Teknologisten apuvälineiden vaikutus derivaatan proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon lukio-opetuksessa

Joni Aho

Pro gradu –tutkielma

Huhtikuu 2021

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

TURUN YLIOPISTO

TURUN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

AHO, JONI
Pro gradu -tutkielma, 34 sivua
Matematiikka
Huhtikuu 2021

Nykyaikana opetus on siirtymässä yhä enemmän teknologiseen suuntaan myös matematiikan osalta. Koska lukion päättävät ylioppilaskirjoitukset ovat sähköistyneet, opiskelijoita on tärkeää valmistaa teknisten apuvälineiden käyttöön jo hyvissä ajoin. Vaikka teknologian käyttämistä matematiikan opetuksessa on tutkittu runsaasti, tutkimukset näyttäisivät pääasiassa keskittyvän ongelmaan yleisellä tasolla. Kuitenkin konkreettiset esimerkit ja niiden vaikutukset oppimiseen vaikuttaisivat olevan harvemmin tutkittuja aiheita.

Tässä Pro Gradu -tutkielmassa tarkastellaan teknologian käyttöä derivaatan opetuksessa ja oppimisessa. Tutkielma on kirjallisuuskatsaus ja siinä analysoidaan tutkitun kirjallisuuden perusteella, millaista teknologiaa ja miten sitä kannattaisi hyödyntää derivaatan opetuksessa ja oppimisessa opetushallituksen asettamien moduulien tavoitteiden näkökulmasta, miltä teknologian liittäminen opetukseen vaikuttaa konstruktivistisesta näkökulmasta, ja miten teknologian käyttäminen vaikuttaa opiskelijoiden proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon derivaatasta. Tutkielman tavoitteena on antaa derivaatan oppimiseen soveltuvia aktiviteetteja, jotka voidaan toteuttaa teknologiaa käyttämällä.

Tutkielman perusteella voidaan sanoa, että teknologiaa voidaan hyödyntää koko oppimisprosessin ajan ja varsinkin dynaamiset geometriasovellukset näyttäisivät antavan tärkeää tukea derivaatan käsitteen ymmärtämiseksi. Teknologian liittäminen opetukseen vaikuttaa järkevältä myös konstruktivistisesta näkökulmasta, koska teknologia ja konstruktivismi liittyvät läheisesti toisiinsa sekä molemmat tehostavat toisen käyttöä opetukseen liitettäessä. Tutkielman perusteella teknologian käyttäminen kehittää lisäksi käsitteellistä tietoa, mutta pitää myös proseduraalisen tiedon vähintään samalla tasolla. Tärkeää on huomata myös se, että teknologian avulla voidaan edistää näiden tietojen yhteyttä toisiinsa.

Avainsanat: matematiikan opetus, derivaatta, teknologia, proseduraalinen ja käsitteellinen tieto

Sisällysluettelo

1. Johdanto

Derivaatta on keskeinen analyysin käsite matematiikassa. Sen ymmärtäminen on tärkeää, koska analyysiä tarvitsevat laajalti monien alojen opiskelijat (Hashemi, Abu, Kashefi, Mokhtar & Rahimi, 2015) sekä monien alojen ammattilaiset. Käsitteeseen liittyy myös oppimisvaikeuksia ja virhekäsityksiä, joita tarkastellaan tutkielmassa myöhemmin.

Nykyaikana opetus on siirtymässä yhä enemmän teknologiseen suuntaan myös matematiikan osalta. Koska lukion päättävät ylioppilaskirjoitukset ovat sähköistyneet, opiskelijoita on tärkeää valmistaa teknisten apuvälineiden käyttöön jo hyvissä ajoin. Varsinkin, koska opiskelijoiden perehdyttäminen teknologian käyttöön vaatii aikaa (Doruk, Aktumen & Aytekin, 2013; Weigand & Bichler, 2010). Vaikka teknologian hyödyntämistä opetuskäytössä on tutkittu jo usean vuosikymmenen ajan, se tuntuu edelleenkin osittain vieraalta ja uudelta asialta. Tästä kertoo myös se, että opettajat kokevat teknologian liittämisen opetukseen vaikeaksi (delos Santos & Thomas, 2002).

Vuoden 2019 loppupuolella ilmestyneet uudet lukion opetussuunnitelman perusteet korostavat tieto- ja viestintäteknologian tärkeyttä opetuksessa. Esimerkiksi yleisen osion opiskelumenetelmien kohdalla todetaan: ”Opiskelija käyttää monipuolisesti tieto- ja viestintäteknologiaa sekä itsenäisessä että yhteisöllisessä työskentelyssä”. Oikeilla opiskelumenetelmillä pitäisi oppia ymmärtämään kokonaisuuksia sekä oppiaineessa että yli oppiainerajojen. (Opetushallitus, 2019, s. 20)

Tutkielma on kirjallisuuskatsaus ja siinä tarkastellaan, millaista teknologiaa voidaan hyödyntää derivaatan opetuksessa ja oppimisessa. Vaikka aiheesta löytyy runsaasti tutkimuksia (ks. esim. David Tall), tutkimukset näyttäisivät keskittyvän ongelmaan yleisellä tasolla. Kuitenkin konkreettiset esimerkit ja niiden vaikutukset oppimiseen ovat harvemmin tutkittuja aiheita. Siksi tutkitaan myös, miten kyseistä teknologiaa kannattaisi hyödyntää derivaatan opetuksessa ja oppimisessa opetushallituksen asettamien moduulien tavoitteiden näkökulmasta. Koska osa derivaattaan ja raja-arvoon liittyvistä virhekäsityksistä on johdettavissa perinteisiin opetusmetodeihin (Duru, 2011; Orhun, 2012), tutkielmassa tarkastellaan myös, miltä teknologian liittäminen opetukseen vaikuttaa konstruktivistisesta näkökulmasta. Lisäksi tarkastellaan, miten teknologian käyttäminen vaikuttaa opiskelijoiden proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon derivaatasta.

Tutkielman tavoitteena on antaa derivaatan oppimiseen soveltuvia aktiviteetteja, jotka voidaan toteuttaa teknologiaa käyttämällä. Tutkielman tuloksista hyötyvät opetusalan ammattilaiset ja niitä voidaan hyödyntää aiheeseen liittyvissä jatkotutkimuksissa.

2. Matematiikan oppiminen

Tutkielmassa tarkasteltava oppimiskäsitys on konstruktivistinen, koska se edustaa nykyaikana kasvatustieteellisen ajattelutavan enemmistöä (Siljander, 2014). Myös lukion opetussuunnitelman perusteet (LOPS) painottavat konstruktivistista oppimiskäsitystä (Opetushallitus, 2019). Ensimmäisessä aliluvussa käsitellään, millaista on konstruktivistinen oppimiskäsitys matematiikan näkökulmasta. Keskeistä on myös, miten oppiminen tapahtuu ja miten tietoa ymmärretään konstruktivistisen tiedonkäsityksen mukaan.

Matemaattista tietoa voidaan osittain jakaa proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon, joista molemmat ovat tärkeitä matematiikan oppimisen ja ymmärtämisen kannalta. Toisessa aliluvussa käsitellään, mitä ovat proseduraalinen ja käsitteellinen tieto sekä miten ne liittyvät toisiinsa. Aliluvussa tarkastellaan myös, miten matematiikkaa ymmärretään näiden avulla.

2.1 Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen perustuva teoria pyrkii selittämään, miten ihmiset oppivat tietoa. Tiedonmuodostusta ja oppimista kuvataan termillä konstruktio eli rakentaminen (Siljander, 2014), joka on keskeinen termi konstruktivismissa. Mielen ajatellaan aktiivisesti havainnoivan ja tulkitsevan aistien lähettämää informaatiota (Siljander, 2014), minkä avulla konstruointi tapahtuu. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan kaikki tieto on konstruoitua (Noddings, 1990).

Keskeisintä oppimiskäsitykselle on oppija itse, jonka aktiivinen toiminta johtaa oppimiseen (Krahenbuhl, 2016; Noddings, 1990; Siljander, 2014). Tämä ilmenee myös lukion opetussuunnitelman perusteissa (Opetushallitus, 2019, s. 18). Tietoa opitaan tarkoituksenmukaisten aktiviteettien avulla, jossa oppija konstruoi yksilöllisen tulkinnan kokemuksistaan ja sen avulla konstruoi tulkinnan mielessään (Krahenbuhl, 2016). Oppija siis sopeutuu aktiviteettien perusteella ympäristöönsä (Noddings, 1990; Siljander, 2014). Toisaalta hän muokkaa sitä, yksilöllisen tulkintansa perusteella, omiin käyttötarkoituksiinsa soveltuvaksi (Siljander, 2014). Tällaiset edellä mainitut aktiviteetit aiheuttavat muutoksia oppijan kognitiivisiin rakenteisiin, jotka kehittyvät jatkuvasti (Noddings, 1990). Kognitiivisilla rakenteilla tarkoitetaan ihmisen mentaalisia prosesseja, joiden avulla hän ymmärtää tietoa (Garner, 2007).

Konstruointiprosessi aktivoi oppijan kognitiiviset rakenteet, jotka ovat toisaalta myös syy tapahtuvalle konstruktiolle (Noddings, 1990). Toisin sanoen tiedon konstruoimisessa hyödynnetään oppijan jo olemassa olevaa tietoa, jolloin oppiminen on seurausta myös aikaisemmista kokemuksista ja käsityksistä (Krahenbuhl, 2016). Tähän viittaa myös LOPS, jossa mainitaan, että ”oppimisprosessin aikana opiskelija tulkitsee, analysoi ja arvioi eri muodoissa esitettyä dataa, informaatiota tai tietoa aikaisempien kokemusten ja tietojen pohjalta” (Opetushallitus, 2019, s. 18).

Tieto ei konstruktivistisen käsityksen mukaan voi siirtyä opettajalta oppijalle, vaan oppijan on konstruoitava se itse, jolloin oppimisesta tulee sisäisesti säädeltyä. Opiskelijat ovat erilaisia ja konstruoivat käsityksiä monin eri tavoin. Näiden huomioon ottaminen on tärkeää konstruktivismiin perustuvassa opetuksessa. (Siljander, 2014)

Koulutuksessa käytettävä teoria perustuu nykyaikana enimmäkseen juuri konstruktivistiseen pedagogiaan ja myös matematiikan opetus on siirtynyt konstruktivistisempaan suuntaan. Käytännössä konstruktivistisen pedagogian käyttäminen opetuksessa ilmenee aktiivisena oppimisena, joka tarvitsee opiskelijoiden aktiivisuutta ja sitoutumista. Aktiviteetit, joissa opiskelijat itse löytävät, tutkivat ja tekevät yhteistyötä, ovat esimerkkejä konstruktivistisista lähestymistavoista opetukseen. Tällaisten metodien avulla opettamisen on tulkittu olevan paras lähestymistapa jopa opetettavasta aiheesta riippumatta, mikä on johtanut siihen, että metodit olisivat välttämättömiä parhaimpien oppimistulosten saavuttamiseksi. (Krahenbuhl, 2016)

Koska opiskelijan aiemmat käsitykset vaikuttavat konstruktioon, on tärkeää hallita perusasiat, jotta syvempi ymmärrys opittavasta asiasta voidaan saavuttaa. Tarkoitus ei silti ole harjoitella perusasioita niin kauan, että ne osataan loistavasti. Hyvä opettaja valmistautuu etukäteen selvittääkseen opiskelijan vaatimat taidot, jotta opiskelija pystyy konstruoimaan tärkeät käsitteet ja perusperiaatteet. Opiskelija tarvitsee sopivat pohjatiedot, oikeat työvälineet (esim. kaavat) ja järkevät työskentelytavat, joiden avulla hänen on mahdollista konstruoida matemaattisia objekteja ja niiden välisiä suhteita. (Noddings, 1990.) Matemaattisilla objekteilla tarkoitetaan kaikkia sellaisia objekteja, jotka yksilön on konstruoitava jossain vaiheessa matemaattista kehitystään. Näitä ovat esimerkiksi numerot, muuttujat ja funktiot. (Dubinsky, 2002.)

Konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan konstruoiminen tapahtuu reflektiivisen abstrahoinnin avulla. Reflektiivinen abstrahointi on prosessi, jossa oppija sisäistää objekteille tehtyjä fyysisiä operaatioita. Oppija siis sisäistää matemaattisten laskusääntöjen yleisiä ominaisuuksia implisiittisesti, eikä vain yksittäistä laskutoimitusta ja sen tulosta. (Noddings, 1990.) Esimerkiksi opiskelija ymmärtää ennemminkin, miten polynomifunktioita derivoidaan, kuin, miten yksittäisen polynomifunktion derivoiminen suoritetaan ja mitä siitä saadaan tulokseksi. Oppiminen on tällöin matemaattisten käsitteiden ymmärtämistä, eikä keskenään rinnastettavien laskutoimitusten havainnointia.

Tällöin opiskelijoiden on järkevää työskennellä matemaattisten objektien kanssa, mutta ongelmana on, että he tarvitsevat syyn osallistua niiden käsittelyyn. Opettajan on siis osittain käytettävä suoraa ei-konstruktivistista johdatusta matemaattisten objektien käsittelemiseen ja siten mahdollistaa opiskelijoille niiden käyttö. Tällaista johdatusta tarvitaan myös siitä syystä, että konstruktion halutaan olevan matemaattisista syistä oikeaan suuntaan ohjattu. (Noddings, 1990)

Ongelmanratkaisutilanteissa taas opiskelijoita ei välttämättä pitäisi ohjata niiden käytössä, koska se saattaa irrottaa opiskelijan omista syistään ja ohjata heidät työskentelemään sokeasti opettajan haluamalla tavalla. Jos opettaja on valmis ajattelemaan avoimesti, hän voi kannustaa opiskelijoita ymmärtämään heidän omat matemaattiset syynsä ja toteuttamaan omia suunnitelmiaan. Jos opiskelijoita ei kannusteta ajattelemaan matemaattisesti, oppiminen jää myös heikommaksi. Opiskelijoita pitää kannustaa myös pyrkimään tilanteisiin, jotka aiheuttavat reflektiivistä abstrahointia ja konflikteja heidän käsitystensä kanssa. (Noddings, 1990)

Opettajan pääasiallinen tehtävä konstruktivistisessa pedagogiassa on mahdollistaa matemaattinen ympäristö oppimiseen (Noddings, 1990), joka tukee opiskelijan konstruointiprosessia (Siljander, 2014). Tällöin on järkevämpää puhua vahvoista ja heikoista konstruointitavoista kuin tavoista, jotka joko vaikuttavat tai eivät vaikuta konstruktioon. Vahvat konstruointitavat ovat matemaattisessa ympäristössä niitä, jotka matemaatikot tunnistavat matemaattisiksi. Heikot konstruointitavat ovat taas, tavalla tai toisella, rajoittuneita matemaattisessa käytössä. Opettajan tehtävä on auttaa opiskelijaa pääsemään yli virhekäsityksistä, ohjaamalla häntä miettimään, onko hänen käsityksensä matemaattisesti ajateltuna oikein. Jos opiskelijan käsitys ei ole oikea, käsityksessä olisi välttämätöntä saada aikaiseksi muutosta. (Noddings, 1990.)

Opiskelija pitäisi siis saada kertomaan matematiikan ajattelutavastaan, jolloin mahdolliset virhekäsitykset tulevat todennäköisemmin esille. Tämä taas helpottaa opettajan työtä niiden havaitsemisessa ja eroon pääsemiseen auttamisessa. Tällöin opettajan on helpompaa myös huomata, onko opiskelija ymmärtänyt opittavan asian, mikä on konstruktivistisesta näkökulmasta tärkeämpää kuin sen ulkoa opettelu (Siljander, 2014). Ymmärtäminen on keskeinen sana myös seuraavassa aliluvussa, jossa pohditaan, miten matemaattista tietoa jaetaan proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon, sekä miten matematiikkaa ymmärretään näiden avulla.

2.2 Proseduraalinen ja käsitteellinen tieto matematiikassa

Matemaattista tietoa voidaan jakaa proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon, joista molempia tarvitaan matematiikan oppimiseksi (Hähkiöniemi, 2018). Myös LOPS:n yleisessä osiossa korostetaan käyttämään monipuolisesti sellaisia opetus-, ohjaus- ja opiskelumenetelmiä, joilla on yhteys kyseisessä oppiaineessa tarvittavaan tiedonalan käsitteelliseen ja menetelmälliseen osaamiseen (Opetushallitus, 2019, s. 20). Kaikkea tietoa ei kuitenkaan voida jakaa joko proseduraaliseksi tai käsitteelliseksi, vaan osa näyttäisi olevan hieman molempia tai ei välttämättä kumpaakaan (Hiebert & Lefevre, 1986).

Proseduraalinen tieto määritellään matematiikassa sääntöjen, algoritmien tai menetelmien oikean esitysmuodon hallintana (Haapasalo & Kadijevich, 2000; Hähkiöniemi, 2018). Tarkemmin se voidaan jakaa kahteen osaan, joista toinen liittyy matemaattiseen kieleen ja toinen sääntöihin tai algoritmeihin. Edellisen avulla esitetään matemaattisia ajatuksia ja tiedostetaan hyväksyttävä symbolinen esitysmuoto, kuitenkaan ymmärtämättä siinä olevien symbolien merkitystä. Jälkimmäisen avulla matemaattisia ongelmia ratkaistaan suorittamalla proseduureja, joiden välisistä yhteyksistä ymmärretään ainoastaan järjestys, jossa ne suoritetaan. (Hiebert & Lefevre, 1986.)

Käsitteellinen tieto taas määritellään tiedoksi, joka yhdistää matemaattisten käsitteiden välisiä yhteyksiä (Hiebert & Lefevre, 1986). Tiedon osat muodostavat tietoverkon (Hähkiöniemi, 2018), jonka avulla tunnistetaan eri esitysmuodossa annetut käsitteet, säännöt ja ongelmat (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Käsitteellistä tietoa ei kuitenkaan voida yksilöidä, koska käsitteellinen tieto on osa kyseisen tiedon muodostamaa verkostoa ainoastaan, jos henkilö osaa yhdistää käsitteellisen tiedon osan suhteen toisen tiedon osaan. Käsitteellisen tiedon osat voivat olla jo valmiiksi oppijan muistissa tai jokin niistä voi olla juuri opittua. (Hiebert & Lefevre, 1986.)

Edellä annettujen määritelmien perusteella voidaan sanoa, että proseduraalisen tiedon avulla matematiikkaa tehdään ja käsitteellisen tiedon avulla matematiikkaa voidaan ajatella (Hähkiöniemi, 2018; Tall, 1996). Haapasalon ja Kadijevichin mukaan proseduraalinen tieto edellyttää usein automatisoitujen ja tiedostamattomien vaiheiden tekemistä, kun taas käsitteellinen tieto vaatii yleensä tiedostettua ajattelua. Tällainen jako, algoritmisen suorittamisen ja ymmärtämisen välille, johtaa helposti siihen, että proseduraalinen tieto nähdään luonteeltaan dynaamisena (eli muuttuvana) ja käsitteellinen tieto taas staattisena (eli pysyvänä). Jako ei kuitenkaan sovi moderniin konstruktivistisen opetuksen ja oppimisen ajatusmalliin matematiikassa. (Haapasalo & Kadijevich, 2000.)

