



JAÉN

20 | 20
22 | 21
OCTUBRE

XXIII CONGRESO
NACIONAL DE
INGENIERÍA
MECÁNICA



Análisis de la influencia de la tensión en el comportamiento dinámico de membranas delgadas tipo film

Antonia Lima-Rodriguez¹, Francisco Perez-Quesada¹, Antonio Gonzalez-Herrera¹,
Jose Garcia-Manrique¹

¹ Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y Fabricación, Universidad de Málaga, tlima@uma.es, fperezq@uma.es, agh@uma.es, josegmo@uma.es

El estudio teórico del comportamiento dinámico de membranas delgadas ha sido ampliamente estudiado a lo largo del tiempo, existiendo dos casos extremos, el caso de comportamiento a flexión (caso de placa) y el caso de estar sometida a tensiones axiales (caso de membrana). Para estos dos comportamientos extremos existen soluciones analíticas reconocidas y contrastadas. En este trabajo se propone el uso de Elementos Finitos para determinar el comportamiento dinámico de una membrana sometida a distintos niveles de tensión, y cuya respuesta no corresponde puramente ni a la respuesta de placa ni a la de membrana. Se aportan resultados de la respuesta de casos teóricos de membranas sometidas a distintos niveles de tensión, utilizando el método de Elementos Finitos.

1. Introducción

El comportamiento dinámico de membranas delgadas, ha sido un problema ingenieril muy estudiado por autores muy conocidos a lo largo del tiempo y por tanto su estudio está muy cubierto por la literatura [1,2]. Existen dos casos extremos, el caso de placa en el que no existe tensión aplicada en el plano, y el caso de estar sometida a carga en su plano, que se trata del caso de membrana. Existen soluciones analíticas para el cálculo de las frecuencias de resonancias para estos dos casos extremos.

Los primeros autores que estudiaron sobre el comportamiento dinámico de estos problemas fueron Poisson [3] y Kirchhoff [4], después otros autores como Leissa [5] presentaron un resumen de los trabajos publicados con anterioridad a él.

Los distintos y amplios estudios sobre este tema incluyen el comportamiento modal de distintas geometrías de placas y membranas, como pueden ser geometrías circulares y cuadradas, así como sujetas a distintas condiciones de apoyo, como puede ser simplemente apoyadas o empotradas.

Menos atención se ha prestado al caso de una membrana sometida a un bajo nivel de tensión, y cuyo comportamiento no se corresponde ni con el de placa ni con el de membrana, la solución es intermedia entre estos dos. Wah [6] dio una solución analítica para el caso de membranas circulares sometidas a un cierto nivel de tensión, pero sólo para ciertos casos específicos. Muchos de los problemas reales corresponden con uno de los casos extremos, sin embargo, existen algunos casos cuya solución es intermedia entre estos dos. En este último grupo se podría incluir el estudio de instrumentos musicales de percusión, en el que se utiliza un material de pequeño espesor sometido a un cierto nivel de tensión. Otro caso sería el uso de membranas en microelectrónica, en las que debido a los procesos de fabricación aparecen tensiones residuales. Otro ejemplo está en el mecanismo de audición, donde la membrana timpánica, órgano esencial en el proceso de audición, se considera sometido a cierto nivel de tensión por ciertos autores [7,8]. La presencia de tensión en la membrana timpánica ha sido una cuestión de discusión desde hace tiempo en este campo de estudio, y sigue en discusión en la actualidad [9,10]. Para estos casos sería muy útil el estudio de la solución intermedia.

En este trabajo se va a realizar un estudio numérico mediante el método de Elementos Finitos para evaluar la influencia del nivel de tensión o de deformación en la respuesta dinámica de una membrana, desde su comportamiento de placa, es decir, sin carga aplicada en su plano, hasta el comportamiento de membrana, que estaría totalmente influenciada por la carga aplicada. Con este análisis se obtendría la solución para el comportamiento intermedio entre placa y membrana, caso para el que no existe solución analítica en todas las situaciones.

2. Estudio teórico

El estudio se va a centrar en el comportamiento dinámico de una pieza de delgado espesor, de geometría circular y con condiciones de empotramiento en sus extremos, tal como muestra la Figura 1.

