Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Lina María Hernández Brito

Euclides: Libros XI-XII-XIII

Euclids: Books XI-XII-XIII

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2020

Dirigido por
José Manuel Méndez Pérez

José Manuel Méndez Pérez
Departamento de
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo de Fin de Grado estudiamos los tres últimos libros de los Elementos de Euclides, que están dedicados a la geometría del espacio. El Libro XI comienza con un conjunto de 28 definiciones que valen para los tres libros: sólidos, rectas y planos ortogonales, planos paralelos, ángulos sólidos, sólidos semejantes, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro y los cinco poliedros regulares. La mayor parte de este libro, que cuenta con 39 proposiciones, se centra en el análisis pormenorizado de los sólidos paralelepípedos. En el Libro XII, a través de 18 proposiciones, relaciona los volúmenes de prismas y pirámides, de cilindros y conos, y de la esfera con el cubo de su diámetro, mediante una magistral utilización de la teoría de la proporcionalidad y del método de exhaución. Finalmente, el principal objetivo del Libro XIII y un digno colofón a esta magnum opus de Euclides, es la construcción de los poliedros regulares o sólidos platónicos: tetraedro, octaedro, cubo (o hexaedro regular), icosaedro y dodecaedro, y la indagación de alguna de sus propiedades. Así, establece que la arista del icosaedro es la cantidad irracional llamada menor, mientras que la del dodecaedro es la cantidad irracional denominada apótoma.

Palabras clave: *Sólidos – Sólidos semejantes – Ángulo sólido – Prisma – Pirámide – Esfera – Cilindro – Cono – Sólidos platónicos – Poliedros regulares – Tetraedro – Octaedro – Cubo – Icosaedro – Dodecaedro – Menor – Apótoma – Primera apótoma – Cuarta apótoma – Extrema y media razón – Paralelepípedo.*

Abstract

In this Final Degree Project we study the last three books of Euclid's Elements, which deal with the geometry in the space. At the beginning of Book XI we can find the 28 definitions employed in these books: solids, stright line or plane at right angles to a plane, pyramid, prism, sphere, cone, cylinder and the five regular polyhedron, amongst others. The greatest part of Book XI, with 39 propositions, focalizes in a detailed analysis of the parallelepiped solids. In Book XII, trough 18 propositions, Euclid connects the volumes of prisms and pyramids with those ones of cylinders and cones, respectively, as well as the volumes of spheres with the cubed ratio of their corresponding diameters, by means of a masterful use of the theory of proportion and the method of exhaustion. Finally, the main objetive of Book XIII and a very satisfactory finish to this magnum opus of Euclid, is the construction of the regular polyhedrons (platonic solids): tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron and icosahedron, and the check of some of their proporties. In this way, it is established that the edge of icosahedron is the irrational straight-line called minor, while the edge of dodecahedron is the irrational one named apotome.

Keywords: *Solids – Similar solid figures – Solid angle – Prism – Pyramid – Sphere – Cone – Cylinder – Platonic solids – Regular polyhedron – Tetrahedron – Cube – Octahedron – Dodecahedron – Icosahedron – Minor – Apotome – First Apotome – Fourth apoteme – Extreme and mean ratio – Parallelepiped.*

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo de Fin de Grado (TFG), dividido en cuatro capítulos, es el estudio de los tres últimos libros de los *Elementos*, que tratan de la geometría en el espacio tridimensional. Hemos de aclarar desde un principio que nuestra meta es llevar a cabo este estudio tal y como lo realizó *Euclides*, es decir, geométricamente, respetando la literalidad de sus definiciones, enunciados y demostraciones. La utilización del lenguaje algebraico simplificaría mucho este análisis, pero merece la pena retrotraerse a su época, asistir a sus clases y seguir las explicaciones en su lenguaje. Por otra parte, es obvio que este lenguaje es completamente obsoleto. En los *Elementos* no figura ninguna fórmula ni símbolos, ni siquiera para las operaciones elementales como la suma o la multiplicación, ni para indicar la igualdad. No aparece ni un solo ejemplo numérico en toda la obra. Apoyándose exclusivamente en la palabra, el razonamiento y con la ayuda de algunas figuras, particularmente rectas (segmentos de), *Euclides* confeccionó este monumental tratado.

En el primer párrafo del Capitulo 1 recordamos los escasos datos que se conocen sobre la vida de *Euclides* y hacemos un sucinto recuento de sus trabajos, muchos de los cuales se han perdido o sólo se tienen noticias por fragmentos conservados o por referencias de otros autores y traducciones a lenguas distintas de la griega, fundamentalmente al árabe. Pero, entre todas ellas, sobresale los *Elementos*, uno de los textos que mayor influencia ha ejercido en la historia de las matemáticas. En el segundo apartado, y a fin de que este TFG sea autocontenido, resumimos la teoría de la conmensurabilidad de magnitudes y de las cantidades irracionales, limitándonos estrictamente a las que comparecerán en el Capítulo 4, pues es imposible presentar aquí una teoría elaborada sobre esta materia, sin duda la más complicada y oscura de las desarrolladas por *Euclides* en su *magnum opus*, hasta tal punto que tuvo que dedicarle el libro X completo [5].

El Capítulo 2 se dedica al libro XI, que comienza en un conjunto de 28 definiciones – que valen sobre los tres libros examinados – de conceptos como figura sólida o sólido, recta y plano perpendicular a un plano, inclinación de una recta y un plano respecto de un plano, planos paralelos, figuras sólidas semejantes, ángulo sólido, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro. Las demostraciones de las tres primeras proposiciones de este libro son incorrectas. En opinión de los expertos sobre la obra euclidiana, el sabio de Alejandría debió haber incluido una axiomatización de la geometría del espacio, de forma análoga a como procedió con tanto éxito en el caso del plano. Las siguientes proposiciones conciernen a rectas y planos perpendiculares o paralelos a planos, y a sólidos de tres o más ángulos planos. Mas la mayor parte se refieren al análisis de propiedades de los sólidos paralelepípedos. Así, construye sobre una recta dada un paralelepípedo semejante a otro dado. Y prueba sucesivamente que si un sólido está limitado por planos paralelos, sus caras opuestas son paralelogramos iguales; si se corta un paralelepípedo por un plano paralelo a las caras opuestas, los volúmenes de los sólidos resultantes, guardan la misma razón que sus bases; si un paralelepípedo es cortado por un plano que pasa por las diagonales de las caras opuestas, el sólido queda dividido en dos partes iguales; los paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen igual altura son de igual volumen; los paralelepípedos de igual altura guardan entre sí la misma razón que sus bases; los paralelepípedos semejantes mantienen la razón triplicada de la de sus lados; las bases de los paralelepípedos de igual volumen están inversamente relacionadas con sus alturas y, finalmente, si dos prismas tienen la misma altura y la base de uno es un paralelogramo de área doble de la del otro, que es un triángulo, ambos prismas tienen el mismo volumen.

La finalidad del Capítulo 3 es la investigación del libro XII. Es un trabajo con un desarrollo teórico trabajoso, pero bien estructurado y con demostraciones realmente rigurosas y elegantes. La herramienta básica en muchas de estas pruebas es la utilización de la teoría de la proporcionalidad (libro V) y el método de exhaución (libro X). Parte estableciendo que las áreas de los polígonos semejantes inscritos en círculos guardan la misma razón que los cuadrados de sus diámetros, para demostrar después similar resultado para los círculos. Continúa con un grupo de asertos sobre pirámides y prismas, como su sorprendente prueba de que toda pirámide triangular está constituida por dos pirámides iguales y semejantes a la dada, más dos prismas de igual volumen cuya suma es mayor que la mitad del volumen de la pirámide entera. Sigue relacionando las pirámides de igual altura con sus bases poligonales y establece que todo prisma triangular se divide en tres pirámides iguales también triangulares, lo que le permite deducir que el volumen de una pirámide es la tercera parte del prisma de igual altura y con la misma base. Demuestra asimismo que las pirámides semejantes mantienen una razón triple de la de sus lados correspondientes. Vienen luego resultados que relacionan conos y cilindros en la misma línea que los satisfechos por pirámides y prismas. Así verifica que el volumen de un cono es la tercera parte del que tiene el cilindro de igual altura y la misma base; que conos y cilindros de igual altura son entre sí comos sus bases; que conos y cilindros guardan entre sí la razón triplicada de la que conservan los diámetros de sus bases; y que los conos y cilindros de bases iguales son entre sí como sus alturas. Finalmente prueba que entre dos círculos concéntricos se puede inscribir un polígono equilátero de un número par de lados en el círculo mayor que no toque al menor, resultado que generaliza inscribiendo un poliedro en la mayor de dos esferas concéntricas de tal manera que dicho poliedro no toque la menor. Todo ello le permite inferir que los volúmenes de dos esferas guardan entre sí la razón cúbica de la razón de sus diámetros.

El libro XIII, el último, se analiza en el Capítulo 4. Este libro está considerado como uno de los más completos de los *Elementos* tanto por su coherencia interna como por su desarrollo teórico. El motivo central del mismo, y en opinión de algunos eruditos, del conjunto de la obra, es la construcción e investigación de los poliedros regulares o sólidos platónicos. En el segundo párrafo se dan los resultados que se necesitan para alcanzar este fin, destacando algunos relativos a los pentágonos: las rectas que subtienden dos ángulos consecutivos de un pentágono regular se cortan en extrema y media razón, siendo los trozos mayores iguales al lado del polígono; el cuadrado del lado de un pentágono equilátero inscrito en un círculo es la suma de los cuadrados de los lados del hexágono y del decágono inscritos en el mismo círculo; y el lado de un pentágono equilátero inscrito en un círculo de diámetro racional es la recta irracional llamado *menor*. En la tercera sección se construyen dos de los cinco poliedros regulares y se verifica que mientras las aristas del tetraedro, cubo y octaedro guardan entre sí razones racionales, no ocurre lo mismo con las del icosaedro y el dodecaedro. Estos dos poliedros son mucho más difíciles de construir y sus aristas no guardan entre sí ni con las de los anteriores razones racionales, por cuanto la arista del icosaedro es la recta irracional llamada *menor* y la del dodecaedro otra cantidad irracional denominada *apótoma*. En la última proposición de libro XIII, y de los Elementos, *Euclides* considera juntos todos estos sólidos platónicos y ordena sus lados. Concluye estableciendo con un razonamiento sencillo que son cinco, y exactamente cinco, estos poliedros.

Es cierto que los Elementos ya están pasados de moda, no sólo en su lenguaje sino también en sus contenidos matemáticos. Ahora bien, no hay que olvidar que estuvieron vigentes hasta finales del s. XIX y principios del XX en los mejores centros educativos y universidades occidentales. Recordaba *Peyrard*[1] que *Legendre*[2] le comentaba que *"la geometría es un lenguaje muerto después de Euclides"* y, más recientemente, a mediados del s. XIX *Augustus de Morgan*[3] proclamaba que *"no*

[1] François Peyrard (1760-1822) fue un matemático, docente y estudioso de las lenguas clásicas francés, que formó parte durante la Revolución Francesa de la comisión para la reforma del sistema educativo galo.

[2] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), famoso matemático francés que hizo notables aportaciones en estadística, teoría de números, álgebra y análisis matemático.

[3] Augustus de Morgan (Madurai-India,1806; Londres-RU,1871), reconocido matemático y lógico británico.

había un sistema de geometría digno de tal nombre que se apartara sustancialmente del plan tratado en los Elementos”.

Es evidente que tales afirmaciones no se sostienen hoy en día. No obstante, conviene en este punto subrayar la grandeza de este matemático griego, algunos de cuyos sencillos enunciados han traído en jaque a toda la comunidad matemática durante siglos y siglos. Citamos dos ejemplos. El primero, el quinto postulado o postulado de las paralelas (P. 5, Capítulo 1) que, en su enunciado más escueto debido a *John Playfair*[4] dice que *“por un punto exterior a una recta no su puede trazar más que una paralela a ella”*. Este postulado fue cuestionado incluso por matemáticos cercanos en el tiempo a *Euclides*, que intentaron en vano probarlo. Pero transcurrieron siglos y no fue hasta que llegaron grandes matemáticos como el húngaro *Janos Bolyai* (1802-1860), el ruso *Nikolái Lobachevski* (1792-1856) y el genio alemám *Carl F. Gauss* (1777-1855) quienes bien avanzado el siglo XIX, independientemente unos de los otros, llegaron a la conclusión de que se podían crear geometrías que prescindieran del postulado de las paralelas o en las que el referido postulado fuera sustituido por otro diferente, originando geometrías tan válidas como la euclidea. El segundo ejemplo viene recogido después de la Nota 4.6, cuando *Euclides* establece que hay cinco, y exactamente cinco, poliedros regulares. Esta cuestión ha asombrado y despertado el interés de muchos matemáticos a lo largo de la historia, del nivel, entre otros, de *J. Kepler* (1571-1630), *R. Descartes* (1596-1650),*L. Euler* (1707-1783), *A. L. Cauchy* (1789-1857), *E.C. Catalan* (1814-1894), *D. Hilbert* (1862-1943) y *E. Steintz* (1871-1928). Actualmente, la afirmación de *Euclides* es cierta en un contexto muy restrictivo, en el que la regularidad se entiende en términos de simetrías.

Como dice Luis Vega en su excelente introducción general a los *Elementos* [3, p. 7], nadie sostiene hoy estas opiniones de *Legendre* y de *Morgan*, y citamos textualmente

“Pero tenemos tan buenos motivos como los que había entonces para maravillarnos. No suele ocurrir que un solo tratado funde de una vez por todas una disciplina científica; aún es más extraño que además represente por más de veinte siglos el espejo y la norma del rigor en ésa y otras ciencias de la misma familia. Se diría que la historia de las fundaciones, pródiga de suyo en gestas y milagros, sólo conoce como mucho un caso así: la fundación de la geometría y del llamado método axiomático con los Elementos de Euclides”.

[4] John Playfair (1748-1819), matemático y geólogo británico.

1

Capítulo 1

1.1. Introducción

En el siguiente párrafo se exponen los escasos datos biográficos que se conocen de *Euclides de Alejandría* y nos centramos en sus obras, especialmente, en los *Elementos*, texto que le encumbró y le convirtió, junto a *Arquímides* y *Apolonio*, en uno de los más importantes matemáticos de la Grecia clásica, reconocido como el padre de la geometría. En el último párrafo, a fin de hacer autocontenido este TFG, recordamos de una forma sencilla algunos resultados sobre conmensurabilidad y rectas irracionales que aparecen en el libro X, el más oscuro y confuso de los *Elementos*, y que surgen en el Capítulo 4 al estudiar los poliedros regulares.

Si necesitamos citar un resultado de *Euclides*, no incluido en este trabajo, por ejemplo, la proposición 13 del libro IV lo indicaremos por (IV-13). En cambio, (IV-Def. 5) es una referencia a la definición 5 del libro IV.

1.2. El personaje y su obra

En realidad no se sabe mucho de la vida de *Euclides* y lo poco que se conoce procede de dos fuentes consideradas las únicas fidedignas por los historiadores, que por cierto tampoco se esmeraron en detallar su existencia: *Proclo*[1] y *Pappus*[2]. Parece razonable admitir que se relacionó con los últimos discípulos directos del gran filósofo griego *Platón* (427-347 a.C.), como evidencia la notable influencia platónica presente en toda su obra, y que era más joven que ellos. *Proclo* asegura que vivió en tiempos de *Ptolomeo I Sóter*, rey-faraón de Egipto (367-283 a.C.), de cuyo mecenazgo se favoreció, y que fue anterior a *Arquímedes* (287-212 a.C.),

[1] Proclo es un filósofo neoplatónico griego (412-485 d.C.). Su obra más representativa *"Elementos de Teología"* influyó decisivamente en Hegel. Hizo comentarios sobre el libro I de los *Elementos.*

[2] Pappus de Alejandría(290-350 d.C.) fue uno de los últimos grandes matemáticos griegos de la antigüedad. Su obra más destacada, Synagoge (Colección), es un compendio de matemáticas en ocho volúmenes.

porque el genio de Siracusa hace referencia al libro I de los *Elementos* en su trabajo *"Sobre la esfera y el cilindro"*. Por otra parte, *Pappus* comenta que tenía seguidores en Alejandría. Y nadie discute que *Apolonio*[3], que junto con el propio *Euclides* y *Arquímedes* son considerados los mejores matemáticos del mundo clásico, es mucho más joven.

