Rostocker Mathematisches Kolloquium

Heft 48

Universität Rostock

Fachbereich Mathematik

1995

https://doi.org/10.18453/rosdok_id00003281

Herausgeber: Der Rektor der Universität Rostock

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Wildenhain
(Sprecher des Fachbereichs Mathematik)
Dr. Werner Plischke

Redaktionelle Bearbeitung: Dr. Werner Plischke

Herstellung der Druckvorlage: S. Dittmer
W. Hartmann
H. Schubert

Redaktionsschluß: 28. Juli 1995

Universität Rostock
Mathematisch-Naturwissenchaftliche Fakultät
FB Mathematik
D-18051 Rostock

Das **Rostocker Mathematische Kolloquium** erscheint dreimal im Jahr.

Zitat–Kurztitel: Rostock. Math. Kolloq. (1995) **48**

ISSN 0138-3248

Bezugsmöglichkeiten: Universität Rostock, Presse- und Informationsstelle, Wissenschaftspublizistik
Albert-Einstein-Straße 23, 18051 Rostock, ☎ (0381) 4 98 19 36; FAX (0381) 4 98 13 70
Universität Rostock, Universitätsbibliothek, Schriftentausch, 18051 Rostock

Druck: Drucktechnische Zentralstelle Universität Rostock 790/95

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 03–10 (1995)

Subject Classification (AMS)
06F05 20M14

Lothar Berg

Two classes of linear involutory semigroups

We construct two classes of involutory semigroups, which together with two already known generating rules yield δ_n linear involutory semigroups of order n, where

$$\begin{aligned} \delta_{2n} &= 2^{n+2} - \frac{1}{2}(n+1)(n+6)\,, \\ \delta_{2n+1} &= 3 \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{2}(n^2+9n+10) \end{aligned} \tag{1}$$

for $n \geq 1$. By the way, we extend the rule for the construction of linear archimedian involutory semigroups in L. Berg and W. Peters [4].

1. Preliminaries

According to [3], every commutative semigroup can be embedded into an involutory semigroup, where the operation is considered as addition and the neutral element is called the zero element. The finite linear involutory semigroups S can be characterized in the following two ways. Let n be the order of S, and we denote the elements of S by $1, 2, \dots, n$. For a fixed i, let $i + j = x_j$ in the semigroup with $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, and let $d_j = x_j - x_{j-1}$ in the natural sense with $x_0 = 0$. Note that x_j also depends on i.

Characterization 1 (cf. [1]): *The commutative semigroup S with zero element is an involutory semigroup, if and only if for all i, j with fixed i, the element j appears in $x_1, x_2, \dots, x_n$ exactly d_{n+1-j} times.*

With the foregoing notations, and using a star for the involution in S, the latter can be written as

$$i^* = n - (i-1)\,. \tag{2}$$

In the next statement, we use the usual ordering for the elements of S.

Characterization 2 (cf. [2]): *Let in the commutative semigroup S with zero element the addition be compatible with the ordering. Then S is an involutory semigroup, if and only if*

$$i+j \geq o^* \text{ for } j \geq i^* \text{ and } i+j < o^* \text{ for } j < i^* \,, \tag{3}$$

where o denotes the zero element of S.

In case of $o = 1$ and therefore $o^* = n$, the first property in (3) simplifies to $i + j = n$ for $j \geq i^*$. For the construction of linear involutory semigroups, we need two simple statements from A.H. Clifford and G.B. Preston [5].

Lemma 1 *Let $S = \{s_i | i \in I\}$ be a commutative semigroup with an index set I, and $s_i \mapsto A_i$ a mapping $S \mapsto A = \bigcup_{i \in I} A_i$ with certain pairwise disjoint sets A_i and $s_i \in A_i$. Then with the addition $a + b = s_i + s_j$ for $a \in A_i, b \in A_j$, the set A is also a commutative semigroup.*

The semigroup A is called an inflation of S, where the trivial case is included that each A_i contains only the element s_i.

Lemma 2 *Let S and A be two commutative semigroups with $S \cap A = \emptyset$. We define*

$$a + s = s + a = s \tag{4}$$

for all $s \in S$ and $a \in A$. Then $S \cup A$ with unchanged addition in S and A as well as (4) is also a commutative semigroup.

Let us mention that our involutory semigroups are something else than both the special involution semigroups in D. Easdown and W.D. Munn [6], and the involutive semigroups in K.-H. Neeb [8].

2. Linear involutory semigroups with nonnegative elements

First, we want to construct a class of finite linear archimedian involutory semigroups. Such semigroups have only nonnegative elements and no idempotent element, disregarding the zero and the maximal element. From the numbers $3, 4, \cdots, [(n+1)/2] = m$ with $m \geq 3$ we choose all $\binom{m-2}{k}$ different k-tuples $a_1 \cdots a_k$ in the ordinary ordering with $0 \leq k \leq m-2$, where the 0-tuple is empty, and we define $d_j = a_j - a_{j-1}$ with $a_0 = 2$. Each a_j we choose d_j times, and in case of $a_k < m$ we choose $a_{k+1} = 2m - a_k$ exactly $m - a_k$ times. The result

$$a_0\, a_1 \cdots a_1\, a_2 \cdots a_2 \cdots a_{k+1} \cdots a_{k+1}$$

we choose as $x_1 \cdots x_{m-1}$, since these are exactly

$$1 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) + (m - a_k) = m - 1$$

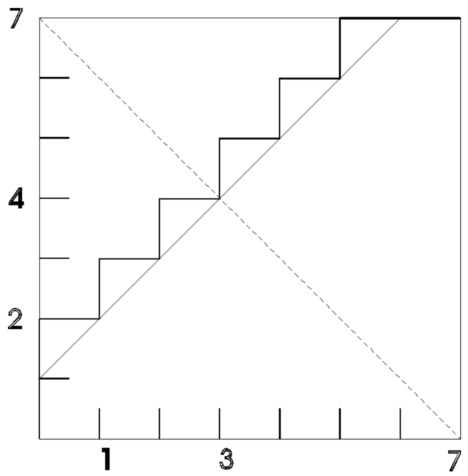
numbers. In case of odd $n = 2m - 1$ we continue this $(m-1)$–tuple to an n-tuple $x_1 \cdots x_n$ according to the Characterization 1. In case of even $n = 2m$ we start from the old $(2m-1)$–tuple $x_1 \cdots x_{2m-1}$, augment all elements x_j with $x_j > m$ as well as all indices j with $j \geq m$ by 1 and choose $x_m = m+1$ for $x_{m+1} > x_{m-1}$ and $x_m = x_{m-1}$ for $x_{m+1} = x_{m-1}$, respectively. Then the n–tuple $x_1 \cdots x_n$ also satisfies the Characterization 1. In both cases we obtain

$$\alpha_n = 2^{m-2} \tag{5}$$

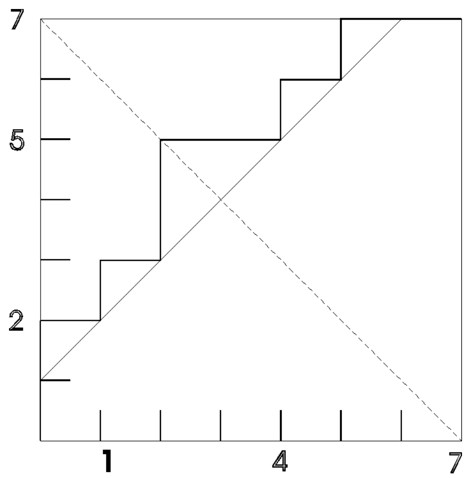
different n–tuples. For example, in the case $m = 4$ we have n–tuples

for $n = 7$	(I) 2 3 4 5 6 7 7	and for $n = 8$	(V) 2 3 4 5 6 7 8 8
	(II) 2 3 5 5 6 7 7		(VI) 2 3 6 6 6 7 8 8
	(III) 2 4 4 6 6 7 7		(VII) 2 4 4 5 7 7 8 8
	(IV) 2 6 6 6 6 7 7		$(VIII)$ 2 7 7 7 7 7 8 8

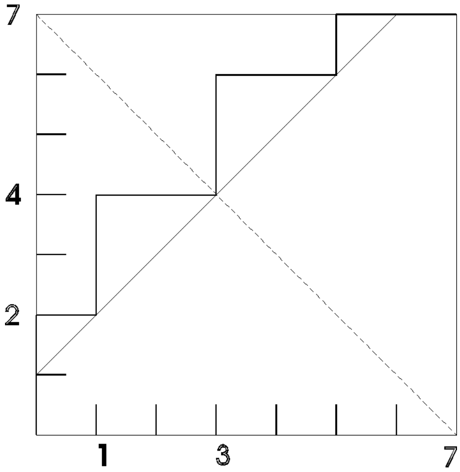
The corresponding step functions $f(x) = x_j$ for $j - 1 < x \leq j$ and $j = 1, \ldots, n$ have the graphs, which are listed below. Geometrically, the Characterization 1 means the symmetry of the graph with respect to the dotted diagonal. We can also consider the case $m = 2$ with the n–tuples 2 3 3 and 2 3 4 4, where (5) remains valid, and the case $n = 2$ with the pair 2 2 and $\alpha_2 = 1$. Now, we are going to show that each of the foregoing n–tuples $x_1 \cdots x_n$ generates a linear archimedian involutory semigroup in the following way. Let $a_0, a_1, \ldots, a_l$ with $l > k$ be the different elements of the n–tuple in the ordinary ordering. By means of the definition $a_0 + a_j = a_{j+1}$ for $j = 0, \ldots, l$ with $a_{l+1} = n$, these elements form a cyclic semigroup, and the replacement $a_j \to \{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+1} - 1\}$ for $j = 0, \ldots, l$ yields an



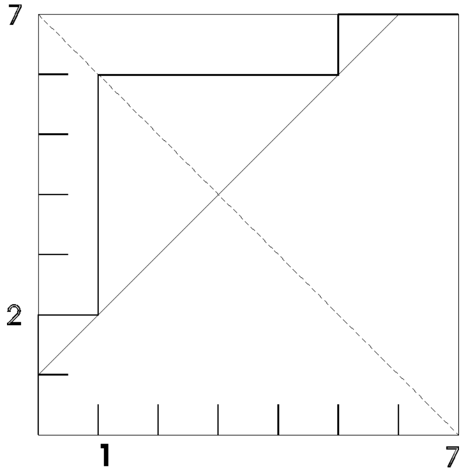
(I)



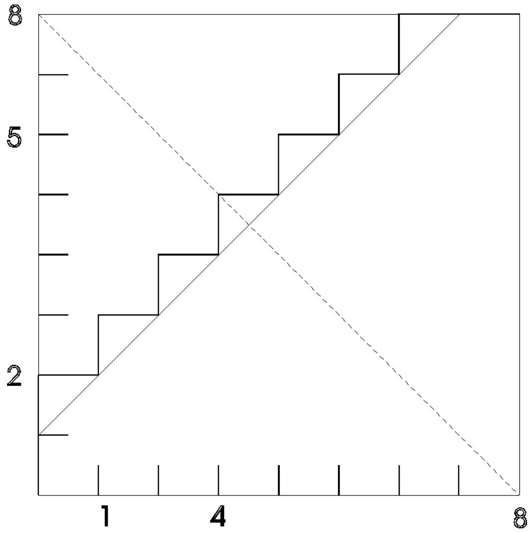
(II)



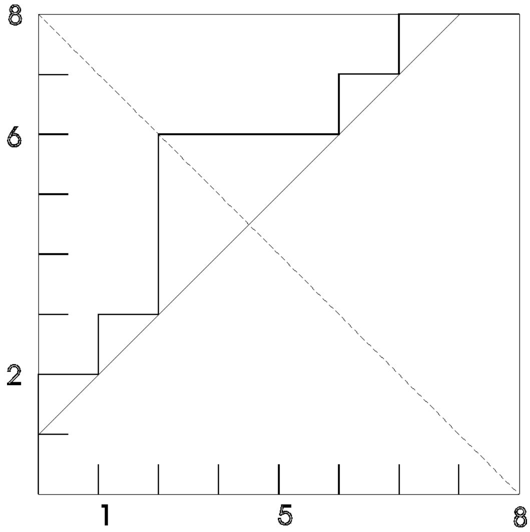
(iii)



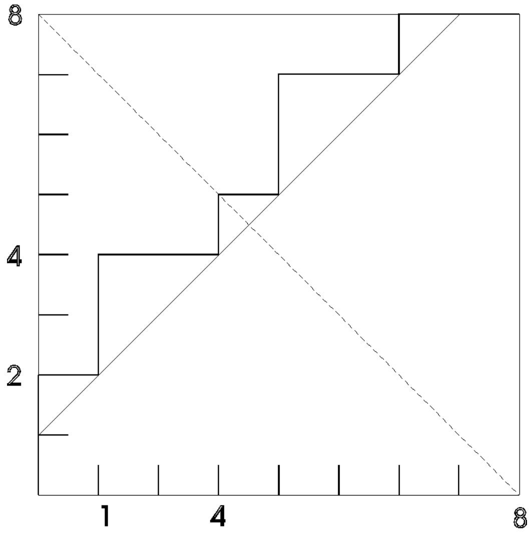
(iv)



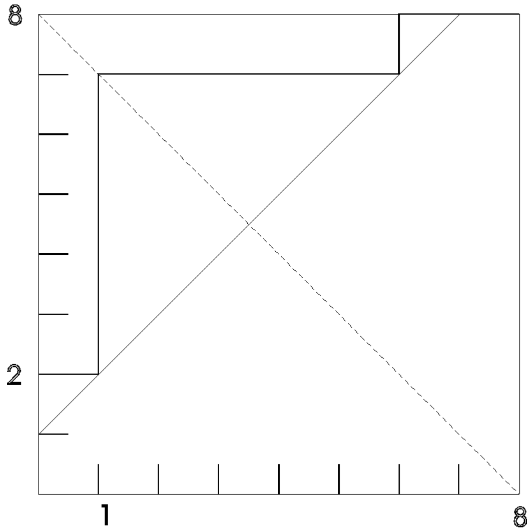
(v)



(vi)



(vii)



(viii)

inflation in the sense of Lemma 1 with $2+j=x_j$ for $j=2,\dots,n$, since we have $x_{a_j}=a_{j+1}$ for $j=0,\dots,l$. Next, we replace the sums $i+j=n-1$ in case of $i\geq j^*$ with (2) by $i+j=n$. This replacement does not hit the associativity, since $(n-1)+k=n+k=n$ for all $k=2,\dots,n$. Finally, we adjunct 1 as zero element to the semigroup, and we see that both Characterizations 1 and 2 are satisfied, so that we have shown:

Theorem 1 *Every n–tuple of the foregoing type determines a linear involutory semigroup.*

The three main steps in the proof are in the case (VI):

$$
\begin{array}{c|ccccc}
+ & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 8 \\
3 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{c|c:ccc:ccc}
+ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & 3 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ \hdashline
3 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
4 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ \hdashline
6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{c|c:ccc:ccc}
+ & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
2 & 3 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ \hdashline
3 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
4 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \hdashline
6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
\end{array}
\;\rightarrow\;
\begin{array}{c|c:ccccccc}
+ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hdashline
2 & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\
3 & 3 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 \\
4 & 4 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
6 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8
\end{array}
$$

The first semigroups, obtained by Theorem 1, are $H^2, H^3_2, H^4_4, H^5_7, H^5_8, H^6_{15}, H^6_{17}$ and

$$
\begin{gathered}
(I)\ H^7_{30},\ \ (II)\ H^7_{31},\ \ (III)\ H^7_{32},\ \ \ (IV)\ H^7_{36}, \\
(V)\ H^8_{67},\ (VI)\ H^8_{69},\ (VII)\ H^8_{71},\ (VIII)\ H^8_{79}
\end{gathered}
$$

from [1], [4] and [9]. All these semigroups are archimedian ones, so that they can be represented as in [4] as homomorphic images of numerical semigroups. For example, the 10-tupel

$$2\ 4\ 4\ 7\ 7\ 7\ 9\ 9\ 10\ 10$$

generates a semigroup, which can be represented by the integers

$$0\ 7\ 8\ 14{=}15{=}16\ 17\ 18\ 21{=}22{=}23{=}24{=}25{=}26\ 27\ 28{=}29{=}30{=}31{=}32{=}33{=}34\ 35$$

with the ordinary addition, where 35 is equal to all greater integers. But the same 10 - tuple appears also in the semigroup

$$0\ 7\ 9\ 14{=}16\ 17\ 18\ 21{=}23{=}24{=}25\ 26{=}27\ 28{=}30{=}31{=}32{=}33{=}34\ 35.$$

The last example shows that the definition of [4] for linear archimedian involutory semigroups can be generalized by the following

Construction: *Let $N(q_1,\dots,q_k)$ with $k\geq 1$ be the numerical semigroup with the natural numbers $q_1,\dots,q_k$ as minimal generators. After choosing a suitable natural number m, we* *obtain an involutory semigroup by the following identification: For two neighbouring numbers a and $a+l$ with $l > 0$ from $N(q_l, \dots, q_k)$, we put $a = a+l$, if and only if $m-a-1, \dots, m-a-l$ do not belong to $N(q_1, \dots, q_k)$.*

The paper [4] only deals with the case $l = 1$.

By Theorem 1, we have constructed α_n linear archimedian involutory semigroups with (5) for $n \geq 3$ and $m = [(n+1)/2]$. By means of the first generating rule from W. Peters [9], which was verified by I. Jagnow in [7], we obtain from each linear involutory semigroup of order $n-2$ with nonnegative elements a linear nonarchimedian involutory semigroup of order n with nonnegative elements. Hence, if β_n denotes the number of linear involutory semigroups of order n with nonnegative elements, obtained by Theorem 1 and the first rule of Peters and Jagnow, we have the recursion formula

$$\beta_n = \alpha_n + \beta_{n-2}$$

and the initial values $\beta_2 = \beta_3 = 1$, so that (5) implies

$$\beta_{2n} = 2^{n-1}, \quad \beta_{2n+1} = 2^n - 1 \tag{6}$$

for $n \geq 1$.

3. Linear involutory semigroups with arbitrary elements

Now, we want to use Lemma 2 and choose as A the linear involutory semigroup F'_p from [1] with the addition table

$+$	$1\,2 \cdots\cdots$	$p-2$	$p-1$	p	q	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$\cdots\cdots$	$p+q-1$	$p+q$
1	$1\,1 \cdots\cdots$	1	1	1	q	q	q	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	q	$p+q$
2	$1\,2 \cdots\cdots$	2	2	2	q	q	q			$p+q-1$	$p+q$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\,\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\ \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\ \ \ \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\ \ \ \ \ \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot\,\cdot\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$			$\cdot$	$\cdot$
$p-2$	$1\,2 \cdots\cdots$	$p-2$	$p-2$	$p-2$	q	q	q			$\cdot$	$\cdot$
$p-1$	$1\,2 \cdots\cdots$	$p-2$	$p-1$	$p-1$	q	q	$q+2$	$q+3$	$\cdots\cdots$	$p+q-1$	$p+q$
p	$1\,2 \cdots\cdots$	$p-2$	$p-1$	p	q	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$\cdots\cdots$	$p+q-1$	$p+q$

$q > p$ and $i+j = p+q$ for $i, j \geq q$, so that p is the zero element. Then we take an arbitrary linear involutory semigroup S_0 of order $n \geq 3$ with nonnegative elements, cancel the zero element, and take the arising semigroup as S in Lemma 2. Finally, we choose $q = p+n-2$, denote the first $n-3$ elements of S by $p+1, \dots, q-1$, and identify the last but one element of S with q, and the last element with $p+q$. Then, again, this does not hit the associativity, and both Characterizations 1 and 2 are satisfied, so that we have shown:

Theorem 2 *Every linear involutory semigroup S with nonnegative elements of order $n \geq 3$ can be extended in the foregoing way to a sequence of linear involutory semigroups of order $n + 2r$ with arbitrary natural r.*

Examples are

$$\begin{array}{lll} H_2^3 \to H_5^5 \to H_{19}^7 \to \check{H}_{19}^7 \to \cdots & & \\ H_3^4 \to H_9^6 \to \check{H}_9^6 \to \cdots\,, & H_4^4 \to H_{10}^6 \to \check{H}_{10}^6 \to \cdots\,, & \\ H_6^5 \to H_{22}^7 \to \check{H}_{22}^7 \to \cdots\,, & H_7^5 \to H_{23}^7 \to \check{H}_{23}^7 \to \cdots\,, & H_6^5 \to H_{24}^7 \to \check{H}_{24}^7 \to \cdots\,. \end{array}$$

Obviously, the semigroups of the first sequence, starting with H_2^3, are nothing else than the original semigroups $A = F_p'$ with $q = p + 1$. As we know from W. Peters [9], we also have $\check{H}_2^3 = H_5^5$, $\check{H}_5^5 = H_{19}^7, \ldots, \check{H}_8^5 = H_{24}^7$, and it is easy to see that, generally, the semigroups, generated by means of Theorem 2 from a semigroup S with nonnegative elements, are exactly the semigroups, arising from S by successive application of the second generating rule of Peters and Jagnow.

Let γ_n be the number of semigroups of order n, obtained by the procedures of Section 2 and Theorem 2, then for $n \geq 3$

$$\gamma_n = \beta_n + \beta_{n-2} + \cdots + \beta_{n-2l}$$

with $n - 2l$ equal to 3 or 4, so that in view of (6)

$$\gamma_{2n} = 2^n - 2, \quad \gamma_{2n-1} = 2^n - n - 1$$

for $n \geq 2$.

To every linear involutory semigroup of order n it is possible, in view of Theorem 4 from [1], to construct a new linear involutory semigroup of order $n+1$ with the property $1+j = 1$ for $j < n + 1$. Since the foregoing semigroups do not have this property, we obtain, by means of them and the just mentioned theorem, finally δ_n linear involutory semigroups with

$$\delta_n = \gamma_n + \delta_{n-1}$$

and $\delta_2 = 1$, so that we obtain (1). The first values of δ_n are

$$\delta_2 = 1, \quad \delta_3 = 2, \quad \delta_4 = 4, \quad \delta_5 = 8, \quad \delta_6 = 14, \quad \delta_7 = 25, \quad \delta_8 = 39.$$

The numbers δ_n up to $n = 5$ are precisely the numbers k_n of all linear involutory semigroups of order n. In view of $k_6 = 17$, $k_7 = 36$ and $k_8 = 79$ it is to conjecture that, generally, $k_n > 2^{n-2}$ for $n \geq 6$.

Correction. In the last but two line of table 2 in [4], the last two letters l must be replaced both by n.

References

[1] **Berg, L. :** *Erzeugung linearer involutorischer Halbgruppen.* Rostock. Math. Kolloq.**32**, 25-38 (1987)

[2] **Berg, L. :** *Linear involutory semigroups with two generators.* Rostock. Math. Kolloq. **33**, 49-56 (1988)

[3] **Berg, L. :** *Every commutative semigroup can be embedded into a complementary semigroup with involutuion.* Math. Nachr. **136**, 321-331 (1988)

[4] **Berg, L.** and **Peters, W. :** *Die linearen involutorischen Halbgruppen achter Ordnung.* Rostock. Math. Kolloq. **46**, 35-44 (1993)

[5] **Clifford, A.H.** and **Preston, G.B. :** *The algebraic theory of semigroups I.* Math. Surveys 7, AMS, Providence 1961

[6] **Easdown, D.** and **Munn, W.D. :** *On semigroups with involution.* Bull. Austral. Math. Soc. **48**, 93-100 (1993)

[7] **Jagnow, I. :** *Erweiterung linearer involutorischer Halbgruppen.* Beiträge Algebra Geometrie **31**, 103-119 (1990)

[8] **Neeb, K.-H. :** *Representations of involutive semigroups.* Preprint Nr. 1535, TH Darmstadt (1993)

[9] **Peters, W. :** *Berechnung der linearen involutorischen Halbgruppen sechster und siebenter Ordnung.* Rostock. Math. Kolloq. **35**, 45-56 (1988)

received: October 19, 1993

Author:

Prof. Dr. L. Berg
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
18051 Rostock
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 11–18 (1995)

Subject Classification (AMS)
11B37, 39B32

Lothar Berg; Günter Meinardus

The $3n+1$ Collatz Problem and Functional Equations

Abstract. *This paper reports on some functional equations, which arise in connection with the famous $3n+1$ Collatz problem. In particular, it reports on two analytic versions of the corresponding Collatz conjecture, which are contained in* [1].