Käsitteellistä tietoa opitaan konstruoimalla tiedon osien välisiä suhteita (Hiebert & Lefevre, 1986), jolloin opetuksessa keskitytään keskeisiin määritelmiin (Rittle-Johnson, Fyfe & Loehr, 2016). Proseduraalista tietoa taas opitaan usein harjoittelemalla ongelmanratkaisua, mutta ratkaisutaito rajoittuu ainoastaan tietyntyyppisten ongelmien ratkaisemiseen (Rittle-Johnson, Schneider & Star, 2015). Tällöin opetuksessa keskitytään tietyssä järjestyksessä suoritettaviin proseduureihin (Rittle-Johnson ym., 2016). Näiden ääripäiden oppimistyylit eivät silti välttämättä poissulje toisiaan (Tall, 1996), koska käsitteellinen ja proseduraalinen tieto liittyvät ainakin osittain toisiinsa (Hiebert & Lefevre, 1986).

Tästä kertoo myös se, että käsitteellisen tiedon kehittyminen kehittää yleensä proseduraalista tietoa ja päinvastoin (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson ym., 2015). Toisaalta proseduurien suorittaminen ei välttämättä vaadi käsitteellistä tietoa, mutta on vaikeaa keksiä käsitteellistä tietoa, joka ei liity mihinkään proseduuriin. Syynä tähän on osittain se, että proseduurit tekevät käsitteellisestä tiedosta jollain tavalla havaittavaa. Käsitteellisen tiedon olemassaoloa ei välttämättä edes tiedettäisi ilman proseduureja, joiden avulla sitä voidaan hyödyntää. Kuitenkin perinteinen kaavoihin perustuva matematiikan opetus näyttäisi opettavan paremmin proseduureja kuin käsitteitä tai yhteyksiä niiden välillä. (Hiebert & Lefevre, 1986.)

Jos opetuksessa päädytään valitsemaan tietojen väliltä painotus, joka on oppimisen kannalta paras, opetuksessa kannattaisi painottaa käsitteellistä tietoa. Rittle-Johnson ym. tutkivat käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon oppimista toisen luokan oppilailla, kun opettaminen oli joko jaettu proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon oppimisen kesken tai sama aika käytettiin kokonaan käsitteellisen tiedon oppimiseen. Tutkimustuloksena huomattiin, että oppilaat oppivat paremmin sekä käsitteellistä että proseduraalista tietoa, kun opetus keskittyi käsitteellisen tiedon oppimiseen. (Rittle-Johnson ym., 2016.) Käsitteellinen ja proseduraalinen tieto ovat silti peruskoulun ensimmäisten vuosien aikana hyvin lähellä toisiaan, jolloin tuloksesta ei kannata tehdä liian suuria johtopäätöksiä, mutta sitä voidaan pitää suuntaa antavana.

Kirjallisuudessa kuitenkin korostetaan proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon liittämistä toisiinsa, mikä tehostaa matematiikan ymmärtämistä (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson ym., 2015). Opiskelija ei voi pärjätä hyvin matematiikassa, jos proseduraalinen tai käsitteellinen tieto on vajaavaista tai niitä käsitellään toisistaan erillisinä. Niiden käsitteleminen erillisinä systeemeinä johtaa siihen, että opiskelijalla saattaa olla hyvä intuitio matematiikan suhteen, mutta hän ei pysty ratkaisemaan ongelmia tai ongelman ratkaistuaan hän ei ymmärrä vastausta. (Hiebert & Lefevre, 1986.) Miten käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon liittäminen toisiinsa sitten kehittää opiskelijan ymmärrystä matematiikasta?

Tietojen liittäminen toisiinsa lisää proseduraalisen tiedon hyödyllisyyttä ja käsitteellisen tiedon käytettävyyden tasoa. Tällöin esimerkiksi symbolit saavat merkityksen. (Hiebert & Lefevre, 1986.) Lisäksi niiden ajatteleminen joustavasti sekä proseduurina että käsitteenä johtaa siihen, että niitä pystytään hyödyntämään tehokkaasti matemaattisten käsitteiden ajatteluun (Hiebert & Lefevre, 1986; Tall, 1996) ja käyttöön (Hiebert & Lefevre, 1986). Oikeastaan symboleiden avulla voidaan jopa luoda käsitteellistä tietoa. Varsinkin vaikeiden matemaattisten käsitteiden ajatteleminen symboleiden avulla vähentää kognitiivisen työn tarvetta. Myös tarvittavien proseduurien määrä vähentyy, koska niiden valintaa ja käyttöä ohjataan selkeämmin sekä niitä opitaan yleistämään samankaltaisten ongelmien ratkaisemiseen soveltuvaksi. (Hiebert & Lefevre, 1986.)

Käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon yhdistämisellä on selvästi ainakin teoriassa monia hyötyjä. Todellisuudessa kaikkia hyötyjä ei välttämättä edes huomata. Opiskelijoilla on kuitenkin usein vaikeuksia hahmottaa tai konstruoida käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon yhteyttä, eikä yhteyden muodostuminen aina tapahdu spontaanisti. Yhteyksiä ei välttämättä hahmoteta tai sisäistetä, vaikka ne tuotaisiin eksplisiittisesti esille. Tämä rajoittaa käsitteellisen tiedon hyödyllisyyttä ja aiheuttaa vaikeuksia ongelmanratkaisutilanteissa. Syitä taustalla on varmasti useita, mutta tarkastellaan seuraavaksi niistä keskeisimpiä, jotka saattavat erityisesti vaikuttaa matematiikan oppimiseen. (Hiebert ja Lefevre, 1986)

Tiedon yhteyksiä ei voida konstruoida, jos tietoa ei ole olemassa. Toisin sanoen puutteet joko proseduraalisessa tai käsitteellisessä tiedossa voivat olla syy puuttuville tai heikosti muodostuneille yhteyksille. Ongelmana saattaa olla myös opitun tiedon kontekstiin sidonneisuus, jolloin sitä ei edes yritetä yhdistää kontekstin ulkopuolelle, vaikka tieto olisi yksilöllisesti hyvin kehittynyttä. Esimerkiksi opittu proseduraalinen tieto saattaa sopia tietyn kaltaisten ongelmien ratkaisemiseen, mutta tieto pidetään erillään kontekstiin liittyvästä käsitteellisestä tiedosta. Toisaalta tiedon osat voivat olla opiskelijan mielestä keskenään yhteensopimattomia, jolloin yhteyden puute ei häiritse häntä. Proseduraalinen tieto saattaa olla myös virheellistä tai paljon heidän käsitteellistä ymmärrystään korkeammalla tasolla. Ongelmaa voi olla hankala havaita, koska opiskelijat pystyvät saamaan oikeita vastauksia moniin ongelmiin, joita he eivät ymmärrä. Vaikka rutiininomaiset proseduraaliset taidot ovat välttämättömiä tehokkaan ongelmanratkaisutaidon kannalta, käsitteellinen tieto on liitettävä siihen, jotta proseduurit saavat vakautta ja tehokkuutta. (Hiebert ja Lefevre, 1986)

Opiskelijan käsitteellinen ja proseduraalinen tieto voivat aloittaa omien reittien kulkemisen jo koulun ensimmäisistä vuosista lähtien ja sama voi jatkua jopa lukion loppuun asti (Hiebert & Lefevre, 1986). Ensimmäisinä kouluvuosina ongelma ei vielä muodostu suureksi, koska proseduraalinen ja käsitteellinen tieto ovat matematiikassa läheisesti yhteydessä toisiinsa. Ongelma syntyy, kun ne alkavat vähitellen muodostua omiksi kokonaisuuksiksi. Matematiikka siirtyy muutenkin vähitellen proseduraalisesta kohti käsitteellistä tietoa vaativaa ongelmanratkaisua, koska sen oppiminen on kumulatiivista (Tall, 1996). Tällöin erityisesti käsitteellisen tiedon tärkeys korostuu.

Jos derivaatan käsite vaikuttaa vaikealta hallita hyvin, eräs ratkaisu on keskittyä symbolisiin rutiineihin, koska se vastaa opiskelijan aikaisempaa kokemusta matematiikasta (Tall, 1997). Riskinä on, ettei opiskelija tällöin pysty ajattelemaan symboleita joustavasti sekä proseduurina että käsitteenä, jolloin oppiminen jää usein mekaaniseksi toistamiseksi (Tall, 1996). Tapa voi toimia samankaltaisten proseduraalisten ongelmien ratkaisemiseen, mutta tuottaa suuria vaikeuksia haastavimmissa käsitteellisistä tietoa vaativissa tehtävissä (Tall, 1996; Tall, 1997). Syy tähän on se, että proseduurien hyödyntäminen erilaisiin ongelmiin on vaikeampaa kuin käsitteellisen tiedon hyödyntäminen (Tall, 1996), koska mekaaninen toistaminen ei aiheuta muutoksia opiskelijan kognitiivisiin rakenteisiin (Dubinsky, 2002). Tällöin matematiikasta ja erityisesti opettajan odottamasta tavasta, jolla opiskelija käyttää sitä, tulee vaikeaa, koska opiskelija ei kykene ajattelemaan matemaatikon tavalla joustavasti. Tämä korostuu sitä enemmän, mitä kompleksisempaa matematiikasta tulee. Vähitellen yhä useampi opiskelija saattaa hämmentyä ja alkaa opiskelmaan mekaanisesti toistaen, jotta he saisivat oikeita vastauksia. Tällöin ajatuksia ei edes yritetä yhdistää käsitteellisellä tasolla. (Tall, 1996.)

Opiskelijoiden on silti opittava sopeutumaan vastaantuleviin käsitteellisiin vaikeuksiin. Jos käsitteellistä tietoa vaativat tehtävät ovat liian vaikeita opiskelijoille, opettaja saattaa kompensoida ongelmaa esimerkiksi laittamalla kokeeseen sarjan tehtäviä, joihin opiskelijat osaavat vastata proseduraalisen tietonsa avulla. Seurauksena opettaminen ja oppiminen pysyy proseduraalisella tasolla, jolloin käsitteellisten yhteyksien muodostumisesta tulee epätodennäköisempää. (Tall, 1997)

Näyttäisi siltä, että matematiikan opetuksessa painotus kannattaisi olla käsitteellisen tiedon oppimisessa. Tätä puoltaa myös se, että analyysin peruskäsitteiden käyttäminen on rajoittunutta, jos käsitteellinen ymmärrys niistä on puutteellista (Herbert, 2013). Tärkeintä on kuitenkin proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon liittäminen toisiinsa, mikä vaikuttaisi olevan tehokkaampaa matematiikan ymmärtämisen kannalta. Opiskelijoilla on silti usein vaikeuksia liittää tietoja toisiinsa, mikä korostaa opettajan roolia ja vahvoja konstruointitapoja oppimisprosessin aikana.

3. Matemaattinen teoria derivaatasta

Lukio-opetuksessa derivaatta sisältyy pitkän matematiikan moduuleihin MAA6 ja MAA12 sekä lyhyen matematiikan moduuliin MAB8. Näistä ainoastaan moduuli MAA6 kuuluu pakollisiin opintoihin ja loput ovat valinnaisia. Toisin sanoen derivaatan käsitettä ei välttämättä opeteta kaikille lukion käyville lyhyen matematiikan opiskelijoille. Tämä on ristiriidassa matematiikan opetuksen yleisten tavoitteiden kanssa, koska opiskelijan olisi rakennettava matemaattista pohjaa jatko-opinnoilleen (Opetushallitus, 2019). Derivaatta on keskeinen analyysin käsite ja analyysiä tarvitsevat laajalti monien alojen opiskelijat, kuten ekonomistit, insinöörit, tilastotieteilijät, luonnontieteilijät sekä tietysti matematiikan opiskelijat (Hashemi ym., 2015).

Derivaatassa oppimisessa eri esitysmuodot ovat tärkeässä roolissa käsitteen ymmärtämiseksi (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006). Matematiikan opetuksen eräänä tehtävä onkin ohjata opiskelijoita käyttämään sitä eri muodoissa ja antaa valmiudet sekä käyttää että muodostaa matemaattista tietoa. Opiskelijoita on tuettava myös taidossa siirtyä matemaattisesta esitysmuodosta toiseen, esimerkiksi ongelman ymmärtämiseksi. Matemaattisen ajattelun tukena voidaan hyödyntää kuvia, piirroksia ja välineitä, joiden käyttämiseen opiskelijoita on rohkaistava. (Opetushallitus, 2019, s. 221-222.)

Kun matematiikan opetus on onnistunut, opiskelijan pitäisi oppia tunnistamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä sekä yhdistämään käsitteitä suuremmiksi kokonaisuuksiksi matematiikassa ja yli oppiainerajojen. Onnistunut opetus ei tähtää silti ainoastaan käsitteellisen tiedon hallintaan, vaan tavoitteena on myös proseduraalisen tiedon kehittäminen, jotta opiskelija osaa käyttää sopivia matemaattisia menetelmiä ongelman ratkaisemisessa. (Opetushallitus, 2019, s. 221-222.) Proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon hallitseminen sekä niiden yhdistäminen ovat tärkeässä asemassa myös derivaatan käsitteen ymmärtämisessä.

Tässä luvussa käsitellään raja-arvoa ja derivaattaa, niiden matemaattista teoriaa ja opiskelijoiden yleisiä vaikeuksia oppia näitä käsitteitä. Oppimisvaikeuksia tarkastellaan myös proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon näkökulmasta. Lisäksi pohditaan perinteistä tapaa opettaa derivaattaa sekä siihen liittyviä ongelmakohtia.

3.1 Raja-arvo

Matematiikan opetus on kumulatiivista ja aikaisemmin opittujen käsitteiden ymmärtäminen on tärkeää uusien käsitteiden ymmärtämisen kannalta. Esimerkiksi funktioon liittyvät virhekäsitykset saattavat aiheuttaa väärinkäsityksiä raja-arvoista. Derivaatan kohdalla raja-arvon käsitteen ymmärtäminen on tärkeää, koska sitä tarvitaan derivaatan määritelmässä. Oikeastaan raja-arvon käsite saattaa olla jopa keskeisin asia nykyisen analyysin kannalta. (Szydlik, 2000.) Lukion pitkän matematiikan moduulin MAA6 eräs tavoite on saada opiskelijat omaksumaan funktion raja-arvon käsite havainnollisesti ja funktion raja-arvo on myös yksi moduulin keskeisistä sisällöistä (Opetushallitus, 2019, s. 226). Näiden syiden takia tutkielmassa käsitellään myös raja-arvon käsitteen opettamista ja oppimista.

Raja-arvo määritellään lukio-opetuksessa käytössä olevissa kirjoissa seuraavasti: Funktion f raja-arvo kohdassa a on luku b, jos funktion arvo lähestyy lukua b, kun x lähestyy kohtaa a. Tällöin merkitään $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. (Lehtinen, 2019.) Määritelmä tunnetaan kirjallisuudessa raja-arvon dynaamisena määritelmänä (Kabael, 2014). Vaihtoehtoinen merkintätapa on, $f(x) \to b$, kun $x \to a$. Määritelmä saattaa erota sanallisesti opetuksessa käytettävien kirjojen välillä, mutta edellä esitelty muoto on riittävän tarkka yleistys. Raja-arvolla on olemassa myös täsmällisempi määritelmä, joka jätetään tarkastelematta, koska tutkielma perustuu lukiotason oppimiseen ja opetukseen.

Lukiossa funktion raja-arvojen opetus koostuu raja-arvon algebrasta ja topologiasta. Raja-arvon algebrassa oletetaan funktion raja-arvon olevan olemassa ja tarkastellaan ongelmaa, miten tietyntyyppisten funktioiden raja-arvo määritetään. Raja-arvon topologiassa taas puututaan erityyppisten funktioiden raja-arvojen olemassaolon ongelmaan. Kuitenkin yhteys raja-arvon algebran ja topologian välillä on opetusmateriaaleissa usein puutteellinen, vaikka ne liittyvät läheisesti toisiinsa. Opettajan on myös vaikeaa perustella lukiotason opetuksessa, miksi funktion raja-arvo on tärkeä aihe opiskella, menemättä selkeästi heiltä vaadittua tietotasoa korkeammalle. (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005)

Tämän lisäksi opetuksen ja oppimisen lähestymistavat analyysissä painottavat lähinnä proseduraalista näkökulmaa, mutta laiminlyövät eheän käsitteellisen ymmärryksen muodostumista sen perustiedoista (Bezuidenhout, 2001). Ongelma on havaittu esimerkiksi Espanjassa, jossa raja-arvojen opettaminen lukiossa painottuu funktion raja-arvon laskemiseen ja kysymys sen tarkoituksesta jää taka-alalle (Barbé ym., 2005). Ongelmien seuraukset voidaan havaita yliopiston alkuvaiheilla olevilla opiskelijoilla, joista suurella osalla raja-arvoon liittyvät tiedot ja ymmärrys perustuvat yksittäisiin faktoihin ja proseduureihin, mutta heidän käsitteellinen ymmärryksensä on puuttellista (Bezuidenhout, 2001; Denbel, 2014).

Funktion raja-arvo määritetään algebrallisesti, mutta sopiva ehdokas raja-arvoksi voidaan etsiä myös taulukoimalla numeerisin menetelmin. Taulukointia käytetään usein johdantona raja-arvon käsitteeseen. Algebrallisesti raja-arvo voidaan määrittää hyödyntämällä joko laskusääntöjä tai muokkaamalla lauseke sopivaan muotoon. (Bezuidenhout, 2001.) Raja-arvon käsite pitää kuitenkin kehittää ennen näiden laskutekniikoiden soveltamista (Denbel, 2014).

Yleensä silti raja-arvoon liittyvät tehtävät, jotka koostuvat muutamista analyysin lauseista, painottavat algebrallista lausekkeiden muokkaamista, jotka kannustavat opiskelijaa enemmänkin proseduraalisen tiedon hallitsemiseen kuin analyysin käsitteelliseen ymmärrykseen (Bezuidenhout, 2001). Varsinkin perinteiset opetusmetodit keskittyvät lähinnä proseduraalisiin taitoihin (Duru, 2011). Opiskelijan käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon on kehitettävä samaa tahtia, mutta erityisesti käsitteellisen tiedon tärkeyttä on painotettava (Bezuidenhout, 2001). Voisiko raja-arvon olemassaolon painottaminen lukiopetuksessa johtaa opiskelijoiden eheämpään käsitteelliseen ymmärrykseen?

Kysymystä on hyvä lähteä pohtimaan miettimällä, miten raja-arvon olemassaolo on määritelty. Funktiolla f on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, jos ja vain jos $\lim_{x \to x_0^+} f(x) =$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$. Toisin sanoen toispuoleisten raja-arvojen on oltava yhtä suuret. Kuitenkin moduulissa MAA6 funktion raja-arvon tarkasteleminen rajoittuu tilanteisiin, jossa toispuoleisia raja-arvoja ei tarvita. Tällainen on esimerkiksi tilanne, kun rationaalifunktion raja-arvoa tarkasteltaessa päädytään tulokseen $\frac{0}{0}$ (Opetushallituksen matematiikan ainetyöryhmän jäsenet & MAOL ry:n edustajat, 2020).