Al tratar de armonizar estos escasos datos y cuadrar este baile de fechas, los expertos concluyen en las únicas certezas que se tienen sobre su vida: nació, no se sabe dónde, en torno al año 325 a.C. y vivió y desarrolló su actividad en Alejandría, ciudad en la que fallecería cerca de 270 a.C., habiendo alcanzado su madurez matemática alrededor del año 300 a.C., fecha en que se estima aparecieron los primeros escritos de los *Elementos*. Además de los *Elementos*, en la actualidad se conservan otros cinco trabajos de *Euclides*:

- *Datos*, con 94 proposiciones, trata sobre magnitudes, formas y posiciones de las figuras geométricas.
- *Sobre la división de figuras* aborda la división de figuras geométricas en cierto número de partes iguales o en partes que cumplen determinadas relaciones de proporcionalidad.
- En *Catóptrica* estudia la teoría matemática de los espejos, si bien es dudosa su autoría.
- *Fenómenos* se dedica a la astronomía esférica.
- *Óptica.* Por influencia platónica, *Euclides* cree que la visión se origina por rayos que parten de nuestros ojos y van al objeto. No obstante, es el más importante de los tratados antiguos sobre el análisis de la perspectiva, trabajo no superado hasta que llegó Newton. Fue utilizado por muchos artistas del Renacimiento, como *Filippo Brunelleschi*[4] y *Albrecht Dürer*[5].

De los trabajos perdidos nombramos *Cónicas* (no hay dudas de que *Euclides* estudió este tema, ya que *Pappus* afirma que *Apolonio* completó los cuatro volúmenes de *Euclides* sobre esta materia y le añadió cuatro más, hasta completar su famosa obra), *Porismas* (podría ser una extensión del anterior libro), *Pseudaria o Libro de las falacias* (pudo estar dedicado a explicar errores de razonamiento), *Lugares de superficie* (estudio de los lugares geométricos o incluso de las superficies cuádricas). Finalmente, indiquemos que también se le adjudican, por fuentes árabes, algunos trabajos sobre Mecánica, como *Sobre lo ligero y lo pesado* y *Sobre la palanca*. Asimismo se le atribuyen algunos tratados musicales.

[3] Apolonio de Perge o Perga (262-190 a.C.), apodado el Gran Geómetra. Su obra más famosa es "*Sobre las secciones cónicas*".

[4] Arquitecto y escultor italiano (1377-1446), cuyos notables conocimientos de las matemáticas le llevarán al descubrimiento de la perspectiva cónica.

[5] Nos referimos a Alberto Durero (1471-1528), el más famoso artista alemán del Renacimiento y, quizás también, el que poseía mayores conocimientos matemáticos.

Pero la obra cumbre de *Euclides* es los *Elementos*, uno de los libros que mayor influencia han tenido en la historia de las matemáticas. Según *Proclo* [11, p. 97] esta magna obra es una recopilación de la mayoría de los conocimientos matemáticos griegos anteriores a *Euclides*, particularmente de varios teoremas de *Eudoxo*[6] y de muchos resultados de *Teeteto* [7], que perfecciona y ordena en una sucesión lógica de proposiciones con pruebas irrefutables.

Hipócrates de Quíos[8] (470-410 a.C.) fue, según *Eudemo*[9], el primero que escribió un libro de "elementos". Después siguieron en el s. IV a.C. textos similares de *Leon* y *Teudio*, entre otros. Sin embargo, el éxito de *Euclides* fue inmediato y tan rotundo que no sólo los trabajos de estos autores cayeron pronto en el olvido, sino que no se tienen noticias de *Elementos* publicados más tarde.

Los Elementos, en la versión más aceptada, están constituidos por 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes y 465 proposiciones, todo ello distribuido a lo largo de 13 libros. El libro I comienza con un primer conjunto de 23 definiciones (concernientes a los conceptos de punto, línea, extremos de una línea, línea recta, superficie, ángulo, círculo, etc.), tras las cuales se enuncian los cinco postulados ([3, p. 197],[10])

P1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
P2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
P3. Y describir un círculo con cualquier centro y distancia (radio).
P4. Y ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
P5. Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado que están los ángulos menores que dos rectos (postulado del paralelismo).

A continuación, *Euclides* presenta las cinco nociones comunes, que son operaciones o manipulaciones básicas entre magnitudes y que se admiten sin demostrar por ser evidentes [3, p. 199].

NC 1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
NC 2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, las totales son iguales.
NC 3. Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
NC 4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

[6] Eudoxo de Cnido (390-337 a.C.) es considerado el padre de la astronomía matemática, pues creó un modelo planetario e ideó la esfera celeste. En matemáticas hizo notables aportaciones sobre la proporcionalidad, los números irracionales y el método de exhaución.

[7] Teeteto(417-369 a.C.) fue un matemático griego que hizo contribuciones a la teoría de las cantidades irracionales.

[8] Fue famoso porque obtuvo por primera vez la cuadratura de la lúnula.

[9] Eudemo (370-300 a.C.) fue un filósofo griego, alumno de *Aristóteles*, considerado el primer historiador de la ciencia. Contemporáneo a *Euclides*.

NC 5. El todo es mayor que la parte.

Con este sencillo conjunto de postulados y nociones comunes, más el de definiciones, *Euclides* erige esta obra, implantando así el método axiomático-deductivo. Este método se fundamenta en definir unos conceptos básicos y fijar unos axiomas (en este caso, postulados y nociones comunes). Una vez establecidas estas premisas, cualquier teorema o enunciado matemático debe ser demostrado rigurosamente en un proceso deductivo utilizando únicamente el razonamiento.

El éxito de los *Elementos* fue espectacular y su institucionalización se impuso inmediatamente. Esta obra de *Euclides* ha representado durante más de veinte siglos las normas de rigor en nuestra ciencia y el modelo a imitar para otras especialidades, durante ese largo periodo de tiempo ha sido libro de texto en todos los centros de enseñanza de Occidente (prácticamente hasta finales del s. XIX, principios del XX), se han realizado más de mil ediciones desde que fue impreso por primera vez en 1482 y, después de la Biblia, es el libro más traducido, publicado y estudiado en todo el mundo occidental. Cabría preguntarse ¿por qué ese título? y ¿qué tiene esta obra para alcanzar tan largo vigencia?

La primera pregunta tiene varias respuestas. Una podría ser que en la antigüedad clásica se usaba el término "elemento"para referirse a los textos que contenían o recopilaban conocimientos básicos. Otra, que con esta palabra se alude a un teorema ya demostrado y que se utiliza en la obtención o deducción de un nuevo resultado; en tal caso, ese teorema sería un "elemento"de la verificación del nuevo resultado. [3, p. 28].

A la segunda cuestión respondió hace tiempo *Proclo* quien destaca, respecto de tratados similares a los *Elementos*, tres grandes ventajas: el acierto en la selección de los teoremas y problemas, la diversidad de métodos utilizados y la organización de las demostraciones ([11, p. 97],[13, p. 16]).

La influencia pitagórica y platónica es manifiesta en esta obra. Lo prueba la atención que dedica a los poliedros regulares (sólidos platónicos) en el último libro y el objetivo de demostrar los teoremas abstractamente, sólo con el razonamiento puro. También la lógica aristotélica aportó rigor y solidez al proceso demostrativo seguido por *Euclides* [14].

En definitiva, el enorme prestigio y la gran aceptación de los *Elementos de Euclides* no sólo produjeron el olvido de cualquier otra obra de la misma índole escrita con anterioridad o posteriormente, sino que significó la anulación y difuminación de su autor. Ello ocurrió también con otras grandes figuras de la cultura del mundo antiguo, cuyas obras han llegado hasta nuestros días, pero apenas se conocen datos de la vida de sus autores. Sin embargo, en ningún caso de la historia de la cultura se llega a los extremos de olvido y confusión en que se vio sumido nuestro personaje. Como recuerda muy bien L. Vega en [3, p. 8], con el paso del tiempo "las señas de identidad de *Euclides* se van reduciendo a ésta: *el elementa-*

dor, autor de *los Elementos*". Lo que importaba eran los *Elementos* y no quien lo escribió, pareciera que daba lo mismo quien fuera. Nadie ha podido impedir que *Euclides* sea sinónimo de geometría. O como afirma con rotundidad E.M. Forster[10] en su célebre guía de Alejandría al hablar de Euclides, "*Nada sabemos de él. A decir verdad, hoy le consideramos como una rama del saber más que como un hombre*"[3, p. 8].

Para más detalles e información sobre los Elementos remitimos a la magnífica introducción general que L. Vega [3, pp. 1-184], presenta en la edición en español de los *Elementos* debida a M. L. Puertas ([3], [4],[5]).

1.3. Conmensurabilidad. Rectas racionales e irracionales

En el Capítulo 4, dedicado al estudio del libro XIII, aparecen algunas de las cantidades irracionales que *Euclides* investiga en el libro X. Es imposible realizar un resumen completo de su intrincado y abstruso contenido por lo que, a favor de hacer autocontenido este trabajo, nos limitamos a dar las definiciones de conmensurabilidad y de las rectas irracionales que aparecen en el último capítulo de esta memoria. Para más información, consúltese [5], [7], [8] y [10]. En lo que sigue k, k', k'', ρ y ρ' representan cocientes de enteros positivos.

***Definición* 1.1** *Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible hallar una medida común.*

En la notación actual diríamos que dos magnitudes α y β son conmensurables, y lo denotamos por α C β, si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k} \tag{1.1}$$

En cualquier otro caso resultará que α y β son inconmensurables y lo indicamos así $\alpha \not\mathrm{C}\, \beta$. Por ejemplo, 2 C 4, ya que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. También $\sqrt{8}$ C $\sqrt{32}$, puesto que $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{32}} = \frac{1}{2}$. Obsérvese que estos números son las diagonales de los cuadrados de lados 2 y 4, respectivamente. En cambio, $\sqrt{8} \not\mathrm{C}\, 2$ y $\sqrt{32} \not\mathrm{C}\, 4$, que es la constatación del enunciado general, que afirma que el lado y la diagonal de cualquier cuadrado son magnitudes inconmensurables.

***Definición* 1.2** *Dos líneas rectas son conmensurables en cuadrado cuando sus cuadrados se miden con la misma área, e inconmensurables cuando no es posible que sus cuadrados tengan un área como medida común.*

[10] Edward Morgan Forster (18779-1970, R.U.) es un famoso novelista, ensayista y cuentista inglés. Este comentario lo realiza en su obra *Alejandría: Historia y Guía*, publicado en 1922.

Dos magnitudes α y β son conmensurables en cuadrado si

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \tag{1.2}$$

e inconmensurables en cuadrado en cualquier otro caso. Precisando más, cuando se cumple (1.1) diremos que α y β son conmensurables en longitud y lo señalamos poniendo α $\mathrm{C_L}$ β, mientras que $\alpha \not\mathrm{C}_\mathrm{L}\, \beta$ significa que α y β no son conmensurables en longitud. Si nos interesa resaltar que α y β sólo son conmensurables en cuadrado, escribiremos α C^2 β. Verbigracia, 4 y 6 son conmensurables en cuadrado, pues 4^2=16 y 6^2=36 tienen en común el área 1, 2, o 4, entre otras. Se ve que $\frac{4}{6} = \frac{1}{(\frac{9}{2})^{\frac{1}{2}}}$ de acuerdo con 1.2. También 2 y $\sqrt{3}$ son conmensurables en cuadrado, puesto que $2^2 = 4$ y $(\sqrt{3})^2)$=3 tienen en común el área 1, o bien porque

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}}}$$

Sin embargo, $2 \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \sqrt{3}$; luego, $2\ \mathrm{C}^2\ \sqrt{3}$. Se trata de un ejemplo simple de dos magnitudes conmensurables en cuadrado que no lo son en longitud. Ahora bien, $2 \not\mathrm{C} \sqrt[4]{3}$ ni en longitud ni en cuadrado, pues

$$\frac{2^2}{(\sqrt[4]{3})^2} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{16}}} \neq \frac{1}{k}$$

Fácilmente se puede demostrar que conmensurabilidad en longitud conlleva conmensurabilidad en cuadrado. El recíproco es, en general, falso. Acabamos de ver que $2\ \mathrm{C}^2\ \sqrt{3}$, por cuanto $2 \not\mathrm{C}_\mathrm{L} \sqrt{3}$.

***Definición* 1.3** *Admitidos estos supuestos, se demuestra que hay un número infinito de rectas conmensurables e inconmensurables, las inconmensurables sólo en longitud y otras también en cuadrado, con una recta determinada. Entonces, llámese racional la recta determinada; y las conmensurables con ella, bien en longitud y en cuadrado, bien sólo en cuadrado llámense igualmente rectas racionales. Pero las rectas inconmensurables con ella llámense irracionales.*

El concepto de rectas racionales de *Euclides* es más general que el actual de números racionales. En efecto, si una recta determinada ρ es racional, no sólo ρk es racional sino también $\rho\sqrt{k}$.

***Definición* 1.4** *Y el cuadrado de la recta determinada llámese racional. Y los cuadrados conmensurables con éste también se llamarán racionales; pero los inconmensurables con él, llámense irracionales; y las rectas que los producen llámense* *irracionales, a saber, si fueran cuadrados, los propios lados y si fueran otras figuras rectilíneas, aquellas rectas que originan cuadrados de áreas iguales a las de dichas figuras.*

Como ρ^2 es racional, también lo será $k\rho^2$. No obstante, $\rho^2\sqrt{k}$ es irracional; e igualmente es irracional $\rho\sqrt[4]{k}$, que es el lado de ese cuadrado. Si $\rho^2 = 1$, las áreas racionales toman valor k; las demás áreas son irracionales.

En los *Elementos* la primera recta irracional aparece en el siguiente aserto

Proposición 1.1 ***(X-21).*** *El rectángulo comprendido por rectas racionales y conmensurables sólo en cuadrado no es racional y el lado del cuadrado igual a él tampoco es racional. A dicho lado se le llama medial.*

De acuerdo con la definición 1.3, ρ y $\rho\sqrt{k}$ son magnitudes racionales y conmensurables sólo en cuadrado, ya que $\frac{\rho^2}{(\rho\sqrt{k})^2} = \frac{1}{k}$. El área del rectángulo de lados ρ y $\rho\sqrt{k}$ es $\rho^2\sqrt{k}$, que se ha establecido que es irracional, en vistas de que $\frac{\rho^2\sqrt{k}}{\rho^2} = \sqrt{k}$ (Definición 1.4). Por tanto, la recta *medial* es irracional y tiene longitud $\sqrt{\rho^2\sqrt{k}} = \rho\sqrt[4]{k}$.

Otra recta irracional, conocida como apótoma, la introduce en

Proposición 1.2 ***(X-73).*** *Si se quita de una recta racional otra recta racional que sea conmensurable sólo en cuadrado con la recta entera, entonces la recta restante es irracional. La llamaremos apótoma.*

Proposición 1.3 ***(X-76).*** *Supongamos que de una recta se quita otra recta que sea inconmensurable en cuadrado con la recta entera, de modo que la suma de sus cuadrados sea racional y el rectángulo que comprenden medial. Entonces el resto es una recta irracional que llamamos menor.*

Recordemos dos definiciones más [5]

Definición **1.5** *Dada una recta racional y una apótoma, si el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la recta adjunta en el cuadrado de una recta conmensurable en longitud con ella, y la recta entera es conmensurable en longitud con la recta racional de partida, entonces a esa apótoma la llamaremos primera apótoma [7].*

Definición **1.6** *Si, a su vez, el cuadrado de la recta entera es mayor que el de la adjunta en el cuadrado de una recta inconmensurable en longitud con la recta completa, siempre que la recta entera sea conmensurable en longitud con la recta racional dada, esta apótoma será la cuarta apótoma [7].*

Nota **1.1** *Euclides considera trece rectas irracionales fundamentales [5, p. 189], que ascienden a veinticinco si se consideran las seis clases de binomiales y las seis de apótomas.*

2

Capítulo 2

2.1. Introducción

En este capítulo se estudia el libro XI de los *Elementos de Euclides*, el cual comienza con un conjunto de 28 definiciones que son comunes en los dos siguientes libros. Formulamos estas definiciones en el segundo párrafo, respetando al máximo la versión euclidiana. Se refieren a los conceptos de sólido, ortogonalidad de una recta y un plano con otro plano, inclinación de un plano, planos paralelos, sólidos semejantes, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindros y los cinco poliedros regulares. Estas definiciones son familiares a los actuales alumnos de la ESO y bachillerato, y a los de la enseñanza primaria de cualquier época.

El libro XI consta de 39 proposiciones, de las cuales demostraremos 10 en el tercer párrafo. Las pruebas de las tres primeras no son correctas en opinión de todos los estudiosos de la obra de *Euclides*, que consideran que los debió asumir como postulados o axiomas de la geometría del espacio, de forma similar a cómo procedió con éxito en el plano. En ellas aborda el estudio de la perpendicularidad y del paralelismo entre rectas y planos, y entre planos. Gran parte de este libro se dedica a un análisis prolijo de los sólidos paralelepípedos, relacionando el volumen y la altura de los mismos con las áreas de sus bases. Conviene subrayar que, a pesar de la discutible validez de las pruebas de las tres citadas proposiciones, no se cuestiona la validez de sus enunciados *–que pasamos a tomar como axiomas–* por lo que no afectan al resto de la obra. A partir de la Proposición 4, *Euclides* recobra su característica de proceder: demostraciones detalladas al máximo, rigurosas y construidas unas tras otras con una ilación incontestable.