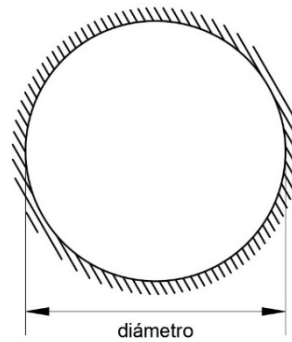


Figura 1: Placa o membrana circular empotrada.

En el caso de placa, es decir, el caso de membrana no sometida a ninguna carga, el cálculo de las frecuencias naturales de resonancia se puede realizar usando la Ecuación (1), dada por Timoshenko [2].

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \tag{1}$$

En esta ecuación, F es la frecuencia natural en Hz, a es el radio de la placa, g es la aceleración de la gravedad, γ es el peso por unidad de volumen, h es el espesor de la placa y D es la rigidez a flexión, cuyo valor se calcula con la ecuación: $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$, y en la cual E y ν representan el módulo de Young y de Poisson del material respectivamente.

Por otro lado, α es una constante cuyo valor depende del número de diámetros nodales, n, y del número de círculos nodales, s, en el modo de vibración correspondiente, y que viene dada en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de las constantes α para el caso de placas circulares empotradas [5].

α	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
s=0	10.2158	21.26	34.88	51.04	69.6659
s=1	39.771	60.82	84.58	111.01	140.1079
s=2	89.104	120.08	153.81	190.30	229.5186
s=3	158.183	199.06	242.71	289.17	338.4113

Para el caso de membrana, cuyo comportamiento dinámico viene regido por la tensión aplicada en el plano de la misma, el cálculo de las frecuencias de resonancia se obtienen mediante la Ecuación (2), dada por Timoshenko [2].

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a} \sqrt{\frac{gS}{w}} \tag{2}$$

donde los parámetros F, a y g representan lo mismo que la Ecuación (1), S es la tensión uniforme por unidad de longitud en el borde de la membrana y w es el peso por unidad de área.

El parámetro α es también una constante cuyo valor depende del número de diámetros nodales, n, y el número de círculos nodales, s, en el modo de vibración correspondiente, y para este caso viene dada en la Tabla 2.

Table 2. Valores de las constantes α para el caso de membranas circulares. [1].

α	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4
s=0	2.404	3.832	5.135	6.379	7.586
s=1	5.520	7.016	8.417	9.760	11.064
s=2	8.654	10.173	11.620	13.017	14.373
s=3	11.792	13.323	14.796	16.224	17.616

El caso de placas circulares, con bordes simplemente apoyados o empotrados y sometidos a ciertos valores de tensión o compresión, fue estudiado por Wah [6]. La ecuación dada por este autor para calcular las frecuencias naturales viene dada por la Ecuación (3).

$$F = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \left(\frac{Ta^2}{D} + \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

En esta ecuación, F, a, D y h son los mismos parámetros que anteriormente, T es la tensión uniforme por unidad de longitud en el borde, que en la Ecuación (2) ha sido denotada por S.

Ahora la constante α depende de n y s, como en las ecuaciones anteriores, y también del parámetro adimensional ϕ . Este parámetro adimensional se calcula con la expresión $\phi=T/T^*$, donde $T^*=14.68D/a^2$ para el caso de bordes empotrados. Los valores del parámetro α para este caso vienen dados en la Tabla 3.

Table 3. Valores de las constantes α para el caso de placas circulares empotradas con una gran tensión o compresión inicial [6]

ϕ	s	α		
		n=0	n=1	n=2
2.00	0	2.84	4.39	5.77
	1	6.16	7.66	9.14
	2	9.39	10.71	12.33
1.50	0	2.89	4.43	5.81
	1	6.19	7.69	9.15
	2	9.40	10.71	12.34
1.00	0	2.95	4.48	5.85
	1	6.23	7.71	9.18
	2	9.40	10.72	12.35
0.50	0	3.05	4.54	5.88
	1	6.26	7.74	9.19
	2	9.42	10.74	12.36
0.25	0	3.11	4.57	5.90
	1	6.28	7.76	9.20
	2	9.43	10.75	12.37
0	0	3.20	4.61	5.92
	1	6.31	7.77	9.21
	2	9.44	10.76	12.38
-0.25	0	3.30	4.64	5.95
	1	6.33	7.79	9.23
	2	9.45	10.77	12.39
-0.50	0	3.44	4.69	5.97
	1	6.36	7.81	9.25
	2	9.46	10.78	12.40
-1.00	0	3.83	4.84	6.03
	1	6.42	7.85	9.27
	2	9.48	10.79	12.41

Los valores de n y s y las formas de vibración para los primeros nueve modos naturales de vibración están representados en la Figura 2.