Raja-arvon olemassaolokin voidaan siis määrittää vain suorittamalla proseduureja, mikä ei vaadi syvempää käsitteellistä ymmärrystä. Näin ollen ei ole ihmeellistä, että opiskelija saattaa sekoittaa algebrallisen manipulaation taidot oikean analyysin sisällön ymmärtämisen kanssa (Bezuidenhout, 2001). Kun tähän lisätään edellä mainittu analyysin tekstien proseduraalispainotteinen luonne, opiskelijoille ei todennäköisesti synny käsitystä, mitä raja-arvon olemassaolo tarkoittaa. Pelkkä raja-arvon olemassaolon painottaminen opetuksessa ei selvästi riitä, vaan opetuksessa on päästävä eroon myös proseduraalista tietoa painottavasta luonteesta, jolloin eheän käsitteellisen ymmärryksen muodostumisesta tulee todennäköisempää.

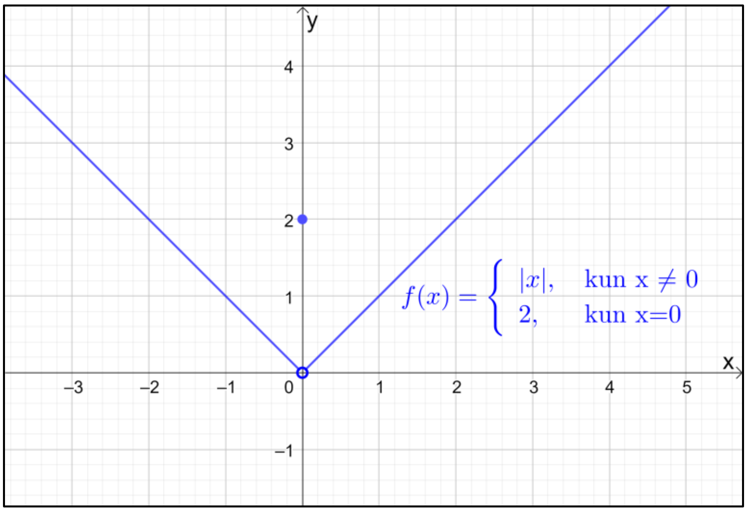
Käsitteellisen tiedon hallitseminen edellyttää, funktion raja-arvon olemassaolon ymmärtämisen lisäksi, raja-arvon käsitteen ymmärtämistä myös eri esitysmuodoissa (ks. luku 2.2). Huomataan myös tässä kohtaa, että raja-arvoa ymmärretään paremmin graafisesti kuin symbolisesti (Duru, 2011). Tällöin voisi ajatella, että visuaalinen esitys raja-arvon olemassaolosta antaisi tärkeää tukea eheän käsitteellisen tiedon muodostumiselle.

Visuaalista esitystä voidaan selventää ajattelemalla raja-arvo jatkuvana liikkeenä, jossa muuttujan x arvot lähestyvät tutkittavaa pistettä, jolloin funktion arvojen oletetaan lähestyvän raja-arvoa. Kirjallisuudessa tätä kutsutaan dynaamiseksi näkökulmaksi (dynamic view). (Güçler, 2012.) Dynaamista näkökulmaa käytetään usein raja-arvon käsitteen ymmärtämiseksi (Szydlik, 2000), varsinkin käsitteen oppimisen alkuvaiheissa. Dynaaminen näkökulma tarjoaa raja-arvon määritelmään perustuvaa johdatusta intuitiivisemman ja helpomman lähestymistavan yksinkertaisten funktioiden raja-arvojen ajattelemiseen ja laskemiseen. Varsinkin jatkuvien funktioiden kohdalla, dynaaminen näkökulma johtaa nopeisiin ja tarkkoihin vastauksiin, koska raja-arvon määrittäminen vaatii ainoastaan funktion piirtämisen sekä tarkastelemisen tutkittavassa pisteessä. (Güçler, 2012.)

Dynaaminen näkökulma näyttäisi muutenkin olevan tärkeässä roolissa raja-arvon käsitteen ymmärtämiseksi. Kabaelin tutkimuksen mukaan on kaksi erilaista tietä ymmärtää raja-arvon käsite. Opiskelija voi lähtee liikkeelle joko dynaamisesta näkökulmasta tai raja-arvon määritelmästä. Riippumatta siitä, kummasta tiestä lähtee liikkeelle, raja-arvon käsite konstruoidaan liittämällä dynaaminen näkökulma raja-arvon määritelmään. (Kabael, 2014.) Tätä raja-arvon täsmällisempää määritelmää ei kuitenkaan käsitellä lukiossa, jolloin opetuksen lähtökohtana on järkevä pitää dynaamista näkökulmaa. Lähestymistapa vaikuttaa hyvältä myös LOPS:n näkökulmasta, koska opetussuunnitelma edellyttää funktion raja-arvon omaksumista moduulissa MAA6 ainoastaan havainnollisesti (Opetushallitus, 2019, s. 226). Tällöin opetuksen tavoitteena olisi liittää dynaaminen näkökulma raja-arvon dynaamiseen määritelmään.

Dynaamiseen näkökulmaan liiallinen tukeutuminen saattaa aiheuttaa opiskelijoille myös vaikeuksia (Güçler, 2012), kuten johtaa käsitykseen raja-arvosta dynaamisena prosessina eikä staattisena objektina eli numeerisena arvona (Denbel, 2014; Güçler, 2012). Myös raja-arvoon liittyvät virhekäsitykset ovat liitettävissä liialliseen dynaamiseen näkökulmaan tukeutumiseen. Yleisimpiä kirjallisuudessa esiin tulevia virhekäsityksiä ovat sellaiset, jossa ajatellaan raja-arvon olevan saavuttamaton tai ylipääsemätön raja (Denbel, 2014; Szydlik, 2000), raja-arvon ja funktion arvon olevan yhtä suuria (Denbel, 2014; Duru, 2011), raja-arvon olevan olemassa vain, jos funktio on jatkuva (Denbel, 2014; Duru, 2011) sekä raja-arvon olevan approksimaatio (Denbel, 2014). Tarkastellaan näitä virhekäsityksiä seuraavaksi tarkemmin.

Virhekäsitys, jossa raja-arvo ymmärretään ainoastaan dynaamisena prosessina, ilmenee esimerkiksi opiskelijoiden puheesta. Opiskelijat saattavat puhua raja-arvon lähestymisestä kohti lukua a, vaikka oikeasti he tarkoittavat funktion f arvojen lähestyvän kohti lukua a. (Güçler, 2012.) Oikeastaan sana ”lähestyy” on jo itsessään ongelmallinen, koska se voi vahvistaa opiskelijan käsitystä raja-arvosta dynaamisena prosessina. Tällöin raja-arvoa ei ymmärretä staattisena arvona, mikä olisi tärkeää, koska se poistaa käsityksen liikkeestä ja käsittelee raja-arvoa yhdenmukaisesti sen määritelmän kanssa (Güçler, 2012).



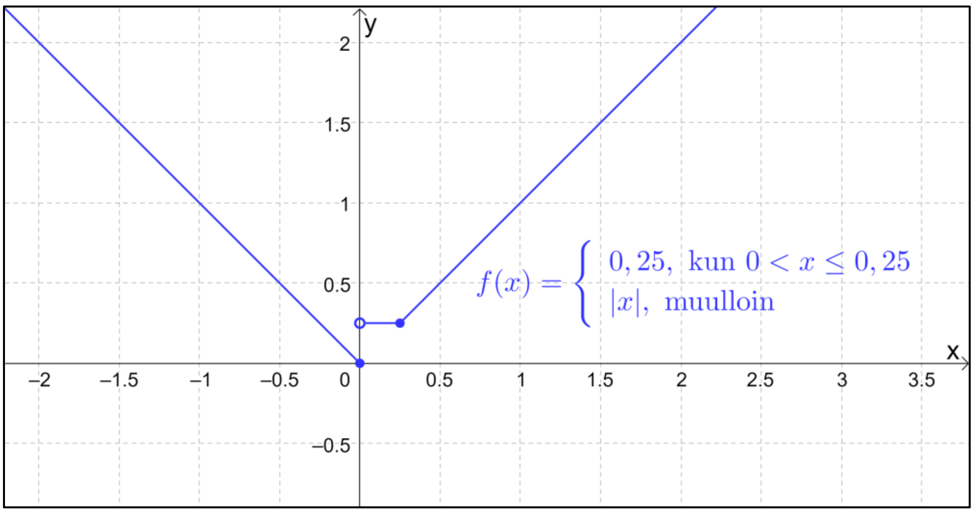
Kuva 1: Funktion f raja-arvo on 0, kun $x \to 0$.

Dynaamiseen näkökulmaan tukeutuminen saattaa johtaa siihen, että opiskelija yleistää raja-arvon laskemisessa käytettävää sijoittamisen proseduuria liikaa (Güçler, 2012) ja ajattelee raja-arvon ja funktion arvon olevan yhtäsuuria (Bezuidenhout, 2001). Tällöin opiskelija ajattelee, että kuvassa 1 raja-arvo $\lim_{x \to 0} f(x)$ on 2, koska se on funktion arvo kyseisessä pisteessä (Güçler, 2012). Liiallinen dynaamiseen näkökulmaan luottaminen saattaa aiheuttaa opiskelijalle myös käsityksen, että vain jatkuvilla funktioilla on olemassa raja-arvo (Bezuidenhout, 2001). Tällaisten opiskelijoiden on vaikea hyväksyä, että kuvassa 1 raja-arvo $\lim_{x \to 0} f(x)$ on 0, koska funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 0$ (Güçler, 2012).

Virhekäsityksien taustalla voivat olla myös funktiot, joita käytetään funktion raja-arvon opetuksen yhteydessä. Koska funktion raja-arvo opetetaan ennen funktion jatkuvuutta, joidenkin funktioiden (esim. polynomien) säännöllisyyttä käytetään todistamaan, että raja-arvo ja funktion arvo ovat yhtä suuria, kun tarkastellaan funktion määrittelyjoukon pistettä. Tällainen perustelu on selvästi epäsuora. (Barbé ym., 2005.)

Taulukko 1: Funktion f arvot pisteissä x.

x	$f(x)$
$-1{,}5$	$1{,}5$
-1	1
$-0{,}5$	$0{,}5$
$-0{,}25$	$0{,}25$
0	0
$0{,}25$	$0{,}25$
$0{,}5$	$0{,}5$
1	1
$1{,}5$	$1{,}5$



Kuva 2: Funktio f, jonka kuvaaja täyttää taulukon 1 ehdot.

Kun funktion raja-arvoa tutkitaan taulukoinnin avulla, funktion arvo on selvitettävä ”perättäisissä” muuttujan x pisteissä, jotka ovat lähellä tutkittavaa pistettä. Tällöin raja-arvoa approksimaationa ajatteleva opiskelija miettii funktiota automaattisesti jatkuvana ja vastaa taulukon 1 perusteella, että raja-arvo $\lim_{x \to 0} f(x)$ on 0. Opiskelija saattaa siis ajatella tutkittavan funktion olevan esimerkiksi itseisarvofunktio $|x|$, vaikka funktion f kuvaaja voi olla esimerkiksi kuvan 2 kaltainen. Funktion f käyttäytymisestä pisteen 0 läheisyydessä ei siis tiedetä tarpeeksi vain taulukon 1 perusteella, jotta raja-arvo $\lim_{x \to 0} f(x)$ voitaisiin selvittää. Tämänkin virhekäsityksen tausta on liitettävissä liialliseen dynaamiseen näkökulmaan luottamiseen. (Güçler, 2012)

Lisäksi dynaaminen näkökulma hankaloittaa opiskelijoiden ymmärtämistä raja-arvon määritelmästä (Güçler, 2012; Szydlik, 2000). Raja-arvon laskemiseen käytetyt menetelmät eivät aina ole intuitiivisia, jolloin raja-arvon määritelmään perustuva käsitteellisempi lähestymistapa voisi olla tehokkaampi raja-arvojen ajattelemisen ja arvioinnin kannalta (Szydlik, 2000). Näyttäisi siis siltä, että raja-arvon käsitteen johdatuksessa dynaaminen näkökulma antaa tärkeää tukea käsitteen muodostumiselle, mutta tämän jälkeen opetuksen pitäisi perustua käsitteellisempään lähestymistapaan, jossa hyödynnettäisiin visuaalista esitystä. Tällöin raja-arvon käsite voitaisiin konstruoida moduulissa MAA6 dynaamisella näkökulmalla ja käsitteellisempää lähestymistapaa käytettäisiin moduulissa MAA12, kun raja-arvon käsitteen ymmärrystä on tarkoitus syventää (Opetushallitus, 2019, s. 229). Ongelmaksi tällaisessa jaottelussa saattaa silti muodostua moduulin MAA12 valinnaisuus, mutta jako on silti sellainen, joka on toteutettavissa LOPS:n moduulien puitteissa.

Virhekäsitysten muodostumiseen vaikuttaa myös lähde, jolla opiskelija saadaan vakuutettua. Vakuuttamisen lähteitä on sekä sisäisiä että ulkoisia. Opiskelijat, joita ohjaa sisäisen vakuuttamisen lähde, näkevät matematiikan järkevänä loogisena kokonaisuutena sekä liitettävänä reaalielämään. Tällaiset opiskelijat vakuuttavat itse itsensä. Ulkoisilla lähteillä vakuutettavat opiskelijat saattavat pitää tärkeänä vain muistaa ja noudattaa tekstin, opettajan tai matemaattisen yhteisön opettamia tapoja, jolloin oppiminen jää proseduraaliselle tasolle. Tällöin käsitteellinen oppiminen on selvästi heikompaa kuin opiskelijoilla, joita ohjaa sisäisen vakuuttamisen lähde. Sisäisesti vakuutetuilla opiskelijoilla on myös harvemmin virhekäsityksiä raja-arvosta, he osaavat antaa täsmällisemmän raja-arvon määritelmän ja arvioida paremmin raja-arvoon liittyviä laskuja. (Szydlik, 2000.) Näin ollen virhekäsityksiä voidaan mahdollisesti estää muodostumasta, kun opiskelijaa kannustetaan luottamaan omiin kykyihinsä sekä annetaan itse tutkia raja-arvoon liittyviä kysymyksiä.

Yhteenvetona voidaan sanoa, että raja-arvoon liittyy useita virhekäsityksiä, jotka voivat olla seurausta opiskelijan vakuuttamisen lähteestä, visuaalisuuden puutteesta, opetuksessa käytetystä kielestä tai sen keskittymisestä proseduraalisiin taitoihin. Todennäköistä on, että ongelma johtuu näiden epäkohtien yhteisvaikutuksesta. Voisiko hyvä visuaalinen lähestymistapa opetuksessa auttaa opiskelijoita hallitsemaan raja-arvon käsitteen? Visuaalinen lähestymistapa voisi vähentävää tarvetta harhaanjohtavalle kielelle sekä vahvistavaa opiskelijan sisäistä vakuuttamista ja käsitteellistä tietoutta. Tähän palataan luvussa 4.2, mutta tarkastellaan seuraavaksi derivaatan käsitteen opettamista ja ymmärtämistä.

3.2 Derivaatta

Derivaattaa opittaessa tutustutaan ensiksi raja-arvon käsitteeseen, jonka oppiminen jo itsessään aiheuttaa hankaluuksia. Seuraavaksi tarkastellaan derivaatan käsitteeseen johdattamista sekä siihen liittyviä perinteisen opetustavan ongelmakohtia. Oppikirjoja tarkastellaan erityisesti, koska ne ovat keskeinen työväline, kun matematiikkaa opetetaan perinteisellä tyylillä (Haapasalo & Kadijevich, 2000). Lisäksi pohditaan, miksi derivaatan käsitettä on hankalaa oppia.

Derivaatan oppimisessa pyritään käsitteen relationaaliseen ymmärrykseen (relational understanding), joka edellyttää derivaattaan liittyvien keskeisten käsitteiden, eli muutosnopeuden, tangentin kulmakertoimen ja raja-arvon, yhteyksien ymmärtämistä sekä yhteyttä derivaattaan. Tällöin derivaattaan liittyvää tehtävää ratkaistaessa opiskelija ymmärtää, mitä tehdä ja miksi. Hän osaa esimerkiksi selittää raja-arvon käsitettä käyttämällä, kuinka keskimääräinen muutosnopeus lähestyy kohti paikallista muutosnopeutta. (Şahin, Aydogan-Yenmez & Erbas, 2015.) Relationaalinen ymmärrys on käsitteenä selvästi verrattavissa käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon toisiinsa liittämiseen.

Jos yksikin näistä keskeisistä käsitteistä jätetään huomiotta, derivaatan käsitettä ei välttämättä ymmärretä täysin relationaalisesti, koska opiskelija saattaa lokeroida käsitteet omassa käsitteellisessä järjestelmässään, eikä siksi pysty liittämään niitä toisiinsa derivaatan kontekstissa. Tällöin opiskelija ei välttämättä ymmärrä, mitä derivaatta tai siihen liittyvät keskeiset käsitteet oikeastaan tarkoittavat, vaikka hän pystyisi ratkaisemaan derivoimistehtäviä oikein. Opiskelijan tietämystä proseduureista ilman syytä kutsutaan instrumentaaliseksi ymmärrykseksi (instrumental understanding), joka viittaa ainoastaan proseduraalisen tiedon hallintaan. (Şahin ym., 2015.) Miten oppimisprosessi sitten etenee kohti derivaatan relationaalista ymmärrystä?

Ensinnäkin derivaatan käsite pitäisi siis opettaa ja konstruoida siihen liittyvien keskeisten käsitteiden yhteyksien perusteella (Şahin ym., 2015). Koska derivaatassa on kyse muutoksesta ja sen nopeudesta, kuten Suomen lukioissa käytettävissä oppikirjoissa huomautetaan (Lehtinen, 2019), muutosnopeus on järkevä tapa aloittaa käsitteen oppiminen. Ensimmäinen tavoite on hahmottaa opittavana oleva käsite, koska se on luontevampi tapa aloittaa oppiminen kuin määritelmän läpikäynti tai laskuprosessit, vaikka ne liittyvät myös keskeisesti oppimisprosessiin. Konstruoiminen voidaan siis aloittaa muutosnopeuden havainnoimisesta objektina, jatkaa sen arvojen laskemisella ja lopulta määritellä uusi käsite derivaatta, johon myös muutosnopeus sisältyy (Hähkiöniemi, 2018.) Ongelmana on, että opiskelijoiden ymmärrys muutosnopeuden yhteydestä derivaattaan on usein proseduraalista (Şahin ym., 2015).