Como se indicó en el prólogo se trata de comprender las demostraciones tal y como las planteó *Euclides*, cambiando un poco el lenguaje e introduciendo una notación a fin de simplificar la exposición.

A lo largo de este capítulo y siguientes, una recta se designa por dos letras, v. gr., la recta *MN*. *Euclides* dice, varias veces, prolónguese la recta *MN* en ambos sentidos *–MN es entonces una recta–*; otras veces pide que se extienda por *N* *–MN* *es ahora una semirrecta con origen en el punto M–*; pero, en la inmensa mayoría de los casos cuando habla de una recta MN se está refiriendo a lo que entendemos como un segmento de recta. Un ángulo se indica en la forma $\widehat{ABC}$ o, simplemente por el vértice $\widehat{B}$. En particular, $\widehat{R}$ es el ángulo recto. Un triángulo de vértices A, B y C se expresa por $\tau(ABC)$. Un plano se denotará de varias formas: por las letras Λ, Λ', ... , reservando Π para el plano de referencia. Si nos interesa mostrar que un plano contiene determinada figura geométrica, se incluirá entre paréntesis; así, $\Pi(\tau(ABC))$ señala que el triángulo $\tau(ABC)$ yace en el plano, o $\Pi(AB, CD)$ indica que el plano está generado por las rectas AB y CD. Cuando utilizamos $AB \subset \Lambda$ quiere decir que la recta está contenida en el plano Λ y $P \in AB \cap \Lambda$ significa que el punto P es común a la recta AB y el plano Λ. Por $\angle(AB, \Lambda)$ se simboliza el ángulo formado por una recta y un plano. Los símbolos $\perp$ y $\|$ indican, respectivamente, perpendicularidad y paralelismo entre rectas y planos. La notación $\sim$ se reserva para manifestar la semejanza de figuras geométricas. Para los paralelogramos emplearemos la abreviatura plg; así, el paralelogramo $ABCD$ se denota mediante $plg(AB, CD)$, o mejor $plg(AD)$, siendo A y D los vértices de una diagonal. Para los sólidos paralelepípedos usamos pll; de este modo, $pll(AB, GH)$ representa el paralelepípedo $ABCDEFGH$, donde AB y FH son lados opuestos y paralelos situados en distintos planos, o sólo mediante los vértices de una de sus diagonales, $pll(AH)$.

Esta notación se puede prestar a confusión, como ocurre también con en lenguaje de *Euclides*. Así, AB puede representar tanto una recta (segmento de) o la longitud de la recta (longitud del segmento de la recta), $\tau(ABC)$ la figura geométrica del triángulo o su área, y $pll(AH)$, un paralelepípedo o su volumen. No obstante, esta confusión desaparece cuando se está en según qué contexto.

2.2. Definiciones

A continuación enumeramos el conjunto de definiciones, en total 28, relativas a la geometría del espacio y que son comunes a los tres últimos libros de los Elementos ([5],[7],[8]).

Definición 2.1. *Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad.*

Definición 2.2. *El extremo de un sólido es una superficie.*

Definición 2.3. *Una recta es ortogonal a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y están en dicho plano.*

Definición 2.4. *Dos planos son ortogonales entre sí cuando las rectas trazadas en uno de los planos formando ángulos rectos con la recta intersección de ambos, forman ángulos rectos con el plano restante.*

Definición 2.5. *Cuando desde el extremo de una recta elevada sobre un plano se traza una perpendicular al plano y desde el punto intersección resultante se traza otra recta hasta el extremo que está en el plano de la primera recta, el ángulo comprendido por la recta así trazada y la que está sobre el plano es la inclinación de la recta con respecto al plano.*

Definición 2.6. *La inclinación de un plano con respecto de otro plano es el ángulo agudo comprendido por las rectas trazadas en cada uno de los planos ortogonalmente a un mismo punto de su sección común. (Se refiere al ángulo diedro: el ángulo agudo limitado por dos planos que se cortan en el espacio).*

Definición 2.7. *Se dice que un plano se inclina sobre un plano de manera semejante a como otro se inclina sobre otro, cuando dichos ángulos de inclinación son iguales entre sí.*

Definición 2.8. *Planos paralelos son los no concurrentes.*

Definición 2.9. *Figuras sólidas semejantes son las comprendidas por el mismo número de planos semejantes.*

Definición 2.10. *Figuras sólidas iguales y semejantes son las comprendidas por planos semejantes iguales en número y tamaño.*

Las definiciones 9 y 10 son cuestionadas por muchos especialistas en historia de las matemáticas [5, p.201], pero Heath [8] sostiene que son correctas, pues ha de entenderse que *Euclides* se refiere a ángulos triédricos, que son los únicos que realmente considera.

Definición 2.11. *Un ángulo sólido es la inclinación de más de dos líneas que se tocan entre sí y no están en la misma superficie con respecto a todas las líneas. En otras palabras, un ángulo sólido es el comprendido por más de dos ángulos planos construidos en el mismo punto, sin estar en el mismo plano.*

Definición 2.12. *Una pirámide es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.*

Definición 2.13. *Un prisma es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.*

Definición 2.14. *Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es una esfera.*

Definición 2.15. *El eje de la esfera es la recta que permanece fija en torno a la cual gira el semicírculo.*

Definición 2.16. *El centro de la esfera es el mismo que el del semicírculo que la genera.*

Definición 2.17. *El diámetro de la esfera es cualquier recta trazada a través del centro y limitada en ambas direcciones por la superficie esférica.*

Definición 2.18. *Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a su posición inicial, la figura comprendida es un cono. Si la recta que permanece fija es igual a la otra que comprende el ángulo recto, el cono será rectángulo, si es menor obtusángulo y si es mayor acutángulo.*

Definición 2.19. *El eje del cono es la recta que permanece fija y en torno a la cual gira el triángulo.*

Definición 2.20. *La base del cono es el círculo descrito por la recta que gira.*

Definición 2.21. *Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que forman el ángulo recto de un paralelogramo rectángulo, se hace girar hasta que vuelve a su posición de partida, la figura comprendida es un cilindro.*

Definición 2.22. *El eje del cilindro es la recta que permanece fija en torno a la cual gira el paralelogramo.*

Definición 2.23. *Las bases son los círculos descritos por los dos lados opuestos que giran.*

Definición 2.24. *Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos ejes y diámetros de las bases son proporcionales.*

Definición 2.25. *Un cubo es la figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.*

Definición 2.26. *Un octaedro es una figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.*

Definición 2.27. *Un icosaedro es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.*

Definición 2.28. *Un dodecaedro es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales equiláteros y equiángulos.*

***Nota* 2.1** *Con muy pocas diferencias, éstas son las definiciones de las principales figuras geométricas del espacio que, incluso hoy, siguen recibiendo los alumnos de enseñanza primaria y secundaria. Recordemos aquí algunas más, en otros contextos, para poder comparar con las anteriores [3]:*

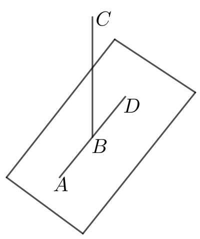
[**I. Def.2**] *Una línea es una longitud sin anchura.*
[**I. Def.4**] *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto a dos planos que están en ella.*
[**I. Def.5**] *Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.*
[**I. Def.6**] *Los extremos de una superficie son líneas.*
[**I. Def.7**] *Una superficie plana −un plano− es aquello que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*
[**I. Def.8**] *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se cortan en un plano y no están en línea recta.*

***Nota* 2.2** *Como es sabido, cuando Euclides habla de recta, o de línea recta, en general se refiere a un segmento de recta. De igual manera, cuando dice circunferencia en muchos casos quiere indicar arco de circunferencia.*

2.3. Resultados seleccionados

De las 39 proposiciones del libro XI hemos seleccionado las siguientes, en función de su utilización en los siguientes libros.

Proposición 2.1 ***(XI-1).*** *No cabe que una parte de una línea recta esté en el plano de referencia y otra parte en un plano más elevado.*



Demostración. Supongamos que la parte AB de la recta ABC yace en el plano de referencia y la otra parte BC en otro plano más elevado. Es posible −y citamos textualmente a *Euclides*− entonces prolongar AB de modo que la recta ABD esté en dicho plano de referencia, es decir, hay en un plano una recta que prolonga o continúa a AB, sea $BD(*)$. Por tanto, AB es una parte común a dos rectas diferentes ABC y ABD. Ello es imposible, pues si trazamos un círculo centrado en B y radio AB de modo que C y D son sus respectivos cortes con dichas rectas, los diámetros ABD y ABC cortarán circunferencias distintas del círculo. $\square$
Enunciamos, sin probar,

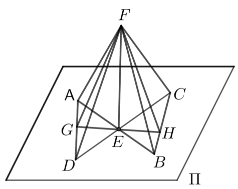
Proposición 2.2 ***(XI-2).*** *Si dos rectas se cortan, están en un plano; y todo triángulo está en un plano.*

Proposición 2.3 ***(XI-3)*** *Si dos planos se cortan uno a otro su sección común es una recta.*

***Nota* 2.3** *Las pruebas de estas tres primeras proposiciones no han sido aceptadas como demostraciones satisfactorias por los estudiosos de la obra euclídea. Así opina T.L. Heath [5, p. 205], que no las considera rigurosas. Por su parte, J.L. Heiberg [8, p. 406], hace notar que la frase* $(*)$ *de la prueba de la Proposición 2.1 dada por Euclides significa esencialmente asumir lo que se pretende demostrar.*
Los eruditos de la obra euclidiana coinciden en que estas proposiciones deberían pasar a ser consideradas como axiomas. Es loable la simplicidad de Euclides al elegir el mínimo número de axiomas sobre los que construir su obra. Ciertamente, los axiomas deben ser los mínimos posibles y compatibles, pero no postular nada sobre la geometría del espacio crea, como se ve, problemas. Estos estudiosos sugieren, para subsanar estas dificultades, los siguientes en analogía a los considerados en el libro I en relación con las rectas

1' Postúlese que si dos puntos están en un plano también lo está la recta que pasa a través de ellos.
2' Y que tres puntos cualesquiera no alineados (que no estén en línea recta) determinan un plano.
3' Y que si dos planos se cortan, la sección común es una recta.
4' Y que, para todo plano hay un punto que no está en él.

Proposición 2.4 ***(XI-4).*** *Si dos rectas se cortan y en el punto de corte se traza una recta formando ángulos rectos con dichas rectas, esa recta formará ángulos rectos con el plano que pase a través de ellas.*



Demostración. Supongamos que las rectas AB y CD se cortan en el punto E y que el plano de referencia, el que contiene a dichas rectas, es Π. Tracemos por E, punto de corte, la perpendicular EF a dichas rectas. Veamos que $EF \perp \Pi$. Para ello, sobre estas rectas dadas, consideremos las rectas AE, EB, CE y DE iguales entre sí (así también lo serán las rectas AB y CD). Consideremos una recta cualquiera GH que pase por E. Ahora bien, $\widehat{AED} = \widehat{BEC}$, ángulos opuestos por el vértice (I-15) y los lados que lo forman AE y ED son iguales, respectivamente a EB y EC; por tanto, las bases [1]son iguales (I-4). Así pues,

$$\tau(AED) = \tau(CEB) \tag{2.1}$$

De (2.1) se infiere que $\widehat{DAE} = \widehat{EBC}$ y de (I-15) que $\widehat{AEG} = \widehat{BEH}$, por ser opuestos por el vértice. Así pues, $\tau(AEG)$ y $\tau(BEH)$ tienen dos ángulos iguales y un lado igual ($AE = BE$), por lo cual, a tenor de (I-26), $\tau(AEG) = \tau(BEH)$ y, consecuentemente, los otros dos lados también son iguales

[1] Es habitual que *Euclides* se refiera al tercer lado, cuando ya han sido citados los otros dos lados de un triángulo, denominándolo base

$$AG = BH \qquad GE = EH \tag{2.2}$$

Por otra parte, $\tau(AEF) = \tau(BEF)$, porque tienen un ángulo recto (por hipótesis $EF \perp AB$) e iguales lados que lo forman: $AE = EB$ y EF es común. Por tanto, por (I-4), $FA = FB$. Análogamente se establecería que $FC = FD$. En definitiva, $\tau(FAD)$ y $\tau(FBC)$ tienen sus lados $AD = BC$, $AF = FB$ y $FD = FC$, por todo lo cual (I-8)

$$\tau(FAD) = \tau(FBC) \tag{2.3}$$

De (2.3) se tiene que $\widehat{FAD} = \widehat{FBC}$. Entonces $\tau(FAG)$ y $\tau(FBH)$ tienen un ángulo igual e iguales lados que lo comprenden, AF y AG, y FB y HB, respectivamente, $AG = HB$ por la primera de (2.2). Por consiguiente, las bases son iguales

$$GF = FH \tag{2.4}$$

En definitiva, $\tau(FGE) = \tau(FEH)$, porque tienen los tres lados del primero GF, GE y EF respectivamente iguales a los tres del segundo, FH, por (2.4), EH, por la segunda de (2.2), y EF, común. Luego, sus ángulos son iguales. En particular, $\widehat{GEF} = \widehat{HEF}$. Y, de acuerdo con (I- Def. 10), cuando una recta levantado sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto. Entonces $EF \perp GH$, y siendo GH una recta arbitraria que pasa por E en Π, se concluye que $EF \perp \Pi$. □

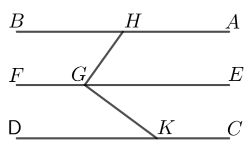
***Nota* 2.4** *A fin de hacer autocontenido este TGF, enunciaremos sin probar los siguientes resultados*

(a) Si dos rectas forman ángulos rectos con un mismo plano, las rectas serán paralelas. (XI-6)

(b) Si dos rectas son paralelas y se toman unos puntos al azar en cada una de ellas, la recta que uno los puntos está en el mismo plano que las paralelas. (XI-7)

(c) Si dos rectas son paralelas y una de ellas forma ángulos rectos con un plano cualquiera, la otra formará también ángulos rectos con el mismo plano. (XI-8)

Proposición 2.5 ***(XI-9).*** *Las paralelas a una misma recta y que no están en el mismo plano que ella son también paralelas entre sí.*



Demostración. Dadas las rectas AB, CD y EF supongamos que $AB \| EF$, $CD \| EF$ y $EF \not\subset \Pi(AB, DC)$. Demostraremos que $AB \| DC$. Para ello tomaremos un punto arbitrario G de la recta EF y trazamos $GH \subset \Pi(AB, EF)$, $GH \perp EF$; y, análogamente, $GK \subset \Pi(CD, EF)$, $GK \perp EF$. Entonces, de acuerdo con la Proposición 2.4, se infiere $EF \perp \Pi(GH, GK)$. Y como $EF \| AB$, sigue de la Nota 2.4 (c) que

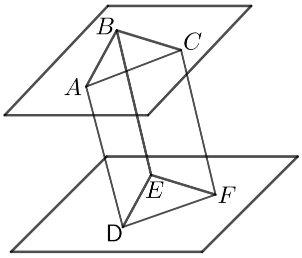
$$AB \perp \Pi(GH, GK) \tag{2.5}$$

Por la misma razón,

$$CD \perp \Pi(GH, GK) \tag{2.6}$$

De (2.5), (2.6) y la Nota 2.4 (a) se concluye que $AB \parallel CD$. □

Proposición 2.6 ***(XI.10).*** *Si dos rectas que se tocan son paralelas a otras dos rectas que se tocan, sin estar en un mismo plano, formarán ángulos iguales.*



Demostración. Supongamos que las rectas AB y BC se cortan en un plano en el punto B, y que DE y DF se cortan en E en otro plano. Entonces, si $AB \parallel DE$ y $BC \parallel EF$, se tiene que

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$$

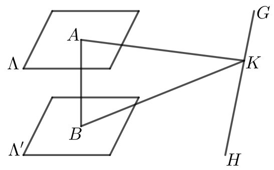
En efecto, tomemos sobre esas cuatro rectas los segmentos $AB{=}BC{=}DE{=}EF$. Por (I-33), al ser $AB \| DE$ y $AB{=}DE$, sigue que $AD \| BE$ y $AD{=}BE$; y, análogamente, como $BC \| EF$ y $BC{=}EF$, se obtiene que $BE \| CF$ y $BE{=}CF$. Resumiendo, tenemos que $AD \| BE$ y $CF \| BE$; aplicando la Proposición 2.5 se deduce que $AD \| CF$. De aquí y de (I-33), ya que $AD{=}CF$, se concluye que $AC \| DF$ y $AC{=}DF$. Por tanto, $\tau(ABC){=}\tau(DEF)$, pues tienen los tres lados iguales. También los ángulos y, en particular, $\widehat{ABC}{=}\widehat{DEF}$. □

***Nota* 2.5** *Las tres siguientes proposiciones tratan de cómo trazar rectas perpendiculares a un plano en distintas situaciones*

(d) Trazar una recta perpendicular a un plano dado desde un punto elevado dado (punto exterior al plano). (XI-11)
(e) Levantar una línea recta formando ángulos rectos con un plano dado desde un punto situado en él. (XI-12)
(f) No podrán levantarse por el mismo lado dos rectas formando ángulos rectos en un plano dado desde el mismo punto situado en él. (XI-13)

Proposición 2.7 ***(XI-14).*** *Los planos con los que una misma recta forma ángulos rectos serán paralelos.*

Demostración. Sean Λ y Λ' planos y AB una recta. Supongamos que $AB \perp \Lambda$, $AB \perp \Lambda'$. Veamos que $\Lambda \| \Lambda'$.
Por reducción al absurdo, supongamos que $\Lambda \nparallel \Lambda'$. Entonces se cortarán y su sección común es una recta (Proposición 2.3, Nota 2.3, Postulado 3′), sea la recta GH y tracemos AK y BK, siendo K un punto arbitrario de dicha recta.