1 Preliminaries

We start with the modified Collatz mapping $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, defined by

$$t(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{for} \quad n \equiv 0 \mod 2 \quad , \\ \frac{1}{2}(3n+1) & \text{for} \quad n \equiv 1 \mod 2 \quad , \end{cases} \tag{1}$$

with $n \in \mathbb{Z}$, and consider the iterates t_m, defined recursively by

$$t_m(n) = t(t_{m-1}(n)), \; t_0(n) = n \tag{2}$$

for $m \in \mathbb{N}$. Already as a student, about 1930, L. Collatz has stated the following conjecture, cf. J. C. Lagarias [3] and U. Eckhardt [2]:

Conjecture 1. *For every number $n \in \mathbb{N}$ there exists a number $m(n)$ with the property*

$$t_{m(n)}(n) = 1 \quad . \tag{3}$$

A general proof of this Collatz conjecture is still open. After introducing the functions $x_m(n)$ with the only values 0 and 1 by

$$t_m(n) \equiv x_m(n) \mod 2 \quad , \tag{4}$$

the iterates t_m can be represented explicitly in the following way, cf. J. C. Lagarias [3]:

Lemma . *The iterates t_m possess the representation*

$$t_m(n) = \frac{1}{2^m}\left(a_{m\nu}n + b_{m\nu}\right) \ \textit{for } n \equiv \nu \mod 2^m \tag{5}$$

and $0 \leq \nu < 2^m$ *with the coefficients*

$$a_{m\nu} = 3^{x_0(\nu)+\cdots+x_{m-1}(\nu)}, \ b_{m\nu} = \sum_{j=0}^{m-1} x_j(\nu)2^j \cdot 3^{x_{j+1}(\nu)+\cdots+x_{m-1}(\nu)} \tag{6}$$

and the initial values $a_{m0} = 1, \ b_{m0} = 0$.

In what follows, we give a report on the main results of [1], but we also make some new considerations. Concerning the corresponding predecessor sets, cf. G. Wirsching [4].

2 Generating functions

For the mapping (1), we introduce the three generating functions

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_m(n)z^n \quad , \tag{7}$$

$$g_n(w) = \sum_{m=0}^{\infty} t_m(n)w^n \quad , \tag{8}$$

$$F(z,w) = \sum_{m,n=0}^{\infty} t_m(n)z^n w^m \tag{9}$$

of the complex variables z and w. In view of the estimation

$$t_m(n) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^m (n+1) - 1$$

for all integers $m, n \geq 0$, the first series converges for $|z| < 1$, the second for $|w| < \frac{2}{3}$, and the third in the polydisk $\left\{(z,w)\,\middle|\,|z| < 1, |w| < \frac{2}{3}\right\}$. Hence, the three generating functions are holomorphic in the just mentioned domains.

Theorem 1. *The functions $f_m(z)$ are rational functions of the form*

$$f_m(z) = \frac{p_m(z)}{(1 - z^{2^m})^2} \tag{10}$$

with the numerator

$$p_m(z) = \sum_{\nu=1}^{2^{m+1}-1} c_{m\nu} z^\nu \tag{11}$$

and the coefficients

$$c_{m\nu} = \begin{cases} t_m(\nu) & \text{for } \nu = 1, 2, \ldots, 2^m \quad , \\ -t_m(\nu - 2^{m+1}) & \text{for } \nu = 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1} - 1 \quad . \end{cases} \tag{12}$$

It can be proved that Conjecture 1 is equivalent to

Conjecture 2. *The functions $g_n(w)$ from* (8) *are rational functions of the form*

$$g_n(w) = \frac{q_n(w)}{1 - w^2} \quad , \tag{13}$$

where $q_n(w)$ are polynomials with integer coefficients.

The functions (9) can also be represented as

$$F(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z) w^m = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n \quad .$$

3 Functional equations

Now, we introduce the notation

$$\lambda = e^{2\pi i/3} \quad . \tag{14}$$

Theorem 2. *The generating functions* (7),(8) *and* (9) *satisfy the linear functional equations*

$$f_{m+1}(z^3) = f_m(z^6) + \frac{1}{3z} \sum_{\nu=0}^{2} \lambda^\nu f_m(\lambda^\nu z^2) \quad , \tag{15}$$

$$g_{2n}(w) = 2n + w g_n(w), \quad g_{2n-1}(w) = 2n - 1 + w g_{3n-1}(w) \quad , \tag{16}$$

$$F(z^3, w) = \frac{z^3}{(1 - z^3)^2} + wF(z^6, w) + \frac{w}{3z} \sum_{\nu=0}^{2} \lambda^\nu F(\lambda^\nu z^2, w) \quad . \tag{17}$$

In view of the factor w at the right-hand side, the homogeneous equation

$$H(z^3, w) = wH(z^6, w) + \frac{w}{3z} \sum_{\nu=0}^{2} \lambda^\nu \, H(\lambda^\nu z^2, w)$$

corresponding to (17) cannot have a nontrivial solution, which is holomorphic in w in the neighbourhood of $w = 0$, and for a fixed $z \neq 0$. However, for $w = 1$ and $H(z, 1) = h(z)$ we get the functional equation

$$h(z^3) = h(z^6) + \frac{1}{3z} \sum_{\nu=0}^{2} \lambda^\nu h(\lambda^\nu z^2) \quad , \tag{18}$$

and this equation has the solution

$$h(z) = h_0 + h_1 \frac{z}{1-z} \tag{19}$$

for arbitrary constants h_0 and h_1.

It can be proved that Conjecture 1 is also equivalent to

Conjecture 3. *Besides of* (19)*, there exist no further solutions of* (18)*, which are holomorphic for* $|z| < 1$*.*

A first step to an analytic discussion of the functional equation (18) is given by the following

Theorem 3. *Every entire solution of the functional equation* (18) *is constant.*

Proof. Let f be an entire solution of (18) and $M(r)$ its maximum modulus, defined by

$$M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| \ .$$

The equation (18) yields for $r > 1$:

$$M(r^6) \leq M(r^3) + \frac{1}{r} M(r^2) \leq 2M(r^3) \ ,$$

since $M(r)$ is non-decreasing, and the maximum is attained at the boundary $|z| = r$.

Hence, for every integer $k \geq 0$, we obtain

$$M(r^6) \leq 2^{k+1} M(r^{3 \cdot 2^{-k}}) \ .$$

Now, let $r > 2^{1/3}$ and choose

$$k = 1 + [\log(3 \log r)] \ ,$$

where log denotes the logarithm of basis 2. Then

$$3 \log r < 2^k \leq 6 \log r \ ,$$

and therefore

$$r^{3 \cdot 2^{-k}} < 2 \ .$$

From this, we conclude

$$M(r^6) \leq 12M(2)\log r$$

for all $r > 2^{1/3}$, or, equivalently,

$$M(r) \leq 2M(2)\log r$$

for all $r > 4$, and Cauchy's estimation for the coefficients of the power series of the function f at $z = 0$ yields the assertion. ■

Next, we want to set up some further functional equations, which are closely connected with (18). After replacing z^3 by z and using Cauchy's integral formula, equation (18) can also be written in form of the integral equation

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(w^2+(w+1)z+z^2)(w-z)}{(w^3-z^2)(w-z^2)}h(w)\,dw \quad , \tag{20}$$

where we have to integrate over the circle $|w| = r$ with $|z|^{\frac{2}{3}} < r < 1$ in the positiv direction.

Replacing z in (18) by $-z$, we easily find that (18) is equivalent to the system of functional equations

$$h(z) + h(-z) = 2h(z^2) \quad , \tag{21}$$

$$h(z^3) - h(-z^3) = \frac{2}{3z}\sum_{\nu=0}^{2}\lambda^\nu h(\lambda^\nu z^2) \tag{22}$$

with $|z| < 1$. Equation (21) has the general solution

$$h(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}}$$

with arbitrary constants c_n, so far as the series converges for $|z| < 1$. Another form of the general solution of (21) was given in [1], and there was also constructed the general solution of (22).

It may be useful to know that the right–hand side of (22), if we denote it by $2Th(z)$, has the property

$$T\frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} = \begin{cases} \dfrac{z^{4n-3}}{1-z^{12n-6}} & \text{for} \quad n \equiv 0 \mod 3 \quad , \\ \dfrac{z^{8n-5}}{1-z^{12n-6}} & \text{for} \quad n \equiv 1 \mod 3 \quad , \\ 0 & \text{for} \quad n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

for $n \geq 1$. In any case, it is a holomorphic function of z^3 for $|z| < 1$.

The integral $\Phi(z) = \int_o^z h(w)dw$ of a solution of (22) satisfies the functional equation with constant coefficients

$$\Phi(z^3) + \Phi(-z^3) = \sum_{\nu=0}^{2} \Phi(\lambda^\nu z^2) \quad . \tag{23}$$

After the substitutions $z = \lambda^t$ and $\varphi(t) = \Phi(\lambda^t)$, we obtain the functional equation

$$\varphi(3t) + \varphi\left(3t + \frac{3}{2}\right) = \varphi(2t) + \varphi(2t+1) + \varphi(2t+2) \quad , \tag{24}$$

where we have to look for a solution $\varphi(t)$ with period 3. In view of (14) and $|z| < 1$, equation (24) must be solved for Im $t > 0$. But it also may be interesting to study it for real t.

4 The function $f_m(z)$

Introducing the notation

$$d_m(z) = f_{m+1}(z) - f_m(z) - \frac{1}{4(1-z)} \quad , \tag{25}$$

the function $f_m(z)$ from (7) can be written in the form

$$f_m(z) = \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{m}{4(1-z)} + \sum_{\nu=0}^{m-1} d_\nu(z) \quad , \tag{26}$$

where it turns out that

$$d_m(z) = \frac{r_m(z)}{(1+z^{2^m})^2} \tag{27}$$

with polynomials $r_m(z)$ of degree $2^{m+1} - 1$ (in [1] we have written $\frac{1}{4} r_m$ instead of r_m). The functions (10) and (27) can also be written in the form

$$f_m(z) = \frac{p_{2m}(z)}{(1-z^{2^m})^2} + \frac{p_{1m}(z)}{1-z^{2^m}}, \; d_m(z) = \frac{r_{2m}(z)}{(1+z^{2^m})^2} + \frac{r_{1m}(z)}{1+z^{2^m}} \tag{28}$$

with polynomials of degree $2^m - 1$ in the numerators, in particular,

$$p_{2m}(z) = \sum_{\nu=0}^{2^m-1} a_{m\nu} z^\nu, \; r_{2m}(z) = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{2^m-1} (-1)^{x_m(\nu)} a_{m\nu} z^\nu \quad . \tag{29}$$

The representation of $p_{2m}(z)$ follows immediately from (5), (10), (11), (12) and (18). The proof for the representation of $r_{2m}(z)$ was only scetched in [1], so that we give it here in detail. For this reason we introduce the notation $p(z) \sim q(z)$, if $p(z) = q(z) + O(1 + z^{2^m})$ for $z^{2^m} \to -1$. Then $1 - z^{2^m} \sim 2(1 + z^{2^m})$, and (25) and (28) imply

$$r_{2m}(z) \sim \frac{1}{4} p_{2,m+1}(z) \quad .$$

Expressing $p_{2,m+1}(z)$ by the first equation of (29), we obtain

$$r_{2m}(z) \sim \frac{1}{4} \sum_{\nu=0}^{2^m-1} (a_{m+1,\nu} - a_{m+1,2^m+\nu}) z^\nu \quad , \tag{30}$$

and since $r_{2m}(z)$ is a polynomial of degree $2^m - 1$, formula (30) must be an equality. On the other side, we find from (4) and (5) that $x_j(2^m + \nu) = x_j(\nu)$ for $0 \le j < m$, and $t_m(2^m + \nu) = a_{m\nu} + t_m(\nu)$ with $a_{m\nu} \equiv 1 \bmod 2$ in view of (6). Hence, (4) and (6) imply

$$a_{m+1,\nu} - a_{m+1,2^m+\nu} = \left(3^{x_m(\nu)} - 3^{\overline{x}_m(\nu)}\right) a_{m\nu} \quad ,$$

where $\overline{x}$ denotes the complement value of x, i. e. $\overline{x} = 1$ for $x = 0$, and $\overline{x} = 0$ for $x = 1$. But for these two values we have

$$3^x = 2 - (-1)^x, \quad 3^{\overline{x}} = 2 + (-1)^x \quad ,$$

so that

$$a_{m+1,\nu} - a_{m+1,2^m+\nu} = -2(-1)^{x_m(\nu)} a_{m\nu} \quad ,$$

and also the second equation of (29) is proved.

Finally, if we introduce the notation

$$r_m(z) = \sum_{\nu=0}^{2^{m+1}-1} e_{m\nu} z^\nu$$

and compare the Laurent-series of both sides of (25) for $|z| < 1$ and $|z| > 1$, respectively, the formulas (10), (11), (12) and (27) imply the representations

$$\begin{aligned} e_{m\nu} &= t_{m+1}(\nu) - t_m(\nu) - \tfrac{1}{4} && \text{for } \nu = 0, \ldots, 2^m - 1 \ , \\ e_{m,2^{m+1}-\nu} &= t_m(-\nu) - t_{m+1}(-\nu) + \tfrac{1}{4} && \text{for } \nu = 1, \ldots, 2^m \ . \end{aligned}$$

References

[1] **Berg, L.** und **Meinardus, G. :** *Functional equations connected with the Collatz problem.* Results in Math. **25**, 1-12 (1994)

[2] **Eckhardt, U. :** *Lothar Collatz.* In: E. Bredendiek, H. Burchard, U. Grothkopf, H. J. Oberle, G. Opfer, B. Werner (Eds.): *Lothar Collatz 1910 - 1990.* Hamburger Beiträge zur Angew. Math., Reihe B, Bericht **23**, 3-8 (1992)

[3] **Lagarias, J.C. :** *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations.* Amer. Math. Monthley **92**, 3-23 (1985)

[4] **Wirsching, G. :** *On the combinatorial structure of* $3N + 1$ *predecessor sets.* Discrete Math. (to appear)

received: August 11, 1994

supplemented: May 18, 1995

Authors:

Prof. Dr. L. Berg
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
18051 Rostock
Germany

Prof. Dr. G. Meinardus
Universität Mannheim
Fakultät für Mathematik und Informatik
68131 Mannheim
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 19–26 (1995)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Congruences on closed subsets of $\widetilde{P_k}$ and of $P_{k,L}$

Let be $E_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geq 2$, $P_k := \bigcup_{n\geq 1} P_k^n$, $P_k^n := \{f^n | f^n : E_k^n \to E_k\}$ and $\boldsymbol{P_k} := (P_k; \zeta, \tau, \triangle, \nabla, *)$, where ζ, τ, $\triangle$, ∇, $*$ denote the Mal'cev operations on P_k (see [6] or [7]). If the arity n of f^n can be seen from the context, we omit the upper index.

Here we consider the algebras

$$\boldsymbol{P(i)} \ := \ (P(i), \Omega_i)$$

as a generalization of $\boldsymbol{P_k}$ with $i \ \in \ \{0, 1, 2\}$,
$P(0) := \widetilde{P_k} = \bigcup_{n\geq 1} \widetilde{P_k^n}$, $\widetilde{P_k^n} \ := \{f^n | f^n : E_k^n \to E_k \cup \{\infty\}\}$,
$P(1) = P(2) := P_{k,L} = \bigcup_{n\geq 1} P_{k,L}^n$, $P_{k,L}^n := \{f^n | f^n : E_k^n \to E_L\}$
for $L > k$ and $\Omega_i := \{\zeta, \tau, \triangle, \nabla, *_i\}$.
The operations ζ, τ, $\triangle$, ∇, $*_i$ are defined as follow

$(\zeta f^n)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$,

$(\tau f^n)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$,

$(\triangle f^n)(x_1, \ldots, x_{n-1}) := f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$,

$(\nabla f^n)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := f(x_2, \ldots, x_{n+1})$ for $n \geq 2$,

$\zeta f^n = \tau f^n = \triangle f^n = \nabla f^n = f$ for $n = 1 \quad (f \in P(i))$,

$(f^n * g^m)(x_1, \ldots, x_{n+m-1}) := f\,(g(x_1, \ldots, x_m),\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})\ \ (f \in P(i),\ g \in P_k)$.

$$(f^n \ *_0 \ g^m)\ (x_1, \ldots, x_{m+n-1}) \ := \begin{cases} f\ (g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}) \\ \qquad\qquad \text{for } g(x_1, \ldots, x_m) \in E_k\ , \\ \infty \quad \text{else}\ , \end{cases}$$

$(f, g \in \widetilde{P_k})$,

$$f^n \ *_1 \ g^m := \begin{cases} f * g \text{ for } g \in P_k \ , \\ \\ f \quad \text{else} \ , \end{cases}$$

and

$$f^n \ *_2 \ g^m := \begin{cases} f * g \text{ for } g \in P_k \ , \\ \\ \text{not defined else} \end{cases}$$

$$(f, g \in P_{k,L}).$$

In [4] and [5] was proved that the algebras $\boldsymbol{P(i)}$ $(i \in \{1,2,3\})$ have similar properties. For instance, the number of the maximal classes of $\widetilde{P_k}$ and $P_{k,L}$ is equal and a description of the maximal classes of $\widetilde{P_k}$ (see [3]) gives also a description of the maximal classes of $P_{k,L}$ and conversely. We show now that there exist substantial distinctions concerning the congruences.

Regarding our terminology we mainly follow [4] and [7]. Only the main notations for this paper are introduced below.

$Im\ f$ denotes the range of $f \in P(i)$.

The functions $e_i^n \in P_k^n$ $(1 \leq i \leq n)$ defined by $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ are called projections. For any a $\in E_L \cup \{\infty\}$ the symbol c_a^n denotes the mapping $E_k^n \to \{a\}, n = 1, 2, \dots$.

Let be $\alpha^1 := \alpha$ and $\alpha^{j+1} f := \alpha(\alpha^j f)$ for every $\alpha \in \{\zeta, \tau, \triangle, \nabla\}, j \in \mathbb{N}$ and $f \in P(i)$.

A congruence κ on $P(i)$ is an equivalence relation on $P(i)$ which is compatible with the operations in Ω_i, that is

$$\begin{gathered} \forall f, g, s, t \in P(i) : (f, g) \in \kappa \ \wedge (s, t) \in \kappa \Longrightarrow \\ (f *_i s, g *_i t) \in \kappa \ \wedge (\forall \alpha \in \{\zeta, \tau, \triangle, \nabla\} : (\alpha f, \alpha g) \in \kappa) \ . \end{gathered} \tag{1}$$

The compatibility property (1) is an obvious condition for introducing an algebraic structure which is inherited from the algebra $\boldsymbol{P(i)}$.

We also write $f \sim g$ (κ) for $(f, g) \in \kappa$.

It is well–known that each algebra $\boldsymbol{A}$ has two trivial congruences:

$\kappa_0 := \{(f,f) | f \in A\}$ and $\kappa_1 := A \times A$.

A.I. Mal'cev showed in [6] that the algebra $\boldsymbol{P_k}$ moreover has only the congruence

$\kappa_a := \{(f,g) \in P_k^2 \mid af = ag\}$ (af denote the arity of f).

Beside he proved the following theorem:

Theorem 1 [6]. *The algebra* $\boldsymbol{P(0)}$ *has exactly* 4 *concgruences:*

$$\kappa_0,\ \kappa_1,\ \kappa_a := \left\{(f,g) \in \widetilde{P_k} \times \widetilde{P_k} \mid af = ag\right\} \quad \textit{and}$$

$$\kappa_\infty := \left\{(f,g) \in \widetilde{P_k} \times \widetilde{P_k} \mid f = g \ \vee (\exists n, m \in \mathbb{N} : \{f,g\} = \{c_\infty^n, c_\infty^m\}\right\}. \quad \blacksquare$$

A generalization of this theorem can be found in [1] and [2].

Obviously, every congruence on $\widetilde{P_k}$ is isomorphic to a certain congruence on $P(1)$ for $L = k+1$ and a congruence on $P(2)$ is also a congruence on $P(1)$ but not conversely. In particular, $\kappa_k := \{(f,g) \in P_{k,k+1} \times P_{k,k+1} \mid f = g \vee (\exists n, m \in \mathbb{N} : \{f,g\} = \{c_k^n, c_k^m\})\}$ is a congruence on $P(1)$ and $P(2)$ for $L = k+1$ and $\kappa_a := \{(f,g) \in P_{k,L} \times P_{k,L} \mid af = ag\}$ is obviously also a congruence on $\boldsymbol{P(2)}$ but not on $\boldsymbol{P(1)}$.

We need some notations for the discription of all congruences on $\boldsymbol{P(i)}$ with $i \in \{1,2\}$.

Let Z be the set of all partitions of all nonempty subsets of $E_L \backslash E_k$:

$$Z := \bigcup_{\substack{A,t \\ A \subseteq E_L \backslash E_k,\, A \neq \emptyset \\ t = 1,2,\ldots,|A|}} \left\{\{A_1, \ldots, A_t\} | \forall i : A_i \neq \emptyset \wedge \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \wedge \bigcup_{i=1}^{t} A_i = A\right\}.$$

With EZ we denote the set of all equivalence relations on sets $\mathcal{A} \in Z$. Then for each $\varepsilon \in EZ$ the relation

$$\kappa(\varepsilon) := \{(f,g) \in P_{k,L} \times P_{k,L} \,|\, f = g \vee (\exists (A,B) \in \varepsilon : Im\ f \subseteq A \wedge Im\ g \subseteq B\}$$

is a congruence on $\boldsymbol{P(i)}$, $i \in \{1,2\}$.

Let R be the set

$$\{\varrho \,|\, \exists\, r\, \exists A_{ij} \subseteq E_L : \varrho = \cup_{i=1}^{r} A_{1i} \times A_{2i} \wedge (\forall i \neq j : A_{1i} \cap A_{1j} = \emptyset \wedge A_{2i} \cap A_{2j} = \emptyset)\}$$

and

$$\mathcal{R}(i) := \{\mathcal{M} \subseteq R \,|\, <\mathcal{M}>_{\circ,\sigma} = \mathcal{M} \;\wedge\; (\cup_{\varrho\in\mathcal{M}}\varrho) \cap X(i) = \emptyset\}\,,$$

where $i \in \{1,2\}$, $\circ$ denotes the relational product, σ is defined for binary relations ϱ as follows: $\sigma_\rho := \{(b,a)\,|\,(a,b) \in \varrho\}$, and

$$X_i := \begin{cases} \{(a,b) \in E_L \times E_L \,|\, a \neq b \wedge (a \in E_k \vee b \in E_k\} & \text{for } i = 1, \\ \{(a,b) \in E_k \times E_k \,|\, a \neq b\} & \text{for } i = 2. \end{cases}$$

It is not hard to verify that for each $\mathcal{M} \in \mathcal{R}(i)$ $(i \in \{1,2\})$ the relation

$$\omega(\mathcal{M}) := \{(f,g)\,|\,af = ag \wedge (f = g \vee (\exists \varrho \in \mathcal{M} : \forall x \in E_k^{af} : (f(x), g(x))) \in \varrho\}$$

is a congruence on $\boldsymbol{P(i)}$.

With the help of the relations of the type $\kappa(\varepsilon)$ and $\omega(\mathcal{M})$ now we can describe all congruences on $\boldsymbol{P(1)}$ and $\boldsymbol{P(2)}$.

Theorem 2. *The algebra $\boldsymbol{P(i)}, i \in \{1,2\}$, has only congruences of the type*

$$\begin{array}{ll} \kappa_0, \kappa_1, & \\ \kappa(\varepsilon) & (\varepsilon \in EZ)\;, \\ \omega(\mathcal{M}) & (\mathcal{M} \in \mathcal{R}(i)), \\ \kappa(\varepsilon') \cup \omega(\mathcal{M}') & (\kappa(\varepsilon') \cup \omega(\mathcal{M}') \text{ is an equivalence} \\ & \quad \text{relation and } \varepsilon' \in EZ, \mathcal{M}' \in \mathcal{R}(i))\;, \\ \text{and } \kappa_a \ (\text{only for } i = 2). & \end{array}$$

It is easy to see that this theorem is a deduction of the following two lemmas.