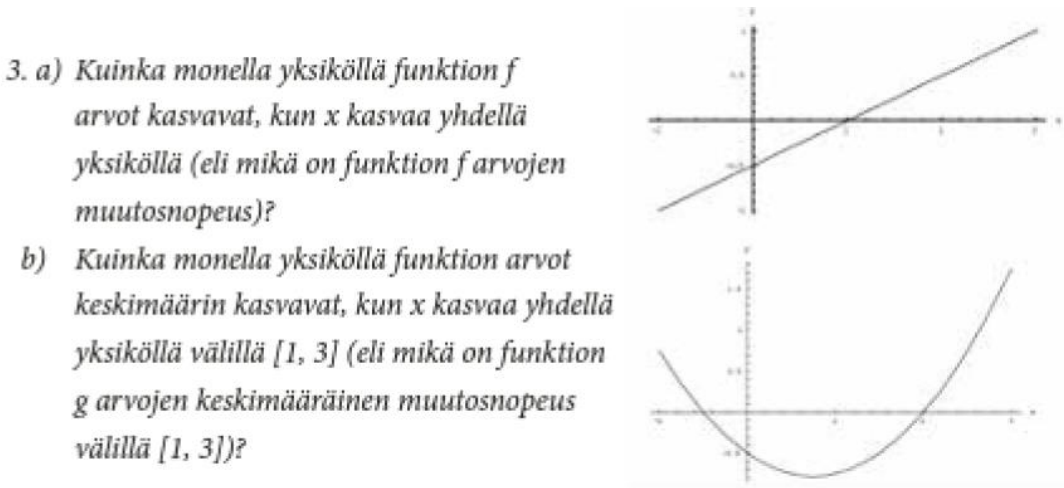
Muutosnopeus voidaan havaita esimerkiksi kuvaajista, taulukoista tai funktioiden lausekkeista (Hähkiöniemi, 2018) ja se on hyvä liittää myös reaalimaailman kontekstiin (Şahin ym., 2015). Näin ollen liikkeen tarkastelu on hyvä tapa aloittaa derivaatan opiskelu, koska opiskelijoilla on jo paljon kokemuksia liikkeestä. Liikkeen nopeuden ja funktion arvojen muutosnopeuden laadullisen tarkastelun tavoitteena on muodostaa havaintojen avulla käsitys, mitä muutosnopeus tarkoittaa. Tällaisten huomioiden tekeminen sujuu opiskelijoilta intuitiivisesti. (Hähkiöniemi, 2018.)

Muutosnopeuden liittäminen reaalimaailmaan ei kuitenkaan saa jäädä johdatuksessa vain oppikirjoissa perinteisesti löytyvän nopeus–aika-esimerkin varaan, koska opiskelijat saattavat alkaa perustelemaan muita esimerkkejä nopeus–aika-kontekstin avulla. Tämä saattaa olla myös osasyynä sille, että opiskelijat eivät ymmärrä muutosnopeuden käsitettä tai sen yhteyttä derivaattaan. (Şahin ym., 2015.) Hyvät esimerkit ovat tärkeä osa käsitteeseen johdattamista, koska niiden avulla opiskelija voi luoda muutosnopeudesta kuvan, jonka avulla voidaan luoda ideoita, joiden yhdistäminen laskuihin helpottaa ymmärrystä muutosnopeuden merkityksestä. Esimerkeissä kannattaa hyödyntää opiskelijan aikaisempaa tietoa uudella tavalla, koska sen avulla voidaan alkaa rakentamaan opiskelijan ymmärrystä derivaatasta. Esimerkiksi ilman lämpötilan vaihtelua ajan suhteen voidaan tutkia muutosnopeuden avulla. Tärkeintä kuitenkin on oppia ajattelemaan funktion arvojen muuttumisen nopeutta, koska se rakentaa ymmärrystä derivaatasta ja vahvistaa funktion tutkimisen taitoja. (Hähkiöniemi, 2018.)

Opiskelijan tietoa ilman lämpötilan vaihtelusta voidaan hyödyntää tutkimalla kuvaajasta, kuinka nopeasti lämpötila muuttuu. Tällöin kuvaajan jyrkkyys kertoo muutosnopeuden suuruuden ja nouseminen tai laskeminen sen merkin. Vasta intuitiivisten havaintojen jälkeen kannattaa opetukseen tuoda tangenttisuoran käsite, jonka avulla voidaan arvioida muutosnopeuden suuruutta. Vastaavanlaisilla johdatuksilla derivaatan merkitys alkaa aukeamaan opiskelijoille asiana, jota varten voidaan kehittää menetelmiä sen arvojen laskemiseksi. Samalla opiskelija pystyy intuitiivisten havaintojen lisäksi yhdistelemään muutosnopeuden tarkasteluun liittyviä graafisia tulkintoja ja erilaisia laskemisen menetelmiä. Myös derivaatan laskusäännöt voidaan liittää teknologian avulla tähän käsitteelliseen verkostoon, johon palataan myöhemmin luvussa 4.2. (Hähkiöniemi, 2018)

Lyhyessä matematiikassa derivaatan merkitys voidaan rakentaa ainoastaan havaintojen varaan, mutta pitkässä matematiikassa arviota muutosnopeudesta tarkennetaan, jolloin päädytään hyödyntämään raja-arvon käsitettä derivaatan tutkimiseksi. Myös paikallista muutosnopeutta on hyvä tutkia aluksi havaintojen avulla, jolloin sen tarkastelu on laadullista ja sen arvojen laskeminen on tavoitteena vasta myöhäisemmässä vaiheessa opetusta. Koska merkitystä rakennetaan aluksi havaintojen varaan, opiskelijoiden olisi hyvä ensin itse miettiä, miten funktion paikallista muutosnopeutta voidaan arvioida laskemalla yhä pienempien välien keskimääräisiä muutosnopeuksia. (Hähkiöniemi, 2018.) Paikallisen muutosnopeuden oppimiseen on kiinnitettävä huomiota, ettei opiskelijalle synny käsitystä, että muutosnopeutta ei voida määrittää paikallisesti (Şahin ym., 2015).

Vähitellen keskusteluun voidaan tuoda mukaan termi erotusosamäärä sekä käsitellä sen kaavaa ja yhdistää tarkasteluun myös sekantin kulmakerroin. Tässä kohtaa opiskelijat ovat valmiita tarkastelemaan, miten funktion paikallinen muutosnopeus voidaan määrittää. Arvio saadaan esimerkiksi suurentamalla kuvaajaa, jotta se näyttää lokaalisti suoralta, ja laskemalla kyseisen suoran kulmakerroin. (Hähkiöniemi, 2018.) Lokaalilla suoruudella tarkoitetaan sitä, että funktion kuvaajan suurennosta ei lyhyellä välillä erota suorasta (Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011), jonka kulmakerroin on määritettävissä. Tavoitteena on saada opiskelijat huomaamaan, että lyhentämällä keskimääräisen muutosnopeuden laskemiseen käytettävää väliä, saadaan paikallisen muutosnopeuden arviota tarkennettua. Tätä voidaan havainnollistaa esimerkiksi piirtämällä väliä vastaavat sekantit kuvaajaan. Opiskelijat pitäisi saada keksimään arviointimenetelmä, jonka avulla paikallisen muutosnopeuden tarkka määrittäminen on ymmärrettävissä. Osa opiskelijoista voi jopa huomata, että arviota voidaan tarkentaa loputtomasti sekä luvun, jota kohti keskimääräiset muutosnopeudet lähestyvät. (Hähkiöniemi, 2018.) Samalla käsitteellinen tieto alkaa muodostumaan Şahinin ym. (2015) esittämien derivaatan keskeisten käsitteiden välille.



3. a) *Kuinka monella yksiköllä funktion f arvot kasvavat, kun x kasvaa yhdellä yksiköllä (eli mikä on funktion f arvojen muutosnopeus)?*

b) *Kuinka monella yksiköllä funktion arvot keskimäärin kasvavat, kun x kasvaa yhdellä yksiköllä välillä [1, 3] (eli mikä on funktion g arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 3])?*

Kuva 3: Esimerkkitehtävä muutosnopeuksien laskemista varten (Hähkiöniemi, 2018).

Seuraavaksi keskusteluun voidaan tuoda mukaan tangentin kulmakerroin (Hähkiöniemi, 2018). Se on keskeisessä asemassa, kun derivaatan käsitteeseen johdetaan perinteisellä oppikirjoista löytyvällä tavalla, koska johdatus rakennetaan sekantti-tangenttitarkastelun varaan (Lehtinen, 2009). Tämä tarkoittaa sitä, että ensiksi tutkitaan funktion f keskimääräistä muutosnopeutta tietyllä välillä $[x_1, x_2]$. Seuraavaksi tarkasteltavaa väliä lyhennetään, jolloin pisteet x_1 ja x_2 lähestyvät toisiaan. Prosessia jatketaan, kunnes päädytään tarkastelemaan funktion f kuvaajan pisteeseen $x = a$ piirrettyä tangenttia.

Suomalaisissa lukioissa käytettävät oppikirjat havainnollistavat prosessia erilaisten suureiden muutosnopeuksien kuvaajien ja esimerkkien avulla, joita niistä löytyy runsaasti (Lehtinen, 2019). Tarkastelulla pyritään saavuttamaan opetushallituksen (2019, s. 226 ja 232) määrittämä tavoite, jossa opiskelija ymmärtää derivaatan tulkinnan funktion muutosnopeutena. Tarkastelun pitäisi lisäksi vahvistaa derivaattaan liittyvien keskeisten käsitteiden yhteyksiä, jotka ovat opiskelijoilla usein proseduraalisen tiedon tasolla (Şahin ym., 2015).

Vasta joko Hähkiöniemen esittämän tai perinteisen oppikirjoista löytyvän johdannon jälkeen on järkevää tarkastella derivaatan määritelmää erotusosamäärän raja-arvona. Tässä kohtaa opiskelijoiden pitäisi tietää syy, miksi derivaatta vaatii määritelmän, koska se näyttää tällöin järkevämmältä heille. Lisäksi heidän pitäisi huomata tangentin kulmakertoimen määrittämisen tarkkuuden kärsivän, jos tangenttisuora asetetaan vain silmämääräisesti. (Hähkiöniemi, 2018.) Derivaatan määritelmä erotusosamäärän raja-arvona pisteessä a määritellään lukion oppikirjoissa seuraavasti: Funktion f derivaatta kohdassa a on raja-arvo,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Kun merkataan välin pituutta $h = x - a$, saadaan ekvivalentti määritelmä derivaatalle pisteessä a,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \text{(Lehtinen, 2019.)}$$

Tarkennetaan vielä, että raja-arvon on oltava reaaliluku, jotta funktio on derivoituva kohdassa a. Määritelmän läpikäymisen jälkeen voidaan alkaa käyttämään termiä derivaatta (Hähkiöniemi, 2018).

Tämä derivaatta $f'(a)$ määritellään oppikirjoissa myös funktion f pisteen $x = a$ tangenttisuoran kulmakertoimeksi (Lehtinen, 2019). Opiskelijoiden tieto tangentin kulmakertoimesta vaikuttaisi olevan usein proseduraalisella tasolla, kun sitä tarkastellaan derivaatan yhteydessä. Opiskelija voi silti osata määritellä derivaatan tangentin kulmakertoimena edellä esitetyllä tavalla. (Şahin ym., 2015.)

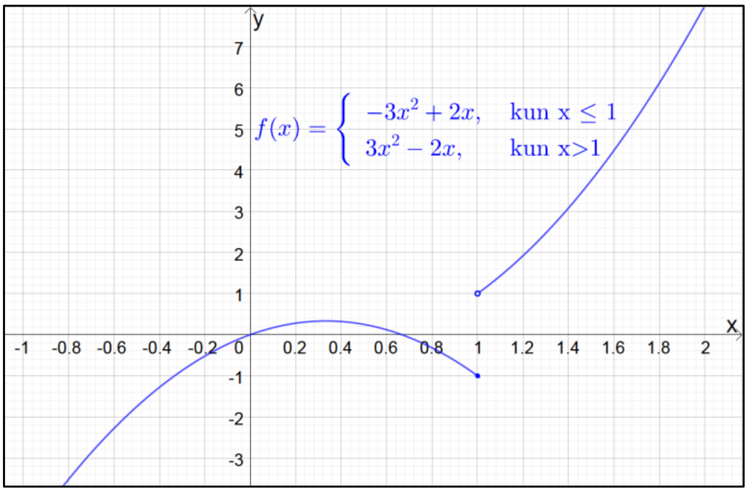
Edellä esitetty algebrallinen määritelmä on yksi pitkän matematiikan moduulin MAA6 keskeisistä sisällöistä (Opetushallitus, 2019, s. 226). Tutkimukset kuitenkin viittaavat siihen, että opiskelijoilla on vaikeuksia ymmärtää derivaatan määritelmää (Gür & Barak, 2007; Kidron, 2015; Şahin ym., 2015). Gürin ja Barakin (2007) mukaan opiskelijat muistavat laskusäännöt eivätkä määritelmiä. Toisaalta opiskelijoiden kognitiiviset vaikeudet saattavat johtua siitä, että käsitteet esitetään heille epämuodollisella tavalla. Opiskelijat siirtyvät kohti syvempää käsitteellistä ymmärrystä keskeisille matematiikan käsitteille, kun ymmärretään tarve niiden määritelmille. (Kidron, 2015.) Jos derivaatan määritelmään johdatetaan Hähkiöniemen (2018) esittämällä tavalla, monimutkaiselta näyttävä määritelmä saa merkityksen, koska opiskelijat ovat saaneet olla itse mukana sen muodostamisessa.

Oppikirjat vaikeuttavat myös osittain opiskelijoiden ymmärrystä derivaatasta, sillä Yhdysvalloissa yleisesti derivaatan opetuksessa käytettävien oppikirjojen sanallisista ja sanattomista matemaattisista kommunikointitavoista tehty analyysi paljastaa ongelmia käytettävistä oppikirjoista. Sanattomia kommunikointitapoja ovat esimerkiksi funktioiden kuvaajat ja matemaattiset symbolit. Ongelmat liittyvät pääasiassa kirjojen visuaalisen välityksen epäjohdonmukaisuuteen ja implisiittisyyteen. Epäjohdonmukaisuus johtuu siitä, että suoritettua derivaatan tai raja-arvon prosessia välitettiin usein visuaalisesti eri tavalla kuin matemaattista objektia, johon prosessia käytettiin (alkuperäinen objekti) tai prosessin avulla päädyttiin (lopullinen objekti). Prosessi ilmeni välillä myös implisiittisesti. Esimerkiksi, kun raja-arvon prosessia kuvataan kuvaajien avulla sekä alkuperäistä ja lopullista objektia symboleilla, näiden kahden erilaisen visuaalisen esitystavan yhteys ei aina ollut eksplisiittinen. Tässä kohtaa esitystapoja yhdistävät sanat, kuten kulmakerroin, ovat tärkeässä asemassa. Myös raja-arvon prosessia kuvaavat sanat ja visuaaliset välittämistavat kärsivät yhteyksien puuttumisesta niiden välillä, jolloin jäi epäselväksi, miksi ne kuvaavat samaa asiaa. (Park, 2016)

Sanojen käyttö raja-arvon ja derivaatan prosessien ymmärtämiseksi saattaa johtua painettujen materiaalien luonteenomaisista rajoituksista (Park, 2016). Tällaisia ovat esimerkiksi ”lähestyy” kuvattaessa raja-arvon prosessia. Kuten edellä on jo mainittu, vastaavanlaiset sanat voivat johtaa virhekäsityksiin raja-arvosta (ks. luku 3.1). Osa derivaattaan liittyvistä asioista ovat muutenkin hankalia kuvailla ja selittää staattisessa tekstissä. Ratkaisu ongelmaan saattavat olla vuorovaikutteiset visuaaliset välittäjät, jotka voivat olla tärkeitä sekä opiskelijalle että opettajalle. (Park, 2015.) Tällöin opiskelijoilla on mahdollisuus päästä myös itse tutkien tutustumaan derivaatan käsitteeseen, eivätkä he seuraisi vain passiivisesti opettajan ohjeita, mikä on perinteisen opetustavan ongelmakohta (Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011). Samalla oppiminen olisi myös konstruktivistisempaa, koska oppiminen vaatii opiskelijan aktiivisuutta.

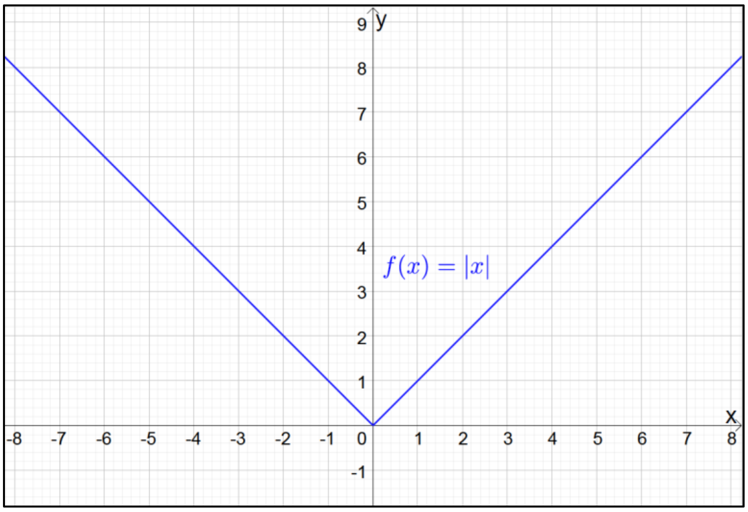
Derivaatan määritelmän jälkeen siirrytään yleensä tekemään harjoitustehtäviä ja miettimään ongelmia, kuten kysymystä, milloin kyseinen raja-arvo on olemassa (Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011). Funktio f on derivoituva pisteessä $x = a$, jos ja vain jos se on sekä oikealta että vasemmalta derivoituva pisteessä a ja toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret. Toisin sanoen raja-arvo on olemassa riippumatta siitä, miten pistettä a lähestytään ja sen suuruus ei riipu lähestymissuunnasta. Geometrisesti ajateltuna funktio on derivoituva, jos tarkasteltavaan pisteeseen voidaan piirtää yksikäsitteisesti tangentti, jolla on olemassa kulmakerroin. Funktio f ei siis ole derivoituva pisteessä $x = a$, jos

1) se ei ole jatkuva pisteessä a.



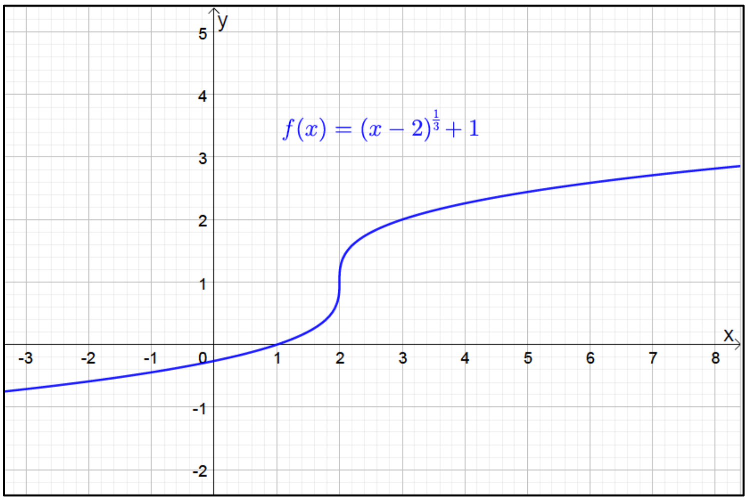
Kuva 4: Funktio f ei ole jatkuva pisteessä $a = 1$.