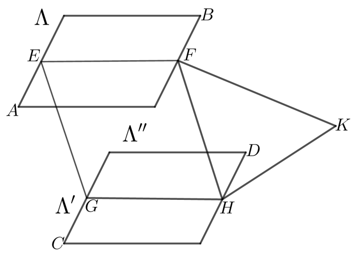
Ya que BK yace sobre la prolongación del plano Λ', por la Definición 2.3,

$$\angle(AB, \Lambda') = \widehat{R} \Rightarrow AB \perp BK \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{R}$$

Razonando análogamente se llega a que $\widehat{BAK}=\widehat{R}$. Concluimos que $\tau(ABK)$ tiene dos ángulos $\widehat{ABK}=\widehat{R}$ y $\widehat{BAK}=\widehat{R}$, lo cual es absurdo (I-17). En definitiva, Λ y Λ' no se pueden encontrar y, por consiguiente, estos planos son paralelos. $\square$

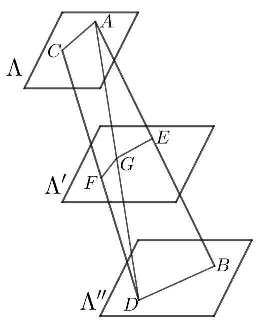
Proposición 2.8 ***(XI-16).*** *Si dos planos paralelos son cortados por un plano, las secciones comunes son paralelas.*

Demostración. Sean los planos $\Lambda = \Pi(AB)$ y $\Lambda' = \Pi(CD)$, $\Lambda \| \Lambda'$, cortados por el plano $\Lambda'' = \Pi(GF)$, siendo las rectas EF y GH las secciones que produce en Λ y Λ', respectivamente. Veamos que $EF \| GH$.



Si no fueran paralelas, EF y GH se cortarían en un punto, sea K (de igual forma se razonaría si estas dos rectas se cortaran a la izquierda de la figura). Ahora bien, la recta completa $EFK \subset \Lambda$, por lo que todos los puntos de la recta EK pertenecen a Λ (Proposición 2.1 y Nota 2.3-Postulado 1′), en particular, $K \in \Lambda$. De idéntico argumento sigue que $K \in \Lambda'$. Por lo tanto, tenemos que el punto $K \in \Lambda \cap \Lambda'$, lo cual es un absurdo, ya que $\Lambda \| \Lambda'$. $\square$

Proposición 2.9 ***(XI-17).*** *Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, serán cortadas con las mismas razones.*



Demostración. Supongamos que las dos rectas AB y CD han sido cortadas por los planos paralelos Λ, Λ' y Λ''. Tracemos las rectas AC, BD y AD (esta última corta al Λ' en el punto G). Tenemos que probar que

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} \tag{2.7}$$

Como los planos Λ' y Λ'', $\Lambda' \| \Lambda''$, son cortados por $\Pi(ED)$, las correspondientes secciones son rectas paralelas (Proposición 2.8), es decir, $GE \| BD$. Luego en $\tau(ABD)$, se tiene que $GE \| BD$, por lo que (VI-2)

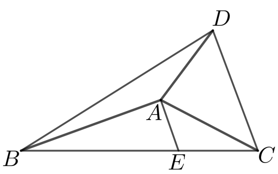
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GD} \tag{2.8}$$

Análogamente, el $\Pi(AF)$ corta a los planos $\Lambda \| \Lambda'$, así que $AC \| FG$. Así pues, en $\tau(ACD)$ se cumple que

$$\frac{CF}{FD} = \frac{AG}{GD} \tag{2.9}$$

De (2.8), (2.9) y (V-11) se verifica que $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$, que es (2.7). □

Proposición 2.10 ***(XI-20).*** *Si un ángulo sólido es comprendido por tres ángulos planos, dos cualesquiera, tomados juntos de cualquier manera, son mayores que el restante.*



Demostración. Supongamos que el ángulo sólido correspondiente al punto A está comprendido por los ángulos $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$ y $\widehat{DAB}$. Si los tres ángulos son iguales, es evidente que la suma de dos de ellos es mayor que el tercero: exactamente el doble del tercero. Asumamos que no son iguales y que el mayor es $\widehat{BAC}$. Construyamos sobre la recta AB y en el vértice A, el ángulo $\widehat{BAE} = \widehat{DAB}$ en el plano $\Pi(\tau(BAC))$. Pongamos $AE{=}AD$ y corte la recta BE a la recta AC en C. El estudio de los triángulos $\tau(DAB)$ y $\tau(BAE)$ pone de manifiesto que $DA{=}AE$, AB es común y los ángulos que forman son iguales ($\widehat{BAE} = \widehat{DAB}$), lo que entraña que las bases $DB{=}BE$. Ahora bien, a la vista de (I-20), en $\tau(BCD)$ se cumple

$$BD + DC > BC \Rightarrow DC > BC - BE = EC$$

ya que $DB = BE$. Finalmente, observemos que $\tau(AEC)$ y $\tau(DAC)$ tienen los lados $AD{=}AE$, AC común y $DC > EC$; luego recurriendo a (I-25), sigue que

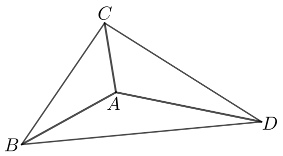
$$DC > EC \Rightarrow \widehat{DAC} > \widehat{EAC} \tag{2.10}$$

Y, teniendo en cuenta (2.10) y que se construyó $\widehat{BAE} = \widehat{BAD}$,

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} > \widehat{BAD} + \widehat{EAC} = \widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \widehat{BAC}$$

Así pues, $\widehat{BAD}+\widehat{DAC} > \widehat{BAC}$. Análogamente, se establecería que $\widehat{BAD}+\widehat{BAC} > \widehat{DAC}$ y $\widehat{BAC} + \widehat{DAC} > \widehat{BAD}$. □

Proposición 2.11 ***(XI-21).*** *Todo ángulo sólido es comprendido por ángulos planos menores a $4\widehat{R}$.*



Demostración. Sea el ángulo sólido de vértice A y limitado por $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$ y $\widehat{DAB}$. Tenemos que ver que su suma es menor que $4\widehat{R}$.

Por la Proposición 2.10 se tiene que $\widehat{CBA}+\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$, $\widehat{BDA}+\widehat{ADC} > \widehat{BDC}$ y $\widehat{DCA}+\widehat{ACB} > \widehat{DCB}$, y sumando ordenadamente

$$\widehat{CBA}+\widehat{ABD}+\widehat{BDA}+\widehat{ADC}+\widehat{DCA}+\widehat{ACB} > \widehat{CBD}+\widehat{BDC}+\widehat{DCB} = 2\widehat{R}, \quad (2.11)$$

ya que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es $2\widehat{R}$ (I-32). Por otra parte, la suma de todos los ángulos de los $\tau(ABD)$, $\tau(ABC)$ y $\tau(ACD)$ es $6\widehat{R}$, esto es,

$$\widehat{CBA}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}+\widehat{ABD}+\widehat{BDA}+\widehat{BAD}+\widehat{ADC}+\widehat{DAC}+\widehat{CAD} = 6\widehat{R}+\widehat{DCA} \quad (2.12)$$

Finalmente, si a (2.12) le restamos (2.11), resulta

$$\widehat{BAC}+\widehat{BAD}+\widehat{CAD} < 6\widehat{R}-2\widehat{R} = 4\widehat{R}$$

□

***Nota* 2.6** *En este aserto ángulo sólido se entiende en el sentido de ángulo poliédrico o poliedro, que es el espacio comprendido entre tres o más planos que concurren en un punto, denominado vértice del poliedro. Las semirrectas en que se cortan dos planos consecutivos son los lados (aristas); y a la parte de los planos comprendida entre dos lados seguidos, la llama ángulo plano (cara). Aunque Euclides, enuncia este teorema para cualquier ángulo sólido sólo lo prueba para el caso particular del ángulo triedro. Este resultado juega un papel fundamental en el estudio de los poliedros regulares.*

***Nota* 2.7** *Los siguientes teoremas se refieren bien a la construcción de algunos ángulos sólidos, o bien a propiedades de los paralelepípedos. Sólo se enuncian*

(g) Si hay tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante, y los comprenden rectas iguales, es posible construir un triángulo a partir de las tres rectas que unen los extremos de las rectas iguales. (XI-22)

(h) Construir un ángulo sólido a partir de tres ángulos planos, dos de los cuales tomados juntos de cualquier manera son mayores que el restante; para ello es necesario que la suma de los tres ángulos sea menor que $4\widehat{R}$. (XI-23)

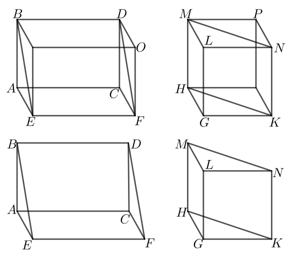
(i) Si un sólido es comprendido por planos paralelos, sus planos opuestos son iguales y paralelogramos. (XI-24)

(j) *Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos, entonces, como la base es a la base, así será el sólido al sólido. (XI-25)*
(k) *Construir un ángulo sólido igual a un ángulo sólido dado sobre una recta dada y en uno de sus puntos. (XI-26)*
(l) *Trazar sobre una recta dada un sólido paralelepípedo semejante y situado de manera semejante a un sólido paralelepípedo dado. (XI-27)*
(m) *Si un sólido paralelepípedo es cortado por un plano según las diagonales de planos opuestos, el sólido será dividido en dos partes iguales por el plano. (XI-28)*

***Nota* 2.8** *Los asertos que siguen, y que sólo formularemos, tratan de igualdades de paralelepípedos:*

(n) *Los paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura, y en los que los extremos superiores de las aristas laterales están en las mismas rectas, son iguales entre sí. (XI-29)*
(o) *Los paralelepípedos que están sobre la misma base y tienen la misma altura son iguales entre sí. (XI-31)*
(p) *Los sólidos paralelepípedos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. (XI-32)*
(q) *Los sólidos paralelepípedos semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la de sus lados correspondientes. (XI-33)*

Proposición 2.12 ***(XI-39).*** *Si dos prismas tienen la misma altura y uno tiene como base un paralelogramo y el otro un triángulo, siendo el paralelogramo el doble que el triángulo, los prismas serán iguales.*



Demostración. Sean $Pr_1 = ABCDEF$ y $Pr_2 = GHKLMN$ dos prismas con la misma altura ($AB = HM$), teniendo el primero como base de $plg(AF)$ y el segundo, $\tau(HGK)$. Además, se sabe que

$$plg(AF) = 2\tau(HGK)$$

Veamos que $V_1 = V_2$, donde V_1 denota el volumen de Pr_1 y V_2 el de Pr_2.

En efecto, a partir de estos prismas formamos el $pll(AO)$ y el $pll(GP)$. Como $plg(AF) = 2\tau(HGK)$, entonces $plg(HK) = 2\tau(HGK)$, es decir, $plg(AF) = plg(HK)$. Tenemos así dos paralelepípedos de igual base y misma altura; por tanto, de la Nota 2.8-(o) sigue que $pll(AO) = pll(GP)$. Ahora bien, por la Nota 2.7-(m), $V_1 = \frac{1}{2}pll(AO)$ y $V_2 = \frac{1}{2}pll(GP)$. En definitiva, $V_1 = V_2$. $\square$

3

Capítulo 3

3.1. Introducción

En este capítulo analizaremos el libro XII de los *Elementos de Euclides*, enunciaremos sus dieciocho proposiciones y demostraremos siete de ellas. Es un libro de un desarrollo teórico trabajoso, con los resultados encadenados en un riguroso proceso demostrativo, bien escrito y con algunas demostraciones realmente ingeniosas y de una gran elegancia.

Comienza relacionando las áreas de polígonos semejantes inscritos en círculos con los cuadrados de sus diámetros, para a continuación establecer el mismo resultado para círculos. Sigue un grupo de asertos relativos a las pirámides y a los prismas, como su sorprendente prueba de que toda pirámide triangular está constituida por dos pirámides iguales y semejantes a la pirámide de referencia, más dos prismas de igual volumen cuya suma es mayor que la mitad del volumen de la pirámide entera. Prosigue relacionando las pirámides de igual altura con sus bases poligonales y establece que todo prisma triangular se divide en tres pirámides iguales,también triangulares, lo que le permite concluir que el volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma de igual altura y con la misma base; asimismo, demuestra que las pirámides semejantes guardan una razón cúbica de la de sus lados correspondientes. Continúa con un grupo de resultados que relacionan conos y cilindros. Así, verifica que el volumen del cono es la tercera parte que del que tiene el cilindro de igual altura y la misma base, que los conos y los cilindros de igual altura son entre sí como sus bases, que los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan los diámetros de sus bases, y que los conos y cilindros que tienen bases iguales son entre sí como sus alturas. Finalmente demuestra que entre dos círculos distintos concéntricos se puede inscribir un polígono equilátero en el círculo mayor que no toque al menor y que, análogamente, entre dos esferas concéntricas es posible inscribir un sólido poliedro en la esfera mayor que no toque la menor, como paso previo para establecer que los volúmenes de dos esferas guardan entre sí la razón triplicada o cúbica de la que guardan sus diámetros.

Muchos de estos resultados son demostrados por *Euclides* utilizando la teoría de la proporcionalidad y el método de exhaución[1], teoría y método atribuidos a *Eudoxo de Cnido*. *Euclides* demuestra el método de exhaución al inicio del libro X. Por su importancia en el desarrollo de este capítulo lo recordamos aquí [5]

(X-1). *Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la más pequeña de las magnitudes dadas.*

El resultado sigue siendo válido se se quita la mitad de la magnitud en cada paso [5, p. 13].

Además, de la notación del capítulo 2, en éste usará $arc(AB)$ para indicar un arco de circunferencia y $sgc(AB)$ para el segmento circular limitado por el arco $arc(AB)$ y la cuerda AB que subtiende. Por $P(A;\tau(BCD))$ representamos una pirámide de vértice A y base el triángulo $\tau(BCD)$ o, si no hay posible confusión, simplemente por $P(A)$. Un prisma se denotará precisando su base y un lado lateral, así $Pr\ (base; lado\, lateral)$, o $Pr(AD)$, donde A es un punto de una base y D de la otra. Por otra parte, un cono se expresará señalando el vértice y el círculo de la base, $Con(A;\Omega)$, o con $Con(A)$ nada más, y $SgCon$ representará un segmento cónico. $Cil(\Omega;HL)$ es el cilindro de base el círculo Ω y lado lateral HL o bien $Cil(AD)$, siendo A un punto de la circunferencia de una base y D un punto de la otra, mientras que $SgCil$ denota un segmento cilíndrico. Una esfera se abreviará mostrando su centro y el diámetro, $Esf(A;d)$, o mediante tres puntos de la circunferencia de un círculo máximo, $Esf(ABC)$.

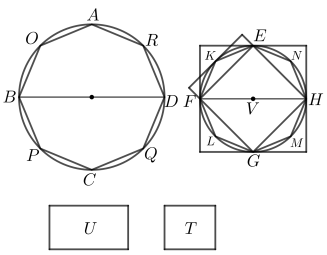
3.2. Resultados seleccionados

Enunciamos las 18 proposiciones del libro XII, si bien sólo demostraremos completamente siete de ellas y en algunas de las restantes justificamos sus conclusiones con un lenguaje más actual.

Proposición 3.1 ***(XII-1).*** *Los polígonos semejantes inscritos en círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*

Proposición 3.2 ***(XII-2).*** *Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.*

[1] Las palabras exhaución y exhausción, que parece más correcta, no están recogidas en la RAE. En matemáticas se ha impuesto llamar a esta técnica método de exhaución [1].