Lemma 1. *Let κ be a congruence on $P(\gamma) \in \{P(1), P(2)\}$, $(f^n, g^n) \in \kappa$ and $T(f,g) := \{(\alpha,\beta) \in E_L^2 \,|\, \exists a \in E_k^n : \alpha = f(a) \wedge \beta = g(a)\}$. Then the following implications hold:*

(a) $\forall m \in \mathbb{N}\ s,t \in P_{k,L}$:
$(\forall a \in E_k^m : (s(a), t(a)) \in T(f,g) \Longrightarrow (s,t) \in \kappa.$

(b) $T(f,g) \notin \mathcal{R}(\gamma) \Longrightarrow$
$(\exists u, v : (u,v) \in \kappa \wedge T(f,g) \subseteq T(u,v) \wedge T(u,v) \in \mathcal{R}(\gamma)).$

(c) $(\gamma = 1 \wedge (\exists (a,b) \in T(f,g) : \{a,b\} \cap E_k \neq \emptyset \wedge a \neq b))$
$\Longrightarrow \kappa_a \subseteq \kappa.$

(d) $(\gamma = 2 \wedge (\exists (a,b) \in T(f,g) : \{a,b\} \subseteq E_k \wedge a \neq b))$
$\Longrightarrow \kappa_a \subseteq \kappa.$

Proof: If $T(f,g) = \{(\alpha_1,\beta_1), \ldots, (\alpha_t,\beta_t)\}$ there exist $a_1, \ldots, a_t \in E_k^n$ with $a_i = (a_{1i}, \ldots, a_{in})$ and $(f(a_i), g(a_i)) = (\alpha_i, \beta_i), i = 1, 2, \ldots, t$. Let be $s, t \in P_{k,L}$ with $(s(a), g(a)) \in T(f,g)$ for every $a \in E_k^m$. Defining functions $h_j \in P_k^m$ by

$$h_j(x) = a_{ij} \quad \text{iff} \quad (s(x), t(x)) = (\alpha_i, \beta_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, t; j = 1, 2, \ldots n)$$

we obtain $(s, t) = (f(h_1, \ldots, h_n), g(h_1, \ldots, h_n)) \in \kappa$.
(b): It is sufficient to show that the following implication holds:

$$\{(a, c), (a, d), (b, c)\} = T(f, g) \Longrightarrow \exists\, u, v : (u, v) \in \kappa \wedge T(u, v) = T(f, g) \cup \{(b, c)\}\ .$$

Let be $u, v \in P_{k,L}$ with $Im\ u = \{a, b\}$, $Im\ v = \{c, d\}$, $u(a_1) = u(a_2) = a$, $u(a_3) = u(a_4) = b$ and $v(a_1) = v(a_3) = c$, $v(a_2) = g(a_4) = d$ for certain $a_1, \ldots, a_4 \in E_k^n$. If $\{(a, c), (a, d), (b, c)\} = T(f, g)$ and $(f, g) \in \kappa$ by (a) we get $(u, c_c^n), (c_a^n, c_c^n), (c_a^n, v) \in \kappa$. Thus $(u, v) \in \kappa$.
(c), (d): Let be $f(a) = a \neq b = f(b)$. Then $(c_a^1, c_b^1) \in \kappa$. If $\gamma = 1, a \in E_k$ and without loss of generality $b \notin E_k$ we have:

$$e_1^1 *_1 c_a = c_a \sim e_1^1 *_1 c_b = e_1^1\ (\kappa) \quad \text{and} \quad c_a *_1 t^m = c_a^m \sim e_1^1 *_1 t^m = t^m\ (\kappa)$$

for every $t^m \in P_{k,L}$. Hence $\kappa_a \subseteq \kappa$.
In case $\gamma = 2$ and $\{a, b\} \subseteq E_k$ we obtain $t_1^m = h *_2 c_a \sim h *_2 c_b = t_2^m$, where

$$h(x_1, \ldots, x_{m+1}) := \begin{cases} t_1(x_2, \ldots, x_{m+1}) \text{ for } x_1 = a, \\ t_2(x_2, \ldots, x_{m+1}) \text{ else} \end{cases}$$

and t_1, t_2 denote any functions, which belong to $P_{k,L}$. Therefore, (d) holds. ■

Lemma 2. *Let κ be a congruence on $P(\gamma) \in \{P(1), P(2)\}, (f^n, g^m) \in \kappa$ and $n \neq m$. Then*

(a) $\forall a \in Im\ f\ \forall\, p, q : (c_a^p, c_a^q) \in \kappa$
(b) $Im\ f \cap E_k \neq \emptyset \Longrightarrow \kappa = \kappa_1$
(c) $f = c_a^n \Longrightarrow ((\forall u, v : Im\ u \subseteq Im\ g \wedge Im\ v \subseteq Im\ g) \Longrightarrow (u, v) \in \kappa)$
(d) $(f \notin [\{c_\alpha \,|\, \alpha \in E_k\}] \wedge n > m) \Longrightarrow$
$(\exists a\ \exists g_1 : a \in Im\ f \wedge (c_a^n, g_1^n) \in \kappa \wedge Im\ g_1 = Im\ g)$
(e) $\forall u, v : Im\ u \subseteq Im\ f \wedge Im\ v \subseteq Im\ g \Longrightarrow (u, v) \in \kappa$.

Proof: Obviously, we have $(c_a^n, c_b^m) \in \kappa$ for certain $b \in$ Im g, if $a \in$ Im f and $(f^n, g^m) \in \kappa$. Consequently, $(\Delta^{r-1} c_a^{r-1}, \Delta^{r-1} c_b^n) \in \{(c_a^1, c_b^1), (c_a^2, c_b^1)\} \cap \kappa$ for $r := \max\{m, n\}$. By this we get $\{(c_a^1, c_b^1), (c_a^2, c_b^2), (c_a^1, c_b^2), (c_b^1, c_a^2), (c_a^1, c_a^2), (c_a^2, c_a^3), \ldots\} \subseteq \kappa$, that is (a) holds.

(b): By (a) we get $((P_k \times P_k) \backslash \kappa_a) \cap \kappa \neq \emptyset$. Since P_k has only the congruences κ_0, κ_a and κ_1 and since certain $h, h_1, \ldots h_{2q}$ with $h \in P_{k,L}, \{h_1, \ldots, h_{2q}\} \subseteq P_k$ and $t_1 = h(h_1, \ldots, h_q), t_2 = h(h_{q+1}, \ldots, h_{2q})$ exist for every $t_1, t_2 \in P_{k,L}, \kappa = \kappa_1$ follows from this.

(c) is easy to show by the help of (a).

(d): By using of the operations ζ, τ we obtain from $(f, g) \in \kappa$ that there exist functions u^n, v^m with the properties $Im\ f = Im\ u, Im\ g = Im\ v, (u, v) \in \kappa$ and the $(n-m)-$th variable of u is not fictitious. Then

$$\Delta(\zeta^{m+1}(u^n * e_2^2) * c_0^1)) =: f_1 \sim \Delta(\zeta^{m+1}(v^m * e_2^2) * c_0^1)) = v\ (\kappa)$$

and f_1 has one fictitious variable more than f. Iterations of this construction yield (d).

(e) follows immediately from (c) and (d) and the symmetry and transitivity of κ. ■

Examples:
Let $k = 2$ and $L = 3$. Then

1. $P(1)$ has only 3 congruences:
   κ_0, κ_1 and $\kappa_2 = \kappa(\{(\{2\}, \{2\})\})$.

2. $P(2)$ has exactly 20 congruences:
   $\kappa_0, \kappa_a, \kappa_1, \kappa_2$ and $\omega(\mathcal{M})$, where

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \in \{\ & < \{a, 2\} >_{\circ,\sigma}, < \{(a, 2), (\overline{a}, \overline{a})\} >, \\ & \{(a, a), (a, 2), (2, a), (2, 2)\}, \\ & \{(a, a), (a, 2), (2, a), (2, 2), (\overline{a}, \overline{a})\}, \\ & < \{(a, 2), (2, a)\} >, < \{(a, 2), (2, a), (\overline{a}, \overline{a})\} >, \\ & < \{\{(a, 2), (2, a), (\overline{a}, \overline{a})\}, \{(a, 2), (\overline{a}, \overline{a})\}\} >, \\ & < \{\{(a, 2), (2, a), \}\{(a, 2), (\overline{a}, \overline{a})\}\} >\ \ | \, a \in \{0, 1\}\}.\end{aligned}$$

   The Hasse diagram of the congruences is given in figure 1.

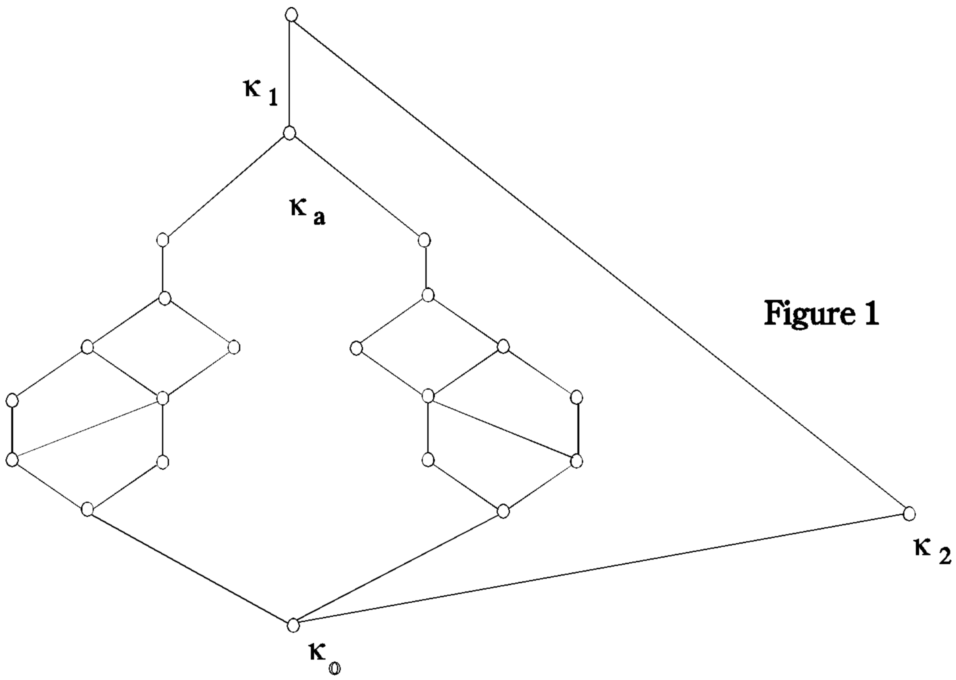


Figure 1

References

[1] **Denecke, K.** and **Lau, D. :** *Congruences on maximal partial clones and strong regular varieties genereted by preprimal partial algebras I.* Wiss. Z. Pädagog. Hochsch. „Karl Liebknecht" Potsdam **34**, Heft 1, 117 - 122 (1990)

[2] **Denecke, K.** and **Lau, D. :** *Congruences on maximal partial clones and strong regular varieties genereted by preprimal partial algebras II.* Demonstratio Math. **24**, 1-2, 105 - 119 (1991)

[3] **Haddad, L.** and **Rosenberg, I. G. :** *Critere général de completude pour les algébres partielles finies.* Sc. Paris t. 304, Serie I, n:**17**, 507 - 508 (1987)

[4] **Lau, D. :** *Über partielle Funktionenalgebren.* Rostock. Math. Kolloq. **33**, 23 - 48 (1988)

[5] **Lau, D., Miyakawa, M., Rosenberg, I. G.** and **Stojmenovic, I. :** *Classifications and basis enumeration of the algebras $\widetilde{P}_2$ and P_{2l}.* In: Proceedings of the 19th. International Symposium on Multiple-valued Logic, pp. 8-13. Guangzhou, China, May 29-31, 1989

[6] **Мальцев, А. :** *Итеративные алгебры и многообразия Поста.* Алгебры и Логика **5**, 5 – 24 (1966)

[7] **Pöschel, R.** and **Kalužnin, L.A. :** *Funktionen- und Relationenalgebren.* Berlin 1979

[8] **Rosenberg, I. G. :** *Partial algebras and clones via one - point extension.* Université de Montreal, Preprint 1988

received: February 21, 1994

Author:

Dr. D. Lau
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 27–46 (1995)

Subject Classification (AMS)
03G20, 08A40

Dietlinde Lau

Die maximalen Klassen von $\cap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$ für $Q \subseteq E_k$ (Ein Kriterium für endliche semi–primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren)

Im folgenden soll in Verallgemeinerung von [4] eine Beschreibung sämtlicher maximalen Klassen der Teilklasse

$$T_Q := \bigcap_{a\in Q} Pol_k\{a\}$$

von P_k für beliebiges Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$, $k \geq 2$, angegeben werden. Mit Hilfe dieser Klassen läßt sich dann leicht ein Vollständigkeitskriterium für T_Q formulieren, aus dem sich wiederum als leichte Folgerung eine notwendige und hinreichende Bedingung für endliche semi-primale Algebren mit nur trivialen Unteralgebren ergibt.
Ermittelt wurden die maximalen Klasssen von T_Q durch Anwendung der von I. G. Rosenberg in [13] entwickelten Methode zur Bestimmung der maximalen Klassen von P_k, wobei eine Reihe von Beweisdetails aus dieser Arbeit übernommen werden konnte.
Zwei Tage nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit stellte sich heraus, daß von Á. Szendrei analoge Ergebnisse erzielt und in [16] bereits publiziert worden waren. Da sich die Beweise zu den Sätzen jedoch in vielen Details unterscheiden, soll hier die Variante der Verfasserin trotzdem vorgestellt werden. Insbesondere soll gezeigt werden, daß für $|Q| \geq 2$ sämtliche maximalen Klassen von T_Q als Durchschnitte von T_Q mit gewissen maximalen Klassen von P_k oder $Pol_k\{a\}$ ($a \in Q$) dargestellt werden können. Vermutlich gilt Ähnliches für die maximalen Klassen von $T_{Q'} := \bigcap_{\varrho\in Q'} Pol_k\varrho$ mit gewissen $Q' \subseteq \mathcal{P}(E_k)$ und $|Q'| \geq 2$. In Vorbereitung auf solche weiterführenden Untersuchungen wurden deshalb in [7] die maximalen Klassen von $Pol_k E_l$ für $2 \leq l \leq k-1$ bestimmt und in [8] der Fall $k = 3$ für beliebiges $Q' \subseteq \mathcal{P}(E_3)$ vollständig behandelt.

1 Grundbegriffe und Bezeichnungen

Wir verwenden bis auf geringfügige Änderungen die in [10] und [6] angegebenen und erläuterten Begriffe und Bezeichnungen. Insbesondere seien

$$\begin{aligned}
&P_A^n := \{f^n | f^n : A^n \longrightarrow A\},\ P_A := \bigcup_{n\geq 1} P_A^n,\\
&E_k := \{0, 1, ..., k-1\}\ (k \geq 2),\\
&P_k := P_{E_k},\\
&R_k^h := \{\varrho | \varrho \subseteq E_k^h\} \text{ und } R_k := \bigcup_{h\geq 1} R_k^h.
\end{aligned}$$

Als Operationen über P_k seien das Umordnen von Variablen, das Identifizieren von Variablen, das Hinzufügen von fiktiven Variablen und das Einsetzen von Funktionen in Funktionen zugelassen. Bekanntlich lassen sich diese Operationen auch mit Hilfe der sogenannten Mal'cev-Operationen ζ, τ, Δ, ∇, $\star$ (siehe [10]) beschreiben. Die Menge der aus Funktionen einer Menge M ($\subseteq P_k$) in endlich vielen Schritten konstruierbaren Funktionen - **Superpositionen über** M genannt - wird mit $[M]$ bezeichnet. Ist $M = [M]$, so heißt M **abgeschlossene Menge** (**Klasse**) oder kurz **Klasse** von P_k. Eine Teilklasse von P_k, die sämtliche Projektionen $e_i^n : e_i^n(x_1, ..., x_n) := x_i$ ($n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$) enthält, nennt man **Klon** von P_k. Eine echte Teilklasse M von M' wird eine **maximale Klasse** von M' genannt, wenn keine Klasse M'' von P_k mit $M \subset M'' \subset M'$ existiert. Für beliebige Teilklassen M von P_k sei ferner

$$V_k^{\uparrow}(A) := \{B \mid A \subseteq B = [B] \subseteq P_k\}.$$

Die h-ären Relationen ϱ aus R_k^h werden von uns je nach Bedarf sowohl in der Form $\varrho = \{(a_0, ..., a_{h-1}), (b_0, ..., b_{h-1}), ...\}$ als auch in der Form von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & ... \\ a_1 & b_1 & ... \\ ... & ... & ... \\ a_{h-1} & b_{h-1} & ... \end{pmatrix}$$

angegeben und benutzt. An die Matrizendarstellung der Relation ϱ wird auch gedacht, wenn nachfolgend von Zeilen und Spalten der Relation ϱ die Rede ist. Zwecks Kennzeichnung der Stelligkeit h von ϱ schreiben wir anstelle von ϱ auch ϱ^h.
Bezeichne ε eine Äquivalenzrelation auf E_h, die auf E_h die Zerlegung $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup ... \cup \varepsilon_r$ bewirkt. Die Relation

$$\delta^h_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_r} := \{(a_0, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid (i, j) \in \varepsilon \Longrightarrow a_i = a_j\}$$

heißt **diagonale Relation**. Die leere Menge sei per definitionem eine diagonale Relation. D_k bezeichne die Menge aller möglichen diagonalen Relationen über E_k und es sei $D_k^h := R_k^h \cap D_k$. Wir vereinbaren, falls die Stelligkeit einer diagonalen Relation durch einen Index angegeben ist, auf die Angabe der einelementigen Äquivalenzklassen zu verzichten. Weiter sei

$$\iota_k^h := \{(a_0, ..., a_{h-1}) \in E_k^h \mid \exists i, j \in E_h : i \neq j \wedge a_i = a_j\}.$$

Die Menge aller Funktionen aus P_k, die die Relation ϱ bewahren, bezeichnen wir wie üblich mit $Pol_k\varrho$ bzw. kurz mit $Pol\varrho$. Inv_kM, wobei $M \subseteq P_k$, bezeichne die Menge aller **Invarianten** von M, d.h. die Menge all der Relationen aus R_k, die von sämtlichen Funktionen aus M bewahrt werden.
Als Operationen über Relationen verwenden wir die zweistelligen Operationen $\circ$ (Relationenprodukt, Faltung), $\times$ (kartesisches Produkt), $\cap$ (Durchschnitt) und die einstelligen Operationen ζ, τ, Δ und $pr_{\alpha_1,...,\alpha_t}$ mit $\{\alpha_1, ..., \alpha_t\} \subseteq E_h$, die definiert sind durch

$$\zeta\varrho := \{(a_1, a_2, ..., a_{h-1}, a_0) \mid (a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\tau\varrho := \{(a_1, a_0, a_2, ..., a_{h-1}) \mid (a_0, a_1, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$
$$\Delta\varrho := \{(a_1, ..., a_{h-1}) \mid (a_1, a_1, a_2, ..., a_{h-1}) \in \varrho\}$$

für $h \geq 2$ und

$$pr_{\alpha_1,...,\alpha_t}\varrho := \{(a_{\alpha_1}, ..., a_{\alpha_t}) \mid \exists a_j \ (j \in E_h \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_t\}) : (a_0, ..., a_{h-1}) \in \varrho\},$$

wobei $\varrho \in R_k^h$.
Nähere Ausführungen zu diesen Operationen entnehme man [10].
Wir sagen, eine Relation ϱ' ist aus der Relation ϱ **mit Hilfe von** Inv_kT_Q **ableitbar** (oder kurz ϱ' ist ϱ**-ableitbar**), wenn man sie unter Verwendung der oben definierten Relationenoperationen aus Relationen der Menge $\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q$ erhalten kann. Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q \ \vdash \ \varrho'$$

oder kurz

$$\varrho \ \vdash \ \varrho'.$$

Das nachfolgende Lemma faßt einige bekannte bzw. leicht zu überprüfende Aussagen zusammen, die Grundlagen späterer Beweise bilden.

LEMMA 1.1.
Es gilt:

(a) $\forall \varrho, \varrho' \in R_k : (Pol\varrho \subseteq T_Q \ \wedge \ (\{\varrho\} \cup Inv_kT_Q \vdash \varrho') \Longrightarrow Pol\varrho \subseteq T_Q \cap Pol\varrho')$;

(b) $Inv_kP_k = D_k$ ([13], [10]);

(c) *Für jede Relation* ϱ *aus* Inv_kT_Q *existieren gewisse Relationen* $\varrho_1, ..., \varrho_r$ *aus* $\{\{a\} \mid a \in Q\} \cup D_k$ *und* $\varrho' \in D_k$ *mit* $\varrho = (\varrho_1 \times \varrho_2 \times ... \times \varrho_r) \cap \varrho'$. ■

Nachfolgend werden einige Relationenmengen definiert, die wir zur Beschreibung der maximalen Klassen von T_Q $(Q \subseteq E_k)$ benötigen:

$\mathcal{M}_k := \{\varrho \in R_k^2 \mid \varrho$ ist Halbordnungsrelation auf E_k mit genau einem kleinsten und einem größten Element $\}$

$$\mathcal{M}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{M}_k \mid a \text{ ist größtes oder kleinstes Element von } E_k \text{ bez. } \varrho\ \}, \\ \qquad \text{falls } Q = \{a\}, \\ \{\varrho \in \mathcal{M}_k \mid a \text{ ist größtes (kleinstes) und } b \text{ ist kleinstes (größtes) Ele-} \\ \qquad \text{ment von } E_k \text{ bez. } \varrho\ \}, \text{ falls } Q = \{a\} \text{ und } a \neq b, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$\mathcal{U}_k := \{\varrho \in R_k^2 \mid \varrho$ ist nichttriviale Äquivalenzrelation auf $E_k\ \}$;

$$\mathcal{U}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{U}_k \mid \forall x \in E_k\ \forall q \in Q :\ (x,q) \in \varrho \implies x = q\}, \\ \qquad \text{falls } |Q| \leq k-2, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$\mathcal{S}_k := \{\ \{(x, s(x)) \mid x \in E_k\} \mid s$ ist eine Permutation auf E_k ohne Fixpunkte, und alle Zyklen von s haben ein und dieselbe Primzahllänge $\}$;

$$\mathcal{S}_{k;Q} := \begin{cases} \{\varrho \in \mathcal{S}_k | \forall x, y \in E_k : (x,y) \in \varrho\ \wedge x \in Q\ \implies y \in Q\}, \\ \qquad \text{falls } |Q| = s \cdot p, k = t \cdot p, p \text{ prim}, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$\mathcal{P}_{k,Q} := \{\ \{(x, s(x)) \mid x \in E_k\} \mid s$ ist eine Permutation auf E_k mit genau einem Fixpunkt ($\in Q$), alle echten Zyklen von s haben ein und dieselbe Primzahllänge und s bewahrt $Q\ \}$;

$$\mathcal{L}_k := \begin{cases} \{\ \{(a,b,c,d) \in E_k^4 \mid a +_G b = c +_G d\} \mid (E_k; +_G) \text{ ist elementar abelsche } p\text{-Gruppe } \}, \\ \qquad \text{falls } k = p^m,\ p \text{ prim},\ m \geq 1, \\ \emptyset \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_{k;Q} := \begin{cases} \{\ \{(a,b,c) \in E_k^3 \mid a +_G b = c\} \mid (E_k; +_G) \text{ ist elementar abelsche 2-Gruppe} \\ \qquad \text{mit dem neutralen Element } q\,\}, \\ \qquad \text{falls } k = 2^m,\ m \geq 1 \text{ und } Q = \{q\}, \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Eine h-äre Relation ϱ heißt **zentral**, wenn sie total symmetrisch, d.h., für jede Permutation s auf E_h gilt

$$(a_0, .., a_{h-1}) \in \varrho \Longrightarrow (a_{s(0)}, ..., a_{s(h-1)}) \in \varrho,$$

total reflexiv, d.h.

$$\iota_k^h \subseteq \varrho\ ,$$

und von E_k^h verschieden ist und mindestens ein sogenanntes **zentrales Element** $c \in E_k$ mit

$$\{c\} \times E_k^h \subseteq \varrho$$

besitzt.