2) funktion kuvaajassa on kärki pisteessä a.



Kuva 5: Funktion f kuvaajassa on kärki pisteessä $a = 0$.

3) funktion kuvaaja pisteessä a on pystysuora.



Kuva 6: Funktion f kuvaaja on pystysuora pisteessä $a = 2$.

Jos funktio ei ole jatkuva tai funktion kuvaajassa on kärki tutkittavassa pisteessä, se ei ole derivoituva, koska toispuoliset raja-arvot ovat tällöin erisuuret. Funktio ei ole derivoituva pisteessä, jossa sen kuvaaja on pystysuora, koska tällöin edellä esitetyt raja-arvot lähestyvät ääretöntä. Funktion sanotaan olevan derivoituva, jos se on derivoituva kaikissa sen määrittelyjoukon pisteissä. Derivoituvuuden tarkastelu kuuluu uudessa opetussuunnitelmassa moduuliin MAA12 (Opetushallitus, 2019).

Opiskelijat eivät silti halua käyttää derivaatan geometrista määritelmää käsitteen oppimiseksi, vaan pyrkivät ymmärtämään sitä algebrallisesti symboleiden avulla (Hashemi, Abu, Kashefi & Rahimi, 2014). Muutenkin heidän tietonsa rajoittuu usein raja-arvon käyttämiseen derivaatan algebrallisessa määritelmässä, mutta opiskelijat eivät ymmärrä raja-arvon roolia algebrallisessa tai geometrisessa määritelmässä (Şahin ym., 2015). Ongelma voi hyvinkin johtua siitä, että derivaatan opetus keskittyy liikaa symboliseen harjoitteluun, mikä aiheuttaa ongelmia derivaatan oppimisessa (Hashemi ym., 2015). Tähän viittaa myös se, että derivaatan käsite tarkoittaa opiskelijoille ainoastaan derivoimista (Hähkiöniemi, 2018; Orhun, 2012). Ongelman taustalla voi olla myös opiskelijoiden vaikeus ratkaista tehtäviä, jotka vaativat raja-arvon ja derivaatan yhteyksien käyttämistä (Şahin ym., 2015).

Erityisesti perinteisessä opetustyylissä ongelma on suuri, koska oppikirjat keskittyvät pääasiassa proseduraalisten taitojen kehittämiseen, eivätkä kokonaisvaltaisempaan ymmärrykseen käsitteistä. Tämä taas johtaa heikosti kehittyneeseen käsitteelliseen ymmärrykseen. (Haapasalo & Kadijevich, 2000.) Seuraukset voidaan havaita opiskelijoiden ymmärtämättömyytenä, miksi keskimääräinen muutosnopeus lähestyy kohti paikallista muutosnopeutta, tai miksi sekanttien kulmakertoimet lähestyvät kohti tangentin kulmakerrointa. Ongelma voi osoittautua jopa niin suureksi, ettei opiskelija osaa piirtää sekanttia tai tangenttia funktion kuvaajaan, kun hän yrittää selittää derivaatan geometrista määritelmää. Opiskelija ei välttämättä myöskään ymmärrä yhteyttä tangentin kulmakertoimen ja funktion derivaatan arvon välillä tutkittavassa pisteessä, koska hän saattaa tulkita tutkittavan pisteen tangenttisuoran yhtälön funktion derivaattana. Syynä tähän saattaa olla visuaalisuuden puute derivaattafunktion kuvaajasta objektina, joka tangentin lisäksi viittaa suoraan derivaattafunktioon, johon tangentti taas viittaisi epäsuorasti. (Şahin ym., 2015.)

Şahinin ym. mukaan useimmissa lukiotason oppikirjoissa esitetään derivaatan algebrallisen määritelmän jälkeen geometrinen tulkinta, jossa funktion kuvaajan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin on määritelty funktion derivaattana kyseisessä pisteessä. Tällöin geometrinen tulkinta sisältää tarpeellisista geometrisista konstruktioista ainoastaan tangentin, joka viittaa derivaattafunktioon epäsuorasti. Geometrista tulkintaa oppikirjoissa esittäessä olisi parempi korostaa derivaattaa funktiona ja konstruoida sen kuvaaja yhdistämällä funktion eri pisteiden tangenttien kulmakertoimet. (Şahin ym., 2015)

Toisaalta ongelman aiheuttava geometrinen tulkinta voi olla myös hyödyllinen oikein tarkasteltuna. Tällöin on tarkasteltava funktion kuvaajien suurennoksia, jolloin tutkittavan pisteen läheisyydessä käyrän kuvaajaa ei erota suorasta, jos funktio on derivoituva. Toisin sanoen kuvaaja näyttää lokaalisti suoralta. Näin ajateltuna derivaatan geometrista määritelmää ei välttämättä edes tarvita, koska piirrettäessä funktion tarkasteltavaan pisteeseen tangentti, funktion lokaali käyttäytyminen voidaan liittää suoraan raja-arvon käsitteeseen. (Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011.) Tarkastelu voisi vahvistaa myös derivaatan keskeisten käsitteiden yhteyksiä varsinkin raja-arvon ja tangentin kulmakertoimen kohdalla. Tällöin myös tangentin kulmakerroin ja sen muuttuminen voidaan nähdä havaintona vain funktion kuvaajaa katsomalla (Verhoef, Coenders, Pieters, van Smaalen & Tall, 2015). Samalla saadaan havaintojen avulla selväksi, miksi kuvissa 4–6 funktiot eivät ole tietyssä pisteessä derivoituvia.

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin funktion derivoituvuutta ja derivaattafunktiota, koska niiden tutkimiseen siirrytään sen jälkeen, kun ollaan tutkittu funktion derivoituvuutta yksittäisissä pisteissä. Oikeastaan derivaatalla tarkoitetaan historiallisesti derivaattafunktiota ja se on merkinnän f' taustalla (Lehtinen, 2019). Funktion derivaatan laskemiseen tietyssä pisteessä käytetään lähes samanlaisia symboleita kuin derivaattafunktion laskemiseen, mikä saattaa vaikeuttaa niiden välisen eron ymmärtämistä. Symboleiden ainoa ero on niissä käytetty kirjain, kuten a laskettaessa funktion derivaattaa tietyssä pisteessä ja x laskettaessa derivaattafunktiota. (Park, 2015.)

Tässä kohtaa opiskelijan olisi tärkeintä ymmärtää derivaatan määritelmään liittyvä raja-arvo objektina, jotta voidaan kehittää derivoimissääntöjä, joiden avulla saadaan määritettyä funktion derivaatta jokaisessa määrittelyjoukon pisteessä. Derivoimissäännöillä voidaan taas kehittää ymmärrystä derivaattafunktiosta prosessina, jonka avulla saadaan funktion derivaatan arvo määritettyä syötetyn määrittelyjoukon kohdan perusteella. Osa opiskelijoista voi mennä vielä tätäkin pidemmälle derivaatan käsitteellisessä ymmäryksessä. Näin tapahtuu, jos opiskelija ymmärtää, että myös derivaattafunktiolla voi olla olemassa derivaattafunktio. (Hähkiöniemi, 2018)

Usein opiskelijoilla on kuitenkin vaikeuksia derivaattafunktion kanssa, eivätkä vaikeudet jää pelkästään symboleiden samankaltaisuuteen tai tangenttisuoran yhtälöön sekoittamiseen. Opiskelijoilla on vaikeuksia jopa yhdistää funktiota sen derivaattafunktioon. Usein he tulkitsevat derivaattafunktion kuvaajan alkuperäisen funktion kuvaajana. Tällaiset virheet voivat johtua perusperiaatteiden ymmärtämisen, kuvaajan tulkitsemisen ja kuvaajasta päättelemisen taidoista. Orhunin mukaan opiskelijoiden heikko taito tulkita derivaattafunktiota saattaa johtua perinteisestä opetustavasta, jolloin myös kuvaajan tulkitsemisen vaikeudet voidaan johtaa liialliseen symboliseen harjoitteluun. Kuvaajat sisältävät paljon tietoa ja niiden avulla voidaan havainnollistaa monia käsitteitä, mutta graafinen tulkinta ja konstruktio vaativat myös eri matematiikan aiheiden yhteyksien ymmärtämistä. Tällöin on selvää, että laaja käsitteellinen ymmärrys vaaditaan myös derivaatan käsitteen ymmärtämiseksi. (Orhun, 2012)

Opiskelijoiden vaikeudet derivaatan oppimisessa johtuvatkin suurimmaksi osaksi käsitteellisen ymmärryksen puutteesta (Hashemi ym., 2014). Opiskelijoiden heikkoon käsitteelliseen ymmärrykseen vaikuttaa, edellä mainitun symboliseen näkökulmaan keskittymisen lisäksi, puutteet muodostaa yhteyksiä derivaatan eri esitysmuotojen välille (Hashemi ym., 2014; Hashemi ym., 2015). Varsinkin, koska erilaisten esitysmuotojen välisten yhteyksien muodostamista pidetään merkkinä ymmärryksestä. Lisäksi vaihtelu niiden välillä tuo joustavuutta matemaattiseen ongelmanratkaisuun ja ajatteluun. (Hähkiöniemi, 2018.) Opiskelijat eivät myöskään osaa käyttää graafista ja algebrallista näkökulmaa yhtäaikaisesti ongelman ratkaisemiseksi (Hashemi ym., 2014).

Lisäksi vaikeudet derivaattaan liittyvien keskeisten käsitteiden kanssa tekevät selväksi, ettei opiskelijoiden ymmärrys derivaatasta ole yleensä relationaalista. Opiskelijat voivat silti menestyä derivaattaan liittyvissä kursseissa, vaikka he eivät pystyisi selittämään kyseisten käsitteiden roolia derivaatassa. Tämä voidaan osittain selittää sillä, että derivaattaan liittyvissä kokeissa tehtävät mittaavat lähinnä proseduraalista tietoa. Opettajien pitäisi siis tehdä kokeita, jotka mittaavat opiskelijan proseduraalista ja käsitteellistä tietoa tasapuolisesti. (Şahin ym., 2015)

Derivaatan käsitteen läpikäymisen jälkeen oppiminen siirtyy kohti proseduraalisten taitojen hallitsemista, koska erilaisten funktioiden derivoimista opitaan seuraavaksi. Moduulin MAA6 tavoitteisiin kuuluu yksinkertaisten ja yhdistettyjen funktioiden derivaatat. Yksinkertaisia funktioita ovat muun muassa trigonometriset funktiot sini ja kosini. Moduulissa MAB8 tutustuminen rajoittuu polynomifunktion derivoimiseen. (Opetushallitus, 2019, s. 226 ja 232.) Polynomifunktioiden derivaattojen muodostamista varten vaaditaan tieto sekä potenssien derivaatan muodostamisesta että derivointioperaation lineaarisuudesta, joka jätetään joissain oppikirjoissa perustelematta. Oppikirjat johdattavat polynomifunktioiden derivaattojen muodostamiseen laskemalla muutaman pienen eksponentin tapauksen derivaatan algebrallisen määritelmän avulla. Yleinen tapaus perustellaan lausekkeen $x^n - a^n$ tekijöihin jaolla tai induktiotodistuksella, vaikka induktiotodistus opetetaan opiskelijoille vasta myöhemmin käytävässä moduulissa. (Lehtinen, 2019.)

Trigonometristen funktoiden derivointikaavojen perustelu näyttäisi olevan oppikirjoissa osittain puutteellista. Oppikirjoissa ei välttämättä perustella tarkemmin edes sini- ja kosinifunktioiden derivaattojen määrittelyä, vaan perusteluna saatetaan käyttää ainoastaan sini- ja kosinifunktioiden kuvaajien avulla laskettuja derivaatan arvoja muutamassa pisteessä. (Lehtinen, 2019.) Tämä voi olla osasyy sille, että opiskelijat tekevät virheitä varsinkin trigonometristen funktioiden kanssa (Gür & Barak, 2007).

Funktioiden tulon derivaattaa perustellaan oppikirjoissa pitkällä erotusosamäärän manipuloinnilla, jota voitaisiin hyödyntää myös funktioiden osamäärän derivaatan perusteluun. Oppikirjoissa tyydytään kuitenkin vain toteamaan asia ja perusteluna käytetään funktioiden tulon derivointikaavan manipulaatiota. Myös ketjusääntö, eli yhdistetyn funktion derivointi, johdetaan oppikirjoissa erotusosamäärän avulla. Kirjoissa ei kuitenkaan mainita, että sisäkkäin voi olla myös useampia funktioita, vaikka ketjusäännön yleistäminen vastaaviin tilanteisiin on triviaalia. (Lehtinen, 2019.) Opiskelijat tekevät virheitä usein myös yhdistelmäfunktioiden kanssa sekä heillä on virhekäsityksiä niiden derivoimisesta (Gür & Barak, 2007).

Edellä esiteltyjä moduuleissa MAA6 ja MAB8 opeteltavia taitoja hyödynnetään vielä funktion kulun tutkimiseen ja ääriarvojen määrittämiseen suljetulla välillä. Lyhyessä matematiikassa tämäkin rajoittuu ainoastaan polynomifunktioihin. (Opetushallitus, 2019, s. 226 ja 232.) Näiden globaalien ominaisuuksien tutkimisessa syntyy silti ongelma, koska derivaatta on määritelty paikallisesti. Ongelma syntyy esimerkiksi, kun halutaan perustella, että derivaatan ei-negatiivisuus implikoi funktion kasvamiseen. Tämä perustellaan yleensä differentiaalilaskennan väliarvolauseella, joka mainitaan oppikirjoissa ja osassa myös havainnollistetaan kuvan avulla. Vaihtoehtoisesti derivaatan ei-positiivisuus implikoi funktion vähenemiseen. Kuitenkin se, että suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa, otetaan käyttöön vain toteamalla, että todistaminen vaatii lukiomatematiikan ylittäviä taitoja. (Lehtinen, 2019.) Havainnollistus voisi olla tarpeen myös tässä tapauksessa.

Funktion kulun tutkimisessa ja ääriarvojen määrittämisessä keskeisiä taitoja ovat derivaatan nollakohtien sekä suurimpien ja pienempien arvojen määritys sekä funktion kasvavuuden ja vähenevyyden tulkitseminen. Opiskelijoilla on kuitenkin vaikeuksia myös tällaisten derivaatan käsitteeseen liittyvien yleisten ominaisuuksien kanssa (Hashemi ym., 2014; Orhun, 2012). Tämä taas viittaisi siihen, että opiskelijat eivät ole ymmärtäneet derivaatan merkitystä ja ovat joutuneet opiskelemaan vaaditut taidot ulkoa ilman ymmärrystä. Derivaatan ymmärtämiseen panostaminen helpottaa esimerkiksi näiden taitojen oppimista, koska opiskelijat ovat jo yhdistäneet funktion kasvamisen ja vähenemisen derivaatan merkkiin, kuvaajan ”huippukohdat” derivaatan nollakohtiin ja tangentin kulmakertoimen derivaatan arvoihin. (Hähkiöniemi, 2018.)

Opiskelijat eivät myöskään osaa hyödyntää tarpeeksi hyvin heillä jo olemassa olevaa tietoa, mikä on tärkeää, koska matematiikkaa opitaan kumulatiivisesti. Myös yleiset puutteet ongelmanratkaisutaidoissa saattavat hankaloittaa derivaatan oppimista. (Hashemi ym., 2015.) Tästä kertoo myös opiskelijoiden vaikeus käsitellä yleistettyjä kysymyksiä (Hashemi ym., 2014). Yhteenvetona voidaan sanoa, että opiskelijoiden derivaatan oppimiseen liittyvät ongelmat johtuvat käsitteellisen ymmärryksen ja havainnollistuksen puutteesta sekä opetuksen liiallisesta keskittymisestä proseduraalisen tiedon hallitsemiseen. Tehokas analyysin opetus pitäisi olla intuitiivistä ja käsitteellisesti perustua kuvaajiin ja funktioihin, jotta oppimisen laatu paranee ja analyysin käsitteiden ymmärrys syvenee (Orhun, 2012).

4. Teknologia

Derivaatan ja analyysin perinteiselle opetustavalle vaihtoehtoiset teknologiaa hyödyntävät opetuksen lähestymistavat ovat viime vuosikymmeninä olleet erilaisia. Teknologia alkoi esiintymään maailmanlaajuisesti matematiikan opetuskäytössä 1980-luvulla, kun henkilökohtaiset tietokoneet tulivat saataville (Tall, 1997). Aluksi numeeriset menetelmät mahdollistuivat, koska ohjelmistokieliä käytettiin ratkaisemaan ongelmia numeerisesti. Seuraavaksi mahdollistui funktion muotojen tarkasteleminen sekä globaalisti että lokaalisti, kun graafiset ympäristöt ilmestyivät tietokoneille. Lopulta tietokoneiden ja laskimien CAS-järjestelmät (Computer Algebra Systems) mahdollistivat symbolisen suorituskyvyn. Samaa tahtia ovat kehittyneet myös erilaiset matemaattiset ohjelmistot. (Ferrara ym., 2006.)

Teknologian hyödyntäminen opetuksessa ei rajoitu silti pelkästään matemaattisten ohjelmien ja laskimien käyttöön. Vähitellen myös erilaiset sähköiset oppimateriaalit ovat ruvenneet yleistymään opetuskäytössä. Esimerkiksi opetusvideot ja sähköiset oppikirjat on otettu osaksi matematiikan opetusta.

Opetusvideoiden laajamittaisen levityksen ovat mahdollistaneet Youtuben kaltaiset sovellukset. Videoiden etuna on se, että opiskelija pystyy itsenäisesti katsomaan niitä ja palaamaan videossa taaksepäin, jos jokin kohta jää epäselväksi. Tutkimusten mukaan opetusvideon enimmäispituus pitäisi olla 6 minuuttia, jotta opiskelija jaksaa keskittyä sen katsomiseen koko videon ajan. (Guo, Kim & Rubin, 2014)

Sähköisiä oppikirjoja on tullut tarjolle yrityksiltä, jotka valmistavat myös opetuskäyttöön soveltuvia oppikirjoja. Sähköisen materiaalien etuna on se, että niihin voidaan lisätä perinteisten oppikirjojen elementtien lisäksi ominaisuuksia, joiden liittäminen painettuun oppikirjaan ei ole mahdollista. Näitä ovat esimerkiksi interaktiiviset osat, joiden avulla opiskelija pystyy itsenäisesti muokkaamaan lausekkeen kertoimia ja huomaamaan muutoksen kuvaajassa. (Tossavainen, 2015)

LOPS:n mukaan opiskelijan pitäisikin matematiikan opiskelussa kehittyä ”hyödyntämään tietokoneohjelmistoja ja digitaalisia tiedonlähteitä oppimisessa, tutkimisessa sekä ongelmanratkaisussa” (Opetushallitus, 2019, s. 221). Opettajat kokevat teknologian liittämisen opetukseen kuitenkin vaikeaksi, mikä hankaloittaa teknologian käyttämistä opetuksessa (delos Santos & Thomas, 2002). Silti samalla opettajat haluavat viedä opetusta teknologisempaan suuntaan ja he kokevat opiskelijoiden ymmärryksen paranevan sen käytöstä. Opiskelijat ottavat teknologian käytön vastaan pääasiassa positiivisesti. (Weigand & Bichler, 2010.)