Demostración. Sean los círculos $\Omega_1 = ABC$ y $\Omega_2 = EFG$ de diámetros BD y FH, respectivamente. Demostremos que

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{BD^2}{FH^2} \tag{3.1}$$

Supongamos que (3.1) no es cierta. Entonces será

$$\frac{BD^2}{FH^2} = \frac{\Omega_1}{U} \tag{3.2}$$

donde U representa una superficie que será mayor o menor que Ω_2.
(i) Supongamos, en primer lugar, que se verifica (3.2) con $U < \Omega_2$. Inscribimos en Ω_2 un cuadrado $Q_{ins} = EFGH$. Obsérvese que al cortarse las tangentes trazadas en los puntos E, F, G y H a Ω_2 determinan un cuadrado Q_{cir} circunscrito a dicho círculo, cuyo área dobla la del inscrito. Ciertamente, por el *teorema de Pitágoras* (I-47) $Q_{cir} = FH^2 = 4FV^2 = 2(FV^2 + EV^2) = 2EF^2 = 2Q_{ins}$, ya que si V es el centro de Ω_2, $FV = EV$ por ser radios. Entonces

$$Q_{ins} = \frac{Q_{cir}}{2} \quad y \quad Q_{cir} > \Omega_2 \Rightarrow Q_{ins} > \frac{\Omega_2}{2} \tag{3.3}$$

Así se tienen dos magnitudes: el área de Ω_2 y el exceso de Ω_2 sobre U, esto es, $\Omega_2 - U$. De la mayor, Ω_2, extraemos otra magnitud, Q_{ins}, que por (3.3) es mayor que su mitad. Sobran cuatro segmentos circulares iguales al $sgc(EF)$. Bisecamos, en los puntos K, N, M y L cada uno de los arcos FE, EH, HG y GF, y unimos sus extremos. Si dibujamos la tangente en el punto K y prolongamos los lados FG y EH se forma el paralelogramo $plg(EKF)$. Es obvio que

$$plg(EKF) > sgc(EF) \quad y \quad \frac{plg(EKF)}{2} = \tau(EFK) \Rightarrow \tau(EFK) > \frac{sgc(EF)}{2} \tag{3.4}$$

Y lo mismo vale para cada uno de los tres restantes segmentos circulares y los correspondientes triángulos inscritos en ellos. De este modo, a lo que quedaba,

$$sgc(EF) + sgc(FG) + sgc(GH) + sgc(HE) \tag{3.5}$$

le quitamos la suma de los triágulos que, por (3.4), es una magnitud mayor que su mitad, pues

$$\tau(EFK)+\tau(EHN)+\tau(HGM)+\tau(GFL) > \frac{sgc(EF) + sgc(FG) + sgc(GH) + sgc(HE)}{2}$$

Quedan entonces ocho segmentos circulares, cuyos arcos bisecamos de nuevo y formamos los correspondientes triángulos inscritos en ellos. Otra vez, a este octeto de segmentos le extraemos la suma de dichos triángulos, que supera a la mitad de la suma de los ocho segmentos. Y así continuamos hasta que, por (X-1), podemos asegurar que la suma de ciertos segmentos circulares es menor que la más pequeña de las magnitudes iniciales, es decir, que $\Omega_2 - U$. Por simplicidad, supongamos que ello ocurre con el polígono de la figura, $P_{EK} = EKFLGMHN$. Recordemos que $\sum sgc < \Omega_2 - U$. Pero $\sum sgc = \Omega_2 - P_{EK}$, por lo cual

$$\Omega_2 - P_{EK} < \Omega_2 - U \Rightarrow P_{EK} > U \tag{3.6}$$

Ahora inscribimos en el círculo Ω_1 un polígono $P_{AO} = AOBPCQDR$ semejante al anterior. De la Proposición 3.1, se obtiene que $\frac{BD^2}{FH^2} = \frac{P_{AO}}{P_{EK}}$, que se puede reescribir, a la vista de (3.2) y de (V-11), como $\frac{\Omega_1}{U} = \frac{P_{AO}}{P_{EK}}$. Y, finalmente, teniendo en cuenta que $\Omega_1 > P_{AO}$ (el polígono está inscrito en el círculo) y (V-16), en la forma

$$\frac{\Omega_1}{P_{AO}} = \frac{U}{P_{EK}} \Rightarrow P_{EK} < U \tag{3.7}$$

Pero (3.6) y (3.7) son resultados contradictorios, luego,

$$\frac{BD^2}{FH^2} \neq \frac{\Omega_1}{U}, \quad para\ todo\ U < \Omega_2 \tag{3.8}$$

De igual forma podemos inferir que

$$\frac{FH^2}{BD^2} \neq \frac{\Omega_2}{U}, \quad para\ todo\ U < \Omega_1 \tag{3.9}$$

(ii) Veamos que tampoco puede ser (3.2) con $U > \Omega_2$. Asumamos, por reducción al absurdo, que sí ocurre, es decir,

$$\frac{BD^2}{FH^2} = \frac{\Omega_1}{U}, \quad U > \Omega_2 \tag{3.10}$$

Resulta trivial, dado que $U > \Omega_2$, que vale

$$\frac{U}{\Omega_2} = \frac{\Omega_1}{T}, \quad para\ cierta\ superficie\ T,\ T < \Omega_1$$

Esta proporción, por (V-16), adopta la forma $\frac{U}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2}{T}, \quad T < \Omega_1$, y, por último, de (3.10), sigue

$$\frac{FH^2}{BD^2} = \frac{\Omega_2}{T}, \quad T < \Omega_1$$

que se acaba de verificar por (3.9) que es imposible. En resumen, hemos demostrado que

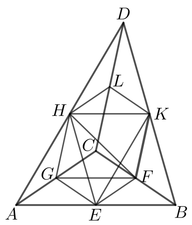
$$\frac{\Omega_1}{U} \neq \frac{BD^2}{FH^2}, \quad U > \Omega_2, \quad y \quad \frac{\Omega_1}{U} \neq \frac{BD^2}{FH^2}, \quad U < \Omega_2$$

Por tanto,

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{BD^2}{FH^2}$$

□

Proposición 3.3 ***(XII-3).*** *Toda pirámide que tiene como base un triángulo se divide en dos pirámides triangulares iguales y semejantes una a otra y a la pirámide entera, y en dos prismas iguales; y los dos prismas son mayores que la mitad de la pirámide entera.*



Demostración. Sea la pirámide $P(D;\tau(ABC))$ de base $\tau(ABC)$ y vértice D. Bisequemos todos los lados de sus aristas por los puntos E, F, G, H, K y L, y unamos dichos puntos tal y como se visualiza en la figura. Esta pirámide consta de tres pirámides triangulares, $P(H;\tau(AEG))$, $P(D;\tau(HKL))$ y $P(K;\tau(BEF))$, más dos prismas, Pr_1 comprendido por dos triángulos $\tau(BKF)$ y $\tau(EHG)$ y tres paralelogramos $plg(EK)$, $plg(EF)$ y $plg(GK)$ – de base el cuadrilátero $plg(EF) = plg(BEGF)$ –, y Pr_2, limitado por $\tau(GFC)$, $\tau(HKL)$, $plg(CK)$, $plg(CH)$ y $plg(GK)$ –de base triangular $\tau(GFC)$–.

(i) Veamos, en primer lugar, que estas tres pirámides son iguales. Como $AE = EB$ y $AH = HD$, se deduce de (VI-2) que $HE \| DB$ y $HK \| AB$, lo que prueba que $HEBK$ es un paralelogramo y, por tanto, $HK = EB$ y $HE = KB$, o lo que es lo mismo, $AE = HK$ y $AH = HD$ (I-34). Además, $\widehat{EAH} = \widehat{KHD}$, porque la recta AD corta a las rectas $HA \| BD$ (I-29) y entonces las bases de $\tau(AEH)$ y $\tau(HKD)$ tienen que ser iguales, es decir, $EH = DK$. Así pues, estos dos triángulos tienen sus lados iguales y resulta $\tau(AEH) = \tau(KHD)$. Análogamente se establecería que $\tau(AGH) = \tau(HLD)$. Por otra parte, $\tau(EGH)$ y $\tau(KDL)$ poseen los lados $EH = KD$ y $HG = DL$ y, por la Proposición 2.6, los ángulos que forman $\widehat{EHG} = \widehat{KDL}$, lo que implica que los terceros lados también son iguales, $EG = KL$. En consecuencia, como tienen sus tres lados iguales, $\tau(EHG) = \tau(KDL)$. Un razonamiento igual nos lleva a que $\tau(AEG) = \tau(HKL)$. De acuerdo con la Definición 2.10, al tener sus cuatro caras iguales, concluimos que $P(H;\tau(AEG)) = P(D;\tau(HKL))$. De igual forma se verifica que $P(H;\tau(AEG)) = P(K;\tau(BEF))$, lo que muestra que las tres referidas pirámides son iguales. Veamos, a continuación, que son semejantes a la dada. En fecto, siendo $HK \| AB$, $HL \| AC$ y $KL \| BC$, de (I-29) y de (VI-Def.1) sigue que

$$\tau(ABD) \sim \tau(DKH) \quad , \quad \tau(DBC) \sim \tau(DKL) \quad , \quad \tau(ADC) \sim \tau(DHL) \tag{3.11}$$

Por otra parte, $AB \| HK$ y $AC \| HL$; recurriendo de nuevo a la Proposicíń 2.6, se obtiene que $\widehat{BAC} = \widehat{HKL}$ y, de (3.11), $\frac{AB}{AC} = \frac{KH}{KL}$. En definitiva, como tienen un ángulo igual y proporcionales los lados que lo forman,

$$\tau(ABC) \sim \tau(HKL) \tag{3.12}$$

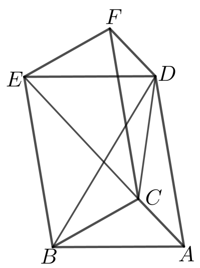
De (3.11) y (3.12) y la Definición 2.8 se concluye que $P(D; \tau(HKL)) \sim P(D; \tau(ABC))$, esto es, las tres pirámides pequeñas –que son iguales entre sí– son semejantes a la pirámide entera.
(ii) En cuanto a los prismas, se ve fácilmente que $plg(GB) = 2\tau(GFC)$ y, en virtud de la Proposición 2.12, se infiere que $\mathrm{Pr}_1 = Pr_2$, ya que tienen la misma altura y la base una triangular de uno es el doble de la triangular del otro.
Remitimos a [5, p. 275] para verificar la parte final. □

Proposición 3.4 ***(XII-4).*** *Si hay dos pirámides de la misma altura que tienen triángulos como bases, y cada una de ellas se divide en dos pirámides iguales entre sí y semejantes a la pirámide entera y en dos prismas iguales; entonces como la base de una pirámide es a la base de la otra pirámide, así serán todos los prismas de una pirámide a todos los prismas iguales en número de la otra pirámide.*

Proposición 3.5 ***(XII-5).*** *Las pirámides que tienen la misma altura y tienen triángulos como bases son entre sí como sus bases.*

Proposición 3.6 ***(XII-6).*** *Las pirámides que tienen la misma altura y tienen polígonos como bases son entre sí como sus bases.*

Proposición 3.7 ***(XII-7).*** *Todo prisma de base triangular se divide en tres pirámides iguales entre sí que tienen triángulos como bases.*



Demostración. Sea el prisma triangular $Pr(\tau(ABC); AD) = Pr$. Tracemos las rectas BD, CD y EC. Obsérvese que

$$Pr = P(C; \tau(ABD)) \cup P(C; \tau(DEB)) \cup P(D; \tau(CEF)) \tag{3.13}$$

Nótese que el $plg(AE)$ es dividido por su diagonal BD en dos triángulos iguales $\tau(ABD) = \tau(DEB)$. Una aplicación inmediata de la Proposición 3.5 establece que

$$P(C; \tau(ABD)) = P(C; \tau(DEB)) \tag{3.14}$$

Obsérvese que la pirámide $P(C; \tau(DEB))$ está formada por las caras $\tau(DEB)$, $\tau(BCD)$, $\tau(CDE)$ y $\tau(BCE)$, mientras que la $P(D; \tau(EBC))$ está comprendido por las caras $\tau(BCE)$, $\tau(BCD)$, $\tau(DEB)$ y $\tau(DCE)$; es decir, poseen las mismas caras. Sigue de la Definición 2.10 que

$$P(C;\tau(DEB)) = P(D;\tau(EBC)) \tag{3.15}$$

De (3.14) y (3.15) se obtiene

$$P(C;\tau(ABD)) = P(D;\tau(EBC)) \tag{3.16}$$

Análogamente, la diagonal CE divide el $plg(BF)$ en dos $\tau(BCE) = \tau(CEF)$ por lo que, a tenor de la citada Proposición 3.5, al tener la misma altura, sigue que

$$P(D;\tau(CEF)) = P(D;\tau(BCE)) \tag{3.17}$$

Y de (3.16) y (3.17),

$$P(D;\tau(CEF)) = P(D;\tau(ABD)) \tag{3.18}$$

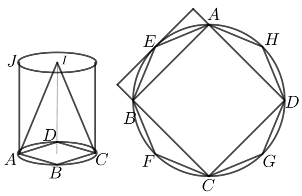
De (3.14) y (3.18) se infiere que $P(C;\tau(ABD)) = P(C;\tau(DEB)) = P(D;\tau(CEF))$, es decir, el prisma consta de tres pirámides iguales.
En términos de volumen, (3.13) nos dice que $Pr = 3P(C;\tau(ABD)) = 3P(D;\tau(ABC))$, ya que estas dos pirámides poseen las mismas caras. En consecuencia, $P(D;\tau(ABC)) = \frac{1}{3}Pr$ □

COROLARIO. *El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen del prisma que tiene la misma base e igual altura que ella.*

Proposición 3.8 ***(XII-8).*** *Las pirámides semejantes que tienen como bases triángulos guardan una razón triplicada de la de sus lados correspondientes.*

Proposición 3.9 ***(XII-9).*** *Las bases de pirámides iguales que tienen como bases triángulos están inversamente relacionadas con sus alturas; y aquellas pirámides que tienen como bases triángulos, cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas, son iguales.*

Proposición 3.10 ***(XII-10).*** *Todo cono es la tercera parte del cilindro que tiene la misma base y de igual altura.*



Demostración. Sea $Con = Con(I;\Omega)$ el cono de vértice I y base el círculo Ω, común al cilindro $Cil = Cil(\Omega, CJ)$. Supongamos que tienen la misma altura. Veamos que

$$Cil = 3Con \tag{3.19}$$

es decir, el volumen del cilindro es el triple del volumen del cono. Si no fuera así, tendríamos o bien $Cil > 3Con$ o bien $Cil < 3Con$. Supongamos, en primer lugar, que $Cil > 3Con$. Tenemos dos magnitudes, la mayor Cil, el volumen del cilindro, y la menor $Cil - 3Con$, el exceso

del volumen del cilindro respecto del triple del del cono.
(a) Inscribamos, tal como se efectuó en la Proposición 3.2, el cuadrado $q_i = ABCD$ en el círculo Ω y levantemos sobre él el prisma $Pr_{qi}^{(1)} = Pr_{qi} = Pr(q_i; JC)$ de igual altura que el cilindro. Si circunscribimos a Ω un cuadrado q_c y construimos sobre él otro prisma $Pr_{qc}^{(1)} = Pr_{qc} = Pr(q_c; JC)$ de igual altura, su área es el doble de la del inscrito, o sea $q_c = 2q_i$. Entonces, como por la Nota 2.8-(p) la relación entre los volúmenes de estos prismas es la razón entre las íeas de sus bases, resulta $Pr_{qi} = 2Pr_{qi}$. Por contrucción,

$$Pr_{qi} < Cil < Pr_{qc} = 2Pr_{qi} \Rightarrow Pr_{qi} > \frac{Cil}{2} \tag{3.20}$$

Ahora al cilindro Cil le quitamos el prisma inscrito Pr_{qi}, cuyo volúmen es mayor que su mitad $\frac{Cil}{2}$. Quedan así cuatro segmentos cilíndricos $sgCil_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ levantados sobre los cuatro segmentos circulares $sgc(AB)$, $sgc(BC)$, $sgc(CD)$ y $sgc(DA)$.
(b) Bisequemos por los puntos E, H, G y F los arcos de circunferencia AB, BC, CD y DA. Unamos los puntos como en la figura y construyamos prismas $Pr_{i,k}^{(2)}$ de igual altura que el cilindro sobre cada uno de los triángulos iguales $\tau(ABE)$, $\tau(BCF)$, $\tau(CDG)$ y $\tau(DAH)$. Se tiene que

$$\sum_{k=1}^{4} Pr_{i,k}^{(2)} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} SgCil_k^{(1)} \tag{3.21}$$

En efecto, fijémonos en el $\tau(AEB)$ y el prisma $Pr_{i,1}^{(2)}$ levantado sobre él $(k = 1)$. Si trazamos la tangente a la circunferencia en el punto E y prolongamos los lados CB y DA de q_i hasta que la corten, se forma el $plg(ABE)$ y se cumple que $plg(ABE) = 2\tau(ABE)$ (lo mismo se realiza en los puntos H, G y F). Por tanto, los volúmenes de los prismas construidos sobre $\tau(AEB)$ y $plg(ABE)$ –de iguales alturas que el cilindro– satisfacen que $Pr_{c,1}^{(2)} = 2Pr_{i,1}^{(2)}$, donde $Pr_{c,k}^{(2)}$ denotan los prismas circunscritos a los arcos de circunferencia. Entonces, se tiene

$$Pr_{i,1}^{(2)} < SgCil_1^{(1)} < Pr_{c,1}^{(2)} = 2Pr_{i,1}^{(2)} \Rightarrow Pr_{i,1}^{(2)} > \frac{1}{2} SgCil_1^{(1)}$$

