité de 99%, alors que le transfert adiabatique standard n'atteint qu'une fidélité de 97,75% en 192 nanosecondes seulement.

Dans le cas d'un qubit préparé dans un état arbitraire, le pulse optimal permet le transfert de régime d'opération en 134,6 nanosecondes avec une fidélité d'état logique moyenne de 99,5%, alors qu'un transfert linéaire n'atteint qu'une fidélité moyenne de 97,3% pour la même durée de contrôle. De plus, le signal de contrôle optimal est le même pour tous les états arbitraires du qubit, ce qui implique que l'application du signal de contrôle ne requiert pas la connaissance préalable de l'état du qubit, un avantage critique dans le contexte d'une routine de calcul quantique. Ces signaux peuvent donc être générés avant

l'exécution d'une routine de calcul puis gardés en mémoire du système de contrôle jusqu'au moment opportun, selon la séquence de calcul.

Les fidélités atteintes approchent le seuil de tolérance aux fautes, soit un taux d'erreur de 1% lorsqu'on ne considère que l'opération de transfert. Cependant, sachant qu'il n'est possible d'interagir efficacement avec le qubit que dans une des configurations considérées dans ces travaux, et que l'erreur totale engendrée par deux transferts successifs est supérieure au seuil de tolérance aux fautes, il semble nécessaire d'améliorer davantage le protocole de manipulation du régime d'opération du système. Des avenues de solution sont présentées ci-après (voir la section 7.3).

L'application expérimentale des signaux de contrôle générés par l'algorithme ne demande pas d'apporter des modifications au dispositif physique, puisque le contrôleur utilisé en simulation correspond physiquement à la modulation de la tension appliquées aux grilles déjà existantes de la DBQ.

## 7.2 Contributions originales

La principale contribution originale ressortant du projet est la démonstration qu'un algorithme de contrôle optimal permet de générer des signaux de contrôle qui mènent à des transferts de régime d'opération de la DBQ beaucoup plus performants que les méthodes de transfert linéaires standard, sur les plans de la durée de contrôle et de la fidélité de transfert.

Additionnellement, le modèle de relaxation de la charge de la DBQ via l'émission de phonons longitudinaux acoustiques a été détaillé pour considérer l'effet de la variation des paramètres électriques contrôlés,  $\epsilon$  et  $t_c$ , et donc de l'énergie orbitale du qubit  $\Omega$  sur ce taux de relaxation.

## 7.3 Perspectives et travaux futurs

Bien que l'approche utilisée dans le présent projet ait montré en simulation une amélioration marquée du transfert du régime d'opération de la DBQ, les signaux de contrôle obtenus par optimisation via GRAPE ne sont pas aisément reproductibles expérimentalement, tel que démontré au chapitre 6. Un travail additionnel est nécessaire pour obtenir des signaux de contrôle adaptés aux réalités expérimentales. Il est possible qu'un filtrage passe-bas à une fréquence de coupure correspondant à une bande passante réaliste pour un montage expérimental dans un réfrigérateur à dilution mène à une perte minimale de fidélité par rapport au signal idéal obtenu via GRAPE ; dans le cas négatif, une approche alternative avec un algorithme comme GOAT permettrait de générer des pulses

de contrôle lisses, sans discontinuités au début et à la fin de la séquence de contrôle. Il est également probable que le développement d'une fonction-coût spécifiquement adaptée à la DBQ et aux restrictions expérimentales mène aux séquences de contrôle les plus performantes lorsqu'appliquées à un dispositif réel.

Une autre perspective pour l'amélioration du transfert est l'intégration d'un champ de contrôle en spin par résonance magnétique contrôlée électriquement au système. On a identifié rapidement qu'un élément limitant est l'évolution incontrôlable dans le sous-espace de spin qui empêche d'atteindre des vitesses de transfert bien supérieures au transfert linéaire dans le cas d'états arbitraires du qubit. On entrevoit que permettre au contrôleur d'exécuter des rotations de spin par résonance magnétique à l'intérieur de la séquence de transfert permettrait d'accélérer significativement ces transferts. Un contrôleur muni d'un opérateur dans le sous-espace de spin pourrait également mener à la synthèse de portes logiques à un qubit plus rapides que les signaux déjà existants lorsqu'on considère la DBQ dans un régime initial de spin qui préserve ses longs temps de cohérence.