LOPS:n mukaan oppimisen pitäisi perustua opiskelijan aktiivisuuteen eikä opettajajohtoiseen opetukseen (Opetushallitus, 2019). Lisäksi oppimisprosessissa tarvitaan eri muodoissa esitettyä tietoa. Näihin molempiin huomioihin teknologia pystyy tuomaan apua. Matemaattisten ohjelmistojen avulla saadaan helposti käytettyä useita esitystapoja jopa samanaikaisesti näytöllä (Takaci, Stankov & Milanovic, 2015). Teknologian avulla pystytään myös luomaan tehtäviä, joiden avulla opiskelija pääsee itse aktiivisesti tutkimaan opittavaa aihetta, mikä on yksi matematiikan lukio-opetuksen yleisistä tavoitteista (Opetushallitus, 2019, s. 222).

Tässä luvussa pohditaan teknologian hyödyntämisen vaikutusta matematiikan oppimiseen ja opettamiseen. Lisäksi luvussa tarkastellaan, millaista teknologiaa ja miten sitä kannattaisi hyödyntää derivaatan opetuksessa. Tavoitteena on antaa myös konkreettisia esimerkkejä opetukseen. Lopuksi tarkastellaan teknologian vaikutusta derivaatan käsitteelliseen ja proseduraaliseen tietoon.

4.1 Vaikutus matematiikan opetukseen ja oppimiseen

Matematiikan opetus on siirtynyt konstruktivistisempaan suuntaan, jolloin opetuksessa korostetaan oppijan aktiivisutta käsiteltävän aiheen oppimiseksi (ks. luku 2.1). Myös teknologian avulla oppiminen on tehokkaimmillaan, kun opiskelija saa tutkia opittavaa käsitettä itse (Hähkiöniemi, 2018). Oikeastaan teknologia ja konstruktivismi liittyvät muutenkin läheisesti toisiinsa sekä molemmat tehostavat toisen käyttöä opetukseen liitettäessä. Tästä voidaan antaa esimerkkinä eritasoisten ja -tyylillä oppivien opiskelijoiden huomioon ottaminen, mikä helpottuu, kun teknologia yhdistetään konstruktivistisiin opetusmetodeihin. (Gilakjani, Leong & Ismail, 2013.)

Teknologia on tuonut esiin uusia mahdollisuuksia liittää opiskelija mukaan oppimisaktiviteetteihin, jolloin myös työskentely siirtyy oppilaskeskeisempään suuntaan, mitä korostetaan konstruktivistisissa opetusmetodeissa. Esimerkiksi tiedonhakuun opiskelija voi osallistua internetin avulla, jolloin tietoa on saatavilla lähes rajattomasti ja melkein missä tahansa. (Gilakjani ym., 2013.) Teknologiaa käyttämällä saadaan siis korostettua opiskelijan roolia oppimisessa. Nuoret käyttävät muutenkin sujuvasti monenlaisia medioita ja internettiä, minkä takia teknologiapainotteisemmasta oppimisesta on tullut hyväksyttävämpää erityisesti matematiikassa, koska sen oppiminen vaatii mielikuvitusta. Oikeastaan nuoret ovat yhä haluttomampia oppia, jos oppiminen ei tapahdu sekä modernilla että helpolla tavalla. (Majerek, 2014.) Siksi opiskelijat ottavat teknologian käytön opetuksessa pääasiassa vastaan positiivisesti (Weigand & Bichler, 2010). Lisäksi sekä matematiikan opetus (Doruk, Aktumen & Aytekin, 2013) että oppiminen (Hähkiöniemi, 2018) tehostuvat teknologian käyttämisestä.

Oppimisessa on kyse konstruoimisesta, joka tapahtuu reflektiivisellä abstrahoinnilla (ks. luku 2.1). Abstraktien käsitteiden, kuten derivaatan, reflektiivinen abstrahointi edellyttää oikeanlaisia aktiviteetteja, useiden esitysmuotojen käyttöä ja reflektiiviseen abstrahointiin kannustavaa sosiaalista vuorovaikutusta (Lehtinen & Repo, 1996). Reflektiivisen abstrahoinnin kaltaisia kokemuksia voidaan aiheuttaa esimerkiksi tietokoneella tehtävillä aktiviteeteilla. Tällaiset kokemukset ovat välttämättömiä monien matematiikan käsitteiden konstruoimiseksi. (Dubinsky, 2002.)

Tietokoneiden käyttö on perusteltua myös siksi, että opiskelijoiden ymmärryksen on havaittu kehittyvän teknologian käytön seurauksena (Doruk ym., 2013; Hähkiöniemi, 2018; Weigand & Bichler, 2010). Seuraukset voidaan havaita opiskelijoiden parantuneina oppimistuloksina matematiikan eri aihealueilla (Doruk ym., 2013; Kushwaha, Chaurasia & Singhal, 2014; Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011; Weigand & Bichler, 2010). Erityisesti Weigandin ja Bichlerin tekemä tutkimus kertoo teknologian vaikutuksesta, koska tutkimus on koko lukuvuoden mittainen, jolloin vaikutuksia on voitu tutkia pitkällä aikavälillä. Eniten teknologian liittämisestä opetukseen ovat hyötyneet heikoiten pärjäävät opiskelijat (Doruk ym., 2013; Weigand & Bichler, 2010).

Syitä opiskelijoiden kehittyneeseen matematiikan ymmärrykseen on varmasti useita, mutta tarkastellaan seuraavaksi niistä kirjallisuudessa esiintyviä. Ensinnäkin teknologia voi ohjata opiskelijaa, jolloin ohjaaminen lisääntyy. Yhtenä selittävänä tekijänä tähän on se, että opiskelijalla on mahdollisuus löytää omat virheensä, koska hän saa välittömän palautteen omasta ratkaisustaan. Toiseksi opettajat ovat havainneet teknologian parantavan opiskelijoiden motivaatiota matematiikan opiskelua kohtaan. Tietokoneen kanssa työskentely, käsitteiden visualisointi ja konkretisointi sekä värien helppo hyödyntäminen ovat vaikuttaneet positiivisesti opiskelijoiden halukkuuteen oppia. Erityisesti abstraktien käsitteiden konkretisointi on helpottunut teknologian avulla. (Doruk ym., 2013.) Lisäksi tietokoneohjelmat voivat säästää aikaa oppimisessa, koska ne nopeuttavat opiskelijoiden omatoimista tutkimista (Hähkiöniemi, 2018).

Teknologian käyttämisellä on muutenkin suuri vaikutus matematiikan opetukseen. Sen seurauksena opettajien käyttämät opetusmetodit muuttuvat ja opetuksesta saadaan mielenkiintoisempaa (Doruk ym., 2013; Weigand & Bichler, 2010). Esimerkiksi pari- ja ryhmätyöt tulevat osaksi matematiikan opetuksen arkea (Weigand & Bichler, 2010), mikä tehostaa teknologian käyttämistä entisestään (Ferrara ym., 2006). Tällaisia opetusmetodeja korostetaan sosiokonstruktivistisissa suuntauksissa, joita kohti koulutuksessa ollaan siirtymässä (Siljander, 2014). Kuitenkaan pelkän teknologian liittäminen opetukseen ei riitä, vaan opetuksen ja oppimisen kontekstin on oltava yhtenäistä (Ferrara ym., 2006). Muutoin oppimisprosessista tulee vaikeampi ja kompleksisempi, ilman sen suurempaa hyötyä (Gilakjani ym., 2013).

Ongelmana teknologian opetuskäytössä on se, että teknologian käytön opetteleminen vaatii aikaa. Kuitenkin aluksi vaikealta vaikuttavan teknologian käyttö nähdään lopulta hyödyllisenä, koska opiskelijat oppivat käyttämään sitä. Ongelmana on myös se, että opiskelijat käyttävät teknologiaa hyödyksi hyvin mekaanisella tavalla, joka liittyy enemmänkin tehtävän sanalliseen muotoiluun kuin sen tyyppiin. Tämä saattaa olla syynä sille, että opettajia mietityttää opiskelijoiden taito käyttää teknologiaa. (Weigand & Bichler, 2010.) Se ei silti parhaimmillaan ole vain uusi tapa esittää tietoa, vaan siitä tulee opettajan käyttämän oppimisteorian kulmakivi (Gilakjani ym., 2013).

4.2 Derivaatta ja teknologia

Perinteisesti voidaan ajatella, että teknologiaa hyödynnetään matematiikassa vain erilaisten laskutoimituksien tekemiseen joko yksinkertaistamaan tai todistamaan tehtävää. Näin ajateltuna teknologian käytön mahdollisuudet ovat todella rajatut. Teknologian käytön mahdollisuudet matematiikan opetuksessa ovat kuitenkin paljon laajemmat kuin edellä annetaan ymmärtää ja ne riippuvat käyttötarkoituksesta (Ferrara ym., 2006) sekä opettajan didaktisesta lähestymistavasta (Weigand & Bichler, 2010). Varsinkin dynaamiset sovellukset ovat mahdollistaneet uusia lähestymistapoja matematiikan opetukseen.

Teknologiaa voidaan hyödyntää ainakin tutkimiseen, väitteiden todistamiseen ja matemaattisten ajatuksien esittämiseen sekä hypoteesien esittämiseen ja kokeilemiseen (Ferrara ym., 2006). Tällaiset opiskelumenetelmät ovat vastaavanlaisia kuin opetushallitus (2019) painottaa lukion opetussuunnitelmassa. Teknologia voidaan ottaa osaksi derivaatan käsitteen oppimista jo käsitteen oppimisen alkuvaiheissa, vaikka tutkimalla liikeanturilla liikettä. Tällöin opiskelijat voivat huomata omasta nopeudestaan, että jyrkempää kuvaajaa varten vaaditaan nopeampi liike, tasaisella nopeudella liikkuessa kuvaaja on suora ja ”huipuissa” liike on hetkellisesti nolla. Tutkiminen helpottaa myös negatiivisen muutosnopeuden ymmärtämistä ja tarkastelu voidaan yhdistää funktion arvojen muutosnopeuden tarkasteluun. (Hähkiöniemi, 2018.) Tämä ei saa kuitenkaan jäädä ainoaksi reaalimaailmaan liitettäväksi esimerkiksi, vaan ongelmien estämiseksi opiskelijat voivat tutkia esimerkiksi ilman lämpötilan vaihtelua ajan suhteen (ks. luku 3.2).

Ilman lämpötilan vaihtelun kuvaajan tutkiminen voidaan yhdistää muutosnopeuden käsitteen johdatukseen. Ensiksi on piirrettävä kuvaajaan sekantti ja määritettävä sen kulmakerroin. Johdatusta jatketaan piirtämällä lisää sekantteja ja määrittämällä tarkasti keskimääräisiä muutosnopeuksia lämpötilaa kuvaavan funktion avulla. Tarkasteltavaa väliä lyhennetään ja taulukoidaan laskettuja keskimääräisen muutosnopeuden arvoja sekä piirretään niitä vastaavat suorat graafiseen esitykseen. Taulukoinnin perusteella saadaan arvio hetkelliselle muutosnopeudelle. Tällaisella esimerkillä muutosnopeus ymmärretään prosessina, jossa tarkasteltavaa väliä lyhennetään ja lasketaan väliä vastaava keskimääräinen muutosnopeus. Prosessia voidaan tarkastella myös graafisesti, jolloin keskimääräisiä muutosnopeuksia kuvaavat sekanttisuorat lähestyvät tangenttia. (Hähkiöniemi, 2018)

Edellä olevassa esimerkissä teknologiaa voidaan hyödyntää taulukointiin ja suorien piirtämiseen. Teknologia on mahdollistanut myös dynaamiset esitysmuodot, joita voidaan esimerkissä hyödyntää kuvaamaan sekanttisuorien lähestymistä kohti tangenttia (Hähkiöniemi, 2018). Dynaamiset esitysmuodot vaikuttavat muutenkin oivalta työkalulta derivaatan oppimiseen, koska osa derivaatan käsitteeseen liittyvistä asioista ovat hankalia selittää ja kuvailla staattisessa tekstissä (ks. luku 3.2). Nykyään matematiikan opetuksessa painotetaankin visuaalisten tekniikoiden tärkeyttä, mikä on johtanut GeoGebran kaltaisten sovellusten syntymiseen (Majerek, 2014). GeoGebran kehitti Markus Hohenwarter diplomityöprojektinaan Salzburgin yliopistossa vuonna 2002. Se kehitettiin yhdistelemään dynaamisen geometriaohjelman ja CAS-järjestelmän ominaisuuksia samassa helppokäyttöisessä systeemissä. (Hohenwarter & Lavicza, 2011.) GeoGebran käyttöä opetuksessa puoltaa myös se, että ohjelma on käytettävissä ylioppilaskirjoituksissa.

GeoGebralla on myös muita hyviä puolia, jotka lisäävät sen toimivuutta matematiikan oppimisen ja opettamisen työkaluna. Esimerkiksi ohjelman suuresta tietokannasta löytyvät valmiit esimerkit helpottavat opettajan työtä. Ohjelma on lisäksi käännetty useille kielille ja sillä tehtyjä töitä on mahdollista tallentaa moniin erilaisiin tiedostomuotoihin. GeoGebralla työskentely tapahtuu matemaattisen kielen avulla, jolloin ohjelman kanssa työskentely kehittää opiskelijoiden taitoa käyttää matemaattisia merkintöjä. (Majerek, 2014)

Dynaamiset esitysmuodot ovat helpottaneet myös animaatioiden käyttämistä matematiikan opetuksessa. Tämä taas mahdollistaa raja-arvon laskemisen dynaamisen prosessin havainnollistamisen eksplisiittisesti, minkä avulla opiskelijat saavat visuaalisen varmistuksen laskuilleen ja huomaavat prosessin olevan yleinen ominaisuus. Animaatiosta muodostuu opiskelijan mieleen visuaalinen kuva, jota hän pystyy hyödyntämään raja-arvoon liittyvissä tehtävissä. Toisin sanoen opiskelija pystyy muuttamaan visuaalisen kuvan matemaattiseksi kieleksi. Syvempään ymmärrykseen raja-arvosta vaaditaan kuitenkin enemmän kuin yksittäinen animaatio. Opiskelijoiden on päästävä itse vuorovaikuttamaan animaatioihin luomalla ja tutkimalla niitä, jotta animaatiot syventävät heidän käsitystään raja-arvosta. Kidronin ja Zehavin mukaan varsinkin animaatioiden itse luominen antaa tärkeää tukea raja-arvon käsitteen ymmärtämiseksi. (Kidron & Zehavi, 2002)

Kuitenkin raja-arvon dynaaminen näkökulma saattaa aiheuttaa myös virhekäsityksiä ja sen käyttäminen on tehokkaimmillaan käsitteen muodostuksen alkuvaiheissa (ks. luku 3.1). Tällöin on selvää, että jatkossa opetuksen lähestymistapaa on muutettava. Moduulissa MAA12 raja-arvoja tutkitaan myös äärettömyydessä, jonka sovelluksena voidaan tutkia rationaalifunktion asymptootteja (Opetushallituksen matematiikan ainetyöryhmän jäsenet & MAOL ry:n edustajat, 2020). Tarkastelu voitaisiin viedä tätäkin pidemmälle tutkimalla esimerkiksi raja-arvoa $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x}$, jolloin opiskelijoiden virhekäsitykset raja-arvosta saavuttomattomana rajana ovat ristiriidassa tutkittavan raja-arvon kanssa. Liangin mukaan tämä pakottaa opiskelijat hylkäämään mahdolliset raja-arvoa dynaamisena prosessina kuvaavat ilmaisut. Näin tapahtuu, koska esimerkiksi funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ kuvaajaa tarkastelemalla huomataan, että funktio voi olla lähellä tai yhtä suuri kuin raja-arvo, kun $x \to \infty$. Tämä voidaan todeta myös laskemalla funktiolle arvoja tietyillä muuttujan x arvoilla, jossa hyödynnetään sinifunktion ominaisuuksia. Opetusmetodia voidaan hyödyntää myös, kun tutkitaan raja-arvoa, jossa x lähestyy lukua x_0. (Liang, 2016.)

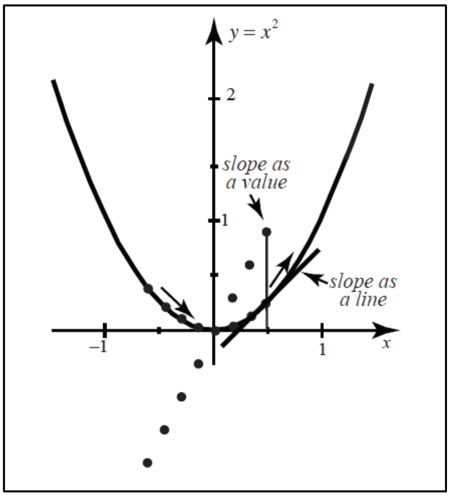
Tarkastelussa voidaan hyödyntää dynaamisen geometriaohjelman zoomaustoimintoa, jolloin sekä lyhyitä että pidempiä välejä voidaan tutkia nopeasti ja tarkasti. Opetusmetodia puoltaa myös se, että tarkasteluun voidaan liittää myös raja-arvon täsmällisempi määritelmä (Liang, 2015), joka on tärkeä mahdollisten jatko-opintojen kannalta. Toisaalta tarkastelussa voidaan hyödyntää myös dynaamista näkökulmaa, jonka liittäminen raja-arvon määritelmään on tärkeää raja-arvon käsitteen sisäistämiseksi (ks. luku 3.1).

Näyttäisi siis siltä, että animaatiot vahvistaisivat eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä. Derivaatan käsitteeseen liittyy myös useita eri esitysmuotoja, kuten numeerinen, graafinen ja symbolinen. Monesti perinteiset opetustavat keskittyvät liikaa symbolisen puolen harjoitteluun, vaikka muutkin esitysmuodot ovat matematiikassa tärkeitä, koska niiden avulla voidaan keksiä uusia ominaisuuksia (Hähkiöniemi, 2018). Kirjallisuudessa painotetaankin useiden esitysmuotojen käytön tärkeyttä derivaatan opetuksessa (Ferrara ym., 2006), joiden käyttämiseen tietokoneet ovat tuoneet uusia mahdollisuuksia (Tall, 1996). Useiden esitysmuotojen käyttö on tärkeää myös reflektiivisen abstrahoinnin kannalta (Lehtinen & Repo, 1996).