Como esta desigualdad vale igualmente para $k = 1, 2, 3, 4$, si sumamos todas se obtiene (3.21). Seguidamente, a los cuatro segmentos cilíndricos que quedaban, le restamos una cantidad (la suma de los prismas inscritos) que es mayor –debido a (3.21)– que su mitad. Sobran ocho segmentos cilíndricos, los construidos sobre los segmentos circulares $Sgc(AE)$, $sgc(EB)$,..., $sgc(HA)$.
(c) Bisequemos de nuevo estos ocho segmentos circulares, dibujamos los correspondientes triángulos (de base la cuerda del segmento y vértice el punto de la

bisección) y sobre ellos se forman segmentos cilíndricos y prismas triangulares con alturas iguales a la del cilindro, siendo la suma de los volúmenes de los prismas mayor que la mitad de la suma de los volúmenes de los segmentos cilíndricos. Y así repetimos la operación hasta que para ciertos segmentos cilíndricos (en la fase n-ésima) se tenga, en virtud de (X-1)

$$\sum_{k=1}^{m} SgCil_k^{(n)} < Cil - 3Con, \;\; m = 2^{n+1}$$

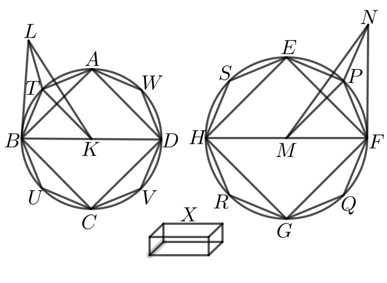
En este punto, denotemos por Pr al prisma construido sobre el oportuno polígono de m lados inscrito en Ω. Entonces el primer miembro de la anterior desigualdad es la diferencia entre el volumen del cilindro dado y el volumen del prisma que lo aproxima, es decir, se tendría

$$Cil - Pr < Cil - 3Con \Rightarrow Pr > 3Con$$

Pero, por la Proposición 3.7, el del prisma es el triple del volumen de la pirámide, $Pr = 3P$, donde P es la pirámide, por lo que $P > Con$. Pero como $P \subset Con$ (está inscrito en el cono) se tendría también que $P < Con$, lo cual es un absurdo. Por tanto, no puede ser $Cil > 3Con$.
Análogamente se demostraría que tampoco es posible que $Cil < 3Con$. En consecuencia, vale (3.19). □

Proposición 3.11 ***(XII-11).*** *Los conos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases y los cilindros que tienen igual altura tambié son entre sí como sus bases.*

Proposición 3.12 ***(XII-12).*** *Los conos y cilindros semejantes guardan entre sí una razón triplicada de la que guardan los diámetros de sus bases.*



Demostración. Estudiemos primero el caso de los conos $Con(L) = Con(L; \Omega_K)$ y $Con(N; \Omega_M)$ de bases los círculos $\Omega_K = ABCD$ y $\Omega_M = EFGH$, vértices L y N, diámetros BD y HF, y centros K y M, respectivamente. Veamos que los volúmenes de los conos satisfacen

$$\frac{Con(L)}{Con(N)} = \left(\frac{BD}{FH}\right)^3 \tag{3.22}$$

Si no fuera así, sería $\frac{Con(L)}{X} = \left(\frac{BD}{FH}\right)^3$, donde X es de volumen mayor que $Con(N)$ o bien menor. Supongamos primeramente que sea menor, es decir, se tiene

$$\frac{Con(L)}{X} = \left(\frac{BD}{FH}\right)^3 , \; X < Con(N) \tag{3.23}$$

Como en la Proposición 3.10, inscribimos en el cuadrado $q_i = EFGH$ en Ω_M. Se tiene que $q_i > \frac{1}{2}\Omega_M$. Sobre este cuadrado levantamos una pirámide $P(N;q_i)$ de igual altura que el cono. Como ya se ha visto

$$P(N;q_i) > \frac{1}{2}Con(N) \tag{3.24}$$

Ahora bisecamos los cuatro arcos de circunferencia subtendidos por los lados de q_i y formamos los cuatro triángulos iguales que denotamos por $\Delta_k^{(1)}$ *(k=1,2,3,4)*. Nótese que $\Delta_k^{(1)} > \frac{1}{2}sgc(EH)$, ya que todos los segmentos también son iguales. Si construimos sobre cada uno de los triángulos pirámides con el mismo vértice que el cono, y representamos el segmento cónico limitado en la base por el segmento circular, $\tau(EHN)$ y el propio cono mediante $SgCon_k^{(1)}$, se satisface que *(k=1,2,3,4)*

$$P(N;\Delta_k^{(1)}) > \frac{SgCon_k^{(1)}}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{4} P(N;\Delta_k^{(1)}) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} SgCon_k^{(1)} \tag{3.25}$$

Volvemos a dividir por la mitad los arcos de circunferencia, a inscribir triángulos en los ocho segmentos circulares y a elevar pirámides sobre los triángulos con vértice N, es decir, de igual altura que el cono; y así sucesivamente. Tenemos dos magnitudes, $Con(N)$ y $Con(N) - X$. A continuación, al $Con(N)$ le quitamos la pirámide $P(N;q_i)$, que por (3.24) es mayor que su mitad; a lo que queda del cono le restamos $\sum_{k=1}^{4} P(N;\Delta_k^{(1))}$, que es mayor que su mitad por (3.25), y así procedemos hasta que, invocando (X-1), llegamos a que la suma de los volúmenes de ciertos segmentos cónicos es menor que el exceso $Con(N) - X$. Supongamos que ello ocurre cuando se tiene el octógono inscrito Oct_M en Ω_M y que la pirámide inscrita es $P(N;Oct_M)$. Lo que asegura (X-1) es que

$$\sum_{k=1}^{8} SgCon_k^{(2)} < Con(N) - X$$

Pero el primer miembro de la anterior desigualdad, donde $SgCon_k^{(2)}$ denotan los segmentos cónicos de la segunda generación, vale obviamente $Con(N) - P(N;Oct_M)$. Entonces

$$Con(N) - P(N;Oct_M) < Con(N) - X \Rightarrow P(N;Oct_M) > X \tag{3.26}$$

Ahora inscribimos en el otro círculo Ω_K un polígono octogonal semejante al anterior, sea Oct_K y construimos tomándolo como base la pirámide $P(L;Oct_K)$ de igual altura que el cono $Con(L)$. Sea $\tau(LBT)$ una de las caras de $P(L; Oct_K)$ y $\tau(NFP)$ una cara de $P(N; Oct_M)$, y dibujemos las rectas KT y MP. Como $Con(L) \sim Con(N)$, sigue de la Definición 2.24 que $\frac{BD}{FH} = \frac{KL}{MN}$ y, en términos de los radios, $\frac{BK}{FM} = \frac{KL}{MN}$. Obsérvese que $\widehat{BKL} = \widehat{FMN}(= \widehat{R})$. En resumen, $\tau(BKL) \sim \tau(FMN)$, porque tienen un ángulo igual y proporcionales sus lados (VI-6). Por la misma razón, puesto que son ángulos centrales de un octógono $\widehat{BKT} = \widehat{FMP}\left(= \frac{2\widehat{R}}{8}\right)$ y sus lados satisfacen $\frac{BK}{KT} = \frac{FM}{MP}$, pues $Oct_K \sim Oct_M$, sigue que las caras $\tau(BKT) \sim \tau(FMP)$. De manera similar se prueba que $\tau(LKT) \sim \tau(NMP)$ y $\tau(LTB) \sim \tau(NFP$. De estos resultados y de acuerdo con la Definición 2.9, hemos establecido que las pirámides $P(L; \tau(BKT)) \sim P(N; \tau(FMP))$. Y de aquí, recurriendo a la Proposición 3.8, que

$$\frac{P(L; \tau(BKT))}{P(N; \tau(FMP))} = \left(\frac{BK}{FM}\right)^3 \tag{3.27}$$

Uniendo, a continuación y en cada caso, los vértices de los polígonos (aquí, octógonos regulares) entre sí consecutivamente y con sus centros K y M, se obtienen ocho triángulos Δ_k^L iguales a la base de $P(L; \tau(BKT))$, y otros tantos Δ_k^N iguales a las de $P(N; \tau(FMP))$, $(1 \leq k \leq 8)$ $(\Delta_1^L = \tau(BKT)$ y $\Delta_1^N = \tau(FMP))$, que obviamente satisfacen (3.27). Ahora bien, por (V-12), la suma de antecedentes es a las de consecuentes como cualquiera de las razones, de modo que para $(1 \leq k \leq 8)$

$$\frac{P(L; \Delta_k^L)}{P(N; \Delta_k^N)} = \left(\frac{BK}{FH}\right)^3 \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^8 P(L; \Delta_k^L)}{\sum_{k=1}^8 P(N; \Delta_1^N)} = \frac{P(L; \Delta_1^L)}{P(N; \Delta_1^N)} = \left(\frac{BK}{FM}\right)^3$$

Pero $\sum_{k=1}^8 P(L; \Delta_k^L)$ es la pirámide entera $P(L; Oct_K)$ y $\sum_{k=1}^8 P(N; \Delta_1^N)$ es la pirámide completa $P(N; Oct_K)$. Por tanto, recordando que $BD = 2BK$ y $FH = 2FM$, se concluye

$$\frac{P(L; Oct_K)}{P(N; Oct_K)} = \left(\frac{BD}{FH}\right)^3$$

expresión que, por (3.23), se puede reescribir así (V-16)

$$\frac{Con(L)}{X} = \frac{P(L; Oct_K)}{P(N; Oct_M)} \Longleftrightarrow \frac{Con(L)}{P(L; Oct_K)} = \frac{X}{P(N; Oct_M)}$$

Puesto que $P(L; Oct_K) < Con(L)$, ya que la pirámide está inscrita en el cono, se infiere de lo anterior que $P(N; Oct_M) < X$, en manifiesta contradicción con (3.26). En consecuencia, no se cumple (3.23) con $X < Con(N)$. De forma similar se comprueba que tampoco es factible si $X > Con(N)$. Por tanto, vale (3.22).
(b) Si hubiéramos considerado cilindros semejantes $Cil(BL; \Omega_K)$ y $Cil(FN; \Omega_M)$ de bases los círculos Ω_K y Ω_M, se deduce de la Proposición 3.10 y de (3.22)

$$\frac{Cil(BL;\Omega_K)}{Cil(FN;\Omega_M)} = \frac{3Con(L;\Omega_K)}{3Con(N;\Omega_M)} = \frac{Con(L)}{Con(N)} = \left(\frac{BD}{FH}\right)^3$$

□

Proposición 3.13 ***(XII-13).*** *Si un cilindro es cortado por un plano que sea paralelo a los planos opuestos de sus bases, entonces, como el cilindro es al cilindro, así el eje es al eje.*

Proposición 3.14 ***(XII-14).*** *Los conos y culindros que están sobre bases iguales son entre sí como sus alturas.*

Con un lenguaje más actual, si tenemos dos conos (igual vale para los cilindros) de volúmenes $V_1 = \frac{1}{3}B_1h_1$ y $V_2 = \frac{1}{3}B_2h_2$, de bases los círculos de áreas B_1 y B_2, y alturas h_1 y h_2, respectivamente, si $B_1 = B_2$, es trivial deducir que

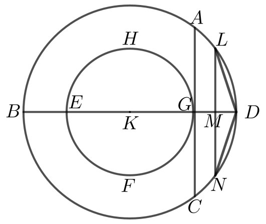
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Proposición 3.15 ***(XII-15).*** *Las bases bases de los conos y cilindros iguales están inversamente relacionadas con las alturas, y aquellos conos y cilindros cuyas bases están inversamente relacionadas con sus alturas son iguales.*

Con la misma notación del aserto anterior y si $V_1 = V_2$, se tiene

$$\frac{1}{3}B_1h_1 = \frac{1}{3}B_2h_2 \Longleftrightarrow B_1h_1 = B_2h_2 \Longleftrightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

Proposición 3.16 ***(XII-16).*** *Dados dos círculos con el mismo centro, inscribir en el círculo mayor un polígono equilátero y de un número par de lados que no toque el círculo menor.*



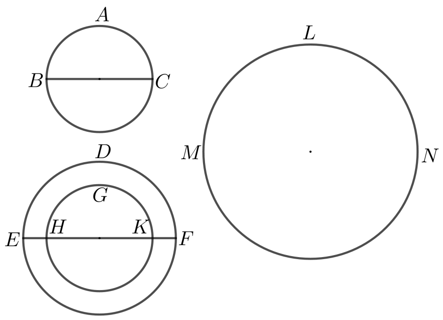
Demostración. Sean los círculos $\Omega_1 = ABCD$ y $\Omega_2 = EFGH$ con el mismo centro K. Tracemos el diámetro BD del mayor Ω_1 (que contiene el del menor $\Omega_2 : EG$) y por G dibujamos la perpendicular AC a BD. Obsérvese que AC toca al círculo menor (III-16). A continuación, dividimos la semicircunferencia BAD en dos partes iguales, y su mitad en otras dos partes iguales, y así sucesivamente hasta que obtenemos un arco, sea $arc(LD)$, de longitud menor que $arc(AD)$. Hacemos ahora $LM \perp BD$ y la extendemos hasta N. Nótese que $LD = DN$, en virtud de (III-3) y (I-4. Teniendo en cuenta que $LN \| AC$, AC es tangente a Ω_2 y LN es una recta exterior a dicho círculo, concluimos que LN no toca a Ω_2. Basta, finalmente, con adaptar cuerdas iguales a LD a lo largo de la circunferencia de Ω_1, por (IV-1), para obtener un polígono de un número par de lados que no toca a Ω_2. □

A continuación, este resultado se extiende a esferas concéntricas.

Proposición 3.17 ***(XII-17).*** *Dadas dos esferas con el mismo centro, inscribir en la esfera mayor un sólido poliedro que no toque la esfera menor en su superficie.*

COROLARIO.
Si una vez construido el poliedro, se unen todos sus vértices con el centro común de las dos esferas, se generará un poliedro semejante al anterior inscrito en la esfera menor. Como ambos poliedros están constituidos por pirámides, en base a la Proposición 3.8, resulta que la relación entre sus volúmenes es la razón cúbica de los diámetros de las esferas.

Proposición 3.18 ***(XII-18).*** *Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros.*



Demostración. Sean las esferas $Esf(ABC)$ y $Esf(DEF)$ de diámetros respectivos BC y EF. Demostraremos que

$$\frac{Esf(ABC)}{Esf(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^3 \tag{3.28}$$

Si (3.28) no fuera cierta, entonces ocurriría

$$\left(\frac{BC}{EF}\right)^3 = \frac{Esf(ABC)}{X}$$

donde o bien $X = Esf(GHK) < Esf(DEF)$ o bien $X = Esf(LMN) > Esf(DEF)$.