Finalement, il serait intéressant d'élargir la boucle d'optimisation pour considérer des plages de paramètres physiques possibles plutôt qu'une valeur exacte, ce qui permettrait de générer des signaux de contrôle robustes par rapport à des variations de ces paramètres. Il est bien connu que, même pour la fabrication de dispositifs sur silicium qui est très bien maîtrisée dans l'industrie d'aujourd'hui, on verra des variations d'une DBQ à l'autre, même au sein d'un même processeur. Un contrôle optimal robuste permettrait alors d'effectuer une seule étape de calibration pour l'ensemble des qubits, puis de générer des contrôles qui seraient les mêmes pour l'ensemble des DBQ, plutôt que de devoir calibrer et contrôler chaque DBQ individuellement, une approche qui n'est pas réaliste pour des processeurs quantiques rassemblant un grand nombre de qubits.

---



# LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] Aharonov, D. et Ben-Or, M. (1996). Fault-tolerant quantum computation with constant error rate. *SIAM Journal on Computing*, volume 38, p. 1207–1282.
- [2] Amsüss, R., Koller, C., Nöbauer, T., Putz, S., Rotter, S., Sandner, K., Schneider, S., Schramböck, M., Steinhauser, G., Ritsch, H., Schmiedmayer, J. et Majer, J. (2011). Cavity QED with magnetically coupled collective spin states. *Phys. Rev. Letters*, volume 107 (060502).
- [3] Basdevant, J.-L. et Dalibard, J. (2013). *Mécanique quantique*. Éditions de l'École polytechnique, Paris, 524 p.
- [4] Beaudoin, F., Lachance-Quirion, D., Coish, W. A. et Pioro-Ladrière, M. (2016). Coupling a single electron spin to a microwave resonator : controlling transverse and longitudinal couplings. *Nanotechnology*, volume 27 (464003).
- [5] Benito, M., Croot, X., Adelsberger, C., Putz, S., Mi, X., Petta, J. R. et Burkard, G. (2019). Electric-field control and noise protection of the flopping-mode spin qubit. *Phys. Rev. B*, volume 100 (125430).
- [6] Benito, M., Mi, X., Taylor, J. M., Petta, J. R. et Burkard, G. (2017). Input-output theory for spin-photon coupling in Si double quantum dots. *Phys. Rev. B*, volume 96 (235434).
- [7] Benito, M., Petta, J. R. et Burkard, G. (2019). Optimized cavity-mediated dispersive two-qubit gates between spin qubits. *Phys. Rev. B*, volume 100 (081412).
- [8] Blais, A., Huang, R.-S., Wallraff, A., Girvin, S. M. et Schoelkopf, R. J. (2004). Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits : An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A*, volume 69 (062320).
- [9] Borjans, F., Croot, X. G., Mi, X., Gullans, M. J. et Petta, J. R. (2020). Resonant microwave-mediated interactions between distant electron spins. *Nature*, volume 577, p. 195–198.
- [10] Born, M. et Fock, V. (1928). Beweis des adiabatsatzes (originalement en allemand). *Zeitschrift für Physik*, volume 51, p. 165–180.
- [11] Bureau-Oxton, C., Camirand Lemyre, J. et Pioro-Ladrière, M. (2013). Nanofabrication of gate-defined GaAs/AlGaAs lateral quantum dots. *Journal of visualized experiments*, volume 81, p. e50581.
- [12] Burkard, G., Engel, H.-A. et Loss, D. (2000). Spintronics and quantum dots for quantum computing and quantum communication. *Fortschritte der Physik*, volume 48, p. 965–986.