$\mathcal{C}_k^h$ bezeichne die Menge aller h-ären zentralen Relationen, $1 \leq h \leq k-1$. Weiter sei

$$\mathcal{C}_k := \bigcup_{h=1}^{k-1} \mathcal{C}_k^h,$$

$$\mathcal{C}_{k;Q} := (\mathcal{C}_k^1 \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{h=2}^{k-1} \{\varrho \in \mathcal{C}_k^h \mid \forall q \in Q : q \text{ ist zentrales Element von } \varrho\}$$

(speziell gilt $\mathcal{C}_{k;E_k} = \mathcal{C}_k^1 \backslash \{\{q\} \mid q \in E_k\}$)
und

$$\mathcal{N}_{k;Q} := \begin{cases} \{\ (\varrho \backslash \iota_k^2) \cup\ \{(q,q)\} \mid \varrho \in \mathcal{C}_{k;Q}^2 \cup \{E_k^2\}\}, & \text{falls } Q = \{q\}, \\ \{\varrho \subseteq E_k^2 \mid \exists q \in Q : \{(x,q),(q,x) \mid x \in E_k\} \subseteq \varrho\ \wedge \tau\rho & \\ \qquad = \rho\ \wedge\ \varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\} \wedge\ \varrho \cap ((Q \backslash \{q\}) \times & \\ \qquad (E_k \backslash \{q\})) = \emptyset\}\ , & \text{falls } 2 \leq |Q|. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\mathcal{N}_{k;Q} \subseteq \bigcup_{a \in Q} \mathcal{N}_{k;\{a\}}$.
Die Elemente $c \in Q$ mit $\{(x,c),(c,x) \mid x \in E_k \backslash \{c\}\} \subseteq \varrho$ ($\in \mathcal{N}_{k;Q}$) nennen wir **zentrale Elemente** von ϱ.
$\mathcal{B}_k$ bezeichne die Menge aller homomorphen Urbilder von h-adisch elementaren Relationen, $3 \leq h \leq k$ ([13]). Für das Verständnis der nachfolgenden Beweise genügt es zu wissen, daß die Relationen aus $\mathcal{B}_k$ total reflexiv und total symmetrisch sind, aber keine zentralen Elemente besitzen.
Betrachtet man anstelle von E_k eine beliebige andere endliche Menge A, so lassen sich über A (indem man in obigen Definitionen E_k durch A ersetzt) die Relationenmengen $\mathcal{M}_A$, $\mathcal{M}_{A;Q}$, $\mathcal{U}_A$, $\mathcal{U}_{A;Q}$, $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_{A;Q}$, $\mathcal{P}_{A;Q}$, $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_{A;Q}$, $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_{A;Q}$, $\mathcal{N}_{A;Q}$ und $\mathcal{B}_A$ für $Q \subseteq A$ definieren.
Als bekannt setzen wir den folgenden Satz voraus:

SATZ 1.2. ([13]) *Sei* $R_{max}(P_k) := \mathcal{S}_k \cup \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{C}_k \cup \mathcal{B}_k$. *Dann gilt*

(a) $\{Pol_k\varrho \mid \varrho \in R_{max}(P_k)\}$ *ist die Menge aller maximalen Klassen von* P_k.

(b) $\forall M \subseteq P_k : ([M] = P_k \iff \forall \varrho \in R_{max}(P_k) : M \nsubseteq Pol\varrho)$. ■

Im folgenden nicht weiter erläuterte Begriffe und Bezeichnungen entnehme man [10] oder [6].

2 Resultate

Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

SATZ 2.1.
Sei $R_{max}(T_Q) := \mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q}$. *Dann ist*

$$\{T_Q \cap Pol_k\varrho \mid \varrho \in R_{max}(T_Q)\}$$

die Menge aller maximalen Klassen von T_Q *für* $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satz und der Tatsache, daß T_Q endlich erzeugbar ist (siehe 3.1), ist dann der

SATZ 2.2. (Vollständigkeitskriterium für T_Q)
Für eine beliebige Teilmenge M von T_Q gilt:

$$[M] = T_Q \iff \forall \varrho \in R_{max}(T_Q) : M \not\subseteq T_Q \cap Pol_k \varrho. \blacksquare$$

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der

SATZ 2.3. (Vollständigkeitskriterium für die Klasse aller idempotenten Funktionen aus P_k)
Für eine beliebige Teilmenge M von T_{E_k} ($= \bigcup_{n\geq 1}\{f^n \in P_k \mid f(x,...,x) = x\}$) mit $k \geq 3$ gilt :

$$[M] = T_{E_k} \iff \forall \varrho \in \mathcal{C}^1_{k;E_k} \cup \mathcal{S}_{k;E_k} \cup \mathcal{P}_{k;E_k} \cup \mathcal{N}_{k;E_k} : M \not\subseteq T_{E_k} \cap Pol_k \varrho. \blacksquare$$

Der Satz 2.1 läßt sich auch in der Sprache der Allgemeinen Algebra formulieren:
Bekanntlich nennt man eine endliche Algebra $(A;F)$ $(F \subseteq P_A)$ **semi-primal**, wenn $[F] = Pol_A Inv^1_A F$ ist (vgl. [2], [1] oder [10], S. 143). Bezeichnet $Sub(\mathcal{A})$ die Menge aller Unteralgebren von $\mathcal{A}$, so ist $Inv^1_A F$ die Menge aller Trägermengen von Algebren aus $Sub(\mathcal{A})$. Falls $Sub(\mathcal{A})\backslash\{\mathcal{A}\}$ nur aus einelementigen Algebren besteht und $Q := \{a \mid (\{a\};F) \in Sub(\mathcal{A})\}$ ist, so definiert jede von F bewahrte Relation ϱ aus $\mathcal{P}_{A;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q}$ einen nichttrivialen Automorphismus s $(s(a) = b \;:\iff\; (a,b) \in \varrho)$ der Algebra $\mathcal{A}$ und die Relationen aus $\mathcal{U}_{k;Q}$ sind spezielle nichttriviale Kongruenzen von $\mathcal{A}$. Eine Folgerung aus Satz 2.1 ist dann der

SATZ 2.4.
Bezeichne $\mathcal{A} = (A;F)$ eine endliche Algebra mit der Eigenschaft, daß $(Sub\mathcal{A})\backslash\{\mathcal{A}\}$ nur aus einelementigen Algebren besteht. Folgende Bedingungen sind dann äquivalent:

(a) *$(A;F)$ ist semi-primal mit $\{a \in A \mid (\{a\};F) \in Sub\mathcal{A}\} = Q$;*

(b) *$\mathcal{A}$ hat keine echten Automorphismen, ist einfach (d.h., $\mathcal{A}$ besitzt nur triviale Kongruenzen) und die direkten Produkte $\mathcal{A}^h$ von $\mathcal{A}$ für $h = 2,3,...,|A|-1$ besitzen keine Unteralgebren mit Trägermengen aus der Menge $\mathcal{M}_{A;Q} \cup \mathcal{L}_{A;Q} \cup \mathcal{N}_{A;Q} \cup \mathcal{C}_{A;Q}$.* $\blacksquare$

3 Einige Hilfsaussagen

LEMMA 3.1.
Für alle Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ ist die Menge T_Q aus gewissen Funktionen aus T^3_Q erzeugbar.

Beweis: Für $k = 2$ gilt die Behauptung nach [9] (vgl. [5]). Sei nachfolgend $k \geq 3$. Dann gehören die weiter unten definierten Funktionen $\vee$, $\cdot$, w, $r_{a;b}$, falls $\{a,b\} \subset E_k$, $q_{a,b;c}$, falls $a \neq b$ oder $\{a,b\} \not\subseteq Q$ und $\{a,b,c\} \subseteq E_k$, zu T_Q:

$x \vee y := max(x,y),\ x \cdot y := min(x,y)$ bez. der totalen Ordnung $0 < 1 < 2 < \ldots < k-1$;

$$w(x,y) := \begin{cases} x \text{ für } x = y \in Q, \\ \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

$$j_{a;b}(x) := \begin{cases} b \text{ für } x = a, \\ \\ 0 \text{ sonst;} \end{cases}$$

$r_{a;b}(x,y,z) := x \vee j_{a;b}(y) \cdot z;$

$q_{a,b;c}(x,y,z) := x \vee j_{a;c}(y) \cdot j_{b;c}(z).$

Wir wollen zeigen, daß die oben angegebenen Funktionen aus T_Q ein Erzeugendensystem für T_Q bilden.
Eine Superposition über w ist die Funktion $w_n := \underbrace{w \star w \star ... \star w}_{n-1 \text{ mal}}$ mit

$$w_n(x_1,...,x_n) = \begin{cases} x \text{ für } x_1 = x_2 = ... = x_n = x \in Q \ , \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$(n \geq 1)$. Bezeichne nun f^n eine beliebige Funktion aus T_Q, die von w_n verschieden ist. Dann läßt sich f wie folgt darstellen:

$$f(x_1,...,x_n) = w_n(x_1,...,x_n) \vee \bigvee_{\substack{\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n) \\ \in E_k^n \backslash \{(q,q,...,q) \mid q \in Q\} \\ f(\boldsymbol{a}) \neq 0}} j_{a_1;f(\boldsymbol{a})}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;f(\boldsymbol{a})}(x_n).$$

Offenbar ist f damit eine Superposition über der Menge

$$B := \{w_n\} \cup \{x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n) \mid (a_1,...,a_n) \in E_k^n \backslash \{(q,q,...,q) \mid q \in Q\} \ \wedge \ b \in E_k\}.$$

$B \backslash \{w_n\}$ wiederum ist aus Funktionen des Typs $r_{a;b}$ und $q_{a,b;c}$ erzeugbar:

$$\begin{aligned} &r_{a_1,...,a_i,a_{i+1};b}(x,x_1,...,x_i,x_{i+1},y) := \\ &r_{a_1,...,a_i;b}(x,x_1,...,x_i,r_{a_{i+1};b}(x,x_{i+1},y)) = \\ &x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n) \cdot y \end{aligned}$$

$(i = 1,...,n)$,

$$\begin{aligned} &r_{a_1,...,a_n;b}(x,x_1,...,x_n,q_{a_i,a_j;b}(x,x_i,x_j)) = \\ &x \vee j_{a_1;b}(x_1) \cdot ... \cdot j_{a_n;b}(x_n). \end{aligned}$$

Also gilt $[T^3] = T$. □

Eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Lemma ist das

LEMMA 3.2.
Für jedes Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ ist Verband der Teilklassen von T_Q dual atomar und T_Q besitzt nur endlich viele maximale Klassen. ■

Da man sich leicht überlegen kann, daß sämtliche maximalen Klassen von T_Q Klone sind, gilt außerdem nach bekannten Eigenschaften von Funktionenalgebren (vgl. [10]):

LEMMA 3.3.
Zu jeder maximale Klasse M von T_Q findet man eine höchstens k^3-äre Relation ϱ_M mit $M = Pol_k \varrho_M$. ■

LEMMA 3.4.
Sei $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Dann gilt:

(a) $\forall \varrho \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup (\mathcal{C}_k \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\}) : T_Q \not\subseteq Pol_k \varrho$;

(b) $V_k^{\uparrow}(T_Q) = \{T_{Q'} \mid Q' \subseteq Q\}$ $(T_\emptyset := P_k)$;

(c) $\forall \varrho \in \bigcup_{a \in Q}(\mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}}) : T_Q \cap Pol_k \varrho \subset T_Q$.

Beweis: (a) und (c) prüft man leicht nach. (b) Es genügt, folgende Aussage für $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$ und $f \in P_k$ zu beweisen:

$$(a \in Q \ \wedge f(a, a, ..., a) \neq a) \implies T_{Q \backslash \{a\}} \subseteq [T_Q \cup \{f\}].$$

Sei $f(a, a, ..., a) \neq a$ für ein gewisses $a \in Q$, $Q \subseteq E_k$ und $f'(x) := f(x, x, ..., x)$. Zwecks Nachweis von $T_{Q \backslash \{a\}} \subseteq [T_Q \cup \{f\}]$ sei $g^m \in T_{Q \backslash \{a\}}$ beliebig gewählt. Zu T_Q gehört dann die Funktion h_g^{m+1} mit

$$h_g(x_1, .., x_{m+1}) := \begin{cases} x, & \text{falls} \quad x_1 = ... = x_{m+1} = x \in Q, \\ u, & \text{falls} \quad x_1 = ... = x_m = u \in Q \backslash \{a\} \ \wedge \ x_{m+1} = f'(u), \\ g(x_1, ..., x_m) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bildet man nun $h(x_1, ..., x_m) := h_g(x_1, ..., x_m, f'(x_1))$, so sieht man, daß $h = g$ und folglich $g \in [T_Q \cup \{f\}]$ ist. ■

LEMMA 3.5.
Zu jeder Relation $\gamma \in R := \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup (\mathcal{C}_k \backslash \{\{q\} \mid q \in Q\})$ existiert eine aus γ mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ ableitbare Relation γ', die zu

$$\mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \bigcup_{q \in Q} (\mathcal{P}_{k;\{q\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{q\}})$$

gehört.

Beweis: Es genügt,

$$\gamma \in R \backslash (\mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q}) \tag{1}$$

zu betrachten. Außerdem sei γ h-är, wobei $h \geq 2$ wegen (1).
Wir bilden zunächst die $(h-1)$-äre Relation

$$\gamma_a := pr_{1,2,\ldots,h-1}(\Delta(\{a\} \times \gamma)) \tag{2}$$

für $a \in Q$. Ist $h = 2$ (also $\gamma \in (\mathcal{C}_k^2 \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^2) \cup (\mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k;Q}) \cup (\mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k;Q}) \cup (\mathcal{S}_k \backslash \mathcal{S}_{k;Q}))$, so haben wir

$$\gamma_a = \{x \in E_k \mid (a, x) \in \gamma\}. \tag{3}$$

Man prüft nun leicht nach, daß in diesem Fall wegen (1) die Relation γ_a für gewisses $a \in Q$ zu $\mathcal{C}_{k;Q}^1 = \{E \subset E_k \mid |E| \geq 2 \vee \exists b \in E_k \backslash Q : E = \{b\}\}$ gehört. Falls $\gamma \in \mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k;Q}$ wähle man dazu a als ein vom größten und vom kleinsten Element von E_k bez. γ verschiedenes Element aus Q. Für $\gamma \in \mathcal{U}_k \backslash \mathcal{U}_{k;Q}$ sei $a \in Q$ aus einer Äquivalenzklasse von γ mit mindestens zwei Elementen. Gehört γ zu $\mathcal{S}_k \backslash \mathcal{S}_{k;Q}$, so existiert ein $a \in Q$ und ein $b \in E_k \backslash Q$ mit $(a, b) \in \gamma$, womit $\gamma_a = \{b\} \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$. Falls $\gamma \in \mathcal{C}_k^2 \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^2$, gibt es ein $a \in Q$, das kein zentrales Element von γ ist. Folglich haben wir auch in diesem Fall $\gamma_a \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$.
Sei nun $h \geq 3$ und $\gamma \notin \mathcal{L}_k$, d.h. $\gamma \in \mathcal{C}_k^h \cup \mathcal{B}_k^h$. Wählt man dann in (2) $a \in Q$ als ein nicht-zentrales Element von γ (falls $\gamma \in \mathcal{C}_k$) bzw. beliebig aus Q, so erhält man durch (2) eine $(h-1)$-äre reflexive, total symmetrische Relation mit den gleichen zentralen Elementen wie γ und dem neuen zentralen Element a. Da a als nicht-zentrales Element der Relation ϱ gewählt wurde, existieren gewisse $d_1, \ldots, d_{h-1} \in E_k$ mit $(a, d_1, \ldots, d_{h-1}) \notin \gamma$ und damit $(d_1, \ldots, d_{h-1}) \notin \gamma_a$. Folglich ist $\gamma_a \neq E_k^{h-1}$ und γ_a eine zentrale Relation. Wiederholte Anwendung dieser Konstruktion liefert eine γ-ableitbare Relation aus $\mathcal{C}_{k;Q}$.

Es bleibt noch $\gamma \in \mathcal{L}_k$ ($k = p^m$, p prim, $m \geq 1$) zu untersuchen. In diesem Fall existiert eine elementar abelsche p-Gruppe $(E_k; +)$ mit $\gamma = \{(x, y, u, v) \in E_k^4 \mid x + y = u + v\}$. O.B.d.A. können wir nach [12] annehmen, daß das neutrale Element o der p-Gruppe $(E_k; +)$ zu Q gehört. Für $p \neq 2$ betrachten wir jetzt die γ-ableitbare Relation

$$\gamma' := pr_{3,4}(\delta_{\{0,1,2\}}^5 \cap (\{o\} \times \gamma)) = \{(x, y) \in E_k^2 \mid x + y = o\}.$$

Offenbar gehört γ' zu $\mathcal{P}_{k;\{o\}}$, da $x + x = o$ im Fall $p \neq 2$ nur für $x = o$ gilt.
Ist $p = 2$, so kann man aus $\{\gamma\} \cup Inv_k T_Q$ die Relation

$$\gamma'' := pr_{1,2,3}(\Delta(\{o\} \times \gamma)) = \{(x, y, z) \in E_k^3 \mid x + y = z\}$$

ableiten, womit $\gamma'' \in \mathcal{L}_{k;\{o\}}$ im Fall $\{o\} = Q$. Falls $|Q| \geq 2$ gilt, gibt es ein $a \in Q \backslash \{o\}$ und die γ-ableitbare Relation

$$\gamma''' := pr_{0,1}((\gamma'' \times \{a\}) \cap \delta_{\{2,3\}}^4) = \{(x, a - x) \mid x \in E_k\}$$

gehört zu $\mathcal{S}_k$. Außerdem haben wir entweder $\gamma''' \in \mathcal{S}_{k;Q}$ oder (wie oben gezeigt wurde) es ist aus γ''' eine Relation aus $\mathcal{C}^1_{k;Q}$ ableitbar. ■

LEMMA 3.6.
Sei $|Q| \geq 2$ und $\gamma \in \bigcup_{a\in Q} \mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}}$. Mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ läßt sich dann aus γ eine Relation aus $\mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{C}^1_{k;Q}$ ableiten.

Beweis: Sei zunächst $\gamma \in (\bigcup_{a\in Q} \mathcal{P}_{k;\{a\}})\backslash\mathcal{P}_{k;Q}$. Dann gibt es $(b,c) \in \gamma$ mit $b \in Q$ und $c \in E_k\backslash Q$. Die γ-ableitbare Relation

$$\gamma_b := pr_1(\Delta(\{b\} \times \gamma)) = \{x \in E_k \mid (b,x) \in \gamma\} \tag{4}$$

gehört (wegen $\gamma_b = \{c\}$) zu $\mathcal{C}_{k;Q}$.
Abschließend sei $\gamma \in (\bigcup_{a\in Q} \mathcal{N}_{k;\{a\}})\backslash\mathcal{N}_{k;Q}$, d.h., γ hat folgende Eigenschaften:

- $\exists q \in Q : \iota^2_k \cap \gamma = \{(q,q)\} \ \wedge\ \{(x,q),(q,x) \mid x \in E_k\} \subseteq \gamma$;
- γ ist symmetrisch und
- $\exists b \in Q \setminus \{q\}\ \exists c \in E_k\backslash\{b,q\} :\ (b,c) \in \gamma$.

Bildet man nun die γ-ableitbare Relation γ_b (siehe (4)), so gilt $\{q,c\} \subseteq \gamma_b$ und $b \notin \gamma_b$, womit γ_b zu $\mathcal{C}^1_{k;Q}$ gehört. ■

LEMMA 3.7.
Sei $\varrho \in R^t_k$, $A = Pol_k\varrho$, A maximal in T_Q und $V^{\uparrow}_k(A)\backslash\{A\} = V^{\uparrow}_k(T_Q)$. Dann gilt $|Q| = 1$ und es existiert ein

$$\gamma \in \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q}$$

mit $A \subseteq Pol_k\gamma$.

Beweis: Wegen Lemma 3.4 folgt aus unseren Voraussetzungen über ϱ:

(I) Falls $|Q| \geq 2$, so existiert keine Relation $\gamma \in (R_{max}(P_k)\backslash\{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{a\in Q} R_{max}(T_{\{a\}})$, die aus ϱ mit Hilfe von $Inv_k T_Q$ ableitbar ist (vgl. 1.2 und 2.1).

Speziell ergibt sich aus (I): $t \geq 2$.

O.B.d.A. können wir außerdem folgende 3 Eigenschaften von ϱ annehmen:

(II) ϱ enthält keine doppelten Zeilen.

(III) Jede aus ϱ ableitbare $(t-1)$-äre Relation gehört zu $Inv_k T_Q$ (siehe 1.1(c)).

(IV) Es existiert keine ϱ-ableitbare t-äre Relation ϱ' mit der Eigenschaft $Pol_k\varrho' \subset T_Q$ und $|\varrho'| < |\varrho|$.

Aus den Annahmen (II) - (IV) ergeben sich einige weitere Eigenschaften von ϱ:

(V) ϱ besitzt keine konstanten Zeilen. (Angenommen, ϱ hat eine konstante Zeile aus dem Element a. Wegen (I) ist $a \in Q$ und es gilt $\varrho = pr_{0,\dots,i-1}\varrho \times \{a\} \times pr_{i+1,\dots,t-1}\varrho$ für gewisses $i \in E_t$. Mit Hilfe von (III) und 1.1(c) sieht man dann, daß ϱ eine Invariante von T_Q ist, was unseren Voraussetzungen über ϱ widerspricht.)

Eine unmittelbare Folgerung aus (V) und (III) ist:

(VI) $\forall i \in E_t : \ pr_{0,\dots,i-1,i+1,\dots,t-1}\varrho = E_k^{t-1}$.

Als Nächstes wollen wir uns

(VII) $(t \geq 3 \vee |Q| = 1) \implies \varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \in \{\{(q, q, ..., q)\} \mid q \in Q\}$;
$(t = 2) \implies \varrho \cap \delta^t_{\{0,1\}} \in \{\emptyset, \{(q, q)\} \mid q \in Q\}$

überlegen. Nach (III) gilt

$$\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \in \{\emptyset, \{(q, q, ..., q)\}, \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} \mid q \in Q\}.$$

$\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}}$ entfällt, da $A = Pol_k\varrho \subset T_Q$ und T_Q höchstens eine Konstante enthält.
Falls $Q = \{a\}$ und $\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \emptyset$, folgt aus $pr_{0,\dots,t-2}\varrho = E_k^{t-1}$ (siehe (VI)) die Beziehung $pr_t((\{a\} \times \varrho) \cap \delta^{t+1}_{\{0,\dots,t-1\}} \in \mathcal{C}^1_{k;\{a\}}$, im Widerspruch zu (I).
Im Fall $t \geq 3$ ergibt sich aus $\varrho \cap \delta^t_{\{0,1,\dots,t-1\}} = \emptyset$, daß $pr_{t-2,t-1}(\varrho \cap \delta^t_{\{0,\dots,t-2\}}) \notin Inv_kT_Q$ ist, was (III) widerspricht. Also gilt (VII).

Bekanntlich (siehe [13], [10] oder [4]) ist aus ϱ für $t = 2$ die Relation

$$\sigma_i(\varrho) := \{(a_1, ..., a_i) \in E_k^i \mid \exists u \in E_k : \{(a_1, u), ..., (a_i, u)\} \subseteq \varrho\}$$

ableitbar und es gilt:

(VIII) $(t = 2 \wedge \varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2) \implies \forall i \geq 2 : \sigma_i(\varrho) = E_k^i$.

Folgende drei Fälle sind für ϱ möglich:
Fall 1: t = 2.
Wir untersuchen die ϱ-ableitbare Relation $\varrho \cap (\tau\varrho)$.
Fall 1.1: $\varrho \cap (\tau\varrho) \in \{\emptyset, \{(q, q)\}\}$ für ein gewisses $q \in Q$.
ϱ ist in diesem Fall antisymmetrisch. Bildet man $\varrho \circ (\tau\varrho)$, so haben wir wegen (VI) $\iota_k^2 \subseteq \varrho \circ (\tau\varrho)$.
Fall 1.1.1: $\varrho \circ (\tau\varrho) = \iota_k^2$.
Wegen $pr_0\varrho = pr_1\varrho = E_k$ (siehe (VI)) gilt $|\varrho| \geq k$. Falls $|\varrho| > k$ ist, existieren $a, b, c \in E_k$ mit

$(a,c),(b,c) \in \varrho$ und $a \neq b$, woraus sich $(a,b) \in \varrho \circ (\tau\varrho)$ ergibt, was wegen $\varrho \circ (\tau\varrho) = \iota_k^2$ nicht möglich sein kann. Also gilt $|\varrho| = k$, und ϱ ist von der Gestalt $\{(x, s(x)) \mid x \in E_k\}$, wobei s eine von der Identität verschiedene Permutation auf E_k bezeichnet, die höchstens einen Fixpunkt (nämlich q) besitzt. Angenommen, s hat echte Zyklen unterschiedlicher Länge. Sei r (≥ 2) die Länge eines kleinsten solchen Zyklus. Dann gilt

$$pr_0((\underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \ldots \circ \varrho}_{r \text{ mal}}) \cap \iota_k^2) \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$$

im Widerspruch zu (I). Also haben alle echten Zyklen von s ein und dieselbe Länge l. Angenommen, es ist $l = p \cdot m$, p prim und $m \geq 2$. Dann hat $\underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \ldots \circ \varrho}_{m \text{ mal}}$ echte Zyklen der Länge p, d.h., aus ϱ ist eine Relation aus $\mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}_{k;\{q\}}$ ableitbar, was der Bedingung (I) für $|Q| \geq 2$ oder $\varrho \in \mathcal{S}_k$ widerspricht. Also ist im Fall 1.1.1 $Q = \{q\}$ und $A \subseteq Pol_k\gamma$ für ein gewisses $\gamma \in \mathcal{P}_{k;\{q\}}$.

Fall 1.1.2: $\iota_k^2 \subset \varrho \circ (\tau\varrho) \subset E_k^2$.

$\varrho' = \varrho \circ (\tau\varrho)$ ist in diesem Fall keine Invariante von T_Q und $Pol_k\varrho' \not\subseteq T_Q$, was wegen $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} = V_k^{\uparrow}(T_Q)$ nicht sein kann.