Ongelmana on, etteivät opiskelijat tiedä eri esitysmuotojen hyötyjä ja haittoja, eivätkä he osaa käyttää eri esitysmuotojen yhteyttä hyödykseen. Opiskelijoiden on havaittu käyttävän esimerkiksi symbolisia laskimia pääasiassa symbolisiin ja graafisiin käyttötarkoituksiin, mutta niiden käyttö numeerisiin tarkoituksiin on vähäistä. (Weigand & Bichler, 2010.) Tämä viittaa siihen, että eri esitysmuotojen yhteyttä pitäisi korostaa opetuksessa. Opiskelijat pystyvät kuitenkin liittämään visuaalisen esityksen sitä vastaavaan symboliseen esitykseen ja siten laajentamaan käsitystään derivaatasta (Tall, 1986, ss. 416-421). Miten teknologia voisi auttaa eri esitysmuotojen yhteyden hahmottamisessa?

Kuten edellä on todettu, derivaatta voidaan määritellä funktion lokaalina suoruutena (ks. luku 3.2). Esimerkiksi GeoGebralla ideaa voidaan visualisoida tarkastelemalla funktiota sekä sen suurennosta tutkittavan pisteen läheisyydessä. Caballero-Gonzalezin ja Bernal-Rodriguezin mukaan tällaisen työkalun avulla opetuksen saaneet opiskelijat ovat menestyneet perinteisen opetuksen saaneita opiskelijoita paremmin derivaatan käsitteen ymmärtämisessä. Tarkastelu helpottaa myös lokaalin käyttäytymisen liittämistä derivaatan määritelmään. (Caballero-Gonzalez & Bernal-Rodriguez, 2011.) Määritelmän ymmärtämistä erotusosamäärän raja-arvona voidaan lisäksi tehostaa appletilla, jossa opiskelija raahaa x-akselin kohtaa x_1, joka määrittää sekantin toisen pisteen x_2 tutkittavan funktion kuvaajalla. Appletin muodostama dynaaminen kuva liitetään todennäköisemmin derivaatan määritelmään, jos opiskelijat tekevät tämän itse. (Hähkiöniemi, 2018.) Lokaalin suoruuden käsitettä voidaan hyödyntää myös tutkittaessa funktion derivoituvuutta. Tämä tapahtuu sopimalla, että funktiolla on pisteessä yksikäsitteinen tangentti, jolla on olemassa kulmakerroin, jos sen kuvaajan suurennos näyttää lokaalisti suoralta (Tall, 2010).

GeoGebran avulla funktiota f ja sen kuvaajaa on mahdollista tarkastella näytöllä yhtäaikaisesti, mikä vahvistaa symbolisen ja graafisen esitysmuodon yhteyttä (Takaci ym., 2015). Samalla voidaan hyödyntää ohjelman dynaamisuutta ja piirtää esimerkiksi funktion $f(x) = ax + b$ kuvaaja, jonka vakioita a ja b opiskelija voi itse muokata. Dynaamisen esitysmuodon avulla voidaan keksiä uusia ominaisuuksia, kuten edellä olevan funktion muutosnopeuden olevan kaikkialla a. (Hähkiöniemi, 2018.) Vaihtoehtoisesti graafiseen esitykseen voidaan lisätä derivaattafunktion f' kuvaaja, mikä helpottaa funktion ja sen derivaattafunktion ominaisuuksien vertailemista tutkittavalla välillä. Tämä syventää opiskelijoiden tietoutta funktion ja sen derivaattafunktion välisistä ominaisuuksista. Kun opiskelijoiden annetaan lisäksi myös valita tutkittava funktio itse, oppimisesta tulee konstruktivistisempaa, koska opiskelijoilla on enemmän mahdollisuuksia tutkia, analysoida ja testata tietojensa oikeellisuutta. (Takaci ym., 2015.)



Kuva 7: Funktion ja derivaattafunktion piirtäminen tietokoneella (Tall, 2010).

Kuvan 7 kaltainen esimerkki, jossa verrataan tutkittavaa funktiota ja sen derivaattafunktiota, voidaan toteuttaa esimerkiksi GeoGebran avulla seuraavasti:

1) Piirretään tutkittava funktio f.
2) Asetetaan piste A kulkemaan funktion kuvaajaa pitkin GeoGebran liukusäätimen avulla.
3) Piirretään funktiolle f tangentti, joka kulkee pisteen A kautta.
4) Lasketaan tangentin kulmakerroin GeoGebran avulla.
5) Määritellään piste P, jonka arvo on yhtä suuri kuin tangentin kulmakerroin.
6) Piirretään derivaattafunktion kuvaaja pisteen P avulla, pistettä A muuttamalla.

Vastaavanlaisilla esimerkeillä saadaan painotettua derivaattaa funktiona, mihin Şahinin ym. (2015) mukaan pitäisi kiinnittää enemmän huomiota. Derivaattafunktion ymmärtämistä voidaan siis tehostaa teknologialla (Hähkiöniemi, 2018). Kun kuvan 7 funktion x^2 derivaattafunktion piirtäminen tapahtuu dynaamisesti, opiskelijalla on mahdollisuus itse huomata sen olevan funktio $2x$. Tässä kohtaa Tall kutsuu derivaattafunktiota kuvaavammin kulmakerroinfunktioksi, koska se kuvaa alkuperäisen funktion kulmakerrointa. (Tall, 2010.) Jatkon kannalta derivaattafunktio pitäisikin ymmärtää tällaisena sääntönä (Hähkiöniemi, 2018). Operaatio voidaan myös toistaa uudestaan, jolloin saadaan derivaattafunktion derivaatta (Tall, 2010), jos saatu derivaattafunktio on derivoituva.

Tarkasteluun on hyvä liittää myös lokaalin suoruuden käsite. Tällöin yleiset derivoimissäännöt voidaan keksiä derivaattafunktion dynaamisella piirtämisellä ja idealla, että derivaattafunktio on seurausta globaalin derivoimisoperaation suorittamisesta alkuperäiselle funktiolle f. (Tall, 2010.) Näin ollen myös derivointisääntöjen muodostamista voidaan tehostaa teknologialla, jolloin voidaan välttää mielikuvan syntyminen derivoinnista vain mekaanisena operaationa. Derivaatan määritelmän käyttöä voidaan korostaa GeoGebra-appletilla, jossa derivaatan arvoa arvioidaan sekanttien avulla erikseen jokaisessa pisteessä. (Hähkiöniemi, 2018.)

Esimerkiksi yleisen potenssifunktion derivaatta $D(x^n) = nx^{n-1}$ saadaan käyttämällä kuvan 7 tekniikkaa ja binomiteoreemaa. Kun tarkasteluun yhdistetään määritelmän avulla todistettu sääntö, saadaan merkityksellinen symbolinen kaava derivoimisoperaatiolle, jossa dynaaminen kuva on liitetty symboliseen esitysmuotoon. Derivaattafunktion dynaamisen piirtämisen muodostamaa kuvaa voidaan käyttää hyödyksi muidenkin yksinkertaisten funktioiden derivoimissääntöjen muodostamisessa, kuten trigonometristen funktioiden yhteydessä. (Tall, 2010)

Dynaamisuutta voidaan hyödyntää myös, kun etsitään eksponenttifunktion e^x derivaattafunktiota. Aluksi on tarkasteltava funktioiden 2^x ja 3^x derivaattafunktioiden muodostumista. Tällöin huomataan, että molempien funktioiden kuvaajat ja derivaattafunktioiden kuvaajat ovat tasaisesti kasvavia, mutta funktion 2^x derivaattafunktion kuvaaja sijaitsee alkuperäisen funktion alapuolella ja vastaavasti funktion 3^x derivaattafunktion kuvaaja sijaitsee alkuperäisen funktion yläpuolella. Esimerkiksi GeoGebralla voidaan tarkastella funktiota k^x ja sen derivaattafunktiota, kun vakiota k muutetaan lukujen 2 ja 3 välillä dynaamisesti. Tällöin lukujen välistä voidaan havaita arvo e, jolle kuvaaja e^x ja derivaattafunktion kuvaaja ovat samat. (Tall, 2010.) Havainnollistuksen on tässä kohtaa tarkoitus toimia alkusysäyksenä eksponenttifunktion e^x derivaattafunktion etsimiselle, mutta tarkemmat perustelut on rakennettava toisen lähestymistavan varaan.

Tällainen käsitteiden konkretisointi matematiikassa auttaa myös opettajia havaitsemaan opiskelijoiden virhekäsityksiä sekä tekee opettajat tietoisiksi, mikä erottaa symboleita pyörittävän ja käsitteitä konkretisoivan opetustavan toisistaan. Eräs Verhoefin ym. tutkimuksessa mukana olleista opettajista totesikin ymmärtäneensä, että käsitteellinen ymmärrys derivaatasta muutosnopeutena on tärkeämpää kuin proseduraaliset operaatiot. (Verhoef ym., 2015.) Kun derivaattaa tarkastellaan tällä tavalla, opetuksessa saadaan kaikki relationaalisen ymmärryksen kannalta olennaiset käsitteet ja niiden yhteys derivaattaan konkretisoitua.

Kun derivaatta on ymmärretty funktion muuttuvana kulmakertoimena ja yksinkertaisten funktioiden derivaatoista on muodostettu visuaalinen kuva, voidaan yhdistelmäfunktioiden derivaattojen laskemiseen kehittää menetelmiä. Tämä edellyttää funktioiden summan, tulon ja osamäärän sekä yhdistetyn funktion derivoinnin hallitsemista. Varsinkin funktioiden tulon ja osamäärän kohdalla tarvitaan lisäksi ymmärrys, miten derivaatta saadaan määritelmän avulla määritettyä. (Tall, 2010.) Myös yhdistelmäfunktioiden derivoimissääntöjä voidaan havainnollistaa dynaamisella derivaattafunktion piirtämisellä, jolloin saadaan varmistus suoritetuille laskuille. Ketjusääntöä voidaan havainnollistaa lisäksi kolmiulotteisessa avaruudessa, jossa projektiot kolmelle koordinaattitasolle esittävät muuttujaparien välistä graafista yhteyttä (Tall, 2010).

Funktion kasvamisen (vähenemisen) selvittäminen derivaatan ei-negatiivisuudesta (ei-positiivisuudesta) perustellaan usein differentiaalilaskennan väliarvolauseen avulla, jonka selittäminen kaipaa havainnollistusta (ks. luku 3.2). Väliarvolausetta voidaan havainnollistaa dynaamisella geometriaohjelmalla, jossa väliarvolausetta tarkastellaan sen geometrisella tulkinnalla, jossa etsitään funktion käyrän tangentteja (Martínez-Hernández & Ulloa-Azpeitia, 2015). Kun väliarvolauseella perustellaan funktion kulkua, tarkastelussa voisi hyödyntää myös dynaamisen piirtämisen ominaisuuksia, kuten edellä on tehty. Tällöin kasvavaa funktiota tutkittaessa opiskelija huomaisi, että tarkasteltavaa väliä muuttamalla ohjelma piirtää derivaattafunktiota, jonka arvot ovat ei-negatiivisia.

Väliarvolauseen ymmärtäminen on tärkeää myös siksi, että se toimii funktion ääriarvojen etsimisen perusteluna (Martínez-Hernández & Ulloa-Azpeitia, 2015). Ääriarvojen etsimistä helpottaa myös se, että derivaatan ymmärtämiseen on panostettu, jolloin opiskelija on yhdistänyt derivaatan nollakohdat näihin ”huippuihin”. Derivaatan nollakohtien vähemmän matemaattisena perusteluna voidaan käyttää myös piirto-ohjelman suurennosta, jolloin funktion kuvaaja näyttää lokaalisti vaakasuoralta. (Hähkiöniemi, 2018.)

Selvästi teknologiaa voidaan hyödyntää koko derivaatan käsitteen oppimisprosessin ajan. Näyttäisi myös siltä, että dynaamiset geometriaohjelmat antavat tärkeää tukea onnistuneelle oppimisprosessille. Tarkastellaan seuraavaksi, miten teknologian hyödyntäminen vaikuttaa opiskelijan proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon derivaatasta.

4.3 Vaikutus proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon

Teknologian vaikutusta matematiikan proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon on tutkittu paljon myös derivaattaan liittyen. Osa tässä aliluvussa esitettävistä tutkimuksista ei käsittele teknologian vaikutusta juuri derivaattaan liittyen, mutta kaikki tutkimukset käsittelevät analyysiin liittyviä käsitteitä (funktio ja raja-arvo), jolloin niistä on mahdollista saada yleiskuva teknologian vaikutuksesta.

Tutkitaan aluksi teknologian vaikutusta proseduraaliseen tietoon. Matemaattisen tiedon kehittyminen alkaa usein saamalla kokemusta proseduureista, kuten tietyn menetelmän tai algoritmin suorittamisesta (Tall, 1996). Uuden aiheen käsittely pitäisikin aloittaa intuitiivisen proseduraalisen tiedon käsittelyllä, joka ei vaadi matemaattista ajattelua (Haapasalo & Kadijevich, 2003). Derivaatan tapauksessa voidaan tutkia esimerkiksi nopeutta tai lämpötilan vaihtelua ajan suhteen, jossa voidaan hyödyntää apuna myös teknologiaa. Tämän lisäksi teknologiaa voidaan hyödyntää ainakin raja-arvon ja derivaatan arvojen laskemiseen, funktion ääriarvojen määrittämiseen tai funktion kulun tutkimiseen, kun mietitään derivaattaan liittyvää proseduraalista tietoa.

Tutkimukset eivät silti ole yksimielisiä siitä, miten teknologia vaikuttaa opiskelijoiden proseduraaliseen tietoon matematiikassa. Suurin osa tutkimuksista kuitenkin väittää, että GeoGebran liittäminen opetukseen parantaa opiskelijoiden proseduraalista tietoa (Zulnaidi & Zakaria, 2012; Zulnaidi & Zamri, 2017; Zakaria, 2014). Toiset tutkimukset taas väittävät, ettei GeoGebran liittämisellä opetukseen havaittu olevan vaikutusta opiskelijoiden proseduraaliseen tietoon (Öçal, 2017). Toisaalta tutkimukset ovat siinä suhteessa yksimielisiä, ettei teknologia ainakaan heikennä opiskelijoiden proseduraalista tietoa.

Tämä voidaan ainakin osittain selittää sillä, että funktioiden tutkiminen on proseduraalisesti lähes samanlaista ilman teknologiaa kuin sen kanssa. Teknologia kuitenkin mahdollistaa funktioiden monipuolisemman tutkimisen. Toisin sanoen derivaatan tutkiminen ei proseduraalisesti muutu, mutta opiskelijalla on enemmän mahdollisuuksia tutkia siihen liittyviä asioita. Tällöin he pystyvät myös järjestelemään oppimistaan eri tavoin, jolloin oppimisesta tulee konstruktivistisempaa. Tutkimismahdollisuuksiin vaikuttaa silti myös opiskelijan luovuus ja taidot. (Takaci ym., 2015.) Proseduraalisen tiedon paraneminen taas voidaan osittain selittää sillä, että käytetyt proseduurit voidaan esimerkiksi GeoGebralla esittää yksityiskohtaisin askelin (Zakaria, 2014).

Kun oppiminen etenee, opiskelijan proseduraalista tietoa on vähitellen tarkoitus tehostaa tai vähentää tarvittavien proseduurien määrää (Tall, 1996). Tässä auttaa aiheeseen liittyvän käsitteellisen tiedon oppiminen, koska käsitteellinen tieto kehittää myös proseduraalista tietoa (ks. luku 2.2). Teknologian rooli käsitteellisen tiedon oppimisessa näyttäisi olevan suurempi kuin proseduraalisen tiedon oppimisessa. Kirjallisuuden mukaan teknologian vaikutus opiskelijoiden käsitteelliseen tietoon on yksiselitteinen. Useat tutkimukset päätyvät lopputulokseen, että teknologian liittäminen opetukseen parantaa opiskelijoiden käsitteellistä tietoa (Zulnaidi & Zakaria, 2012; Öçal, 2017; Zulnaidi & Zamri, 2017; Zakaria, 2014; Herbert, 2013). Myös opettajien mielestä opiskelijoiden sisällön ymmärryksen taso paranee teknologiaa käyttämällä (Weigand & Bichler, 2010).

Tutkimustulokset eivät ole yllättäviä, kun mietitään edellisessä aliluvussa esiteltyjä tapoja hyödyntää teknologiaa derivaatan oppimisessa. Esimerkiksi Liangin (2016) lähestymistapa raja-arvon opetukseen vahvistaa raja-arvon käsitteellisen ymmärryksen vaatimuksia, koska siinä vaaditaan raja-arvon todistamiseen liittyvien perustelujen ja tekniikoiden hallintaa. Lisäksi animaatioiden ja eri esitysmuotojen samanaikaisen tarkastelemisen luulisi vahvistavan eri esitysmuotojen välisiä yhteyksiä, jotka ovat olennaisia käsitteellisen tiedon hallitsemiseksi. Pitäisikö opetuksen tällöin keskittyä enemmän käsitteelliseen kuin proseduraaliseen tietoon?

Kuten luvussa 3.2 todettiin, derivaatan oppimisessa pyritään relationaaliseen ymmärrykseen, joka viittaa proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon toisiinsa liittämiseen. Tällöin lopullinen tavoite on ymmärtää ja koota tieto kokonaisuudeksi, jossa käsitteellinen ja prosedureelinen tieto on yhdistetty (Tall, 1996). Hyvä matematiikan osaaminen sisältääkin käsitteiden, symbolien ja proseduurien tietämisen sekä niiden välisten yhteyksien ymmärtämisen (Hiebert ja Lefevre, 1986). Seurauksena symbolia f' ei nähtäisi enää vain proseduurina, vaan myös kokonaisena derivaatan käsitteenä (Tall, 1996).

Käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon yhdistäminen on mahdollista myös teknologian avulla, mutta varsinkin erilaisten teknologioiden vaikutusta tietojen yhteyden muodostumiseen on tutkittu vähän ja tutkimukset painottuvat CAS-järjestelmien tutkimiseen. Oikeastaan teknologialla saadaan lisää aikaa käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon sekä niiden yhteyksien esittämiseen, tulkitsemiseen ja reflektoimiseen. (Kadijevich, 2018.) Tietojen yhteyttä voidaan edistää, kun oppijalla on mahdollisuus samanaikaisesti aktivoida molemman tyyppistä tietoa käsiteltävästä aiheesta. Derivaatan tapauksessa tämä onnistuu esimerkiksi tarkastelemalla funktion ja sen derivaattafunktion kuvaajia sekä symbolisia esitysmuotoja samanaikaisesti. Kun funktion kuvaaja muuttuu, muutos näkyy myös derivaattafunktiossa sekä symbolisessa esitysmuodossa. (Haapasalo & Kadijevich, 2003.) Jos pelkkä kuvaajien ja symbolisten esitysmuotojen tarkastelu riittää aktivoimaan molempia tietoja samanaikaisesti, derivaattafunktion dynaamisen piirtämisen luulisi tehostavan tietojen välistä yhteyttä entisestään.