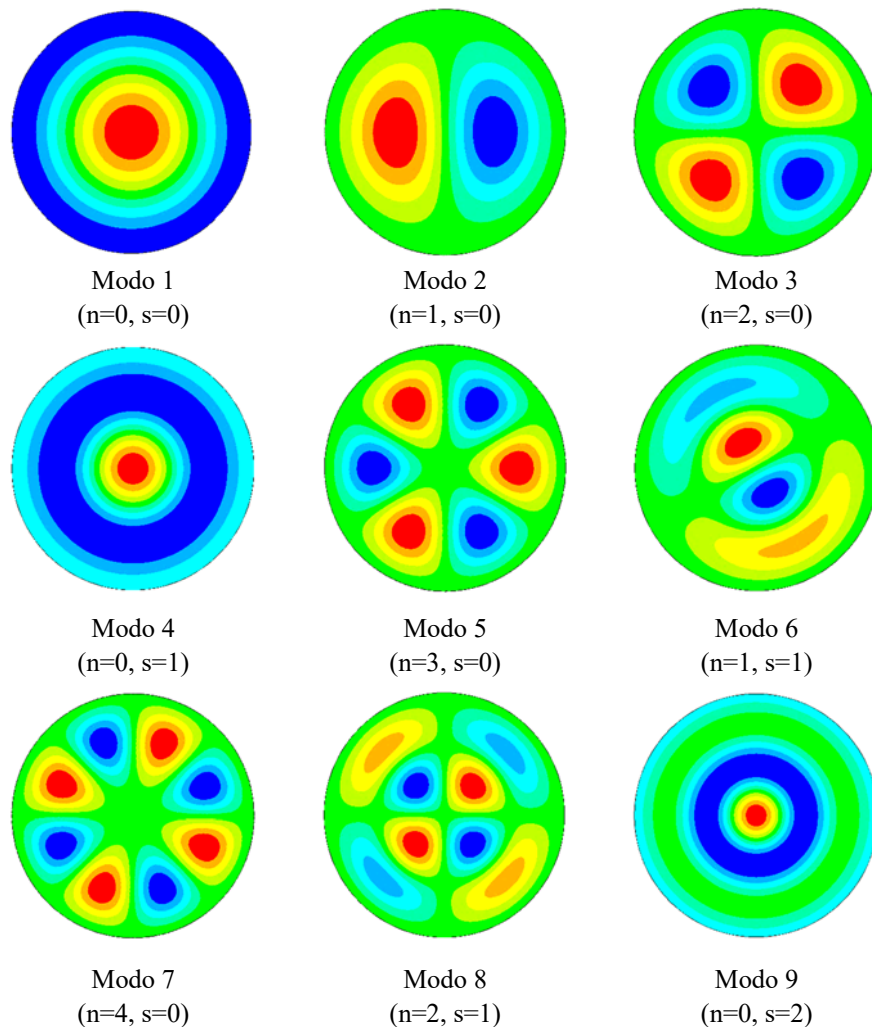


Figura 2: Formas modales para los primeros nueve modos de vibración [11].

3. Análisis numérico

Para el análisis numérico se ha usado el programa de Elementos Finitos ANSYS. En él se ha modelado membranas circulares con condiciones de apoyo de empotramiento en el borde. El mallado del material se ha realizado con el tipo de elemento SHELL (SHELL181) que es adecuado para modelar elementos tipo capa y con el que se consigue una convergencia más rápida. Se toma un tamaño de elemento relacionado con el radio del material de valor $\text{radio}/160$. Es un tamaño de elemento adecuado para la convergencia de malla según estudios desarrollados con anterioridad por autores del presente trabajo [7].

El material usado para realizar las simulaciones ha sido el acero, con un diámetro de 1 metro de longitud y espesor de 1 mm. Las propiedades mecánicas usadas para el acero han sido las siguientes: densidad de 7850 kg/m^3 , módulo de Young de 210 GPa y módulo de Poisson de 0.30.

Se han realizado dos tipos de simulaciones de los modelos de ANSYS, uno en el que la geometría modelada no se ha sometido a ningún tipo de carga para simular el comportamiento de placa, y otro en el que éste ha sido sometido a tensión en el plano. Para simular la tensión se ha impuesto una deformación radial en el perímetro de la membrana circular [7]. Los valores de tensiones y deformaciones se relacionan mediante las ecuaciones de la elasticidad. Los valores discretos de deformación impuesta están en el rango entre 10^{-8} a 10^{-2} , con ambos valores incluidos.