(i) Asumamos primero que

$$\left(\frac{BC}{EF}\right)^3 = \frac{Esf(ABC)}{Esf(GHK)} \qquad Esf(GHK) < Esf(DEF) \tag{3.29}$$

Consideremos la $Esf(DEF)$ con el mismo centro que la $Esf(GHK)$. Pues bien, en base a la Proposición 3.17 podemos inscribir un poliedro en la esfera $Esf(DEF)$, la mayor, que no toca la $Esf(GHK)$, la menor. Inscribamos seguidamente un poliedro semejante a éste en $Esf(ABC)$. Sigue del Corolario de la Proposición 3.17 y de (3.29)

$$\frac{Poliedro(ABC)}{Poliedro(DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^3 \Rightarrow \frac{Poliedro(ABC)}{Poliedro(DEF)} = \frac{Esf(ABC)}{Esf(GHK)}$$

Y de aquí, por alternancia (V-16),

$$\frac{Esf(ABC)}{Poliedro(ABC)} = \frac{Esf(GHK)}{Poliedro(DEF)}$$

Pero $Esf(ABC) > Poliedro(ABC)$, porque el poliedro está inscrito en la esfera, por lo que $Esf(GHK) > Poliedro(DEF)$. Y, a la misma vez, se tiene $Esf(GHK) < Poliedro(DEF)$, ya que acabamos de ver que este poliedro está inscrito en $Esf(DEF)$, pero no toca a la $Esf(GHK)$. Luego no es posible (3.29). De forma similar se establece que

$$\frac{Esf(DEF)}{Esf(PQR)} \neq \left(\frac{EF}{BC}\right)^3, \qquad Esf(PQR) < Esf(ABC) \tag{3.30}$$

(ii) Finalmente, veamos que (3.29) tampoco vale cuando $Esf(LMN) > Esf(DEF)$. Pues si fuera cierto

$$\left(\frac{BC}{EF}\right)^3 = \frac{Esf(ABC)}{Esf(LMN)}, \qquad Esf(LMN) > Esf(DEF) \tag{3.31}$$

por inversión (V-7, Corolario), se tendría

$$\frac{Esf(LMN)}{Esf(ABC)}) = \left(\frac{EF}{BC}\right)^3 \tag{3.32}$$

Ahora bien, para cierto volumen α, que puede ser el de otra esfera,

$$\frac{Esf(LMN)}{Esf(ABC)}) = \frac{Esf(DEF)}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{Esf(LMN)}{Esf(DEF)} = \frac{Esf(ABC)}{\alpha}$$

siempre que $\alpha = Esf(UVW) < Esf(ABC)$, lo cual sucede aquí, puesto que, por (3.31), $Esf(LMN) > Esf(DEF)$. Hemos llegado así a que

$$\frac{Esf(LMN)}{Esf(ABC)} = \frac{Esf(DEF)}{Esf(UVW)}, \qquad Esf(UVW) < Esf(ABC)$$

lo que vimos en (3.30) que tampoco era factible. En conclusión, se verifica (3.28).□

3.3. Obsevaciones finales

Hemos visto que *Euclides* emplea en las demostraciones de este capítulo, tal y como anticipábamos en su introducción y con gran sutileza, tanto la teoría de la proporcionalidad, que ordena y sistematiza en el libro V [4], como el método de la exhaución, que incluye en el libro X [5]. Trasladando la demostración que *Euclides* realiza de este método a un lenguaje más actual, supongamos que tenemos un número $a > 0$ y que le quitamos su mitad, a lo que queda su mitad y así sucesivamente. Obtenemos $a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{4}$; $\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{8}$;...; y en el paso n-ésimo, $\left(\frac{1}{2}\right)^n a$. Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n a = 0$$

se deduce que dados dos números positivos a y ε, $a > \varepsilon$, siempre se puede hallar un número entero positivo tal que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n a < \varepsilon$$

Aunque *Euclides* y los matemáticos griegos no conocían el concepto de límite, si eran conscientes de que con este proceso de sustracciones sucesivas podían alcanzar una cantidad tan pequeña como quisieran. Es evidente que la idea de límite subyace en esta demostración.

También se vislumbra la idea de límite en su utilización del método de exhaución. La Proposición 3.2 constituye un ejemplo sencillo de cómo *Euclides* combina la teoría de la proporcionalidad con este método a fin de conseguir sus propósitos. En este aserto *Euclides* quiere probar que las áreas de dos círculos están en la misma razón que los cuadrados de sus diámetros, esto es, por (3.1)

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{BD^2}{FH^2}$$

Y, si no fuera así, razona que debería ser

$$\frac{\Omega_1}{U} = \frac{BD^2}{FH^2}$$

donde o bien $U < \Omega_2$ (en cuyo caso el exceso es $\Omega_2 - U$) o bien $U > \Omega_2$ (siendo el exceso $U - \Omega_2$). Pongámonos en la primera situación, $U > \Omega_2$. Tenemos así dos magnitudes, la mayor, Ω_2 y la menor, $X = \Omega_2 - U$. Y ahora empezamos un proceso de sustracciones sucesivas (conocido clásicamente como proceso antifairético) y a Ω_2 le quita una cantidad mayor que su mitad, y al resto otra mayor que su mitad, y así sucesivamente hasta llegar a una cantidad inferior a X, la más pequeña de las dadas; y lo mismo ocurre cuando $U > \Omega_2$. Después llega a un absurdo y concluye que tiene que ser $U = \Omega_2$, lo que equivale a que $X = \Omega_2 - U \to 0$. De nuevo aparece de una forma implícita la noción de límite.

Arquímedes, también influido por el trabajo de *Eudoxo*, utiliza el método de exhaución de una forma similar. Afirma [5, p. 13] que *"Dadas dos magnitudes desiguales, la mayor excede a la menor en una cantidad tal que, añadiendo a sí mismo las veces que se precise, puede exceder a cualquier otra magnitud"*. Recordemos la propiedad arquimediana[1, p. 32]: *"Si $x > 0$ e y es cualquier número real positivo,*

existe un entero positivo tal que $nx > y$*".*
Geométricamente significa que una distancia extremadamente grande puede ser medida y superada por un segmento arbitrariamente pequeño, pero fijado, bastando para ello añadirlo a sí mismo un número conveniente de veces. Como se puede observar, el método de *Arquímedes* es un proceso aditivo, en contraste con la técnica de *Euclides*, que se basa en sustracciones reiteradas.

***Nota* 3.1** *Aclaremos, fundamentalmente, que el proceso seguido por Euclides cuando aplica el método de exhaución, forma parte de un método más general, la antifairesis o antanairesis, un recurso de filósofos y matemáticos de la Grecia clásica. Dadas dos magnitudes* a *y* b*,* $a > b$*, la antifairesis consiste en restarle a la mayor la cantidad menor hasta que sea posible, es decir, hasta que el resto sea menor a la cantidad más pequeña. Otro proceso antifairético se encuentra en el algoritmo de Euclides para calcular la medida común máxima (máximo común divisor) de dos números (VII-2).*
El proceso antifairético continúa y se repite tomando ahora la cantidad menor y el resto: Por ejemplo, si $a = 17$ *y* $b = 5$*, la antifairesis es* $(17, 5) \to (12, 5) \to (7, 5) \to (2, 5)$ *–tres pasos–, ahora tomamos* $(5, 2) \to (3, 2) \to (1, 2)$ *–dos pasos– y, por último,* $(2, 1) \to (1, 1) = (0, 1)$ *–dos pasos– y finaliza el proceso pues aparee* 0*. Consecuentemente*

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

4

Capítulo 4

4.1. Introducción

En este capítulo –que consta de dieciocho proposiciones– se estudia el libro XIII, considerado como uno de los más completos de los *Elementos* por su coherencia interna y desarrollo teórico. Su objetivo es la construcción de los cinco poliedros regulares y la justificación de que sólo existen estos cinco: tetraedro, octaedro, cubo o hexaedro regular, icosaedro y dodecaedro.

En el segunda apartado se prueban o enuncian resultados que serán utilizados en ese objetivo, destacando los que tienen que ver con los pentágonos equiláteros y equiángulos, fundamentalmente en el estudio de los dos últimos, el icosaedro y el dodecaedro.

En la tercera sección se tratan los poliedros regulares. Aunque es probable que ya fueran conocidos por *Pitágoras* y sus seguidores (s. VI a.C.), fueron popularizados por el filósofo griego *Platón* (427-347 a.C.) en una de sus obras, *Diálogo de Timeo*. Por esta razón son conocidos también como *sólidos platónicos*. Finaliza estableciendo que los poliedros regulares son justo estos cinco y que no hay más. Si una de las metas que se fijó *Euclides* en los *Elementos* era llegar a investigar estos poliedros, ciertamente el libro XIII constituye un dignísimo colofín a su extraordinario trabajo.

En cuanto a notación, además de la considerada en todos los capítulos anteriores, en éste introducimos alguna nueva terminología. Así $e.\,y\,m.r.$ significa en extrema y media razón, que viene a ser la tercera proporcional de dos números no nulos a y b. Un rectángulo o cuadrado $ABCD$ se expresa por $[AC]$, indicando los extremos de una de sus diagonales. Los polígonos, habitualmente regulares, se representan por la letra P y un subíndice que señala el número de lados, por ejemplo P_5 es un pentágono. Por otro lado, por l_5 se ñalamos el lado de un pentágono, por l_6, el de un hexágono, por l_{10} el de un decágono y por l_{12} el de un dodecágono. Si se desea especificar que el lado corresponde a un polígono inscrito en un círculo Ω, lo indicaremos mediante $l_{5,\Omega}$, $l_{6,\Omega}$, etc. De forma análoga, l_{S_4}, denotará el lado o arista de un un tetraedro, l_{S_6} de un cubo, l_{S_8} de un octaedro, $l_{S_{20}}$ de un icosaedro y $l_{S_{12}}$ de un dodecaedro.

4.2. Resultados seleccionados

En este párrafo se analizan algunos resultados que serán utilizados en el siguiente a la hora de construir los cinco poliedros regulares. A fin de ahorrar espacio, se prueba la primera algebraicamente.

Proposición 4.1 ***(XIII-1).*** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con la mitad de la recta entera es cinco veces el cuadrado de la mitad.*

Supongamos que la recta AB está cortada en $e.y.m.r.$ en C, es decir $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$ añadamos a la recta ABla recta $AD = \frac{1}{2}AB$. Se tiene que $DC^2 = (AC + AD)^2 = AD^2$. Si ponemos $AC = a$, $BC = b$, entonces $AB = a + b$ y $AD = \frac{a+b}{2}$, $a > b$. Se tiene que

$$DC^2 = \left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + a(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$$

$$= (a+b)b + a(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a+b}{s}\right)^2 = 5AD^2$$

que es lo que queríamos probar.
Enunciamos sin demostrar

Proposición 4.2 ***(XIII-2).*** *Si el cuadrado de una recta es cinco veces el de un segmento de ella, cuando se corta el doble de dicho segmento en extrema y media razón, el segmento mayor es la parte restante de la recta inicial.*

Proposición 4.3 ***(XIII-3).*** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor.*

Proposición 4.4 ***(XIII-4).*** *Si se corta una línea recta en extrema y media razón, la suma del cuadrado de la recta entera y del cuadrado del segmento menor es el triple del cuadrado del segmento mayor.*

Proposición 4.5 ***(XIII-5).*** *Si se corta una línea recta en extrema y media raón y se le añade otra igual al segmento mayor, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y la recta inicial es el segmento mayor.*

Proposición 4.6 ***(XIII-6).*** *Si se corta una recta racional en extrema y media razón, entonces cada uno de los segmentos obtenidos es una recta irracional llamada apótoma.*

Demostración. Supongamos que la recta racional AB ha sido cortada en $e.y.m.r.$ en el punto C, es decir,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC} \ \textit{con}\ AC > CB$$

Añadimos al segmento mayor AC, el segmento $AD = \frac{AB}{2}$ $(AB = 2AD)$. Veamos que AC y CB son apótomas. En efecto, por la Proposición 4.1,

$$DC^2 = 5AD^2 \Rightarrow \frac{CD^2}{AD^2} = \frac{5}{1} \tag{4.1}$$

Ello entraña que $CD^2 \ \mathrm{C}\ AD^2$. Pero AD^2 es racional, pues AD lo es al ser la mitad de AB, que es racional por hipótesis. Entonces CD^2 es racional (X-Def. 4), así que CD es racional. Pero es obvio por (4.1) que CD^2 no guarda con AD^2 la misma razón que un número cuadrado con un número cuadrado, esto es, para enteros m y n positivos,

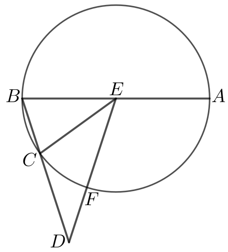
$$\frac{CD^2}{AD^2} \neq \frac{m^2}{n^2} \quad \left(\Rightarrow \frac{CD}{AD} \neq \frac{m}{n}\right)$$

En virtud de la Proposición (X-9) se infiere de aquí que $CD \not\mathrm{C}_{\mathrm{L}}\ AD$. Por tanto, CD y AD son rectas conmensurables sólo en cuadrado. Luego, CD y AD son rectas racionales y, como $AC = CD - AD$, $AD\ \mathrm{C}^2\ CD$ se infiere que AC es una *apótoma* (recta irracional), en virtud de la Proposición 1.2. Por otra parte, de la definición de $e.m.y.r.$ se obtiene que $AB \cdot BC = AC^2$. Se trata de un rectángulo de lados AB, que es racional, y BC, siendo su área el cuadrado de una apótoma. Si aplicamos la Proposición (X-97), resulta que la anchura BC es igualmente una apótoma, en concreto, una primera apótoma. Ver Definición 1.5. Así se ha demostrado que AC y BC son apótomas. □

Proposición 4.7 ***(XIII-7).*** *Si tres ángulos de un pentágono equilátero, sean sucesivos o no, son iguales, el pentágono será equiangular.*

Proposición 4.8 ***(XIII-8).*** *Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, éstas se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.*

Proposición 4.9 ***(XIII-9).*** *Si se suman el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono.*

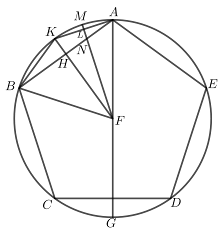


Demostración. En el círculo dado suponemos inscritos un hexágono (IV-11) y un decágono (IV-15). Añadimos al lado BC del decágono el lado CD del hexágono. *Euclides* demuestra que la recta entera BD satisface

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{BC} \tag{4.2}$$

Si $BE = r$ (lado hexágono) y $BC = l$ (lado decágono), (4.2) adopta la forma $\frac{l+r}{r} = \frac{r}{l}$, esto es, $l^2 + rl - r^2 = 0$. cuya solución, $l = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r$, nos da una relación entre el lado del decágono y del hexágono inscritos en la misma circunferencia.

Proposición 4.10 ***(XIII-10).*** *Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es la suma de los cuadrados de los lados del hexágono y del decágono inscritos en dicho círculo.*



Demostración. Construyamos un pentágono equilátero en el círculo dado de centro F y diámetro AG (IV-11). Dibujemos BF, tracemos por F la recta $FH \perp AB$ –que prolongamos hasta el punto K de la circunferencia– y unamos K con A y B. Ahora levantamos $FL \perp AK$ hasta que corte a la circunferencia en M. Finalmente unimos K con N. Como $arc(ABG) = arc(AEG)$ por ser semicircunferencias, y $arc(ABC) = arc(AED)$, se tiene

$$arc(ABG) - arc(ABC) = arc(AEG) - arc(AED) \Rightarrow arc(CG) = arc(GD) \tag{4.3}$$

de donde se infiere que, siendo $CD = l_5$, resulta que $CG = l_{10}$. Asimismo, $FA = FB$ y $FH \perp AB$, por lo cual, a tenor de (I-5) y (I-26), $\widehat{AFK} = \widehat{KFB}$ y, por (III-26), $arc(AK) = arc(KB)$. Por tanto, $arc(AB) = 2arc(AK) = 2arc(KB)$ y, puesto que $arc(CD) = arc(AB)$ y $arc(CD) = 2arc(CG)$ por (4.3), tenemos que $arc(CG) = arc(BK)$. Ahora bien, $arc(BK) = arc(KA)$ y $arc(KA) = 2arc(KM)$, entonces $arc(BK) = 2arc(KM)$ y, en consecuencia, $arc(CG) = 2arc(KM)$. También, como $arc(CB) = arc(AB)$ y $arc(AB) = 2arc(BK)$, resulta $arc(CB) = 2arc(BK)$. Entonces, $arc(GB) = arc(GC) + arc(CB) = arc(BK) + 2arc(BK) = 3arc(BK) = 3 \times 2arc(KM)$, esto es,

$$arc(GB) = 2 \times 3arc(KM) = 2arc(BM) \tag{4.4}$$

De (4.4) y (VI-33) se infiere que $\widehat{GFB} = 2\widehat{BFM}$. Por otra parte, $\tau(ABF)$ es isósceles, por lo que $\widehat{FAB} = \widehat{ABF}$, y –por ser un ángulo externo de $\tau(ABF)$– $\widehat{GFB} = \widehat{FAB} + \widehat{ABF} = 2\widehat{FAB}$, es decir, $\widehat{GFB} = 2\widehat{FAB}$; y, acabamos de ver que

$\widehat{GFB} = 2\widehat{BFM}$, concluimos que $\widehat{BFN}(= \widehat{BFM}) = \widehat{FAB}$. De este modo $\tau(ABF)$ y $\tau(BFN)$ tienen $\widehat{BNF} = \widehat{FAB}$ y $\widehat{ABF}$ común; en virtud de (VI-6) deducimos que $\tau(ABF) \sim \tau(BFN)$, lo que entraña que (VI-17)

$$\frac{AB}{BF} = \frac{BF}{BN} \Leftrightarrow AB \times BN = BF^2 \tag{4.5}$$

Obsérvese que $\tau(FAK)$ es isósceles y que $FL \perp AK$. Entonces $AL = KA$, LN común y $\widehat{ALN} = \widehat{KLN}(= \widehat{R})$, así que $KN = AN$ y $\tau(KLN) = \tau(ALN)$ (I-4). Por tanto $\widehat{LKN} = \widehat{LAN}$ y $\widehat{LAN}(= \widehat{KAB}) = \widehat{KBN}(= \widehat{KBA})$; consecuentemente, $\widehat{LKN} = \widehat{KBN}$. Recopilando, $\tau(AKB)$ y $\tau(AKN)$ tienen dos ángulos iguales, a saber, $\widehat{LKN} = \widehat{KBN}$ y $\widehat{KAN}(= \widehat{KAB})$ común, por lo que los terceros también son iguales, $\widehat{AKB} = \widehat{KNA}$ (I-32) y, en definitiva, $\tau(AKB) \sim \tau(AKN)$, así que se cumple(VI-4)

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{AN} \Leftrightarrow AB \times AN = AK^2 \tag{4.6}$$

Teniendo en cuenta (4.5) y (4.6), y que $AB \times BN + AB \times AN = AB \times (BN + AN) = AB^2$ se llega finalmente a que

$$AB^2 = AK^2 + BF^2 \tag{4.7}$$

donde $AB = l_5$, $AK = l_{10}$ y $BF = l_6$. □

***Nota* 4.1** *Por la Proposición 4.9 se sabe que* $AK = l_{10} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r$. *Sigue, pues, de (4.7),*

$$AB^2 = \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]^2 + r^2 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} r^2$$

por lo que el lado del pentágono inscrito en un círculo de radio r *es* $l_5 = AB = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Proposición 4.11 ***(XIII-11).*** *Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo de diámetro racional, el lado del pentágono es la recta irracional llamada menor.*

Proposición 4.12 ***(XIII-12).*** *Si se inscribe un triángulo equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del triángulo es el triple del cuadrado del radio del círculo.*

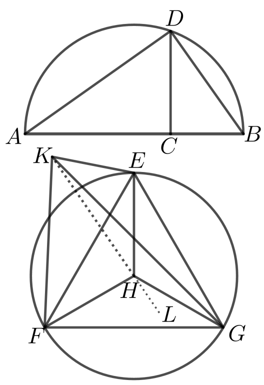
La anterior proposición recoge un resultado elemental de la geometría, a saber, la relación $l_3 = \sqrt{3} r$ entre el lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio r.