- 
- [13] Camenzind, L. C., Yu, L., Stano, P., Zimmerman, J. D., Gossard, A. C., Loss, D. et Zumbühl, D. M. (2018). Hyperfine-phonon spin relaxation in a single-electron GaAs quantum dot. *Nature Communications*, volume 9 (3454).
- [14] Caneva, T., Clarco, T. et Montangero, S. (2011). Chopped random-basis quantum optimization. *Phys. Rev. A*, volume 84 (022326).
- [15] Chanrion, E., Niegemann, D. J., Bertrand, B., Spence, C., Jadot, B., Li, J., Morte-mousque, P.-A., Hutin, L., Maurand, R., Jehl, X., Sanquer, M., De Franceschi, S., Bäuerle, C., Balestro, F., Niquet, Y.-M., Vinet, M., Meunier, T. et Urdampilleta, M. (2020). Charge detection in an array of cmos quantum dots. *Phys. Rev. Applied*, volume 14 (024066).
- [16] Chen, E. H., Raach, K., Pan, A., Kiselev, A. A., Acuna, E., Blumoff, J. Z., Brecht, T., Choi, M. D., Ha, W., Hulbert, D. R., Jura, M. P., Keating, T. E., Noah, R., Sun, B., Thomas, B. J., Borselli, M. G., Jackson, C. A. C., Rakher, M. T. et Ross, R. S. (2021). Detuning axis pulsed spectroscopy of valley-orbital states in Si/SiGe quantum dots. *Phys. Rev. Applied*, volume 15 (044033).
- [17] Chirrolli, L. et Burkard, G. (2008). Decoherence in solid-state qubits. *Advances in Physics*, volume 57, p. 225–285.
- [18] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. et Laloë, F. (1977). *Mécanique Quantique I*. Hermann, 882 p.
- [19] Croot, X., Mi, X., Putz, S., Benito, M., Borjans, F., Burkard, G. et Petta, J. R. (2020). Flopping-mode electric dipole spin resonance. *Phys. Rev. Research*, volume 2 (012006).
- [20] Cubaynes, T., Delbecq, M. R., Dartiailh, M. C., Assouly, R., Desjardins, M. M., Contamin, L. C., Bruhat, L. E., Leghtas, Z., Mallet, F., Cottet, A. et Kontos, T. (2019). Highly coherent spin states in carbon nanotubes coupled to cavity photons. *npj Quantum Information*, volume 5 (47).
- [21] D’Anjou, B. et Burkard, G. (2019). Optimal dispersive readout of a spin qubit with a microwave resonator. *Phys. Rev. B*, volume 100 (245427).
- [22] DiCarlo, L., Chow, J. M., Gambetta, J. M., Bishop, L. S., Johnson, B. R., Schuster, D. I., Majer, J., Blais, A., Frunzio, L., Girvin, S. M. et Schoelkopf, R. J. (2009). Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor. *Nature*, volume 460, p. 240–244.
- [23] Didier, N., Bourassa, J. et Blais, A. (2015). Fast quantum nondemolition readout by parametric modulation of longitudinal qubit-oscillator interaction. *Phys. Rev. Letters*, volume 115 (203601).
- [24] DiVincenzo, D. P. (2000). The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, volume 48, p. 771–783.
-