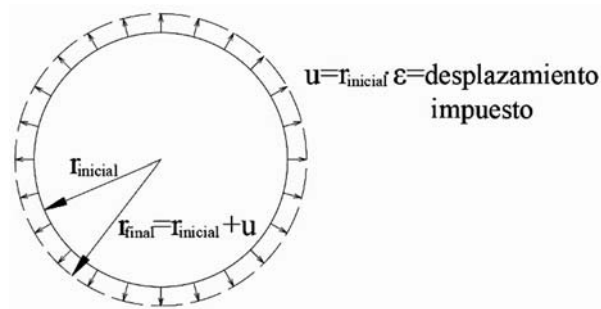


Figura 3: Desplazamiento impuesto en el perímetro de la membrana.

El tipo de análisis realizado ha sido un análisis modal para obtener las frecuencias naturales y modos de resonancia de los distintos casos simulados.

4. Estudio numérico

Este estudio se va a centrar en el caso de una membrana de acero circular, con bordes empotrados, de 1 metro diámetro y 1 mm de espesor.

Se han calculado las frecuencias naturales del caso de placas, denotadas por F_{placa} , obtenidas mediante la Ecuación (1), y para el caso membrana obtenidas mediante la Ecuación (2), denotadas por $F_{membrana}$. En este último caso se ha calculado para las distintas deformaciones ensayadas. Además, las frecuencias naturales también han sido obtenidas con el programa ANSYS mediante el método de Elementos Finitos, valores que se denotan por F_{ANSYS} .

En la Figura 4 está representada la relación F_{placa}/F_{ANSYS} para los primeros 3 primeros modos de vibración en función de la deformación impuesta. El rango de deformaciones ensayadas ha sido de 10^{-8} a 10^{-2} . Además se han superpuesto las soluciones discretas de Wah [6].

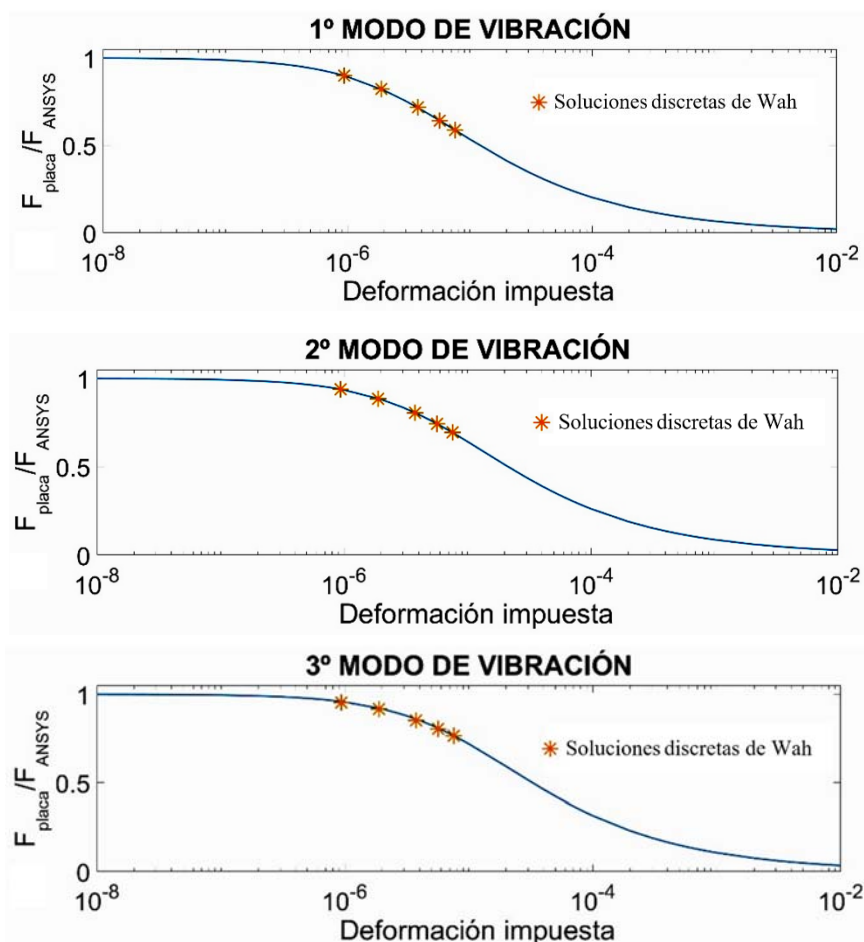


Figura 4: Relación F_{placa}/F_{ANSYS} en función de la deformación impuesta para los modos de vibración 1, 2 y 3. Soluciones discretas de Wah superpuestas.