Fall 1.1.3: $\varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2$.

Nach (VIII) gilt dann $\sigma_k(\varrho) = E_k^k$. Folglich existiert ein $u \in E_k$ mit $(x,u) \in \varrho$ für alle $x \in E_k$. Wegen $\varrho \cap \iota_k^2 \in \{\emptyset, \{(q,q)\}\}$ $(q \in Q)$ geht dies nur für $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$ und $u = q$.

Ist $(\tau\varrho) \circ \varrho = E_k^2$, so können wir analog wie eben für ϱ auch $\{(x,q) \mid x \in E_k\} \subseteq \tau\varrho$ nachweisen und erhalten mit dem oben Gezeigten einen Widerspruch zur Antisymmetrie von ϱ. Also ist $\iota_k^2 \subseteq (\tau\varrho) \circ \varrho \subset E_k^2$. Folglich läßt sich der Fall 1.1.3 auf die Fälle 1.1.1 und 1.1.2 zurückführen.

Fall 1.2: $\{(q,q)\} \subset \varrho \cap (\tau\varrho) \subset \varrho$.

Man prüft leicht nach, daß dieser Fall wegen der Voraussetzung (III) über ϱ auszuschließen ist.

Fall 1.3: $\varrho \cap (\tau\varrho) = \varrho$.

ϱ ist in diesem Fall symmetrisch. Außerdem haben wir $\iota_k^2 \subseteq \varrho \circ \varrho$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

Fall 1.3.1: $\varrho \circ \varrho = \iota_k^2$.

Dann ist ϱ eine Permutation mit höchstens einem Fixpunkt q (falls $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$), und jeder echte Zyklus von ϱ hat wegen der Symmetrie von ϱ die Länge 2, d.h., $\varrho \in \mathcal{S}_k \cup \mathcal{P}_{k;\{q\}}$. Wie im Fall 1.1.1 erhalten wir folglich auch im Fall 1.3.1 entweder einen Widerspruch zu (I) oder es ist $|Q| = 1$ und $A \subseteq Pol_k\gamma$ für ein $\gamma \in \mathcal{P}_{k;Q}$.

Fall 1.3.2: $\iota_k^2 \subset \varrho \circ \varrho \subset E_k^2$.

Dieser Fall kann wie der Fall 1.1.2 ausgeschlossen werden.

Fall 1.3.3: $\varrho \circ \varrho = E_k^2$.

Da $\varrho \circ \varrho = \varrho \circ (\tau\varrho) = E_k^2$ ist, gilt nach (VIII) $\sigma_k(\varrho) = E_k^k$, d.h., es existiert ein $u \in E_k$ mit $\{(x,u) \mid x \in E_k\} \subseteq \varrho$. Folglich haben wir $\varrho \cap \iota_k^2 = \{(q,q)\}$ und $u = q$. Hieraus und aus der Symmetrie von ϱ folgt, daß q zentrales Element von ϱ ist und damit ϱ zu $\mathcal{N}_{k;\{q\}}$ gehört. Wegen (I) geht dies nur für $|Q| = 1$.

Fall 1 ist somit vollständig abgehandelt.
Fall 2: $t = 3$.
Wegen $pr_{0,1}\varrho = E_k^2$ (nach (VI)), $\varrho \cap \delta^3_{\{0,1,2\}} = \{(q,q,q)\}$ für gewisses $q \in Q$ (siehe (VII)) und (III) gilt $\Delta\varrho = E_k \times \{q\}$, d.h. $(a,a,q) \in \varrho$ für alle $a \in E_k$. Analog überlegt man sich, daß (a,q,a) und (q,a,a) für beliebiges $a \in E_k$ zu ϱ gehören. Wir können außerdem annehmen, daß ϱ total symmetrisch ist. Wäre nämlich ϱ nicht total symmetrisch, so wäre die aus ϱ ableitbare Relation

$$\varrho' := \bigcap_{\substack{s \\ s \text{ Permutation auf } E_3}} \{(a_{s(0)}, a_{s(1)}, a_{s(2)}) \mid (a_0, a_1, a_2) \in \varrho\}$$

total symmetrisch und wegen

$$\begin{pmatrix} a & a & q \\ a & q & a \\ q & a & a \end{pmatrix} \subseteq \varrho' \subset \varrho \; (a \neq q)$$

auch keine Invariante von T_Q, im Widerspruch zu (IV).

Als Nächstes beweisen wir die Aussage

(IX) $\forall a, b \in E_k : \{(a,b,c),(a,b,c')\} \subseteq \varrho \implies c = c'$.

Angenommen, es existieren a, b, c, c' mit $\{(a,b,c),(a,b,c')\} \subseteq \varrho$ und $c \neq c'$. Für die ϱ-ableitbare Relation

$$\varrho_1 := pr_{0,2,5}((\varrho \times \varrho) \cap \delta^6_{\{0,3\},\{1,4\}}) = \{(x,y,z) \mid \exists u \in E_k : \{(x,u,y),(x,u,z)\} \subseteq \varrho\}$$

gilt dann $Pol_k\varrho_1 \nsubseteq T_Q$ wegen $\delta^3_{\{0,1,2\}} \subseteq \varrho_1$. Folglich ist ϱ_1 eine diagonale Relation. Man prüft leicht nach, daß auch $(a,c,c') \in \varrho_1$ und $(d,q,q) \in \varrho_1$ für alle $d \in E_k$ gilt. Also kann ϱ_1 nur die diagonale Relation E_k^3 sein. Für unsere Relation ϱ bedeutet dies, daß zu beliebigen (x,y,z) aus E_k^3 stets ein u mit $(x,u,y) \in \varrho$ und $(x,u,z) \in \varrho$ existiert. Speziell für $x = y = q$ und $z \neq q$ erhalten wir hieraus und unter Berücksichtigung der totalen Symmetrie von ϱ, daß ein $r \neq q$ mit $(q,q,r) \in \varrho$ existiert. Oben wurde aber $\Delta\varrho = E_k \times \{q\}$ bewiesen. Also war unsere Annahme $c \neq c'$ falsch, und damit ist (IX) gültig.
Wir betrachten nun die ϱ-ableitbare Relation

$$\varrho_2 := \varrho \circ \varrho = \{(a,b,c,d) \mid \exists u \in E_k : \{(a,b,u),(u,c,d)\} \subseteq \varrho\}.$$

Wegen $\{(a,a,q),(q,a,a) \mid a \in E_k\} \subseteq \varrho$ ist $\delta^4_{\{0,1,2,3\}} \subseteq \varrho_2$ und folglich $Pol_k\varrho_2 \nsubseteq T_Q$. Offensichtlich hat ϱ_2 keine doppelten Zeilen. Nach unseren Voraussetzungen über ϱ ist dies nur für $\varrho_2 = E_k^4$ möglich, und nach Definition von ϱ_2 wäre dann aber $\{(a,b,u),(u,c,a)\} \subseteq \varrho$ für

beliebig wählbare a, b, c aus E_k und ein gewisses u. Da ϱ aber total symmetrisch ist, ergibt dies $\{(a, u, b), (a, u, c)\} \subseteq \varrho$, wobei $b \neq c$ möglich ist, im Widerspruch zu (IX).
Der Fall 2 ist also für ϱ auszuschließen.
Fall 3: $t \geq 4$.
Wegen $pr_{0,1,\dots,t-2}\varrho = E_k^{t-1}$ (siehe (VI)), (II), (III) und (VII) ist $\varrho \cap \delta^t_{\{0,\dots,h-3\}} = \delta^{t-1}_{\{0,\dots,h-3\}} \times \{q\}$ für ein gewisses $q \in Q$. Da auch $pr_{0,\dots,h-3,h-1}\varrho = E_k^{t-1}$ ist, erhält man analog $\varrho \cap \delta^t_{\{0,\dots,h-3\}} = \delta^{t-2}_{\{0,..,h-3\}} \times \{q\} \times E_k$, im Widerspruch zum eben Gezeigten. Also gibt es keine t-äre Relation ϱ mit den oben geforderten Eigenschaften und $t \geq 4$. ■

Durch

$$\varrho \sim \varrho' \;:\Longleftrightarrow\; T_Q \cap Pol_k\varrho = T_Q \cap Pol_k\varrho'$$

wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge $\mathcal{A}$ von Relationen aus R_k definiert. Wählt man nun aus jeder Äquivalenzklasse von $\sim$ einen Repräsentanten, so erhält man eine gewisse Teilmenge von $\mathcal{A}$, die wir mit $\mathcal{A}^\sim$ (nachfolgend $\mathcal{A} \in \{\mathcal{P}_{k;Q}, \mathcal{M}_{k;Q}, \mathcal{S}_{k;Q}\}$) bezeichnen wollen.

LEMMA 3.8. *Sei $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Dann gilt:*

(a) $\forall \varrho, \varrho \in \mathcal{M}_{\|;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff (\varrho' = \tau\varrho \;\vee\; \varrho = \varrho')$;

(b) $\forall \varrho, \varrho' \in \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff (\exists t : \varrho' = \underbrace{\varrho \circ \varrho \circ \dots \circ \varrho}_{t \text{ mal}})$;

(c) $\forall \varrho, \varrho' \in \mathcal{M}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} : \varrho \sim \varrho' \iff \varrho \neq \varrho'$.

Beweis Die Aussagen (a) und (b) sind direkte Folgerungen aus den Beweisen entsprechender Aussagen über Relationen aus $\mathcal{M}_k \cup \mathcal{S}_k$, die man in [12] oder auch in [6] findet. Wir haben also nur (c) zu beweisen. Dazu sei vereinbart, das kleinste Element von E_k bez. einer Relation ϱ aus $\mathcal{M}_{k;Q}$ mit o_ϱ und das größte Element von E_k bez. ϱ mit e_ϱ zu bezeichnen. Wegen (a) können wir o.B.d.A. auch stets $o_\varrho \in Q$ annehmen. Nachfolgend bezeichnen nun ϱ und ϱ' zwei verschiedene Relationen aus $\mathcal{M}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q}$. Wir wollen

$$T_Q \cap Pol_k\varrho \not\subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho' \tag{5}$$

nachweisen und behandeln dazu mögliche Fälle:
Fall 1: $\{\varrho, \varrho'\} \subseteq \mathcal{C}^1_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q}$.
Falls $|Q| \geq k-1$, so gilt $\mathcal{U}_{k;Q} = \mathcal{P}_{k;Q} = \mathcal{S}_{k;Q} = \emptyset$ und (5) ist offenbar für ϱ , ϱ' erfüllt. Sei nun $|Q| \leq k-2$. Wir bezeichnen die Relation $\{(q, q) \mid q \in Q\} \cup (E_k \backslash Q)^2$ aus $\mathcal{U}_{k;Q}$ mit ω. Man prüft leicht nach, daß die Menge

$$A(\gamma) := \bigcup_{n \geq 1} \{f^n \in P_{E_k \backslash Q} \mid \exists f' \in T_Q \cap Pol_k\gamma : (\forall \mathbf{a} \in (\mathbf{E_k} \backslash \mathbf{Q})^{\mathbf{n}} : \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}))\}$$

für $\gamma \in (\mathcal{C}^1_{k;Q} \backslash \{\gamma \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\}) \cup (\mathcal{U}_{k;Q} \backslash \{\omega\}) \cup \mathcal{P}^\sim_{k;Q} \cup \mathcal{S}^\sim_{k;Q}$ eine maximale Klasse von $P_{E_k \backslash Q}$ bildet und $A(\gamma) = P_{E_k \backslash Q}$ für $\gamma \in \{\gamma \in \mathcal{C}^1_k \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$ ist. Mit Hilfe von [12], [13] und [14] folgt hieraus unsere Behauptung (5) für $\varrho' \in \{\gamma \in \mathcal{C}_k^1 \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$. Man prüft weiter leicht nach, daß für $\varrho' \in \{\gamma \in \mathcal{C}_k^1 \mid \gamma \subseteq Q \vee \gamma = E_k \backslash Q\} \cup \{\omega\}$ zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$ eine $|\varrho'|$-stellige Funktion f_1 mit $f_1(\varrho') \notin \varrho'$ gehört. Folglich gilt (5) auch für die restlichen im Fall 1 betrachteten ϱ'.

Fall 2: $\varrho \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim} \cup (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^1) \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.
Zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$ gehört folgende $|\varrho'|$-stellige Funktion f_2 mit den Eigenschaften

$$f_2(\varrho') \notin \varrho', f_2(q, ..., q) = q \text{ für alle } q \in Q$$

und

$$f_2(\boldsymbol{a}) = c \text{ für die restlichen Tupel } \boldsymbol{a}, \text{ wobei } c \in \varrho \text{ ist.}$$

Also gilt (5).

Fall 3: $\varrho \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{S}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}_{k;Q}^1) \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.
Sei ϱ' eine h'-äre Relation sowie $q \in Q$ und $a \in E_k \backslash Q$. Falls $\varrho' \in \mathcal{N}_{k;Q}$ sei außerdem $q \in Q$ so gewählt, daß $(q, q) \in \varrho'$. Dann gehören die h'-Tupel $(q, a, a, \dots, a)$, $(a, q, a, \dots, a)$, $\dots$, $(a, a, \dots, a, q)$ sämtlich zu ϱ', jedoch nicht alle zu ϱ. Folglich findet man in $T_Q \cap Pol_k \varrho$ eine h'-stellige Funktion f_3 mit

$$f_3 \begin{pmatrix} q & a & a & \dots & a \\ a & q & a & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a & a & a & \dots & q \end{pmatrix} \notin \varrho' \quad ,$$

womit (5) auch im Fall 3 richtig ist.

Fall 4: $\varrho \in \mathcal{P}_{k;Q}^{\sim} \cup \mathcal{S}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$.
Dieser Fall kann nur für $|Q| \le 2$ auftreten. Außerdem ist $\mathcal{S}_{k;Q}^{\sim} = \emptyset$, falls $|Q| = 1$ oder $k = 3$. Man prüft nun leicht nach, daß $(T_Q \cap Pol_k \varrho) \not\subseteq (T_Q \cap Pol_k \varrho')^1$ für $k \ge 3$ gilt.

Fall 5: $\varrho \in \mathcal{U}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$.
Für $o_{\varrho'} \in Q$ gehört die zweistellige Funktion f_4 mit

$$f_4(x, y) := \begin{cases} y \text{ für } x = o_{\varrho'}, \\ o_{\varrho'} \text{ sonst} \end{cases}$$

zu $T_Q \cap Pol_k \varrho$, jedoch bewahrt sie nicht ϱ' mit dem kleinsten Element $o_{\varrho'}$, da

$$(f_4(o_{\varrho'}, e_{\varrho'}), f(\alpha, e_{\varrho'})) = (e_{\varrho'}, o_{\varrho'}) \text{ für } \alpha \in E_k \backslash \{o_{\varrho'}, e_{\varrho'}\} \ .$$

Fall 6: $\varrho \in \mathcal{M}_{k;Q}^{\sim}$ und $\varrho' \in \mathcal{C}_{k;Q}^1$.
Sei $a \in E_k \backslash \varrho'$ und

$$t_a(x, y) := \begin{cases} x \text{ für } x = y \in Q, \\ a \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $t_a \in T_Q$ bewahrt ϱ, jedoch nicht ϱ'. Also gilt (5).

Fall 7: $\varrho \in \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{S}^{\sim}_{k;Q}$.

Seien $\varrho' = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} \subset E_k^{|\varrho'|}$ und f_5 eine $|\varrho'|$-stellige Funktion mit

$$f_5(\varrho') := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{cases} \notin \varrho' & \text{für } \varrho' \not\subseteq \varrho, \\ \in \varrho \backslash \varrho' & \text{für } \varrho' \subset \varrho \end{cases}$$

und, falls $\mathbf{r} <_\varrho \mathbf{s}$ und damit $\alpha <_\varrho \beta$,

$$f_5(\boldsymbol{a}) := \begin{cases} o_\varrho & \text{für } \boldsymbol{a} = (o_\varrho, o_\varrho, ..., o_\varrho), \\ \alpha & \text{für } \boldsymbol{o_\varrho} <_\varrho \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{s}, \\ \beta & \text{für } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}, \\ e_\varrho & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$f_5(\mathbf{a}) := \begin{cases} o_\varrho & \text{für } \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{a} <_\varrho \boldsymbol{s}, \\ \alpha & \text{für } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}, \\ \beta & \text{für } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{s}, \\ e_\varrho & \text{sonst }, \end{cases}$$

falls $\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}$ bez. ϱ unvergleichbar sind. Man prüft leicht nach, daß f_5 zu $T_Q \cap Pol_k\varrho$, aber nicht zu $T_Q \cap Pol_k\varrho'$ gehört.

Fall 8: $\varrho \in (\mathcal{C}_{k;Q} \backslash \mathcal{C}^1_{k;Q}) \cup \mathcal{N}_{k;Q}$ und $\varrho' \in \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{M}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{P}^{\sim}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q}$.

Bezeichne c ein zentrales Element von ϱ. In $T_Q \cap Pol_k\varrho$ findet man dann eine $|\varrho'|$-stellige Funktion f_6 mit

$$f_6(\varrho') \begin{cases} \notin \varrho' & \text{für } \varrho' \not\subseteq \varrho, \\ \in \varrho \backslash \varrho' & \text{für } \varrho' \subset \varrho \end{cases}$$

und $f_6(q, q, ..., q) = q$ für alle $q \in Q$ sowie $f_6(\boldsymbol{a}) = c$ für die restlichen Tupel $\boldsymbol{a} \in E_k^{|\varrho'|}$, die nicht zu $T_Q \cap Pol_k\varrho'$ gehört. Also gilt (5).

Fall 9: $\varrho \in \mathcal{L}_{k;Q}$.

Dann ist $|Q| = 1$ und $k = 2^m, m \geq 1$. O.B.d.A. sei $Q = \{0\}$. Die zur Beschreibung von ϱ benötigte elementar abelsche 2-Gruppe mit dem neutralen Element 0 sei mit G bezeichnet. Dem Beweis von Lemma 3.5 ist zu entnehmen, daß ϱ aus einer Relation $\{0\} \times \lambda$, wobei $\lambda \in \mathcal{L}_{2^m}$, ableitbar ist. Da außerdem $\varrho \circ \varrho = \lambda$ ist, gilt $T_{\{0\}} \cap Pol_k\lambda = Pol_k\varrho$. Nach [13] ist damit eine n-stellige Funktion f aus $Pol_k\varrho$ eine quasilineare Funktion der Form

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \cdot x_i^{2^j},$$

wobei $+(=+_G)$ und $\cdot$ die Operationen eines Körpers $(E_{2^m};+,\cdot)$ mit $G=(E_{2^m};+)$ sind und $a_{1,0},...,a_{n,m-1}\in E_{2^m}$.

Fall 9.1.: $\varrho'\in\mathcal{C}^1_{k;Q}$.

Seien $a\notin\varrho'$ und $b\in\varrho'$. Dann bewahrt die quasilineare einstellige Funktion f_7 mit $f_7(x):=(a\cdot b^{-1})\cdot x$ nicht ϱ' wegen $f_7(b)=a$, d.h., es gilt (5).

Fall 9.2.: $\varrho'\in\mathcal{P}^{\sim}_{k;Q}$.

Bezeichne 1 das Einselement der multiplikativen Gruppe des Körpers $(E_{2^m};+,\cdot)$. Da die Ordnung dieser Gruppe ungerade ist, gilt für alle $a\in E_{2^m}\backslash\{0,1\}$ stets $a^2\neq 1$. Die einstellige Funktion f_8 mit $f_8(x):=x^2$ ist aus $Pol_k\varrho$, aber sie bewahrt nicht ϱ', da es (nach Definition von ϱ') ein $a\in E_k\backslash\{1\}$ mit $(1,a)\in\varrho'$ und $(f_8(1),f_8(a))=(1,a^2)\notin\varrho'$ wegen $a^2\neq a$ und dem oben Bemerkten gibt.

Fall 9.3.: $\varrho'\in\mathcal{U}_{k;Q}$.

Die 2-stellige Funktion f_9 mit $f_9(x,y):=x+y$ aus $Pol_k\varrho$ bewahrt nicht die Relation ϱ'. Es gilt nämlich für $(a,b)\in\varrho'$ und $a\neq b$:

$$f_9\begin{pmatrix}a & a\\ b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ a+b\end{pmatrix}\notin\varrho',$$

da für $a\neq b$ stets $a+b\neq 0$ ist.

Fall 9.4.: $\varrho'\in\mathcal{M}^{\sim}_{k;Q}$.

Die oben definierte Funktion f_9 bewahrt in diesem Fall ebenfalls nicht die Relation ϱ', denn es gilt

$$f_9\begin{pmatrix}0 & a\\ e_{\varrho'} & e_{\varrho'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}\notin\varrho'$$

für $a\in E_k\backslash\{0\}$.

Fall 9.5.: $\varrho'\in\mathcal{L}_{k;Q}$.

Für beliebiges $\lambda\in\mathcal{L}_{2^2,0}$ ist $\{(0,x,x),(x,0,x),(x,x,0)\mid x\in E_k\}\subseteq\lambda$. Wegen $\varrho\neq\varrho'$ gibt es gewisse a und b aus E_k mit $(a,b,a+_G b)\in\varrho$ und $(a,b,a+_G b)\notin\varrho'$. Folglich bewahrt die dreistellige Funktion f_{10} mit $f_{10}(x,y,z):=x+_G y+_G z$ aus $Pol_k\varrho$ nicht die Relation ϱ', da

$$f_{10}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ a & a & b\\ a & 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ a+_G b\end{pmatrix}$$

ist.

Fall 9.6.: $\varrho'\in(\mathcal{C}_{k;Q}\backslash\mathcal{C}^1_{k;Q})\cup\mathcal{N}_{k;Q}$.