- 
- [25] Eichler, C., Sigillito, A. J., Lyon, S. A. et Petta, J. R. (2017). Electron spin resonance at the level of  $10^4$  spins using low impedance superconducting resonators. *Phys. Rev. Letters*, volume 118 (037701).
- [26] Fanciulli, M. (2009). *Electron Spin Resonance and Related Phenomena in Low-Dimensional Structures*, volume 115. Springer, 261 p.
- [27] Ferraro, E., Fanciulli, M. et De Michielis, M. (2019). Phonon-induced relaxation and decoherence times of the hybrid qubit in silicon quantum dots. *Phys. Rev. B*, volume 100 (035310).
- [28] Feynman, R. P. (1982). Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, volume 21, p. 467–488.
- [29] Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*, 2<sup>e</sup> édition. Wiley, 436 p.
- [30] Fowler, A. G., Stephens, A. M. et Groszkowski, P. (2009). High-threshold universal quantum computation on the surface code. *Phys. Rev. A*, volume 80 (052312).
- [31] Fu, J., Wang, W. et Zhang, M. (2018). Control of spin-orbit interaction in conventional semiconductor quantum wells. Dans Sahu, D. R., *Functional Materials*, chapitre 5. IntechOpen.
- [32] Georgescu, I. (2020). 25 years of quantum error correction. *Nature Reviews Physics*, volume 2, p. 519.
- [33] Girvin, S. M. (2014). Circuit QED : Superconducting qubits coupled to microwave photons. Dans *Lecture Notes of the Les Houches Summer School*, volume 96. Oxford University Press.
- [34] Glaser, S. J., Boscain, U., Calarco, T., Koch, C. P., Köckenberger, W., Kosloff, R., Kuprov, I., Luy, B., Schirmer, S., Schulte-Herbrüggen, T., Sugny, D. et Wilhelm, F. K. (2015). Training Schrödinger’s cat : quantum optimal control. *Eur. Phys. J. D*, volume 69 (279).
- [35] Goerz, M. H., Basilewitsch, D., Gago-Encinas, F., Krauss, M. G., Horn, K. P., Reich, D. M. et Koch, C. P. (2019). Krotov : A Python implementation of Krotov’s method for quantum optimal control. *SciPost Phys.*, volume 7 (080).
- [36] Goerz, M. H., Whaley, K. B. et Koch, C. P. (2015). Hybrid optimization schemes for quantum control. *EPJ Quantum Technology*, volume 2 (21).
- [37] Groszkowski, P., Fowler, A. G., Motzoi, F. et Wilhelm, F. K. (2011). *Phys. Rev. B*, volume 84 (144516).
- [38] Grover, L. K. (1996). A fast quantum mechanical algorithm for database search. Dans *Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*. ACM, p. 212–219.
-

- [39] Hanson, R., Kouwenhoven, L. P., Petta, J. R., Tarucha, S. et Vandersypen, L. M. K. (2007). Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys.*, volume 79, p. 1217–1265.
- [40] Harvey, S. P., Bøttcher, C. G. L., Orona, L. A., Bartlett, S. D., Doherty, A. C. et Yacoby, A. (2018). Coupling two spin qubits with a high-impedance resonator. *Phys. Rev. B*, volume 97 (235409).
- [41] Harvey-Collard, P., Jacobson, N. T., Bureau-Oxton, C., Jock, R. M., Srinivasa, V., Mounce, A. M., Ward, D. R., Anderson, J. M., Manginell, R. P., Wendt, J. R., Pluym, T., Lilly, M. P., Luhman, D. R., Pioro-Ladrière, M. et Carroll, M. S. (2019). Spin-orbit interactions for Singlet-Triplet qubits in silicon. *Phys. Rev. Letters*, volume 122 (217702).
- [42] Harvey-Collard, P., Jock, R. M., Jacobson, N. T., Baczewski, A. D., Mounce, A. M., Curry, M. J., Ward, D. R., Anderson, J. M., Manginell, R. P., Wendt, J. R., Rudolph, M., Pluym, T., Lilly, M. P., Pioro-Ladrière, M. et Carroll, M. S. (2018). All-electrical universal control of a double quantum dot qubit in silicon MOS. *2017 IEEE International Electron Devices Meeting*, p. 36.5.1–36.5.4.
- [43] Hayes, R. R., Kiselev, A., Borselli, M., Bui, S. S., Croke III, E. T., Deelman, P. W., Maune, B. M., Milosavljevic, I., Moon, J.-S., Ross, R. S., Schmitz, A. E., Gyure, M. F. et Hunter, A. T. (2009). Lifetime measurements (T1) of electron spins in Si/SiGe quantum dots. *arXiv :0908.0173*.
- [44] Heeres, R. W., Reinhold, P., Ofek, N., Frunzio, L., Jiang, L., Devoret, M. H. et Schoelkopf, R. J. (2017). Implementing a universal gate set on a logical qubit encoded in an oscillator. *Nature Communications*, volume 8 (94).
- [45] Hendrickx, N. W., Lawrie, W. I. L., Russ, M., van Riggelen, F., de Snoo, S. L., Schouten, R. N., Sammak, A., Scappucci, G. et Veldhorst, M. (2020). A four-qubit germanium quantum processor. *arXiv :2009.04268*.
- [46] Hu, X., Liu, Y.-X. et Nori, F. (2012). Strong coupling of a spin qubit to a superconducting stripline cavity. *Phys. Rev. B*, volume 86 (035314).
- [47] Imamoğlu, A. (2009). Cavity QED based on collective magnetic dipole coupling : Spin ensembles as hybrid two-level systems. *Phys. Rev. Letters*, volume 102 (083602).
- [48] Kawakami, E., Scarlino, P., Ward, D. R., Braakman, F. R., Savage, D. E., Lagally, M. G., Friesen, M., Coppersmith, S. N., Eriksson, M. A. et Vandersypen, L. M. K. (2014). Electrical control of a long-lived spin qubit in a Si/SiGe quantum dot. *Nature Nanotechnology*, volume 9, p. 666–670.
- [49] Khaneja, N., Reiss, T., Kehlet, C., Schulte-Herbrüggen, T. et Glaser, S. J. (2005). Optimal control of coupled spin dynamics : design of nmr pulse sequences by gradient ascent algorithms. *Journal of Magnetic Resonance*, volume 172, p. 296–305.
- [50] Kittel, C. (2007). *Physique de l'état solide*, 8<sup>e</sup> édition. Sciences Sup, Paris, 640 p.
-