En las gráficas de la Figura 4 se observa que, para deformaciones muy pequeñas, la relación entre los valores de frecuencia analítica del comportamiento placa obtenidos mediante la Ecuación (1) son muy cercanos a los obtenidos numéricamente por Elementos Finitos. A medida que la deformación impuesta aumenta, lo cual implica mayor tensión aplicada, la relación F_{placa}/F_{ANSYS} se va alejando cada vez más de la unidad. Cuando la deformación aplicada es grande, estos valores están muy alejados y la relación tiende a cero.

En la Figura 5 se ha tomado la misma forma de proceder que en la Figura 4, pero representando la relación $F_{membrana}/F_{ANSYS}$ también para los primeros 3 primeros modos de vibración en función del rango de deformación ensayado, desde 10^{-8} a 10^{-2} . Se han superpuesto además las soluciones discretas de Wah [6].

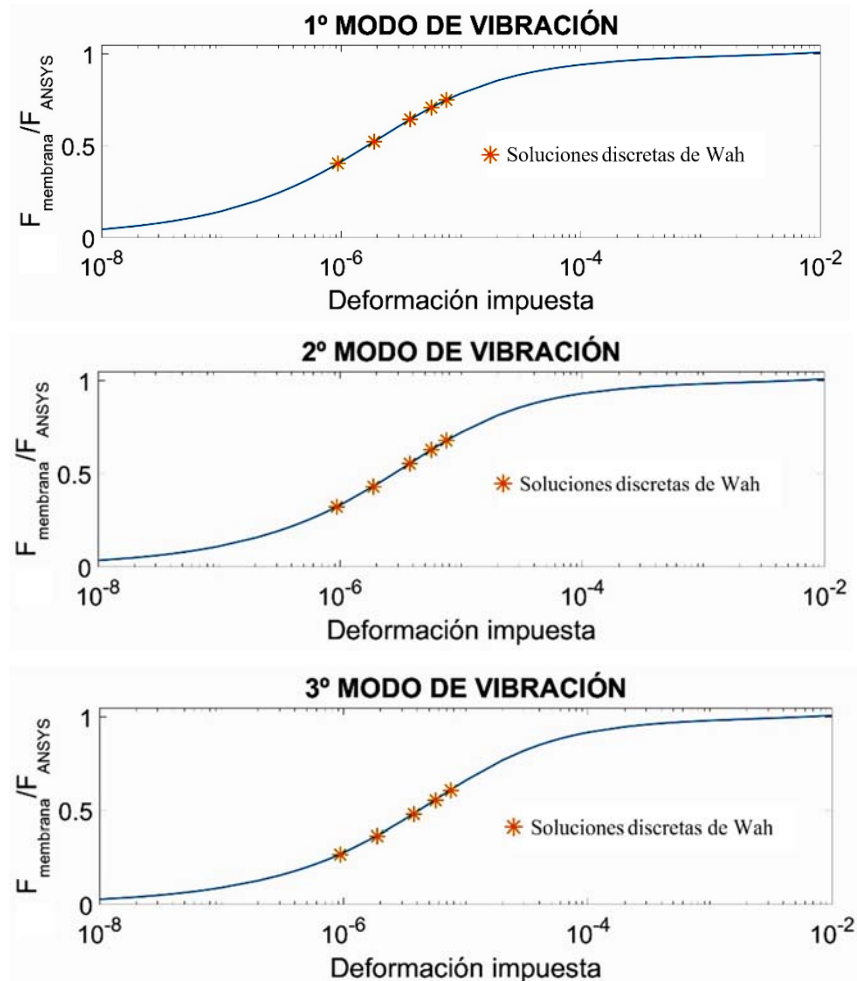


Figura 5: Relación $F_{membrana}/F_{ANSYS}$ en función de la deformación impuesta para los modos de vibración 1, 2 y 3. Soluciones discretas de Wah superpuestas.