Sei ϱ' eine h'−äre Relation und $(a_1,\ldots,a_{h'})\notin\varrho'$. Dann bewahrt die h'-stellige Funktion f_{11} mit

$$f_{11}(x_1,\ldots,x_{h'}):=a_1\cdot x_1+_G a_2\cdot x_2+_G\cdots+_G a_{h'}\cdot x_{h'}$$

nicht die Relation ϱ', da, falls 1 das Einselement des Körpers $(E_k; +_G, \cdot)$ bezeichnet,

$$f_{11}\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ .\ .\ .\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ .\ .\ .\ 0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 0\ 0\ 0\ .\ .\ .\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_{h'} \end{pmatrix}$$

gilt und 0 ein zentrales Element von ϱ' ist. Also gilt (5) auch im Fall 9.6.
Weil außerdem aus $T_Q \cap Pol_k\varrho \not\subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho'$ offensichtlich $\varrho \neq \varrho'$ folgt, ist (c) bewiesen. ∎

4 Beweis von Satz 2.1

Sei $R_{max}(T_Q) := \mathcal{M}_{k;Q} \cup \mathcal{U}_{k;Q} \cup \mathcal{S}_{k;Q} \cup \mathcal{L}_{k;Q} \cup \mathcal{C}_{k;Q} \cup \mathcal{P}_{k;Q} \cup \mathcal{N}_{k;Q}$ und bezeichne A eine beliebige maximale Klasse von T_Q mit $\emptyset \neq Q \subseteq E_k$. Durch vollständige Induktion über $r := |Q|$ wollen wir

$$\exists \varrho \in R_{max}(T_Q) : A \subseteq T_Q \cap Pol_k\varrho \tag{6}$$

beweisen.
$\mathbf{r = 1}$: Im Fall $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} = V_k^{\uparrow}(T_Q)$ folgt (6) aus 3.7. Ist $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} \neq V_k^{\uparrow}(T_Q)$, so existiert wegen 3.4(b) eine von $Pol_k\varrho$ verschiedene maximale Klasse B_1 von P_k mit $A = T_Q \cap B_1$. Nach 1.2 gehört dann eine Relation $\gamma \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{U}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{L}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{C}_k\backslash\{Q\}$ zu Inv_kA und (6) ergibt sich aus 3.5.
$\mathbf{r - 1 \longrightarrow r}$: Angenommen, (6) ist für alle $Q' \subseteq E_k$ mit $1 \leq |Q'| \leq r - 1$ richtig, und es sei Q $(\subseteq E_k)$ r-elementig. Wegen $r = |Q| \geq 2$ und 3.7 haben wir $V_k^{\uparrow}(A)\backslash\{A\} \neq V_k^{\uparrow}(T_Q)$. Folglich existiert eine Teilklasse B von P_k mit

$$A = B \cap T_Q \text{ und } B \not\subseteq T_Q. \tag{7}$$

Zwei Fälle sind dann für B möglich:

Fall 1: $\forall a \in Q : B \not\subseteq Pol_k\{a\}$.
Da $A \neq P_k$, existiert wegen 1.2 ein $\gamma \in R_{max}(P_k)\backslash\{\{a\} \mid a \in Q\}$ mit $B \subseteq Pol_k\gamma$. Hieraus und aus (7) sowie 3.4(a) ergibt sich dann $A = B \cap T_Q \subseteq T_Q \cap Pol_k\gamma \subset T_Q$. Weil $\gamma \in Inv_kA$, folgt hieraus nach 3.5 und 3.6 die Aussage (6).
Fall 2: $\exists Q' \subset Q : B \subseteq T_{Q'} \wedge (\forall b \in Q\backslash Q' : B \not\subseteq Pol_k\{b\})$.
Wegen $B \notin V_k^{\uparrow}(T_Q)$ haben wir $B \subset T_{Q'}$, womit eine gewisse maximale Klasse B_2 von $T_{Q'}$ mit $B \subseteq B_2$ existiert (siehe 3.2). Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein $\varrho \in R_{max}(T_{Q'})$ mit $B_2 \subseteq T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$. $T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$ ist nach 3.4(a),(c) von $T_{Q'}$ verschieden, womit $B_2 = T_{Q'} \cap Pol_k\varrho$ gilt. Außerdem haben wir (man beachte dabei $\forall b \in Q\backslash Q' : B \not\subseteq Pol_k\{b\}$) : $\varrho \in \mathcal{M}_k \cup \mathcal{S}_k \cup \mathcal{U}_k \cup (\mathcal{C}_k\backslash\{\{q\} \mid q \in Q\}) \cup \bigcup_{a \in Q'}(\mathcal{P}_{k;\{a\}} \cup \mathcal{N}_{k;\{a\}})$. Mittels 3.5 und 3.6 folgt hieraus (6). Also

ist (6) richtig. Da man sich ferner leicht überlegen kann, daß $T_Q \cap Pol_k\varrho \neq T_Q$ für jedes $\varrho \in R_{max}(T_Q)$ gilt, folgt der Satz 2.1 aus (6) und 3.7. ■

Literatur

[1] **Denecke, K. :** *Preprimal Algebras.* Berlin 1982

[2] **Foster, A.L.** und **Pixley, A.F. :** *Semi-categorical algebras I, semi-primal algebras.* Math. Z. **85**, 147 - 169 (1964)

[3] **Forster, A.L.** und **Pixley, A.F. :** *Semi-categoral algebras II, semi-primal algebras.* Math. Z. **85**, 169 - 184 (1964)

[4] **Lau, D. :** *Die maximalen Klassen von $Pol_k(0)$.* Rostock. Math. Kolloq. **19**, 29 - 47 (1982)

[5] **Lau, D. :** *On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's Theorem).* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **27**, 3, 167 - 178 (1991)

[6] **Lau, D. :** *Ein neuer Beweis für Rosenberg's Vollständigkeitskriterium.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **28**, 4, 149 - 195 (1992)

[7] **Lau, D. :** *Die maximalen Klassen von Pol_kE_l für $2 \leq l \leq k-1$.* Universität Rostock, Preprint 1992

[8] **Lau, D. :** *Die maximalen Klassen von $\bigcap_{\rho \in Q} Pol_3\rho$ für $Q \subseteq \mathfrak{P}(\{0,1,2\})$, Teil I und II.* Preprints, Universität Rostock 1995

[9] **Post, E.L. :** *The two-valued interative systems of mathematical logic.* In: Ann. Math. Studies **5**, Princeton Univ. Press. 1941

[10] **Pöschel, R.** und **Kalužnin, L.A. :** *Funktionen- und Relationenalgebren.* Berlin 1979

[11] **Quackenbush, R.W. :** *A new proof of Rosenberg's primal algebra characterizations theorem.* In: Csakany, S. and other (eds.): *Finite Algebra and Multiple-valued Logic.* Colloq. Math. Soc. János Bolyai **28**, pp. 603 - 634. Amsterdam 1981

[12] **Rosenberg, I.G. :** *Über die Verschiedenheit maximaler Klassen in P_k.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **14** , 431 - 483 (1969)

[13] **Rosenberg, I.G. :** *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Československé Akad. Věd. Řada Mat. Přirod. Věd **80** , 3 - 93 (1970)

[14] **Rosenberg, I.G. :** *The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain.* J. Combin. Theory, Ser. A, **14** , 1 - 7 (1973)

[15] **Rosenberg, I.G. :** *Completeness, closed classes and relations in Multiple-valued Logics.* In: Proc. Internat. Sympos. on multiple-valued logics. Morgantown 1974

[16] **Szendrei, A. :** *A classification of strictly simple algebras with trivial subalgebras.* Demonstr. Math. **24**, 149 - 173 (1991)

[17] **Werner, H. :** *Discriminator algebras: algebraic representation and model theoretic properties.* Studien zur Algebra und ihre Anwendungen **6**, Berlin 1978

eingegangen: 21. Februar 1994

Autorin: Dr. D. Lau
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 47–52 (1995)

Subject Classification (AMS)
47H10, 54H25

S. N. Mishra

Almost fixed point property of nonexpansive mappings

1 Introduction

Recently Kijima [2] and Shimizu and Takahashi [5] proved some fixed point theorems for singlevalued and multivalued mappings respectively in a metric space with some kind of convexity. The purpose of this note is to extend these results to a Hausdorff gauge space and prove fixed point theorems in the spirit of the conditions considered in [5].

A topological space (X, T) is called a gauge space if the topology T is generated by a family $P = \{p_\alpha : \alpha \in I\}$ of pseudometrics on X, in the sense that the family $\beta = \{V(\alpha, r) : \alpha \in I, r > 0\}$, where $V(\alpha, r) = \{(x, y) : x, y \in X,\ p_\alpha(x, y) < r\}$ is a subbase for T. It is well-known that in order for X to be such a space it is necessary and sufficient that X be a uniform space (equivalently, a completely regular space). Further, X is Hausdorff if and only if for each $x, y \in X$, there is an $\alpha \in I$ such that $p_\alpha(x, y) > 0$. For details, we refer to Dugundji [1].

A nonempty subset A of X is called P–bounded (cf. Mishra [4]) if $\delta = \sup\{p_\alpha(x, y) : x, y \in A\} < \infty$ for each $\alpha \in I$. Further, let $B(X) = \{A \subset X : A \neq \phi$ and A is P–bounded$\}$, $CL(X) = \{A \subset X : A \neq \phi$ and A is closed$\}$, $CB(X) = CL(X) \cap B(X)$ and $C(X) = \{A \subset X : A \neq \phi$ and A is compact$\}$. It is well–known that the family $P = \{p_\alpha : \alpha \in I\}$ induces a family $P^* = \{H_\alpha : \alpha \in I\}$ of Hausdorff pseudometrics on $CB(X)$, where $H_\alpha(A, B) = \max\{\sup p_\alpha(a, B) : a \in A, \sup p_\alpha(A, b) : b \in B\}$, $A, B \in CB(X)$. The family P^* itself induces a topology T^* on $CB(X)$ in the sense that the family $\beta^* = \{V^*(\alpha, r) : \alpha \in I, r > 0\}$, where $V^*(\alpha, r) = \{(A, B) : A, B \in CB(X), H_\alpha(A, B) < r\}$ is a subbase for T^*. Thus $CB(X)$ endowed with the topology T^* is a gauge space, called the hyperspace of X (cf. Michael [3]).

Now onward, X will denote a Hausdorff gauge space. The term bounded will mean $P-$ bounded.

Definition 1 *Let $F : X \to CB(X)$ be a multivalued mapping. Then*

(i) *F is said to be nonexpansive if and only if for each $\alpha \in I$, $p_\alpha(F(x), F(y)) \leq p_\alpha(x, y)$ for all $x, y \in X$.*

(ii) *F is said to have the almost fixed point property in X if $\inf\{p_\alpha(x, F(x)) : x \in X\} = 0$ for each $\alpha \in I$.*

(iii) *X is said to satisfy property (A) if for each $x, y \in X$ and for each $\alpha \in I$, there exists a $z \in X$ such that $p_\alpha(z, u) \leq \frac{1}{2}[p_\alpha(x, u) + p_\alpha(y, u)]$ for all $u \in X$.*

A typical example of such a space is a midpoint convex subset of a normed space.

Definition 2 *Let $f : X \to X$ and $F : X \to CB(X)$ be mappings. Then*

(i) *f is said to be asymptotically regular if for each $\alpha \in I$, $p_\alpha(f^{n+1}(x), f^n(x)) \to 0$ as $n \to \infty$ for each $x \in X$.*

(ii) *f and F are said to commute if for each $x \in X$, $f(F(x)) \subset F(f(x))$.*

(iii) *A point $u \in X$ is said to be a common fixed point of f and F if $f(u) = u \in F(u)$.*

2 Results

Theorem 3 *Let X be a bounded Hausdorff gauge space satisfying property (A) and let $F : X \to C(X)$ be a multivalued nonexpansive mapping. Then F has the almost fixed point property in X.*

Proof: To show that F has the almost fixed point property in X, we need to prove that $\inf\{p_\alpha(x, F(x)) : x \in X\} = 0$ for each $\alpha \in I$. Suppose the contrary by assuming that $\inf\{p_\alpha(x, F(x)) : x \in X\} = 2\delta > 0$ for some $\alpha \in I$. Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary. Then there exists $x_0 \in X$ such that $p_\alpha(x_0, F(x_0)) \leq 2\delta + \varepsilon$. Now since $F(x_0)$ is nonempty, there exists $y_0 \in F(x_0)$ such that $p_\alpha(x_0, y_0) \leq 2(\delta + \varepsilon)$. Let us define inductively the sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ with $y_n \in F(x_n)$ in X as follows.

Suppose x_k and y_k with $y_k \in F(x_k)$ are known. Then since X satisfies the condition (A), we may choose $x_{k+1} \in X$ such that $p_\alpha(x_{k+1}, u) \leq \frac{1}{2}\left[p_\alpha(x_k, u) + p_\alpha(y_k, u)\right]$ for all $u \in X$. Further, since $F(x_{k+1})$ is nonempty and compact, we may choose $y_{k+1} \in X$ such that $y_{k+1} \in F(x_{k+1})$ and $p_\alpha(y_k, y_{k+1}) = p_\alpha(y_k, F(x_{k+1}))$. Therefore $p_\alpha(y_k, y_{k+1}) \leq p_\alpha(x_k, x_{k+1})$. We claim that for each integer $k \geq 0$,

$$p_\alpha(x_k, x_{k+1}) \leq \delta + \varepsilon \ , \quad p_\alpha(x_k, y_k) \leq 2(\delta + \varepsilon) \ . \tag{1}$$

For $k = 0$, we have $p_\alpha(x_0, x_1) \leq \frac{1}{2}\left[p_\alpha(x_0, x_0) + p_\alpha(x_0, y_0)\right] = \frac{1}{2}p_\alpha(x_0, y_0) \leq \delta + \varepsilon$ and hence the result is true for $k = 0$. Next, let it be true for $k \geq 0$. Then $p_\alpha(x_k, x_{k+1}) \leq \delta + \varepsilon$ and $p_\alpha(x_k, y_k) \leq 2(\delta + \varepsilon)$. Therefore we have

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_{k+1}, y_{k+1}) &\leq p_\alpha(x_{k+1}, y_k) + p_\alpha(y_k, y_{k+1}) \\ &\leq \tfrac{1}{2}p_\alpha(x_k, y_k) + p_\alpha(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq (\delta + \varepsilon) + (\delta + \varepsilon) = 2(\delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

and

$$p_\alpha(x_{k+1}, x_{k+2}) \leq \tfrac{1}{2}p_\alpha(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \delta + \varepsilon \ .$$

Therefore (1) holds for all $k \geq 0$. Next, we shall show that for all integers $k, n \geq 0$

$$p_\alpha(x_k, x_{k+n}) \geq (n+2)(\delta + \varepsilon) - 2^{n+1}\varepsilon \ . \tag{2}$$

For $n = 0$, we note that $p_\alpha(x_k, y_k) \geq p_\alpha(x_k, F(x_k)) \geq 2\delta$. Now suppose that (2) holds for $n \geq 0$ and for all $k \geq 0$. Then we have

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_k, y_{k+n+1}) &\geq 2p_\alpha(x_{k+1}, y_{k+n+1}) - p_\alpha(y_k, y_{k+n+1}) \\ &\geq 2p_\alpha(x_{k+1}, y_{k+n+1}) - \textstyle\sum_{i=0}^{n} p_\alpha(x_{k+i}, x_{k+i+1}) \\ &\geq 2\left\{(n+2)(\delta + \varepsilon) - 2^{n+1}\varepsilon\right\} - (n+1)(\delta + \varepsilon) \\ &= (n+3)(\delta + \varepsilon) - 2^{n+2}\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Hence the result is true for $n+1$ and all $k \geq 0$. Therefore (2) holds for all integers $k, n \geq 0$.

Now let m be a nonnegative integer and set $\varepsilon = \delta/2^m$. Then as in the previous case, we may choose sequences $\{x_n^m\}$ and $\{y_n^m\}$ in X such that

$$p_\alpha\left(x_0^m, F(x_0^m)\right) \leq 2\delta + \delta/2^m$$

and

$$p_\alpha\left(x_k^m, y_{k+n}^m\right) \geq (n+2)(\delta + \delta/2^m) - 2^{n+1}(\delta/2^m)$$

for all integers $k, n \geq 0$. In particular, we have

$$\begin{aligned} p_\alpha\left(x_0^m, y_m^m\right) &\geq (m+2)(\delta + \delta/2^m) - 2^{m+1}(\delta/2^m) \\ &= m\delta + (m/2^m)\delta + \delta/2^{m-1} > m\delta \to \infty \text{ as } m \to \infty\ , \end{aligned}$$

contradicting the boundedness of X. Hence $\inf\{p_\alpha(x, F(x)) : x \in X\}$ for all $\alpha \in I$.

Theorem 4 *Let X be a bounded Hausdorff gauge space satisfying the property (A), and let $F : X \to C(X)$ be a multivalued nonexpansive mapping such that $\boldsymbol{cl}(F(X))$, the closure of $F(X)$ is compact. If $f : X \to X$ is a continuous asymptotically regular mapping commuting with F, then f and F have a common fixed point in X.*

Proof: Let $\alpha \in I$ be arbitrary. By Theorem 1, there is a sequence $\{x_n\}$ in X such that $p_\alpha(x_n, F(x_n)) \to 0$ as $n \to \infty$. Now since $F(x_n)$ is nonempty and compact for each n, there exists $y_n \in X$ with $y_n \in F(x_n)$ and $p_\alpha(x_n, y_n) = p_\alpha(x_n, F(x_n))$. Again since $\{y_n\} \subset \boldsymbol{cl}(F(X))$ and $\boldsymbol{cl}(F(X))$ is compact, there exists a subsequence $\{y_{n_k}\}$ of $\{y_n\}$ converging to a point x_0 of X. Therefore we have $\lim p_\alpha(x_{n_k}, y_{n_k}) \to 0$ as $k \to \infty$.

Now let us denote by $\mathrm{Fix}(F)$ the set of all fixed points of F. Clearly, $\mathrm{Fix}(F) \subset F(X)$. We shall show that $\mathrm{Fix}(F)$ is nonempty closed and is invariant under f. We have for any $\alpha \in I$

$$\begin{aligned} p_\alpha(x_0, F(x_0)) &\leq p_\alpha(x_0, x_{n_k}) + p_\alpha(x_{n_k}, F(x_{n_k})) + H_\alpha(F(x_{n_k}), F(x_0)) \\ &\leq 2p_\alpha(x_0, x_{n_k}) + p_\alpha(x_{n_k}, F(x_{n_k})) \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty\ . \end{aligned}$$

Therefore $x_0 \in F(x_0)$ and hence x_0 is a fixed point of F. Thus $\mathrm{Fix}(F) \neq \phi$. To prove that $\mathrm{Fix}(F)$ is closed, let $\{z_n\} \subset \mathrm{Fix}(F)$ with $z_n \to z$ as $n \to \infty$. Then for any $\alpha \in I$, we have $p_\alpha(z_n, F(z)) \leq H_\alpha(F(z_n), F(z)) \leq p_\alpha(z_n, z)$. Making $n \to \infty$, it follows that

$p_\alpha(z, F(z)) = 0$. Hence $z \in \mathrm{Fix}(F)$ and $\mathrm{Fix}(F)$ is closed. Further, since f and F commute, for each $x \in \mathrm{Fix}(F)$, $f(x) \in f(F(x)) \subset F(f(x))$ and hence $\mathrm{Fix}(F)$ is invariant under f.

We note that $\mathrm{Fix}(F)$ is compact (as it is a closed subset of $\boldsymbol{cl}(F(x))$ which is compact). Thus for any $x \in \mathrm{Fix}(F)$, $\{f^n(x)\}$ has a convergent subsequence say $\{f^{n_k}(x)\}$. Suppose $f^{n_k}(x) \to u$ for some $u \in \mathrm{Fix}(F)$ as $k \to \infty$. Then for any $\alpha \in I$, we have

$$p_\alpha(u, f(u)) \leq p_\alpha(u, f^{n_k}(x)) + p_\alpha(f^{n_k}(x), f^{n_k+1}(x)) + p_\alpha(f^{n_k+1}(x), f(u)) \ .$$

Since f is asymptotically regular and continuous, making $k \to \infty$, we have $f(u) = u \in F(u)$. Thus u is a common fixed point of f and F.

Theorems 1 and 2 as proved above, extend and unify the results of [2] and [5].

References

[1] **Dugundji, J. :** *Topology.* Boston 1966

[2] **Kijima, Y. :** *A fixed point theorem for nonexpansive self–maps of a metric space with some kind of convexity.* Math. Japon. **37(4)**, 707-709 (1992)

[3] **Michael, E. :** *Topologies on spaces of subsets.* Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 151-182 (1951)

[4] **Mishra, S. N. :** *A note on common fixed points of multivalued mappings in uniform spaces.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9**, 341-347 (1981)

[5] **Shimizu, T.** and **Takahashi, W. :** *Fixed point theorems in certain convex metric spaces.* Math. Japon. **37(5)**, 855-859 (1992)

received: January 8, 1994

Author:

Prof. Dr. S. N. Mishra
Department of Mathematics
University of Transkei
Private Bag XI
Umtata, Republic of Transkei
South Africa

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 53–58 (1995) Subject Classification (AMS) **54H25**

Zeqing Liu

Common fixed points of multivalued mappings

Abstract. *Common fixed point theorems for contractive type multivalued mappings are proved which generalize some results of Fisher* [1,2,3].

Key words and phrases. *Multivalued mappings, common fixed point, bounded metric space, compact metric space.*

1. Introduction

Let (X, d) be a complete metric space, $B(X)$ denote the set of all nonempty, bounded subsets of X. For A, B in X, define $\delta(A, B) = \sup\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ and $\delta(A, A) = \delta(A)$. If A is a singleton, we write $\delta(A, B) = \delta(a, B)$ and if $B = \{b\}$, then we put $\delta(A, B) = d(a, b)$.

Now let $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ be a sequence of nonempty subsets of X. We say that the sequence $\{A_n\}$ converges to the subset A of X if

(i) each point a in A is the limit of a convergent sequence $\{a_n \in A_n : n = 1, 2 \dots\}$, and

(ii) for arbitrary $\epsilon > 0$, there exists an integer k such that $A_n \subseteq A_\epsilon$, for $n > k$, where A_ϵ is the union of all open spheres with centres in A and radius ϵ.

Fisher [3] proved the following result.

Lemma 1 *If $\{A_n\}$ and $\{B_n\}$ are sequences of bounded subsets of a complete metric space (X, d) which converges to the bounded subsets A and B, respectively, then the sequence $\{\delta(A_n, B_n)\}$ converges to $\delta(A, B)$.*

Let F and G be mappings of (X, d) into $B(X)$ and f a self mapping of (X, d). For $A \subseteq X$ and $n \geq 2$, let $FA = \cup_{a \in A} Fa$, $GFA = G(FA)$ and $F^n A = F(F^{n-1}A)$. F and G are said to be commuting if $FGx = GFx$ for all x in X; F and f are said to be commuting if $Ffx = fFx$ for all x in X. We say that F is continuous at the point x in X if whenever $\{x_n\}$ is a sequence of points in X converging to x, the sequence $\{Fx_n\}$ in $B(X)$ converges to Fx in $B(X)$. We say that F is a continuous mapping of X into $B(X)$ if F is continuous at each point x in X. Define $C_F = \{f : f$ is a self mapping of X and commutes with $F\}$.

Let R^+ denote the set of all nonnegative real numbers, Φ the family of mappings φ from $(R^+)^5$ into R^+ such that each φ is upper semicontinuous, nondecreasing in each coordinate variable, and for any $t > 0, ht = \varphi(t,t,t,t,t) < t$. N denote the set of all positive integers.

The followings lemma was proved in [4].

Lemma 2 *For every $t > 0, ht < t$ if and only if $\lim_{n\to\infty} h^n t = 0$, where h^n denotes the n-times composition of h.*

Fisher [1, 2, 3] established common fixed point theorems for two commuting multivalued mappings. The purpose of this paper is to extend Fisher's results to a more general case.

2. Common fixed point theorems.

We now prove the following theorem.

Theorem 1 *Let F and G be multivalued mappings of a complete bounded metric space (X,d) into $B(X), f$ and g continuous mappings of X into itself such that F and G are commuting, f, g in $C_F \cap C_G$. If there exists φ in Φ satisfying*

$$\delta(Fx, Gy) \le \varphi(\delta(fx, Fx), \delta(gy, Gy), \delta(fx, Gy), \delta(gy, Fx), d(fx, gy)) \tag{1}$$

for all x, y in X, then f, g, F and G have a unique common fixed point z in X. Further, $Fz = Gz = \{z\}$.

Proof: Let A, B in $B(X)$. By (1) we have

$$\delta(Fa, Gb) \le \varphi(\delta(fa, Fa), \delta(gb, Gb), \delta(fa, Gb), \delta(gb, Fa), d(fa, gb))$$

for all a in A, b in B, which implies

$$\delta(FA, GB) \le \varphi(\delta(fa, FA), \delta(gB, GB), \delta(fA, GB), \delta(gB, FA), \delta(fA, gB)). \tag{2}$$

Since X is bounded, then $r = \delta(X) < \infty$. We first show by induction that

$$\delta(F^n G^n X) \le h^n r \tag{3}$$

for n in N. Note that F and G commute and f, g in $C_F \cap C_G$: Using (2)

$$\begin{aligned}\delta(FGX, GFX) \le \varphi(&\delta(GfX, FGX), \delta(FgX, GFX), \delta(GfX, GFX),\\ &\delta(FgX, FGX), \delta(GfX, FgX))\\ \le hr&\end{aligned}$$

and hence (3) is true when $n = 1$. Now assume that (3) holds for some n in N. Again using (2)

$$\begin{aligned}\delta(F^{n+1}G^{n+1}X, G^{n+1}F^{n+1}X) \le \varphi(&\delta(F^nG^nGfX, G^nF^nFGX), \delta(F^nG^nFgX, G^nF^nGFX),\\ &\delta(F^nG^nGfX, G^nF^nGFX), \delta(F^nG^nFgX, G^nF^nFGX),\\ &\delta(F^nG^nGfX, G^nF^nFgX))\\ \le{}& h\delta(F^nG^nX) \le h^{n+1}r\end{aligned}$$

by our assumption. Now (3) follows by induction.

For each n in N, choose a point x_n in F^nG^nX. It follows that

$$fx_n \in fF^nG^nX \subseteq F^nG^nfX \subseteq F^nG^nX.$$

Similarly, $gx_n \in F^nG^nX$. From (3) we get

$$d(x_n, x_m) \le \delta(F^nG^nX, G^nF^nG^{m-n}F^{m-n}X) \le h^nr$$

for m, n in N with $m \ge n$. By Lemma 2 and the above inequality it follows that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence. Since X is complete, there exists a point z in X such that $x_n \to z$ as $n \to \infty$. Note that f and g are continuous. Thus $fx_n \to fz$, $gx_n \to gz$ as $n \to \infty$. Consequently, we have

$$d(fz, gz) \le d(fz, fx_n) + d(fx_n, gx_n) + d(gx_n, gz) \le d(fz, fx_n) + h^nr + d(gx_n, gz).$$

Letting n tend to infinity, we obtain $d(fz, gz) \le 0$; i. e., $fz = gz$.