CAS-pohjaisten ympäristöjen käyttäminen yksipuolisesti, kuten vain yhden esitysmuodon käyttäminen, johtaa siihen, että proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon yhteydet usein puuttuvat. Tietojen toisiinsa liittäminen ei silti vaadi vain tietoa oikeanlaisten ongelmien ratkaisemisesta, vaan myös käytetyn teknologian laatua ja käytettyjen työtapojen soveltuvuutta. (Kadijevich, 2018.) Kirjallisuuden perusteella ei silti voida sanoa tarkasti, miten teknologiaa pitäisi hyödyntää, jotta käsitteellisen ja proseduraalisen tiedon yhteyden muodustus olisi mahdollisimman tehokasta.

Näyttäisi siltä, että teknologia vaikuttaa positiivisesti opiskelijoiden käsitteelliseen tietoon derivaatasta. Toisaalta myös proseduraalinen tieto vaikuttaisi pysyvän vähintään samalla tasolla kuin ilman teknologiaa toteutettavissa opetusmetodeissa. Tärkein huomio on silti se, että teknologian avulla voidaan edistää näiden tietojen yhteyden muodostumista. Teknologian liittäminen opetukseen tuskin riittää yksinään selittämään vaikutusta käsitteelliseen ja proseduraaliseen tietoon, vaan myös opetuksen ja oppimisen kontekstin on oltava yhtenäistä, kuten edellä on jo todettu.

5. Johtopäätökset

Tämän kirjallisuuskatsauksen tavoitteena oli tarkastella, millaista teknologiaa ja miten sitä kannattaisi hyödyntää derivaatan opetuksessa ja oppimisessa. Kirjallisuuden perusteella voidaan sanoa, että teknologiaa voidaan hyödyntää koko oppimisprosessin ajan ja varsinkin dynaamiset geometriasovellukset näyttäisivät antavan tärkeää tukea käsitteen ymmärtämiseksi. Myös konstruktivismin näkökulmasta teknologian hyödyntäminen opetuksessa on järkevää, sillä konstruktivismi ja teknologia liittyvät läheisesti toisiinsa sekä molemmat tehostavat toisen käyttöä opetukseen liitettäessä (Gilakjani ym., 2013). Voidaan sanoa, että teknologian avulla saadaan tuotua monipuolisisesti vahvoja konstruointitapoja derivaatan opetukseen.

Dynaamisilla geometriasovelluksilla voidaan esimerkiksi havainnollistaa raja-arvon laskemisen dynaamista prosessia eksplisiittisesti (Kidron & Zehavi, 2002), mutta mukaan on liitettävä tarkoin valittuja raja-arvoja tutkittavaksi (esim. Liang, 2016), jotta käsitteen syvempi ymmärrys on mahdollista saavuttaa. Dynaamisia esitysmuotoja voidaan hyödyntää myös kuvaamaan sekanttien lähestymistä kohti tangenttia (Hähkiöniemi, 2018). Samanaikaisesti näytöllä voidaan tarkastella muutosnopeuksien muuttumista ja havaita, kuinka keskimääräinen muutosnopeus lähestyy kohti paikallista muutosnopeutta. Kun tähän yhdistetään vielä hyvä johdatus raja-arvon käsitteeseen, matka kohti derivaatan käsitteen relationaalista ymmärrystä alkaa. Jatkon kannalta on tärkeää, että derivaatan käsitteen muodostuksen alkuvaiheessa esimerkit liitetään intuatiivisen proseduraalisen tiedon kontekstiin (Haapasalo & Kadijevich, 2003), jotta derivaatan algebrallisen määritelmän ymmärtäminen helpottuu.

Kuitenkin tällaiset esimerkit eivät silti korosta tarpeeksi derivaattaa funktiona, mihin opetuksessa pitäisi kiinnittää enemmän huomiota (Şahin ym., 2015). Tätä taas voidaan korostaa tarkastelemalla funktiota ja sen derivaattafunktiota näytöllä yhtäaikaisesti kuvassa 7 esitetyllä tavalla, jossa derivaattafunktion kuvaajan piirto tapahtuu dynaamisesti (Tall, 2010). Samalla on hyvä tarkastella näiden funktioiden symbolisia esitysmuotoja, joka vahvistaa eri esitysmuotojen yhteyttä sekä aktivoi proseduraalista ja käsitteellistä tietoa samanaikaisesti. Jos aktiviteettiin yhdistetään lisäksi sosiaalinen vuorovaikutus, aktiviteetilla voidaan aiheuttaa reflektiivisen abstrahoinnin kaltaisia kokemuksia. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi työskentelemällä pienryhmissä, jolloin opetuksessa korostuu sosiokonstruktivistinen luonne.

Aktiviteetin avulla voidaan muodostaa myös derivoimissääntöjä, kun tarkasteluun lisätään lokaalin suoruuden käsite (Tall, 2010). Näin vältetään mielikuva derivoinnista vain mekaanisena operaationa. Lisäksi derivaatan määritelmän käyttöä voidaan erikseen korostaa GeoGebra-appletilla. (Hähkiöniemi, 2018.) Lokaalilla suoruudella voidaan myös tutkia funktion derivoituvuutta, kun tarkastellaan funktion kuvaajan suurennoksia (Tall, 2010).

Teknologian käyttämisessä on myös ongelmia, kuten sen terveysvaikutukset esimerkiksi silmien terveyteen. Tällöin on selvää, että oppimisprosessin aikana on käytettävä myös muita opetusmetodeja. Lisäksi teknologian käytön oppiminen vie aikaa (Doruk ym., 2013; Weigand & Bichler, 2010) ja opettajat kokevat sen liittämisen opetukseen vaikeaksi (delos Santos & Thomas, 2002). Toisaalta, kun teknologiaa on opittu käyttämään, se koetaan hyödylliseksi (Weigand & Bichler, 2010). Opiskelijoiden on silti opittava arvioimaan myös teknologian hyödyllisyyttä ja sen käytön rajallisuutta (Opetushallitus, 2019).

Tutkielmassa tutkittiin myös teknologian vaikutusta opiskelijoiden proseduraaliseen ja käsitteelliseen tietoon derivaatasta. Kirjallisuuden perusteella teknologian käyttäminen kehittää käsitteellistä tietoa, kuitenkaan proseduraalista tietoa heikentämättä (esim. Öçal, 2017). Erityisesti on huomioitava, että teknologian avulla voidaan edistää näiden tietojen yhteyttä toisiinsa (Haapasalo & Kadijevich, 2003), mutta vertailevat tutkimukset yhteyksien muodostumiseen teknologiaa hyödyntävän ja muiden opetusmetodien välillä ovat harvinaisia (Kadijevich, 2018). Tällöin jatkotutkimuksessa voitaisiin vertailla teknologisten oppimisaktiviteettien ja muiden opetusmetodien vaikutusta opiskelijan proseduraalisen ja käsitteellisen tiedon yhteyksien muodostumiseen derivaatasta.

Tutkielman rajoituksena on se, ettei taustalla ole omaa tutkimusta aiheesta. Tutkijat näyttäisivät silti olevan kohtalaisen yksimielisiä siitä, millaista teknologiaa ja miten sitä kannattaa hyödyntää derivaatan opetuksessa. Pelkkä teknologian liittäminen opetukseen ei silti riitä, vaan myös opetuksen ja oppimisen kontekstin on oltava yhtenäinen (Ferrara ym., 2006). Muutoin oppimisprosessista tulee vaikeampi ja kompleksisempi, ilman sen suurempaa hyötyä (Gilakjani ym., 2013). Parhaimmillaan teknologia voi silti monipuolistaa ja tehostaa oppimista sekä syventää keskeisten käsitteiden ymmärrystä matematiikassa.

Lähteet

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1/3), 235-268. doi:10.1007/s10649-005-5889-z

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 487-500. doi:10.1080/00207390010022590

Caballero-Gonzalez, C. & Bernal-Rodriguez, J. (2011). New Technologies and Education: Constructive, Geometric and Dynamic Introduction of the Derivative Concept. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 18*(4), 203-208. Noudettu osoitteesta https://search.proquest.com/scholarly-journals/new-technologies-education-constructive-geometric/docview/917541371/se-2?accountid=14774

delos Santos, A., & Thomas, M. (2002). Teaching Derivative with Graphic Calculators: The Role of a Representational Perspective. Teoksessa W.-C. Yang;S.-C. Chu;T. de Alwis;& F. M. Bhatti, *Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematics* (ss. 349-358). Melaka: Program Committee. Noudettu osoitteesta https://www.math.auckland.ac.nz/~thomas/staff/mt/My%20PDFs%20for%20web%20site/ATCM07%20editedSantos.pdf

Denbel, D. (2014). Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course. *Journal of Education and Practice, 5*(34), 24-40. Noudettu osoitteesta http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.735.8425&rep=rep1&type=pdf

Doruk, B., Aktumen, M., & Aytekin, C. (2013). Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to 'teaching practices'. *Teaching Mathematics and its Applications, 32*(3), 140-157. doi:10.1093/teamat/hrt009

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Teoksessa D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (ss. 95-126). Dordrecht: Springer. doi:10.1007/0-306-47203-1_7

Duru, A. (2011). Pre-Service Teachers' Perception about the Concept of Limit. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11*(3), 1710-1715. Noudettu osoitteesta https://search.proquest.com/scholarly-journals/pre-service-teachers-perception-about-concept/docview/884455138/se-2?accountid=14774

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, 237-273. doi:10.1163/9789087901127_010

Garner, B. (2007). *Getting to "got it!" helping struggling students learn how to learn.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development. Noudettu osoitteesta https://ebookcentral.proquest.com/lib/kutu/detail.action?docID=3002171

Gilakjani, A., Leong, L., & Ismail, H. (2013). Teachers' Use of Technology and Constructivism. *International Journal of Modern Education and Computer Science, 5*(4), 49-63. doi:10.5815/ijmecs.2013.04.07

Guo, P., Kim, J., & Rubin, R. (2014). How Video Production Affects Student Engagement: An Empirical Study of MOOC Videos. Teoksessa *Proceedings of the First ACM Conference on Learning @ Scale Conference* (ss. 41-50). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery. doi:10.1145/2556325.2566239

Güçler, B. (2012). Limitless Ways to Talk about Limits: Communicating Mathematical Ideas in the Classroom. *The Mathematics Teacher, 105*(9), 697-701. doi:10.5951/mathteacher.105.9.0697

Gür, H. & Barak, B. (2007). The Erroneous Derivative Examples of Eleventh Grade Students. *Educational Sciences: Theory & Practice, 7*(1), 473-480. Noudettu osoitteesta https://search.proquest.com/scholarly-journals/erroneous-derivative-examples-eleventh-grade/docview/236990480/se-2?accountid=14774

Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(2), 139-157. doi:10.1007/BF03338914

Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2003). Using innovative technology for revitalizing formal and informal mathematics: a special view on the interplay between procedural and conceptual knowledge. *The Teaching of Mathematics, 6*(2), 81-89. Noudettu osoitteesta http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/11/tm622.pdf

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., Mokhtar, M., & Rahimi, K. (2015). Designing Learning Strategy to Improve Undergraduate Students' Problem Solving in Derivatives and Integrals: A Conceptual Framework. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 227-238. doi:10.12973/eurasia.2015.1318a

Hashemi, N., Abu, M., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate Students' Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 358-366. doi:10.1016/j.sbspro.2014.07.495

Herbert, S. (2013). Challenging the Traditional Sequence of Teaching Introductory Calculus. *Computers in the Schools*, 172-190. doi:10.1080/07380569.2013.771528

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert, *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (ss. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. doi:10.4324/9780203063538

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2011). The strength of the community: How GeoGebra can inspire technology integration in mathematics. Teoksessa L. Bu;& R. Schoen, *Model-*

Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra (ss. 7-12). Rotterdam: Sense Publishers. doi:10.1007/978-94-6091-618-2_2

Hähkiöniemi, M. (2018). Derivaatan ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen ja opetus. Teoksessa J. Joutsenlahti;H. Silfverberg;& P. Räsänen, *Matematiikan opetus ja oppiminen* (ss. 110-131). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.

Kabael, T. (2014). Students' formalising process of the limit concept. *Australian Senior Mathematics Journal, 28*(2), 23-38. Noudettu osoitteesta http://search.ebscohost.com.ezproxy.utu.fi/login.aspx?direct=true&db=ehh&AN=99807309&site=ehost-live

Kadijevich, D. (2018). Relating procedural and conceptual knowledge. *The Teaching of Mathematics, 21*(1), 15-28. Noudettu osoitteesta http://www.teaching.math.rs/vol/tm2112.pdf

Kidron, I. (2015). Is small, small enough? Students' understanding the need for the definition of the derivative as a limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 22*(1), 31-42. doi:10.1564/tme_v22.1.03

Kidron, I., & Zehavi, N. (2002). The Role of Animation in Teaching the Limit Concept. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9*(3), 205-227. Noudettu osoitteesta https://search.proquest.com/scholarly-journals/role-animation-teaching-limit-concept/docview/203469938/se-2?accountid=14774

Krahenbuhl, K. (2016). Student-centered Education and Constructivism: Challenges, Concerns, and Clarity for Teachers. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 89*(3), 97-105. doi:10.1080/00098655.2016.1191311

Kushwaha, R., Chaurasia, P., & Singhal, A. (2014). Impact on Students' Achievement in Teaching Mathematics using GeoGebra. *2014 IEEE Sixth International Conference on Technology for Education*, 134-137. doi:10.1109/T4E.2014.54

Lehtinen, E. & Repo, S. (1996). Activity, Social Interaction, and Reflective Abstraction: Learning Advanced Mathematical Concepts in a Computer Environment. Teoksessa S. Vosniadou;E. DeCorte;R. Glaser;& H. Mandl, *International Perspectives on the Design of Technology-Supported Learning Environments* (ss. 105-128). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. doi:10.4324/9780203053386-12

Lehtinen, M. (2009). Neljä tietä derivaattaan. *Solmu*, 1-5. Noudettu osoitteesta https://matematiikkalehtisolmu.fi/2009/1/derivaatta.pdf

Lehtinen, M. (2019). Kirja-arvio: Pitkä matematiikka, kuudes ja seitsemäs kurssi. *Solmu*, 4-7. Noudettu osoitteesta https://matematiikkalehtisolmu.fi/2019/1/oppikirjat4.pdf

Liang, S. (2015). Teaching the Concept of Limit by Using Conceptual Conflict Strategy and Desmos Graphing Calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35-48. doi:10.21890/ijres.62743

Majerek, D. (2014). Application of GeoGebra for teaching mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal, 8*, 51-54. doi:10.12913/22998624/567

Martínez-Hernández, C., & Ulloa-Azpeitia, R. (2015). Dynamic Geometry Software and Tracing Tangents in the Context of the Mean Value Theorem. Teoksessa T. Bartell;K. Bieda;R. Putnam;K. Bradfield;& H. Dominguez, *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ss. 1210-1217). East Lansing, MI: Michigan State University. Noudettu osoitteesta https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED584327.pdf

Noddings, N. (1990). Chapter 1: Constructivism in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 7-18 ja 195-210. doi:10.2307/749909

Opetushallituksen matematiikan ainetyöryhmän jäsenet & MAOL ry:n edustajat. (2020). *Pitkän matematiikan tukimateriaalia - Lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 pitkän matematiikan moduulien sisältöjen tarkastelua.* Helsinki: MFKA-Kustannus Oy. Noudettu osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lops2019_maa.pdf

Opetushallitus. (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.* Helsinki: PunaMusta Oy. Noudettu osoitteesta https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf

Orhun, N. (2012). Graphical Understanding in Mathematics Education: Derivative Functions and Students' Difficulties. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 55*, 679-684. doi:10.1016/j.sbspro.2012.09.551

Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, 395-421. doi:10.1007/s10649-015-9655-6

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E., & Loehr, A. (2016). Improving conceptual and procedural knowledge: The impact of instructional content within a mathematics lesson. *British Journal of Educational Psychology, 86*(4), 576-591. doi:10.1111/bjep.12124

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, 587-597. doi:10.1007/s10648-015-9302-x

Şahin, Z., Aydogan-Yenmez, A., & Erbas, A. (2015). Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 177-188. doi:10.12973/eurasia.2015.1149a

Siljander, P. (2014). *Systemaattinen johdatus kasvatustieteeseen: peruskäsitteet ja pääsuuntaukset* (Uud. p.). Tampere: Vastapaino.

Szydlik, J. E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Research in Mathematics Education, 31*(3), 258-276. doi:10.2307/749807

Takaci, D., Stankov, G., & Milanovic, I. (2015). Effiency of learning enviroment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 421-431. doi:10.1016/j.compedu.2014.12.002

Tall, D. (1986). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics (väitöskirja, Warwickin yliopisto). Noudettu osoitteesta http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.467.7033&rep=rep1&type=pdf

Tall, D. (1996). Advanced Mathematical Thinking & The Computer. *Proceedings of the 20th University Mathematics Teaching Conference*, (ss. 1-8). Shell Centre, Nottingham. Noudettu osoitteesta https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996a-amt-computer-umtc.pdf

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. Teoksessa A. Bishop;K. Clements;C. Keitel;J. Kilpatrick;& C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Education* (ss. 289-325). Dordrecht: Kluwer. doi:10.1007/978-94-009-1465-0_9

Tall, D. (2010). A Sensible approach to the Calculus. *Fourth National and International Meeting on the Teaching of Calculus.* Puebla, Mexico. Noudettu osoitteesta https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012z-sensible-calculus.pdf

Tossavainen, T. (2015). Uutta ja vanhaa lukion matematiikan opetuksessa. Teoksessa H. Ruuska;M. Löytönen;& A. Rutanen, *Laatua! : oppimateriaalit muuttuvassa tietoympäristössä* (ss. 129-139). Helsinki: Suomen tietokirjailijat. Noudettu osoitteesta https://www.suomentietokirjailijat.fi/media/laatua_oppimateriaalit_2015_korjattu_web.pdf

Verhoef, N. C., Coenders, F. G. M., Pieters, J. M., van Smaalen, D., & Tall, D. O. (2015). Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. *Professional development in education, 41*(1), 109-126. doi:10.1080/19415257.2014.886285

Weigand, H., & Bichler, E. (2010). Symbolic Calculators in Mathematics Lessons – The Case of Calculus. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*(1), 3-15. Noudettu osoitteesta https://search.proquest.com/scholarly-journals/symbolic-calculators-mathematics-lessons-case/docview/250908244/se-2?accountid=14774

Zakaria, E. (2014). Impact of using Geogebra on Students' Conceptual and Procedural Knowledge of Limit Function. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 873-881. doi:10.5901/mjss.2014.v5n23p873

Zulnaidi, H., & Zakaria, E. (2012). The Effect of Using GeoGebra on Conceptual and Procedural Knowledge of High School Mathematics Students. *Asian Social Science, 8*(11), 102-106. doi:10.5539/ass.v8n11p102

Zulnaidi, H., & Zamri, S. (2017). The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 2155-2180. doi:10.12973/eurasia.2017.01219a

Öçal, M. (2017). The effect of GeoGebra on student's conceptual and procedural knowledge: The case of applications of derivative. *Higher Education Studies, 7*(2), 67-78. doi:10.5539/hes.v7n2p67