Se observa en las gráficas de la Figura 5, que para deformaciones muy pequeñas o de valor nulo, las frecuencias naturales obtenidas con la Ecuación (2) (comportamiento membrana), están muy alejadas de las obtenidas por Elementos Finitos, siendo la relación $F_{membrana}/F_{ANSYS}$ muy cercana a cero. Esta relación va aumentando a medida que aumenta la deformación o tensión aplicada, teniendo un valor muy cercano a uno para grandes deformaciones.

Se concluye que los modos de vibración analíticos del caso placa (sin tensión) y del caso membrana (comportamiento regido por la tensión aplicada), coinciden con los obtenidos mediante Elementos Finitos. Pero para el caso de niveles de tensión intermedios, el comportamiento no coincide ni con el de placa ni con el de membrana, hay una zona de transición entre los dos casos.

Por otro lado, en las Figuras 4 y 5, las soluciones discretas de Wah [6] coinciden con los valores obtenidos por el método de Elementos Finitos para el caso estudiado y los tres primeros modos de vibración.

Se puede concluir que se puede usar la solución numérica para los casos puros de comportamiento de membrana y placa, y también para el comportamiento intermedio entre estos dos, que corresponde con bajos niveles de tensión aplicada.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se ha analizado la influencia de la tensión en membranas delgadas tipo film, haciendo uso del método de Elementos Finitos. Estos resultados se han comparado con las soluciones analíticas que hay en la literatura.

La respuesta dinámica de membranas sometidas a tensión o deformación en su plano no cambia de forma abrupta de comportamiento de placa a membrana, sino que, para cierto rango de tensión o deformación el comportamiento es intermedio entre ambos casos.

Para los casos extremos de comportamiento de placa y membrana, en el que existen soluciones analíticas, la solución numérica coincide con ésta. Para el caso de la membrana sometida a un cierto nivel de tensión o deformación, en el que la respuesta dinámica es intermedia entre placa y membrana, se ha comprobado que, para el caso estudiado, los resultados también coinciden en los casos en los que existe solución analítica. Por tanto, el método de Elementos Finitos podría ser usado en toda la transición de comportamiento de placa a membrana. Se puede completar toda la zona de transición con la solución del análisis numérico.

Conocer para qué nivel de tensión el comportamiento es puro de placa, de membrana o intermedio entre los dos casos es interesante en problemas reales como puede ser el caso de la membrana timpánica. Éste es un tema de interés en la investigación de los autores del trabajo.

6. Referencias

- [1]. Rayleigh, L. *Theory of Sounds*; C.J. Clay, M.A.: London, 1877;
- [2]. Timoshenko, S. *Vibration problems in engineering*; New York, 1928;
- [3]. Poisson, S.D. L'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires l'académie R. des Sci. l'institut Fr.* **1828**, 8, 357–570, doi:10.1016/0309-1740(79)90012-3.
- [4]. Kirchhoff, G. 4. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. fur die Reine und Angew. Math.* **1850**, doi:10.1515/crll.1850.40.51.
- [5]. Leissa, A.W. *Vibration of Plates*; Washington, D. C., 1969;
- [6]. Thein, W. Vibration of Circular Plates. *J. Acoust. Soc. Am.* **1962**, 34, 275–281, doi:10.1121/1.1928110.
- [7]. Gonzalez-Herrera, A.; Olson, E.S. A study of sound transmission in an abstract middle ear using physical and finite element models. *J. Acoust. Soc. Am.* **2015**, 138, 2972–2985, doi:10.1121/1.4934515.
- [8]. Caminos, L.; Garcia-Manrique, J.; Lima-Rodriguez, A.; Gonzalez-Herrera, A. Analysis of the Mechanical Properties of the Human Tympanic Membrane and Its Influence on the Dynamic Behaviour of the Human Hearing System. *Appl. Bionics Biomech.* **2018**, 2018, 1–12, doi:10.1155/2018/1736957.
- [9]. Von Békésy, G. *Experiments in Hearing*; McGraw-Hill: New York, 1960;
- [10]. Kirikae, I. *The Structure and Function of Middle Ear*; Tokio University Press, 1960;
- [11]. Lima-Rodriguez, A.; Gonzalez-Herrera, A.; Garcia-Manrique, J. Study of the dynamic behaviour of circular membranes with low tension. *Appl. Sci.* **2019**, 9, doi:10.3390/app9214716.