We next show that z is a common fixed point of f, g, F and G. Clearly, we have

$$d(z, fz) \le d(z, x_n) + h^nr + d(fx_n, fz).$$

As $n \to \infty$, we have $d(z, fz) \le 0$; i. e., $z = fz$ and hence $z = gz$. We now assert that $\delta(z, Gz) = 0$. Otherwise $\delta(z, Gz) > 0$. It follows from (2) and (3) that

$$\begin{aligned}\delta(z, Gz) &\le d(z, gx_n) + \delta(F^nG^nX, Gz)\\ &\le d(z, gx_n) + \varphi(\delta(F^{n-1}G^nfX, F^nG^nX), \delta(z, Gz), \delta(F^{n-1}G^nfX, Gz),\\ &\qquad \delta(z, F^nG^nX), \delta(F^{n-1}G^nfX, z))\\ &\le d(z, gx_n) + \varphi(h^{n-1}r, \delta(z, Gz), h^{n-1}r + d(gx_{n-1}, z) + \delta(z, Gz),\\ &\qquad d(gx_n, z) + h^nr, h^{n-1}r + d(gx_{n-1}, z)).\end{aligned}$$

Letting n tend to infinity, we obtain

$$\delta(z, Gz) \le \varphi(0, \delta(z, Gz), \delta(z, Gz), 0, 0) \le h\delta(z, Gz) < \delta(z, Gz)$$

which is a contradiction and hence $\delta(z, Gz) = 0$. Consequently, $Gz = \{z\}$. Similarly, $Fz = \{z\}$.

We finally show that z is the only common fixed point of f, g, F and G. Suppose that f, g, F and G have a second common fixed point w. From (1) have

$$\delta(Fw, Gw) \le \varphi(\delta(w, Fw), \delta(w, Gw), \delta(w, Gw), \delta(w, Fw), 0) \le h\delta(Fw, Gw)$$

which implies $\delta(Fw, Gw) = 0$. Note that $w \in Fw \cap Gw$. Consequently, $Fw = Gw = \{w\}$. Using (1) again

$$d(z, w) = \delta(Fz, Gw) \le \varphi(0, 0, d(z, w), d(w, z), d(z, w)) \le hd(z, w).$$

Therefore $z = w$; i. e., z is the unique common fixed point of f, g, F and G. This completes the proof.

Corollary 1 *Let S, T, f and g be self mappings of a complete bounded metric space (X, d) such that S and T are commuting and f, g are in $C_S \cap C_T$. If there exists φ in Φ satisfying*

$$d(Sx, Ty) \le \varphi(d(fx, Sx), d(gy, Ty), d(fx, Ty), d(gy, Sx), d(fx, gy))$$

for all x, y in X, then f, g, S and T have a unique common fixed point.

Proof: Define mappings F and G of X into $B(X)$ by $Fx = \{Sx\}, Gx = \{Tx\}$ for x in X. Then Corollary 1 follows from Theorem 1.

Remark 1 If f and g are the indentity mapping on X and

$$\varphi(u, v, w, x, y) = c \cdot \max\{u, v, w, x, y\},$$

then Theorem 1 is reduced to Theorem 2 of [1] and Theorem 3 of [2]; Corollary 1 is reduced to the Corollary of [1].

We next prove a theorem for compact metric spaces.

Theorem 2 *Let F and G be continuous commuting mappings of a compact metric space (X, d) into $B(X)$, f and g continuous mappings of X into itself satisfying*

$$\delta(Fx, Gy) < \max\{\delta(fx, Fx), \delta(gy, Gy), \delta(fx, Gy), \delta(gy, Fx), d(fx, gy)\} \tag{4}$$

for all x, y in X for which the right-hand side of (4) is positive. If f, g are in $C_F \cap C_G$, then f, g, F and G have a unique common fixed point z in X. Further, $Fz = Gz = \{z\}$.

Proof: Let $s(x, y) = \max\{\delta(fx, Fx), \delta(gy, Gy), \delta(fx, Gy), \delta(gy, Fx), d(fx, gy)\}$. We now assert that $s(x, y) = 0$ for some x, y in X. Otherwise $s(x, y) > 0$ for all x, y in X. Define the real-valued function $t(x, y)$ on $X \times X$ by $t(x, y) = \delta(Fx, Gy)/s(x, y)$. Then if $\{(x_n, y_n)\}$ is an arbitrary sequence in $X \times X$ converging to (x, y), it follows Lemma 1 that the sequence $\{t(x_n, y_n)\}$ converges to $t(x, y)$. The function t is therefore a continuous function defined on the compact metric space $X \times X$ and so achieves its maximum value c. It is easy to see that (4) implies $c < 1$. Choose $\varphi(u, v, w, m, n) = c \cdot \max\{u, v, w, m, n\}$. Then the conditions of Theorem 1 are satisfied. Consequently, f, g, F and G have a unique common fixed point z and $Fz = Gz = \{z\}$. It follows that $s(z, z) = 0$, giving a contradiction. Since $s(x, y) = 0$ for some x, y in X, then $Fx = Gy = \{fx\} = \{gy\}$ is a singleton $\{z\}$ and so $F^2x = Ffx = fFx = \{fz\}$ is also a singleton. Suppose that $fz \neq z$. By (4) we have

$$\begin{aligned} d(fz, z) = \delta(Ffx, Gy) &< \max\{\delta(f^2x, fFx), \delta(gy, Gy), \delta(f^2x, Gy), \delta(gy, Ffx), d(f^2x, gy)\} \\ &= \max\{0, 0, d(fz, z), d(z, fz), d(fz, z)\} = d(fz, z) \end{aligned}$$

which is impossible. Hence $\{z\} = \{fz\} = Fz$. Similarly, we can show that $gy = z$ is also a common fixed point of G and g and $Gz = \{z\}$.

Now suppose that f, g, F and G have a second distinct common fixed point w. Then if $Fw \neq \{w\}$ or $Gw \neq \{w\}$, by (4) we get

$$\delta(Fw, Gw) < \max\{\delta(w, Fw), \delta(w, Gw), \delta(w, Gw), \delta(w, Fw), 0\} \leq \delta(Fw, Gw)$$

since $fw = gw = w$ is in Fw and Gw, giving a contradiction. Thus $Fw = Gw = \{w\}$ and so

$$d(z, w) = \delta(Fz, Gw) < \max\{0, 0, d(z, w), d(z, w), d(z, w)\} = d(z, w)$$

which is a contradiction. The fixed point z must therefore be unique. This completes the proof.

Remark 2 Theorem 2 of Fisher [3] is a special case of our Theorem 2. The following example reveals that our Theorem 2 extends properly Theorem 2 of Fisher [3].

Example Let $X = \{1, 2, 5, 9\}$ with the usual metric. Define a self mapping f of X and a multivalued mapping F of X into $B(X)$ by $f1 = f2 = f5 = 2$, $f9 = 1$, $F1 = \{2, 5\}$, $F2 = \{2\}$, $F5 = \{1, 2\}$, $F9 = \{5\}$. Then Theorem 2 of Fisher [3] is not applicable since

$$\delta(F2, F5) = 1 = \max\{\delta(f2, F2), \delta(f5, F5), \delta(f2, F5), \delta(f5, F2), d(f2, f5)\}.$$

Take $G = F$ and $g = i$ — the identity mapping of X. It is easy to check that f, g, F and G satisfy the conditions of our Theorem 2.

Acknowledgement The author is grateful to Dr. Brain Fisher for providing him with reprints of his papers which motivated the present work.

References

[1] **Fisher, B. :** *Set-valued mappings on bounded metric spaces.* Indian J. Pure Appl. Math. **11**, 8-12 (1980)

[2] **Fisher, B. :** *Common fixed points of set-valued mappings on bounded metric spaces.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. **11**, 307-311 (1983)

[3] **Fisher, B. :** *Common fixed points of mappings and set-valued mappings.* Rostock. Math. Kolloq. **18**, 69-77 (1981)

[4] **Singh, S. P.** and **Meade, B. A. :** *On common fixed point theorems.* Bull. Austral. Math. Soc. **16**, 49-53 (1977)

received: July 22, 1994

Author:

Dr. Zeqing Liu
Department of Mathematics
Liaoning Normal University
Dalian
Liaoning, 116022
P. R. China

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 59–74 (1995) Subject Classification (AMS)
06F05, 20M14

Manfred Krüppel

Ungleichungen für den asymptotischen Radius in uniform konvexen Banach-Räumen mit Anwendungen in der Fixpunkttheorie

Abstract. *We regard a new modul of convexity δ_p, which depends of an parameter $p > 1$. With help of δ_p we obtain an estimate of $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|$ for $0 \le \lambda \le 1$ and prove an inequality for the asymptotic radius of a bounded sequence. By means of our inequality we obtain two asymptotic fixed point theorems.*

1 Der Konvexitätsmodul δ_p

Nach Clarkson [5] heißt ein Banach-Raum X uniform konvex, wenn zu jedem ε mit $0 < \varepsilon \le 2$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$ folgt:

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \delta(\varepsilon).$$

Die Funktion

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left[1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in X, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x - y\| \ge \varepsilon\right]$$

heißt Konvexitätsmodul des Banach-Raumes X.
Der Banach-Raum X ist genau dann uniform konvex, wenn aus $\|x_n\| \le 1, \|y_n\| \le 1$ und $\|x_n + y_n\| \to 2$ stets $\|x_n - y_n\| \to 0$ folgt (vgl. [8] oder [11]).
Der Hilbert-Raum ist uniform konvex; dies folgt aus der Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Die Funktionsräume L^p sind für $1 < p < \infty$ uniform konvex; dies ergibt sich aus den Clarksonschen Ungleichungen (Clarkson [5]): Es gilt

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^p \le \left(\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}\right)^{q-1} \tag{1}$$

für $1 < p \le 2$ und für $2 \le p < \infty$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}, \tag{2}$$

wenn q den zu p konjugierten Exponenten bezeichnet.

Satz 1 *Im Raum L^p mit $1 < p \le 2$ gilt für $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - (2^{p-1}-1)\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist.

Beweis: Sei $a = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q$ und $b = \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q$. Dann ist $0 \le a \le 1$ und $0 \le b \le 1$. Wir setzen

$$f(b) := \inf_{0 \le a \le 1} [(a+b)^{p-1} - a^{p-1}].$$

Zur Bestimmung von $f(b)$ für ein festes $b > 0$ betrachten wir die Funktion

$$g(a) := (a+b)^{p-1} - a^{p-1}$$

für $0 \le a \le 1$. Wegen $a, b \ge 0$ und $p - 2 \le 0$ ist

$$g'(a) = (p-1)(a+b)^{p-2} - (p-1)a^{p-2} \le 0.$$

Die Funktion $g(a)$ ist also monoton fallend. Daher ist

$$f(b) = (1+b)^{p-1} - 1.$$

Wegen $f''(b) = (p-1)(p-2)(1+b)^{p-3} < 0$ ist die Funktion $f(b)$ konkav und folglich

$$f(b) \ge (2^{p-1}-1)b.$$

Es gilt also

$$(2^{p-1}-1)\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q \le \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^q\right)^{p-1} - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^{q(p-1)}.$$

Nach der Clarksonschen Ungleichung (1) erhalten wir unter Beachtung von $(q-1)(p-1) = 1$ und $q(p-1) = p$ die Behauptung des Satzes. ■

Es sei X ein uniform konvexer Banach-Raum und p eine reelle Zahl mit $1 < p < \infty$. Wir führen einen neuen parameterabhängigen Konvexitätsmodul $\delta_p(\varepsilon)$ ein:

$$\delta_p(\varepsilon) := \inf \left[\frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p : x, y \in X,\ \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \varepsilon \right].$$

Satz 2 *Der Konvexitätsmodul $\delta_p(\varepsilon)$ hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\delta_p(\varepsilon) > 0$ *für* $\varepsilon > 0$.

(ii) $\delta_p(\lambda\varepsilon) \le \lambda^p \delta_p(\varepsilon)$ *für* $0 \le \lambda \le 1$.

(iii) *Für beliebige x, $y \in X$ mit $\|x\| \le 1, \|y\| \le 1$ gilt*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p \le \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2} - \delta_p(\|x-y\|).$$

Beweis: Zu (i). Angenommen, (i) sei falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jeder natürlichen Zahl n Elemente x_n, y_n existieren mit $\|x_n\| \le 1, \|y_n\| \le 1, \|x_n - y_n\| \ge \varepsilon$ und

$$\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^p > \frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2} - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Wegen der Konvexität der Funktion t^p für $t > 0$ und der Dreiecksungleichung ist

$$\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \ge \left(\frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} \right)^p \ge \left(\frac{\|x_n - y_n\|^p}{2} \right)^p \ge \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p\right)} = 0.$$

Aus (3) folgt daher

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \ge 2^{p-1}. \tag{4}$$

Wir können annehmen, daß $\|x_n\| \to a$ und $\|y_n\| \to b$ konvergieren, andernfalls gehen wir zu Teilfolgen über. Da t^p eine für $t > 0$ streng konvexe Funktion ist, gilt

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^p \le \frac{a^p + b^p}{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $a = b$ ist. Aus (4) folgt unter Beachtung der Dreiecksungleichung und der strengen Konvexität von t^p

$$2^{p-1} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p)}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} \leq 2^{p-1}$$

Hieraus folgt $a = b$, d.h. $\|x_n\| \to a$ and $\|y_n\| \to a$, sowie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y_n\|^p}{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p} = 2^{p-1} .$$

Weiter ergibt sich $\|x_n + y_n\| \to 2a$. Dies steht aber wegen $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ im Widerspruch zur uniformen Konvexität von X.

Zu (ii). Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ derart, daß $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$, $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$ und

$$\delta_p(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2} - \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|^p \right] .$$

gilt. Ist $\lambda \in (0,1)$, so gilt für die Folgen $x'_n = \lambda x_n$ und $y'_n = \lambda y_n$: $\|x'_n\| \leq 1$, $\|y'_n\| \leq 1$ und $\|x'_n - y'_n\| \geq \lambda\varepsilon$. Nach Definition von δ_p ist daher

$$\delta_p(\lambda\varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\frac{\|x'_n\|^p + \|y'_n\|^p}{2} - \left\| \frac{x'_n + y'_n}{2} \right\|^p \right] = \lambda^p \delta_p(\varepsilon).$$

Zu (iii). Die Eigenschaft (iii) ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Konvexitätsmoduls. ■

Bemerkung. Im Hilbert-Raum ist $\delta_2(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$, wie aus der Parallelogrammgleichung hervorgeht. Nach Satz 1 gilt für den Raum L^p mit $1 < p < 2$

$$\delta_p(\varepsilon) \geq (2^{p-1} - 1) \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q ,$$

wobei q der zu p konjugierte Exponent ist. Für den Raum L^p mit $2 < p < \infty$ gilt nach der Clarksonschen Ungleichung (2) $\delta_p(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$.

Wir werden die Ungleichung in (iii) verallgemeinern. Dazu definieren wir $\varphi(t) := \min(t, 1-t)$ für $0 \leq t \leq 1$ und setzen diese Funktion periodisch mit der Periode 1 fort. Es ist dann $\varphi(t)$ gleich dem Abstand des Punktes t von dem nächsten ganzzahligen Punkt (Sägezahnkurve).

Satz 3 *Sei X ein gleichmäßig konvexer Banach-Raum und $1 < p < \infty$. Ist $\|x\| \le 1$ und $\|y\| \le 1$, dann gilt für $0 \le \lambda \le 1$*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \le \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right).$$

Beweis: Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich richtig und nach Satz 1 ebenso für $\lambda = 1/2$. Wir zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion nach n, daß die Ungleichung für alle Zahlen λ der Form $k/2^n (k = 0, 1, \dots, 2^n)$ richtig ist.

Dazu nehmen wir an, daß für eine natürliche Zahl n die Ungleichung für alle Zahlen $\lambda = k/2^n$ mit $k = 0, 1, \dots, 2^n$ gilt, d.h., es sei

$$\left\|\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right\|^p \le \frac{k}{2^n}\|x\|^p + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\|y\|^p - 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi\left(2^\nu\frac{k}{2^n}\right)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right), \quad (5)$$

denn für $\nu \le n$ ist $\varphi\left(2^\nu\frac{k}{2^n}\right) = 0$.

Es sei nun λ eine feste Zahl der Gestalt $\lambda = (2s+1)/2^{n+1}$, wobei s eine der Zahlen $0, 1, \dots, 2^{n-1}$ ist. Unter Beachtung der Beziehungen

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right] + \left[\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right]\right\}$$

und

$$\frac{x-y}{2^n} = \left[\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right] + \left[\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right]$$

erhalten wir nach Satz 1 (iii) unter Benutzung von (5) mit $k = s$ und $k = s+1$

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p &\le \frac{\left\|\frac{s}{2^n}x + \left(1 - \frac{s}{2^n}\right)y\right\|^p + \left\|\frac{s+1}{2^n}x + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)y\right\|^p}{2} - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right)\\ &\le \frac{1}{2}\left[\frac{s}{2^n} + \frac{s+1}{2^n}\right]\|x\|^p + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{s}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)\right]\|y\|^p\\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\varphi\left(\frac{2^\nu s}{2^n}\right) + \varphi\left(2^\nu\frac{s+1}{2^\nu}\right)\right]\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right) - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^n}\right).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left[\frac{s}{2^n} + \frac{s+1}{2^n}\right] = \lambda$$

und

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{s}{2^n}\right) + \left(1 - \frac{s+1}{2^n}\right)\right] = 1 - \lambda\ .$$

Zum Nachweis der Beziehung

$$\varphi\left(2^\nu \frac{s}{2^n}\right) + \varphi\left(2^\nu \frac{s+1}{2^n}\right) = 2\varphi\left(2^\nu \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right)$$

bemerken wir, daß die Zahlen $2^\nu \frac{s}{2^n} = \frac{s}{2^{n-\nu}}$ und $2^\nu \frac{s+1}{2^n} = \frac{s+1}{2^{n-\nu}}$ beide in einem Intervall der Form $\left[m, m+\frac{1}{2}\right]$ oder $\left[m+\frac{1}{2}, m+1\right]$ (mit einer ganzen Zahl m) liegen und daß die Funktion φ auf jedem dieser Intervalle linear ist. Beachten wir schließlich noch, daß

$$\varphi(2^n\lambda) = \varphi\left(2^n \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right) = \varphi\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

und daß für $\nu > n$

$$\varphi(2^\nu\lambda) = \varphi\left(2^\nu \frac{2s+1}{2^{n+1}}\right) = 0$$

ist, so folgt, daß die zu beweisende Ungleichung auch für die Zahl $\lambda = (2s+1)/2^{n+1}$ richtig ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt somit die Ungleichung für alle Zahlen λ der Form $k/2^n$.

Um die Ungleichung für alle Zahlen $\lambda \in [0,1]$ zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß die Reihe

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right)$$

auf dem Intervall [0,1] gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 1 (ii) und wegen $\varphi(t) \le \frac{1}{2}$ ist

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{2^\nu}\right) \le \delta_p(\|x-y\|)\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu p}}\ .$$

Die Reihe ist also nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß gleichmäßig konvergent. Folglich sind beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung stetig bzgl. λ. Da die Menge der Zahlen $\lambda = k/2^n$ dicht ist in [0,1] und für diese Zahlen die Ungleichung gilt, folgt durch Grenzübergang, daß die zu beweisende Ungleichung für alle Zahlen aus [0,1] richtig ist.

Bemerkung. Führen wir den ganzen Beweis im reellen Hilbert-Raum mit $p = 2$, so erhalten wir wegen $\delta_2(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^p$ unter Beachtung der Tatsache, daß bei allen Schritten stets das Gleichheitszeichen steht, die Beziehung

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(2^\nu\lambda)\left(\frac{\|x-y\|}{2^{\nu+1}}\right)^2.$$

Andererseits gilt im reellen Hilbert-Raum

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + (1-\lambda)^2\|y\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x,y)$$

und

$$\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 = \lambda(1-\lambda)\|x||^2 + \lambda(1-\lambda)\|y\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)(x,y).$$

Hieraus erhalten wir

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Durch Vergleich folgt die für $0 \leq \lambda \leq 1$ gültige Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^\nu\lambda)}{4^\nu} = 2\lambda(1-\lambda).$$

2 Das asymptotische Zentrum

Zum Beweis des bekannten Fixpunktsatzes für nichtexpansive Operatoren in uniform konvexen Banach-Räumen (vgl. Browder [2], Göhde [9], Kirk [10]) führte M. Edelstein [6] den Begriff des asymptotischen Zentrums einer beschränkten Folge (u_n) ein.
Er zeigte: Ist (u_n) eine beschränkte Folge in einem uniform konvexen Banach-Raum X, dann gibt es genau ein $z \in X$, so daß für alle $x \neq z$

$$\lim\,\sup \|z-u_n\| < \lim\,\sup \|x-u_n\| \tag{6}$$

gilt. Der eindeutig bestimmte Punkt z, für den (6) gilt, heißt asymptotisches Zentrum der Folge (u_n) und $r(z) = \lim\,\sup \|z-u_n\|$ der asymptotische Radius der Folge (u_n) (vgl. R. Schöneberg [16]). Das Funktional

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\sup\|x-u_n\|$$

nimmt also für $x = z$ sein Minimum an.

Satz 4 *Sei (u_n) eine beschränkte Folge in dem uniform konvexen Banach-Raum X und z das asymptotische Zentrum dieser Folge. Dann gilt für $1 < p < \infty$ und alle $x \neq z$*

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)} - 0\right) \leq 1. \tag{7}$$

Beweis: Es sei $\lambda \in [0,1]$. Wegen

$$[\lambda x + (1-\lambda)z] - u_n = \lambda(x-u_n) + (1-\lambda)(z-u_n)$$

gilt nach Satz 3

$$\|\lambda x + (1-\lambda)z - u_n\|^p \le \lambda\|x - u_n\|^p + (1-\lambda)\|z - u_n\|^p - 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu m}\right)m^p,$$

wobei $m \ge \max(\|x-u_n\|, \|z-u_n\|)$ ist.
Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir n_o so groß, daß für $n \ge n_o$

$$\max(\|x-u_n\|, \|z-u_n\|) \le r(x) + \varepsilon$$

ausfällt (man beachte $r(z) \le r(x)$).
In der obigen Ungleichung nehmen wir $n \ge n_o$ und setzen $m = r(x) + \varepsilon$. Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$r^p(\lambda x + (1-\lambda)z) \le \lambda r^p(x) + (1-\lambda)r^p(z) - 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu[r(x)+\varepsilon]}\right)[r(x)+\varepsilon]^p.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$r^p(\lambda x + (1-\lambda)z) \le \lambda r^p(x) + (1-\lambda)r^p(z) - 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)} - 0\right)r^p(x).$$

Berücksichtigen wir noch, daß $r(z) \le r(\lambda x + (1-\lambda)z)$ ist, so erhalten wir nach Umformung

$$\lambda r^p(z) \le \lambda r^p(x) - 2\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi(2^\nu\lambda)\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)} - 0\right)r^p(x).$$

Für $\lambda = \frac{1}{2^n}$ folgt unter Beachtung der Definition von $\varphi(.)$ und $r(x) > 0$

$$\frac{1}{2^n}\frac{r^p(z)}{r^p(x)} \le \frac{1}{2^n} - 2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{2^\nu}{2^n}\delta_p\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)} - 0\right).$$

Multiplizieren wir mit 2^n und führen dann den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so erhalten wir die zu beweisende Ungleichung. ∎

Folgerung 1. Für beliebiges $p > 1$ gilt

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty}2^\nu\delta_p\left(\frac{1}{2^\nu} - 0\right) \le 1.$$

Betrachten wir nämlich eine konvergente Folge (u_n), dann ist der Grenzwert z zugleich das asymptotische Zentrum der Folge (u_n) und es ist $r(z) = 0$. Für einen beliebigen Punkt $x \ne z$ gilt $\|u_n - x\| \le \|u_n - z\| + \|z - x\|$, woraus zunächst $r(x) \le \|z-x\|$ folgt. Andererseits ist $\|u_n - x\| \ge \|z - x\| - \|z - u_n\|$. Für $n \to \infty$ erhalten wir $r(x) \ge \|z - x\|$. Also ist

$r(x) = \|z - x\|$ und wir erhalten aus (7) die obige Ungleichung.

Bemerkung. Ist $g(t)$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $0 < g(t) \le \delta_p(t)$ für $t > 0$, so gilt

$$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}\right) \le 1 \ .$$

Beispiele.

1. Im Hilbert-Raum nimmt für $p = 2$ die Ungleichung (7) wegen $\delta_2(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$ die Gestalt

   $$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^2 + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \left(\frac{\|z-x\|}{2^{\nu+1} r(x)}\right)^2 \le 1$$

   an und ist äquivalent mit

   $$r^2(z) + \|z-x\|^2 \le r^2(x).$$

   Diese Ungleichung wurde von Baillon [1] mittels der Parallelogrammungleichung und von Tingley [17] über das Skalarprodukt hergeleitet.