- 
- [51] Krotov, V. (1995). *Global Methods in Optimal Control Theory*. CRC Press, 408 p.
- [52] Lay, D. C., Lay, S. R. et MacDonald, J. J. (2014). *Linear Algebra and its Applications*, 5<sup>e</sup> édition. Pearson, 576 p.
- [53] Loss, D. et DiVincenzo, D. P. (1998). Quantum computation with quantum dots. *Phys. Rev. A*, volume 57 (120).
- [54] Machnes, S., Assémat, E., Tannor, D. et Wilhelm, F. (2018). Tunable, flexible, and efficient optimization of control pulses for practical qubits. *Phys. Rev. Letters*, volume 120 (150401).
- [55] Manin, Y. (1980). *Vychislimoe i nevychislimoe [Computable and Uncomputable]* (originellement en russe). Sov. Radio, 127 p.
- [56] Meunier, T., Calado, V. E. et Vandersypen, L. M. K. (2011). Efficient controlled-phase gate for single-spin qubits in quantum dots. *Phys. Rev. B*, volume 83 (121403).
- [57] Mi, X., Benito, M., Putz, S., Zajac, D. M., Taylor, J. M., Burkard, G. et Petta, J. R. (2018). A coherent spin-photon interface in silicon. *Nature*, volume 555, p. 599–603.
- [58] Mi, X., Cady, J. V., Zajac, D. M., Deelman, P. W. et Petta, J. R. (2017). Strong coupling of a single electron in silicon to a microwave photon. *Science*, volume 355, p. 156–158.
- [59] Mills, A. R., Zajac, D. M., Gullans, M. J., Schupp, F. J., Hazard, T. M. et Petta, J. R. (2019). Shuttling a single charge across a one-dimensional array of silicon quantum dots. *Nature Communications*, volume 10, p. 1063.
- [60] Mortemousque, P.-A., Chanrion, E., Jadot, B., Flentje, H., Ludwig, A., Wieck, A. D., Urdampilleta, M., Bauerle, C. et Meunier, T. (2018). Coherent control of individual electron spins in a two dimensional array of quantum dots. *arXiv :1808.06180*.
- [61] Nielsen, M. A. et Chuang, I. (2000). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 674 p.
- [62] Nimbalkar, M., Zeier, R., Neves, J. L., Elavarasi, S. B., Yuan, H., Khaneja, N., Dorai, K. et Glaser, S. J. (2012). Multiple-spin coherence transfer in linear ising spin chains and beyond : Numerically optimized pulses and experiments. *Phys. Rev. A*, volume 85 (012325).
- [63] Palao, J. P. et Kosloff, R. (2002). Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations. *Phys. Rev. Letters*, volume 89 (188301).
- [64] Palao, J. P., Kosloff, R. et Koch, C. P. (2008). Protecting coherence in optimal control theory : State-dependent constraint approach. *Phys. Rev. A*, volume 77 (063412).
-

- 
- [65] Petersson, K. D., McFaul, L. W., Schroer, M. D., Jung, M., Taylor, J. M., Houck, A. A. et Petta, J. R. (2012). Circuit quantum electrodynamics with a spin qubit. *Nature*, volume 490, p. 380–383.
- [66] Petta, J. R., Johnson, A. C., Taylor, J. M., Laird, E. A., Yacoby, A., Lukin, M. D., Marcus, C. M., Hanson, M. P. et Gossard, A. C. (2005). Coherent manipulation of coupled electron spins in semiconductor quantum dots. *Science*, volume 309, p. 2180–2184.
- [67] Pioro-Ladrière, M., Obata, T., Tokura, Y., Shin, Y.-S., Kubo, T., Yoshida, K., Taniyama, T. et Tarucha, S. (2008). Electrically driven single-electron spin resonance in a slanting Zeeman field. *Nature Physics*, volume 4, p. 776–779.
- [68] Pioro-Ladrière, M., Tokura, Y., Obata, T., Kubo, T. et Tarucha, S. (2007). Micro-magnets for coherent control of spin-charge qubit in lateral quantum dots. *Appl. Phys. Letters*, volume 90 (024105).
- [69] Preskill, J. (1998). Reliable quantum computers. Dans *Proceedings of the Royal Society A*, volume 454. The Royal Society.
- [70] Preskill, J. (2018). Quantum computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, volume 2, p. 79.
- [71] Rančić, M. J. et Burkard, G. (2016). Electric dipole spin resonance in systems with a valley-dependent  $g$  factor. *Phys. Rev. B*, volume 93 (205433).
- [72] Reiher, V. et Bérubé-Lauzière, Y. (2021). Optimal control of the operating regime of a single electron double quantum dot. *arXiv :2104.13571*.
- [73] Samkharadze, N., Bruno, A., Scarlino, P., Zheng, G., DiVincenzo, D. P., DiCarlo, L. et Vandersypen, L. M. K. (2016). High-kinetic-inductance superconducting nanowire resonators for circuit QED in a magnetic field. *Phys. Rev. Applied*, volume 5 (044004).
- [74] Sayrin, C., Dotsenko, I., Zhou, X., Peaudecerf, B., Rybarczyk, T., Gleyzes, S., Rouchon, P., Mirrahimi, M., Amini, H., Brune, M., Raimond, J.-M. et Haroche, S. (2011). Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*, volume 477, p. 73–77.
- [75] Schirmer, S. G. et de Fouquieres, P. (2011). Efficient algorithms for optimal control of quantum dynamics : the Krotov method unencumbered. *New J. Phys.*, volume 13 (073029).
- [76] Shor, P. W. (1994). Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. Dans *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Computer Society Press, p. 124–134.
- [77] Sigillito, A. J., Gullans, M. J., Edge, L. F., Borselli, M. et Petta, J. R. (2019). Coherent transfer of quantum information in a silicon double quantum dot using resonant SWAP gates. *npj Quantum Information*, volume 5, p. 110.
-