2. Im Raum L^p mit $1 < p < 2$ erhalten wir aus (7) unter Beachtung von

   $$\delta_p(\varepsilon) \ge (2^{p-1} - 1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

   (vgl. Satz 1) und

   $$2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu (2^{p-1} - 1)\frac{\|z-x\|^p}{2^{(\nu+1)q} r^q(x)} = \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}}\left(\frac{\|z-x\|}{r(x)}\right)^q$$

   die Ungleichung

   $$\left(\frac{r(z)}{r(x)}\right)^p + \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1-1}}\left(\frac{\|z-x\|}{r(x)}\right)^q \ge 1 \ ,$$

   wobei q der zu p konjugierte Exponent ist.

3. Im Raum L^p mit $2 \le p < \infty$ ergibt sich aus (7) unter Beachtung von

   $$\delta_p(\varepsilon) \ge \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

   die Abschätzung

   $$r^p(x) + \frac{\|z-x\|^p}{2^{p-1}-1} \le r^p(x) \ .$$

3 Asymptotische Fixpunktsätze

Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Mit $\|T\|$ bezeichnen wir die Lipschitz-Norm von T, d.h.

$$\|T\| = \sup\left(\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} : x \neq y\right).$$

Ist die Abbildung T nicht expansiv, d.h. gilt $\|T\| \leq 1$, dann hat T nach dem bekannten Fixpunktsatz von Browder / Göhde / Kirk einen Fixpunkt ([2], [9], [10], [8]).
In [7] zeigten Goebel und Kirk, daß es in jedem uniform konvexen Banach-Raum eine Konstante $L > 1$ mit folgender Eigenschaft gibt: Ist $\sup \|T^n\| < L$, dann hat T einen Fixpunkt in C. Im Raum L^p mit $p \geq 2$ ist ihre Konstante $L = (1 + 1/2^p)^{1/p}$. In einer Reihe von Arbeiten sind Erweiterungen der Konstanten vorgenommen worden, so daß die Fixpunktaussage erhalten bleibt. Für den Hilbert-Raum zeigten Lifschitz [13], Baillon [1], Tingley [17] u.a., daß T einen Fixpunkt besitzt, wenn $\lim\sup\|T^n\| < \sqrt{2}$ ist. Für die reellen Funktionenräume L^p mit $1 < p < \infty$ erweiterte Lim in [14] und [15] die Konstante.
Als Anwendung der Ungleichung für den asymptotischen Radius formulieren wir einen Fixpunktsatz, der die genannten Aussagen umfaßt.

Satz 5 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge des uniform konvexen Banach-Raumes X und $T : C \to C$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Weiter sei p irgendeine Zahl > 1 und $g(t)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $0 < g(t) \leq \delta_p(t)$. Genügt L der Gleichung*

$$\frac{1}{L^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{1}{2^\nu L}\right) = 1 \tag{8}$$

und gilt

$$K = \lim\sup\|T^n\| < L\ , \tag{9}$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Beweis 1. Es sei u ein festes Element aus C und z das asymptotische Zentrum der beschränkten Folge $(T^n u)$. Wir setzen für $x \in C$

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\sup\|x - T^n u\|.$$

Ist $r(z) = 0$, so gilt $\lim T^n u = z$ und wegen der Stetigkeit von T folgt $Tz = z$. Im folgenden können wir $r(z) > 0$ annehmen. Nach Satz 4 gilt wegen $g(t) \leq \delta_p(t)$

$$\frac{r^p(z)}{r^p(x)} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - x\|}{2^\nu r(x)}\right) \leq 1. \tag{10}$$

Wegen

$$r(T^m z) = \limsup_{n\to\infty} \|T^m z - T^n u\| \le \|T^m\| \limsup_{n\to\infty} \|z - T^{n-m} u\| = \|T^m\| r(z)$$

und der Monotonie von g(.) erhalten wir aus (10) mit $x = T^m z$

$$\frac{1}{\|T^m\|^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - T^m z\|}{2^\nu \|T^m\|^p r(z)}\right) \le 1. \tag{11}$$

Für $x \in C$ definieren wir

$$d(x) := \limsup_{n\to\infty} \|x - T^n x\|.$$

Offensichtlich gilt $r(z) \le d(u)$.
Wir wählen nun eine solche Teilfolge (m_i), daß die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{i\to\infty} \|z - T^{m_i} z\| = \limsup_{m\to\infty} \|z - T^m z\| = d(z)$$

und

$$\limsup_{i\to\infty} \|T^{m_i}\| = K_0.$$

Offensichtlich ist $K_0 \le K = \limsup \|T^n\|$.

Setzen wir in (11) $m = m_i$ und führen den Grenzübergang $i \to \infty$ durch, dann erhalten wir unter Beachtung der Stetigkeit und der Monotonie von g(.) sowie den Abschätzungen $r(z) \le d(u)$ und $K_0 \le K$ die Ungleichung

$$\frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{d(z)}{2^\nu K d(u)}\right) \le 1. \tag{12}$$

Der Fall $r(z) > 0$ kann folglich nur für $K \ge 1$ eintreten. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{t}{2^\nu K}\right),\ 0 \le t \le 1.$$

Die Stetigkeit und die strenge Monotonie von g(.) überträgt sich auf f(.). Es ist

$$f(0) = \frac{1}{K^p} \le 1.$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (8) und (9) ist $f(1) > 1$. Folglich gibt es genau ein $\alpha < 1$ mit $f(\alpha) = 1$. Aus (12) folgt

$$(i) \quad d(z) \le \alpha d(u).$$

Aus $\|z-u\| \leq \|z-T^n u\| + \|u-T^n u\|$ folgt für $n \to \infty$ weiter

$$(ii) \quad \|z-u\| \leq r(z) + d(u) \leq 2d(u).$$

2. Ausgehend von einem beliebigen Punkt $u_o \in C$ definieren wir eine Folge (u_m) induktiv, so daß u_{m+1} das asymptotische Zentrum der Iterationsfolge $(T^n u_m)$ ist. Ist für irgendein m

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_{m+1} - T^n u_m\| = 0,$$

dann ist unter Beachtung der Stetigkeit von T der Punkt u_{m+1} ein Fixpunkt von T. Ist dies nicht der Fall, dann gilt nach (i) und (ii)

$$\|u_{m+1} - u_m\| \leq 2d(u_m) \leq 2\alpha^m d(u_0).$$

Also ist (u_m) eine Cauchy-Folge und somit konvergent gegen einen Punkt $y \in C$. Es ist

$$\begin{aligned} \|y - T^n y\| &\leq \|y-u_m\| + \|u_m - T^n u_m\| + \|T^n u_m - T^n y\| \\ &\leq (1 + \|T^n\|)\|y-u_m\| + \|u_m - T^n u_m\|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $d(y) \leq (1+K)\|y-u_m\| + d(u_m) \to 0$ für $m \to \infty$. Dies ergibt schließlich $Ty = y$. Der Fixpunktsatz ist bewiesen.

Beispiele.

1. Im Hilbert-Raum erhalten wir mit $g(t) = \delta_2(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^2$ für (8) die Beziehung

$$\frac{1}{L^2} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu \frac{1}{(2^{\nu+1}L)^2} = 1$$

und daher $L^2 = 2$. Die Fixpunktbedingung (9) lautet damit

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\| < \sqrt{2}$$

(vgl. Lifschitz [13] und Baillon [1]).

2. Im Raum L^p mit $1 < p < 2$ erhalten wir mit

$$g(t) = (2^{p-1} - 1)\left(\frac{t}{2}\right)^2 \leq \delta_p(t)$$

(siehe Satz 1) für L die Beziehung

$$\frac{1}{L^p} \;+\; 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu (2^{p-1}-1)\left(\frac{1}{2^{\nu+1}L}\right)^q = 1,$$

d. h.

$$\frac{1}{L^p} + \frac{2^{p-1}-1}{2^{p-1}-1}\frac{1}{L^p} = 1.$$

3. Im Raum L^p mit $p > 2$ bekommen wir unter Beachtung von $\delta_p(\varepsilon) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ als hinreichende Fixpunktbedingung

$$\limsup_{n\to\infty}\|T^n\| < L = \left(1 + \frac{1}{2^{p-1}-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Der nächste Fixpunktsatz bezieht sich auf asymptotisch reguläre Operatoren. Der Operator $T : C \to C$ heißt nach Browder und Petryshin [3] asymptotisch regulär in C, wenn $\lim \|T^n x - T^{n+1}x\| = 0$ für jedes $x \in C$. Eine Übersicht über Arbeiten, die asymptotisch reguläre Operatoren betreffen, findet man in Bruck [4]. Der folgende Fixpunktsatz ist eine Verallgemeinerung von [12].

Satz 6 *Es sei C eine nichtleere, beschränkte abgeschlossene und konvexe Teilmenge des uniform konvexen Banach-Raumes X und T ein asymptotisch regulärer Operator, der C in sich abbildet. Weiter sei p irgendeine Zahl > 1 und $g(t)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $0 < g(t) \leq \delta_p(t)$. Genügt L der Gleichung (8) und gilt*

$$K = \liminf_{n\to\infty} \|T^n\| < L, \tag{13}$$

dann hat T einen Fixpunkt in C.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich dem des vorigen Satzes.

1. Wir wählen eine solche Teilfolge (n_i) der natürlichen Zahlen, daß

$$K = \lim_{i\to\infty} \|T^{n_i}\|. \tag{14}$$

2. Es sei u ein festes Element aus C und $z = z(u)$ das asymptotische Zentrum der Folge $(T^{n_i}u)$. Wir setzen für $x \in C$

$$r(x) = \limsup_{i\to\infty} \|x - T^{n_i}u\|$$

und werden zeigen: Ist $r(z) = 0$, dann ist z ein Fixpunkt von T.
Aus $r(z) = 0$ folgt zunächst $T^{n_i}u \to z$ für $i \to \infty$.
Nach Voraussetzung existiert ein m, so daß T^m stetig (sogar Lipschitz-stetig) ist. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}\|T^{n_i+m}u - z\| &\leq \|T^{n_i}u - z\| + \|T^{n_i+m}u - T^{n_i}u\| \\ &\leq \|T^{n_i}u - z\| + \sum_{j=0}^{m-1} \|T^{n_i+j+1}u - T^{n_i+j}u\|.\end{aligned}$$

Da T asymptotisch regulär ist, folgt $T^{n_i+m}u \to z$ für $i \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von T^m erhalten wir daher

$$T^m z = \lim_{i\to\infty} T^m(T^{n_i}u) = \lim_{i\to\infty} T^{m+n_i}u = z.$$

Durch Induktion nach s folgt $T^{ms}z = z$ für jede natürliche Zahl s und daher $T^{ms+1}z = Tz$. Somit ist $Tz - z = T^{ms+1}\,z - T^{ms}z$. Für $s \to \infty$ folgt wegen der asymptotischen Regularität $Tz = z$.

3. Im folgenden können wir $r(z) > 0$ annehmen. Nach Satz 4 gilt wegen $g(t) \le \delta_p(t)$

$$\frac{r^p(z)}{r^p(x)} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z-x\|}{2^\nu r(x)}\right) \le 1. \tag{15}$$

Als nächstes zeigen wir, daß für jede natürliche Zahl s die Abschätzung

$$r(T^s z) \le \|T^s\| r(z) \tag{16}$$

gilt. Für $n_i > s$ ist

$$\begin{aligned}\|T^s z - T^{n_i}u\| &\le \|T^s z - T^{n_i+s}u\| + \|T^{n_i+s}u - T^{n_i}u\|\\ &\le \|T^s\|\|z - T^{n_i}u\| + \sum_{j=0}^{s-1}\|T^{n_i+j+1}u - T^{n_i+j}u\|.\end{aligned}$$

Da T asymptotisch regulär ist, folgt für $i \to \infty$ nach Definition von $r(x)$ die Ungleichung (16).

Setzen wir in (15) $x = T^{n_i}z$, so erhalten wir unter Beachtung von (16) sowie der Monotonie von $g(t)$

$$\frac{1}{\|T^{n_i}\|^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{\|z - T^{n_i}z\|}{2^\nu \|T^{n_i}\| r(z)}\right) \le 1. \tag{17}$$

Für $x \in C$ definieren wir

$$d(x) = \lim_{i\to\infty}\sup \|z - T^{n_i}z\|.$$

Offensichtlich ist $r(z) \le d(u)$. Führen wir in (17) den Grenzübergang $i \to \infty$ durch, dann erhalten wir unter Beachtung von (14) sowie der Stetigkeit und Monotonie von g(.) die Abschätzung

$$\frac{1}{K^p} + 2\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu g\left(\frac{d(z)}{2^\nu K d(u)}\right) \le 1.$$

Von hier ab verläuft der Beweis ebenso wie der des vorigen Satzes ab der Ungleichung (12).

■

Literaturverzeichnis

[1] **Baillon, J. B. :** *Quelques aspects de la théorie des points fixes dans les espaces de Banach I.* Séminaire d' Analyse Fonctionelle de l' École Polytechnique, VII. 1978 - 1979

[2] **Browder, F. E. :** *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54**, 1041 - 1044 (1965)

[3] **Browder, F. E.** und **Petryshin, W. V. :** *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 571 - 575 (1966)

[4] **Bruck, R. E. :** *Asymptotic behavior of nonexpansive mappings.* Contemp. Math. **18**, 1 - 47 (1983)

[5] **Clarkson, J. A. :** *Uniformly convex spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 396 - 414 (1936)

[6] **Edelstein, M. :** *Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 369 - 374 (1974)

[7] **Goebel, K.** und **Kirk, W. A. :** *A fixed point theorem for transformations whose iterates have uniform Lipschitz constant.* Studia Math. **47**, 135 - 140 (1973)

[8] **Goebel, K.** und **Reich, S. :** *Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings.* New-York and Basel 1984

[9] **Göhde, D. :** *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildungen.* Math. Nachr. **30**, 251 - 258 (1965)

[10] **Kirk, W. A. :** *A fixed point theorem for mappings which do not increase distance.* Amer. Math. Monthly **72**, 1004 - 1006 (1965)

[11] **Köhte, G. :** *Topologische lineare Räume.* Berlin 1964

[12] **Krüppel, M. :** *Ein Fixpunktsatz für asymptotisch reguläre Operatoren in gleichmäßig konvexen Banach-Räumen.* Wiss. Zeitschr. PH Güstrow, Heft **1**, 241 - 246 (1987)

[13] **Lifschitz, E. A. :** *Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces.* Voronez Gos. Univ. Trudy Mat. Fak. **16**, 23 - 28 (1975)

[14] **Lim, T. C. :** *Fixed point theorems for uniformly lipschitzian mappings in L^p spaces.* Nonlinear Anal. **7**, No 5, 555 - 563 (1983)

[15] **Lim, T. C. :** *Some L^p inequalities and their applications to fixed point theorems of uniformly Lipschitzian mappings.* Part. II. Proc. of Sympos. Pure Math. **45**, 119 - 125 (1986)

[16] **Schöneberg, R. :** *Fixpunktsätze für einige Klassen kontraktionsartiger Operatoren in Banachräumen über einen Fixpunktindex, eine Zentrumsmethode und die Fixpunkttheorie nichtexpansiver Abbildungen.* Diss. Aachen 1977

[17] **Tingley, D. :** *Noncontractive uniformly Lipschitzian semigroups in Hilbert space.* Proc. Amer. Math. Soc. **92**, No 3, 355 - 361 (1984)

eingegangen: 5. Juli, 1994

Verfasser:

Prof. Dr. M. Krüppel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany

Rostock. Math. Kolloq. **48**, 75–79 (1995)

Subject Classification (AMS)
40A05

Manfred Krüppel

Eine Ungleichung für Banach-Limites beschränkter Zahlenfolgen

Abstract. *Let be* $\operatorname{LIM} x_n$ *any Banach-limit for an arbitrary bounded sequence of real numbers. Then the inequality* $\operatorname{LIM} g(x_n) \geq g(\operatorname{LIM} x_n)$ *holds, where* $g(t)$ *is any convex function.*

Der Banach-Limes als verallgemeinerter Grenzwert beschränkter Zahlenfolgen wurde von S. Banach [1] eingeführt (vgl. auch [2], [3], [4] und [6]). Ein Banach-Limes ist ein auf dem Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen (x_n) definiertes lineares Funktional, das mit $\operatorname{LIM} x_n$ bezeichnet wird und die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $\operatorname{LIM} x_n \geq 0,$ falls $x_n \geq 0$ für alle n.
2. $\operatorname{LIM}(ax_n + by_n) = a \operatorname{LIM} x_n + b \operatorname{LIM} y_n$
3. $\operatorname{LIM} x_{n+1} = \operatorname{LIM} x_n$
4. $\operatorname{LIM} x_n = 1,$ falls $x_n = 1$ für alle n.

Aus diesen Eigenschaften folgt (vgl. etwa S. Banach [1])

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \operatorname{LIM} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Für eine konvergente Folge (x_n) stimmt also ein Banach-Limes mit dem Grenzwert überein. Durch die vier Eigenschaften 1 bis 4 ist der Banach-Limes nicht für jede beschränkte Folge eindeutig bestimmt. Wie G. G. Lorentz [3] zeigte, ist für die Folge (x_n) genau dann jeder Banach-Limes gleich dem Wert s, wenn

$$\lim_{p\to\infty} \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}}{p} = s$$

gleichmäßig bzgl. n gilt. Ist insbesondere die Folge (x_n) periodisch, d.h. gilt $x_{n+p} = x_n (p > 1)$, dann ist stets

$$\operatorname{LIM} x_n = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

Als Folgerung aus den Eigenschaften 1 bis 4 ergibt sich die weitere Eigenschaft

$$5.\ \mathrm{LIM}\,(x_n y_n) = x_0\ \mathrm{LIM}\,y_n, \quad \text{falls} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ ist.}$$

Zum Nachweis gehen wir von der Beziehung

$$|x_n y_n - x_0 y_0| \ \le\ |x_n - x_0|\,|y_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

aus. Wegen der Linearität eines Banach-Limes folgt

$$\mathrm{LIM}\,(x_n y_n) = \mathrm{LIM}\,(x_n y_n - x_0 y_n) + \mathrm{LIM}\,(x_0 y_n) = \mathrm{LIM}\,(x_0 y_n) = x_0\ \mathrm{LIM}\,y_n$$

Für einen beliebigen Banach-Limes beweisen wir die folgende Ungleichung.

SATZ. Ist $g(t)$ eine konvexe Funktion, dann gilt für jeden Banach-Limes

$$\mathrm{LIM}\,g(x_n)\ \ge\ g(\mathrm{LIM}\,x_n).$$

Beweis: Gegeben sei ein Banach-Limes $\mathrm{LIM}\,x_n$. Ist A irgendeine Teilmenge der natürlichen Zahlen und (x_n) die charakteristische Folge von A, d.h.

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in A, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist durch $\mu(A) = \mathrm{LIM}\,x_n$ ein Maß auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ definiert, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}
&1.\ \mu(A) && \ge 0,\\
&2.\ \mu(A \cup B) && = \mu(A) + \mu(B),\ \text{falls } A \cap B = \emptyset,\\
&3.\ \mu(A+1) && = \mu(A),\ \text{wobei } A+1 = \{n+1 : n \in A\},\\
&4.\ \mu(\mathbb{N}) && = 1.
\end{aligned}$$

1. Wir nehmen zunächst an, daß $g(t)$ streng monoton wachsend ist. Wir stellen nun für jede beschränkte Folge (x_n) unseren Banach-Limes $\mathrm{LIM}\,x_n$ ähnlich wie das Lebesguesche Integral dar. Für eine gegebene beschränkte Folge (x_n) sei $a < \inf x_n$ und $b > \sup x_n$ sowie $m > 1$ eine natürliche Zahl. Die Punkte $y_k = a + k(b-a)/m\ (k = 0, 1, \dots, m)$ bilden eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wir setzen

$$A_k = \{n : y_k \le x_n < y_{k+1}\},\ k = 0, 1, \dots, m-1,$$

und betrachten die m Folgen

$$x_n^{(k)} = \begin{cases} y_k & \text{für } n \in A_k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Auf Grund der Eigenschaften eines Banach-Limes ist

$$\mathrm{LIM} \sum_{k=0}^{m-1} x_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{LIM}\, x_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k).$$

Da die Mengen A_k paarweise disjunkt sind, gilt für jedes n

$$\sum_{k=0}^{m-1} x_n^{(k)} \leq x_n,$$

so daß

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k) \leq \mathrm{LIM}\, x_n$$

folgt. Ebenso kann man zeigen, daß

$$\mathrm{LIM}\, x_n \leq \sum_{k=0}^{m-1} y_{k+1} \mu(A_k)$$

gilt. Da die Mengen A_k paarweise disjunkt sind und ihre Vereinigung $\mathbb{N}$ ergibt, ist

$$\sum_{k=0}^{m-1} y_{k+1} \mu(A_k) - \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mu(A_k) = \frac{1}{m}.$$

Es folgt analog der Lebesgueschen Integraldefinition (vgl. etwa [5], S. 124)

$$\mathrm{LIM}\, x_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k). \tag{1}$$

Um eine entsprechende Darstellung für den Banach-Limes $\mathrm{LIM}\, g(x_n)$ zu bekommen, zerlegen wir das Intervall $[g(a), g(b)]$ durch die Punkte $g(y_k), k = 0, 1, \ldots, m$. Da $g(t)$ streng monoton wachsend ist, gilt

$$A_k = \{n : g(y_k) \leq g(x_n) < g(y_{k+1})\}$$

für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ und wir erhalten jetzt

$$\sum_{k=0}^{m-1} g(y_k)\mu(A_k) \leq \mathrm{LIM}\, g(x_n) \leq \sum_{k=0}^{m-1} g(y_{k+1})\mu(A_k).$$

Da $y_{k+1} - y_k = 1/m$ und die Funktion $g(t)$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, strebt $\max |g(y_{k+1}) - g(y_k)|$ gegen 0 für $m \to \infty$ und folglich ist

$$\mathrm{LIM}\, g(x_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} g(y_k)\mu(A_k). \tag{2}$$

Da $\mu(A_k) \geq 0$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$ und die Summe gleich 1 ist, gilt nach der Jensenschen Summationsungleichung für die konvexe Funktion $g(t)$ (vgl. [5], S. 344)

$$\sum_{k=0}^{m-1} g(y_k)\mu(A_k) \geq g\left(\sum_{k=0}^{m-1} y_k \mu(A_k)\right).$$

Hieraus folgt für $m \to \infty$ wegen (1) und (2) unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Behauptung des Satzes für streng monoton wachsende $g(t)$.

2. Ist $g(t)$ monoton wachsend, so ist $h(t) = g(t) + t$ streng monoton wachsend. Unter Beachtung der Linearität eines Banach Limes erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{LIM} g(x_n) &= \operatorname{LIM}(h(x_n) - x_n) \\ &= \operatorname{LIM} h(x_n) - \operatorname{LIM} x_n \\ &\geq h(\operatorname{LIM} x_n) - \operatorname{LIM} x_n = g(\operatorname{LIM} x_n). \end{aligned}$$

Ebenso beweist man den Satz für monoton fallende $g(t)$.

3. Schließlich sei $g(t)$ eine nichtmonotone konvexe Funktion und $g(t_0)$ das Minimum von $g(t)$. Wir setzen

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{für } t \leq t_0, \\ g(t_0) & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

und

$$g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_0, \\ g(t) - g(t_0) & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Dann ist $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, wobei $g_1(t)$ konvex und monoton fallend und $g_2(t)$ konvex und monoton wachsend ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{LIM} g(x_n) &= \operatorname{LIM}[g_1(x_n) + g_2(x_n)] = \operatorname{LIM} g_1(x_n) + \operatorname{LIM} g_2(x_n) \\ &\geq g_1(\operatorname{LIM} x_n) + g_2(\operatorname{LIM} x_n) = g(x_n). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Beispiel. Für die periodische Folge

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist $\operatorname{LIM} x_n = 1$ für jeden Banach-Limes. Wählen wir als konvexe Funktion $g(t) = t^2$, dann ist

$$g(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 4 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und $\operatorname{LIM} g(x_n) = 2$. Es ist also $\operatorname{LIM} g(x_n) \geq g(\operatorname{LIM} x_n)$.

Literatur

[1] **Banach, S. :** *Théorie des operations lineares.* Warzawa 1932

[2] **Kantorowitsch, L. W.,** und **Akilow, G. P. :** *Funktionalanalysis in nomierten Räumen.* Berlin 1978

[3] **Lorentz, G. G. :** *A contribution to the theory of divergent sequences.* Acta Math. **80**, 167-190 (1948)

[4] **Mazur, S. :** *On the generalized limit of bounded sequences .* Colloq. Math. **2**, 173-175 (1951)

[5] **Natanson. I. P. :** *Theorie der Funktion einer reellen Veränderlichen.* Berlin 1969

[6] **Zeller, K.,** und **Beekmann, W. :** *Theorie der Limitierungsverfahren.* Heidelberg, New York 1970

eingegangen: 5. Juli 1994

Autor: Prof. Dr. M. Krüppel
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
18051 Rostock
Germany