- [78] Sigillito, A. J., Loy, J. C., Zajac, D. M., Gullans, M. J., Edge, L. F. et Petta, J. R. (2019). Site-selective quantum control in an isotopically enriched  $^{28}\text{Si}/\text{Si}_{0.7}\text{Ge}_{0.7}$  quadruple quantum dot. *Phys. Rev. Applied*, volume 11 (061006).
- [79] Sillanpää, M. A., Park, J. I. et Simmonds, R. W. (2007). Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity. *Nature*, volume 449, p. 438–442.
- [80] Smite-Meister (2009). Bloch sphere. Dans Wikipedia, *Wikipedia Commons*. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch\\_sphere.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg) (page consultée le 2021-04-10).
- [81] Stockklauser, A., Scarlino, P., Koski, J. V., Gasparinetti, S., Andersen, C. K., Reichl, C., Wegscheider, W., Ihn, T., Ensslin, K. et Wallraff, A. (2017). Strong coupling cavity qed with gate-defined double quantum dots enabled by a high impedance resonator. *Phys. Rev. X*, volume 7 (011030).
- [82] Takeda, K., Kamioka, J., Otsuka, T., Yoneda, J., Nakajima, T., Delbecq, M. R., Amaha, S., Allison, G., Kodera, T., Oda, S. et Tarucha, S. (2016). A fault-tolerant addressable spin qubit in a natural silicon quantum dot. *Science Advances*, volume 2.
- [83] Tyryshkin, A. M., Tojo, S., Morton, J. J. L., Riemann, H., Abrosimov, N. V., Becker, P., Pohl, H.-J., Schenkel, T., Thewalt, M. L. W., Itoh, K. M. et Lyon, S. A. (2012). Electron spin coherence exceeding seconds in high-purity silicon. *Nature Materials*, volume 11, p. 143–147.
- [84] van Woerkom, D. J., Scarlino, P., Ungerer, J. H., Müller, C., Koski, J. V., Landig, A. J., Reichl, C., Wegscheider, W., Ihn, T., Ensslin, K. et Wallraff, A. (2018). Microwave photon-mediated interactions between semiconductor qubits. *Phys. Rev. X*, volume 8 (041018).
- [85] Veldhorst, M., Hwang, J. C. C., Yang, C. H., Leenstra, A. W., de Ronde, B., Dehollain, J. P., Muhonen, J. T., Hudson, F. E., Itoh, K. M., Morello, A. et Dzurak, A. S. (2014). An addressable quantum dot qubit with fault-tolerant control-fidelity. *Nature Nanotechnology*, volume 9, p. 981–985.
- [86] Veldhorst, M., Yang, C. H., Hwang, J. C. C., Huang, W., Dehollain, J. P., Muhonen, J. T., Simmons, S., Laucht, A., Hudson, F. E., Itoh, K. M., Morello, A. et Dzurak, A. S. (2015). A two-qubit logic gate in silicon. *Nature*, volume 526, p. 410–414.
- [87] Viennot, J. J., Dartiailh, M. C., Cottet, A. et Kontos, T. (2015). Coherent coupling of a single spin to microwave cavity photons. *Science*, volume 349, p. 408–411.
- [88] Wallraff, A., Schuster, D. I., Blais, A., Frunzio, L., Huang, R.-S., Majer, J., Kumar, S., Girvin, S. M. et Schoelkopf, R. J. (2004). Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature*, volume 431, p. 162–167.
-

- [89] Walter, T., Kurpiers, P., Gasparinetti, S., Magnard, P., Potočnik, A., Salathé, Y., Pechal, M., Mondal, M., Oppliger, M., Eichler, C. et Wallraff, A. (2017). Rapid high-fidelity single-shot dispersive readout of superconducting qubits. *Phys. Rev. Appl.*, volume 7 (054020).
- [90] Warren, A., Barnes, E. et Economou, S. E. (2019). Long-distance entangling gates between quantum dot spins mediated by a superconducting resonator. *Phys. Rev. B*, volume 100 (161303).
- [91] Watson, T. F., Philips, S. G. J., Kawakami, E., Ward, D. R., Scarlino, P., Veldhorst, M., Savage, D. E., Lagally, M. G., Friesen, M., Coppersmith, S. N., Eriksson, M. A. et Vandersypen, L. M. K. (2018). A programmable two-qubit quantum processor in silicon. *Nature*, volume 555, p. 633–637.
- [92] Watzinger, H., Kukučka, J., Vukušić, L., Gao, F., Wang, T., Schäffler, F., Zhang, J.-J. et Katsaros, G. (2018). A germanium hole spin qubit. *Nature Communications*, volume 9 (3902).
- [93] Wiseman, H. M. (1996). Quantum trajectories and quantum measurement theory. *Quantum Semiclassical Optics*, volume 8, p. 205–222.
- [94] Wiseman, H. M. et Milburn, G. J. (2010). *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, 460 p.
- [95] Wu, T. et Guo, J. (2018). Performance assessment of resonantly driven silicon two-qubit quantum gate. *IEEE Electron Device Letters*, volume 39, p. 1096–1099.
- [96] Yang, C. H., Chan, K. W., Harper, R., Huang, W., Evans, T., Hwang, J. C. C., Hensen, B., Laucht, A., Tantt, T., Hudson, F. E., Flammia, S. T., Itoh, K. M., Morello, A., Bartlett, S. D. et Dzurak, A. S. (2019). Silicon qubit fidelities approaching incoherent noise limits via pulse engineering. *Nature Electronics*, volume 2, p. 151–158.
- [97] Yang, C. H., Leon, R. C. C., Hwang, J. C. C., Saralva, A., Tantt, T., Huang, W., Camirand Lemyre, J., Chan, K. W., Tan, K. Y., Hudson, F. E., Itoh, K. M., Morello, A., Pioro-Ladrière, M., Laucht, A. et Dzurak, A. S. (2020). Operation of a silicon quantum processor unit cell above one kelvin. *Nature*, volume 580, p. 350–354.
- [98] Yang, C. H., Rossi, A., Ruskov, R., Lai, N. S., Mohiyaddin, F. A., Lee, S., Tahan, C., Klimeck, G., Morello, A. et Dzurak, A. S. (2013). Spin-valley lifetimes in a silicon quantum dot with tunable valley splitting. *Nature Communications*, volume 4 (2069).
- [99] Yang, X.-d., Arenz, C., Pelczar, I., Chen, Q.-M., Wu, R.-B., Peng, X. et Rabitz, H. (2020). Assessing three closed-loop learning algorithms by searching for high-quality quantum control pulses. *Phys. Rev. A*, volume 102 (062605).
-

- 
- [100] Yoneda, J., Otsuka, T., Takakura, T., Pioro-Ladrière, M., Brunner, R., Lu, H., Nakajima, T., Obata, T., Noiri, A. et Palmstrøm, C. J. (2015). Robust micromagnet design for fast electrical manipulations of single spins in quantum dots. *Appl. Phys. Express*, volume 8 (084401).
- [101] Zajac, D. M., Hazard, T. M., Mi, X., Nielsen, E. et Petta, J. R. (2016). Scalable gate architecture for a one-dimensional array of semiconductor spin qubits. *Phys. Rev. Applied*, volume 6 (054013).
- [102] Zajac, D. M., Sigillito, A. J., Russ, M., Borjans, F., Taylor, J. M., Burkard, G. et Petta, J. R. (2018). Resonantly driven CNOT gate for electron spins. *Science*, volume 359, p. 439–442.
- [103] Zhang, J., Liu, Y.-X., Wu, R.-B., Jacobs, K. et Nori, F. (2017). Quantum feedback : Theory, experiments, and applications. *Physics Reports*, volume 679, p. 1–60.
- [104] Zhao, P. et Woolard, D. (2008). Electron-longitudinal-acoustic-phonon scattering in double-quantum-dot based quantum gates. *Phys. Lett. A*, volume 372, p. 1666–1670.
- [105] Zong, Z., Sun, Z., Dong, Z., Run, C., Xiang, L., Zhan, Z., Wang, Q., Fei, Y., Wu, Y., Jin, W., Xiao, C., Jia, Z., Duan, P., Wu, J., Yin, Y. et Guo, G. (2021). *Phys. Rev. Appl.*, volume 15 (064005).
- [106] Zwanenburg, F. A., Dzurak, A. S., Morello, A., Simmons, M. Y., Hollenberg, L. C. L., Klimeck, G., Rogge, S., Coppersmith, S. N. et Eriksson, M. A. (2013). Silicon quantum electronics. *Rev. Mod. Phys.*, volume 85 (961).
-