4.3. Sólidos platónicos: poliedros regulares

En este párrafo, recurriendo a los resultados establecidos en la sección precedente, procederemos al estudio de los cinco poliedros regulares tal y como hizo *Euclides*, destacando algunas propiedades no sólo por curiosidad histórica sino por su importancia e interés matemáticos, al aparecer en su construcción algunas de las cantidades irracionales tratadas en el libro X.

Señalemos, finalmente, que algunos de los teoremas que mostramos a continuación se atribuyen a *Teeto*.

Proposición 4.13 ***(XIII-13).*** *Construir un tetraedro, inscribirlo en una esfera y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es una vez y media el del lado del tetraedro.*



Demostración. Sea una esfera de diámetro AB, que cortamos por el punto C de modo que $AC = 2CB$. Dibujamos a continuación sobre AB el semicírculo ADB y $DC \perp AB$. Ahora describimos una circunferencia de radio $HE = DC$ y centro H, e inscribimos en ella un triángulo equilátero $\tau(EFG)$ (IV-2), uniendo sus vértices con H. Ahora levantamos $HK \perp \Pi$, donde Π es el plano que contiene al círculo $\Omega = EFG$, y tomamos $HK = AC$. Como $KH \perp \Pi$, KH es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por H, en particular, $HK \perp HF, HG, HE$. Ahora bien, $AC = HK$, $CD = HE$ y $\widehat{ACD} = \widehat{KHE}(= \widehat{R})$, por lo cual $AD = KE$ (I-4). Razonando de igual manera se llega a que $KF = AD$ y $KG = AD$, es decir,

$$KE = KF = KG(= AD) \tag{4.8}$$

Por otra parte, $AC = 2BC$, por lo que $AB = 3BC$. Por el teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa de $\tau(ABD)$, vale (VI-8)

$$AC \times BC = DC^2 \tag{4.9}$$

Puesto que $\tau(ADC) \sim \tau(ABD)$ (pues $\widehat{ACD} = \widehat{ADB}(= \widehat{R})$ y $\widehat{A}$ es común), se tiene

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD^2 = AB \times AC \tag{4.10}$$

De (4.9), (4.10) y $AB = 3BC$, sigue que $\frac{AB}{BC} = \frac{AB \times AC}{BC \times AC} = \frac{AD^2}{DC^2} = 3 \Rightarrow AD^2 = 3DC^2$. Y por la Proposición 4.12, $FE^2 = 3HE^2$ y siendo $HE = CD$, concluimos que $FE^2 = AD^2$, esto es $FE = AD$. Como $\tau(EFG)$ es equilátero y $FE = AD$, se deduce de (4.8) que las aristas EF, FG, GE, KE, KF y KG son iguales, las cuatro

caras de la pirámide $P(K;\tau(EFG))$ son iguales y son triángulos equiláteros. En definitiva, esta pirámide es regular, es decir es un tetraedro.
Finalmente, vamos a inscribir este tetraedro en la esfera dada. Para ello prolongamos la recta KH y tomamos $HL = CB$. Entonces,

$$KL = KH + HL = AC + CB = AB \tag{4.11}$$

es decir, KL también es el diámetro de la esfera dada y abarca consecuentemente un arco que es una semicircunferencia. Ahora bien, por (VI-8) y el hecho de que $\tau(ADC) \sim \tau(DCB)$, se obtiene que $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CB} \Leftrightarrow \frac{HK}{HE} = \frac{HE}{HL}$, sin más recordar que $AC = HK$, $CD = HE$ y $HL = CB$. Luego, $HE^2 = HK \times HL$ y el semicírculo descrito sobre KL pasará por E. Si fijamos ahora KL como eje y giramos alrededor de él dicho semicírculo, se generará una esfera que también pasará por los vértices F y G. En efecto, si unimos dichos puntos F y G con L, por (4.11), $KL = AB$ es el diámetro de la esfera y, en consecuencia, $\widehat{KFL}$ y $\widehat{HGL}$ son ángulos rectos.
Por último, teniendo en cuenta (4.10) y que $AC = 2CB$ y $AB = 3CB$, se tiene

$$\frac{3}{2} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB \times AB}{AC \times AB} = \frac{AB^2}{AD^2} \Rightarrow AB^2 = \frac{3}{2}AD^2$$

$\square$

***Nota* 4.2** *Como $AB = KL = 2r$ (r radio de la esfera) y, por (4.8), $AD = l$ (lado o arista del tetraedro), la anterior expresión nos da la conocida fórmula que relaciona la arista del tetraedro con el radio de la esfera en que está inscrito: $l = \sqrt{\frac{8}{3}}r$*

Proposición 4.14 ***(XIII-14).*** *Construir un octaedro, envolverlo en una esfera y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el doble del cuadrado del lado del octaedro.*

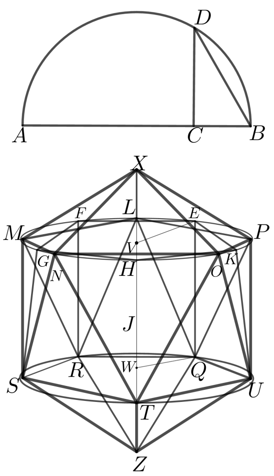
***Nota* 4.3** *Esta proposición establece que $l = r\sqrt{2}$, expresión que relaciona el lado del octaedro con el radio de la esfera.*

Proposición 4.15 ***(XIII-15).*** *Construir un cubo, envolverlo en una esfera y demostrar que el cuadrado del diámetro de la esfera es el triple del cuadrado del lado del cubo.*

***Nota* 4.4** *Este teorema nos da el lado del cubo en función del radio de la esfera, esto es $l = \sqrt{\frac{4}{3}}r$*

Proposición 4.16 ***(XIII-16).*** *Construir un icosaedro, envolverlo en una esfera y demostrar que el lado del icosaedro es la recta irracional llamada menor.*

Demostración. Sea AB el diámetro de la esfera dada y tómese el punto C de modo que $AC = 4BC$ ($AB = 5BC$). Dibújese un semicírculo sobre AB como diámetro, trácese $DC \perp AB$ y determínese BD. Cuando se mira con atención un icosaedro, se observa en su superficie un conjunto de triángulos cuyos lados son a su vez los lados de pentágonos, los cuales se pueden considerar inscritos en círculos imaginarios. Como se pretende construir un sólido regular, todos los triángulos y pentágonos tienen que ser regulares e iguales, y todos los círculos también iguales. Por eso nos referimos por Ω a cualquiera de estos círculos, pues son todos iguales. Explicaremos esta construcción euclidiana por etapas.



(i) Comenzaremos describiendo el círculo $\Omega = EFGHK$ de radio BD e inscribimos en él el pentágono regular $P_5 = EFGHK$ (IV-11). Dividimos cada uno de los arcos EF, FG, GH, HK y KE en dos partes iguales mediante los puntos L, M, N, O y P, respectivamente, y formamos otro $P_5 = LMNOP$, también regular e igual al anterior. A continuación trazamos perpendiculares por los puntos E, F, G, H y K al plano $\Pi(\Omega)$ y sobre ellas tomamos segmentos iguales a BD, esto es

$$EQ = FR = GS = HT = KU = BD \tag{4.12}$$

formando seguidamente los segmentos QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP y PQ. Como $EQ, KU \perp \Pi(\Omega)$, por la Nota 2.4 (a), $EQ \| KU$. Pero, además, $EQ = KU$ por (4.12). Luego, en virtud de (I-33), los segmentos que unen en sus extremos rectas paralelas iguales son asimismo iguales y paralelos, es decir, $QU \| KE$ y $QU = KE$. Pero KE es un lado de P_5, así que QU es un lado de P_5. Por la misma razón, las rectas QR, RS, ST y TU son igualmente lados de un P_5 inscrito en Ω. Este pentágono $P_5 = QRSTU$ es equilátero, pues, por construcción. Como por (4.3) QE es el lado del hexágono inscrito en Ω y EP el lado del decágono (nótese que $arc(EP)$ es la mitad de $arc(EPK)$, que subtiende el lado KE de P_5), junto con el hecho de que $\widehat{QEP} = \widehat{R}$, a tenor del *teorema de Pitágoras* (I-47), sigue que $QP^2 = QE^2 + EP^2$. Y, en virtud de la Proposición 4.10, QP tiene que ser el lado de un P_5 inscrito en el mismo círculo. Por idéntico razonamiento llegaríamos a que PU y QU son lados de pentágonos inscritos en Ω. Por consiguiente, $\tau(QPU)$ es equilátero (ya que sus tres lados son lados de pentágonos regulares). De la misma manera deduciríamos que $\tau(QLR)$, $\tau(RMS)$, $\tau(SNT)$ y $\tau(TOU)$ son equiláteros.

(ii) Por otra parte, $\widehat{QEL} = \widehat{R}$ y $QL^2 = LE^2 + EQ^2$, donde $LE = l_{10}$ (ya que $arc(LE)$ es la mitad del arco $arc(LEP)$ que subtiende $PL = l_5$) y $EQ = l_6$

(puesto que $EQ = BD$, radio de Ω). De nuevo, de acuerdo con la Proposición 4.10, $QL = l_5$. Acabamos de verificar en el apartado anterior que $QP = l_5$. Entonces $\tau(QLP)$ es equilátero, pues sus tres lados QP, QL y PL son l_5. Por el mismo razonamiento $\tau(LRM)$, $\tau(MNS)$, $\tau(NTO)$ y $\tau(OPU)$ son equiláteros.

(iii) Determinado el centro V del círculo Ω (III-1), trazamos por él $VZ \perp \pi(\Omega)$ y tomamos VW, lado del hexágono, y WZ –en el mismo plano– y VX –en otro– como lados del decágono. Uniendo los puntos correspondientes, obtenemos los segmentos QZ, QW, UZ, EV, LV, LX y XM. Ahora bien, $VW, QE \perp \Pi(\Omega)$, lo que entraña que $VW \| QE$. Además, $VW = QE$ (lados de un hexágono), y utilizando (I-33), se infiere que $EV \| QW$ y $EV = QW$; de donde, siendo EV el radio de Ω, se deduce que $QW = l_6$. En resumen, $QW = l_6$, $WZ = l_{10}$ y $\widehat{QWZ} = \widehat{R}$. Aplicando el *teorema de Pitágoras*, vale $QZ^2 = QW^2 + WZ^2$, así que $QZ = l_5$, a la vista de la Proposición 4.13. Análogamente se establece que $ZU = l_5$ y ya sabíamos que también $QU = l_5$, como se probó en (i). Así que $QZ = UZ = QU = l_5$, lo que significa que $\tau(QUZ)$ es equilátero. Por la misma vía se llegaría a que todos los triángulos cuyas bases son QR, RS, ST y TU y vértices en el punto Z, son equiláteros. Finalmente, $VL = l_6$ (radio Ω), $VX = l_{10}$ y $\widehat{XVL} = \widehat{R}$ (ya que $XV \perp \Omega$), de modo que $LX^2 = VL^2 + VX^2$; por tanto, $LX = l_5$, por la Proposición 4.10. Similarmente, $MV = l_6$, $VX = l_{10}$ y $\widehat{MVX} = \widehat{R}$, por lo cual $MX^2 = VX^2 + MV^2$ (I-47) y así $MX = l_5$. En resumen, $LX = MX = ML = l_5$, lo que asegura que $\tau(LMX)$ es equilátero.

Igualmente se justifica que todos los triángulos, con bases en los segmentos MN, NO, OP y PL y vértices en el punto X, son equiláteros.

En conclusión, en el apartado *(i)* se ha demostrado que los diez triángulos de la parte del icosaedro comprendido en los planos paralelos que contienen los círculos $\Omega = \Omega(V; EV)$ y $\Omega = \Omega(W; WQ)$ son equiláteros. En el apartado *(ii)* se ha verificado que los cinco triángulos con vértices en Z son equiláteros y en el *(iii)* que los cinco triángulos con vértices en X también son equiláteros. Así pues, las 20 caras de este sólido son triángulos equiláteros iguales, es decir, se trata de un icosaedro.

(iv) Veamos ahora que este icosaedro está inscrito en una esfera. En virtud de la Proposición 4.9, al ser $VW = l_6$ y $WZ = l_{10}$, la recta entera VZ ha sido cortada en *e.y.m.r.* en el punto W, siendo VW el segmento mayor. Luego, teniendo en cuenta que $VW = VE$ y $WZ = VX$,

$$\frac{VZ}{VW} = \frac{VW}{WZ} \Leftrightarrow \frac{VZ}{VE} = \frac{VE}{VX} \tag{4.13}$$

Como $VZ \perp \Pi(\Omega)$ y $VE \subset \Pi(\Omega)$, entonces $VZ \perp VE$ y, por tanto, $\widehat{ZVE} = \widehat{R}$. Parecido argumento nos conduce a que $\widehat{EVX} = \widehat{R}$. Así pues, $\tau(VEZ) \sim \tau(VEX)$, ya que tienen dos ángulos iguales por valer $\widehat{R}$ y sus lados proporcionales por (4.13).

Consecuentemente, sus lados serán proporcionales.

$$\frac{VZ}{VE} = \frac{VE}{VX} = \frac{ZE}{EX} \Rightarrow \frac{EX}{VX} = \frac{ZE}{VE}$$

lo que nos indica que $\widehat{EXV} = \widehat{VEZ}$ son ángulos homólogos en estos triángulos, siendo los otros dos $\widehat{ZVE} = \widehat{EVX}(= \widehat{R})$ y $\widehat{XEV} = \widehat{VZE}$. Pero $\widehat{ZVE} = \widehat{R}$ es un ángulo exterior de $\tau(VEX)$, por lo cual

$$\widehat{R} = \widehat{ZVE} = \widehat{VEX} + \widehat{EXV} = \widehat{VEX} + \widehat{VEZ} = \widehat{XEZ}$$

es decir, $\tau(XEZ)$ es rectángulo en $\widehat{E}$. Por otra parte, $VZ = ZW + WV = WV + VX = WX$, pues $WZ = VX$ y $VW = WQ(= l_6)$, la primera de (4.13) se puede reescribir como

$$\frac{XW}{WQ} = \frac{WQ}{WZ}$$

Y, puesto que $\widehat{QWZ} = \widehat{R}$ y $\widehat{QWX} = \widehat{R}$ –porque $XZ \perp \Pi(\Omega)$– el mismo argumento establece que $\widehat{XQZ} = \widehat{R}$. Por consiguiente,la recta XZ, en ambos casos, subtiende un arco que es una semicircunferencia. Si fijamos la recta XZ como eje de rotación y hacemos girar alrededor de él el semicírculo construido sobre XZ como diámetro hasta dar una vuelta completa, se generará una esfera que pasa por Q y por los restantes vértices de icosaedro, y cuyo diámetro es XZ.
(v) Veamos, continuación, que esta esfera de diámetro XZ coincide con la esfera dada, es decir, que $XZ = AB$. A tal fin, bisequemos la recta VW en el punto J, es decir,

$$WJ = \frac{VW}{2} \;,\; ZJ = \frac{XZ}{2} \tag{4.14}$$

porque, dado que $VX = WZ$, el punto J también divide a XZ en dos partes iguales. Recordemos que VZ está dividida en $e.y.m.r.$ por el punto W, siendo ZW el trozo menor. Entonces, por la Proposición 4.3, se cumple que $(ZW + WJ)^2 = 5WJ^2$, esto es, $ZJ^2 = 5WJ^2$, igualdad que, a la vista de (4.14), adopta la forma

$$ZX^2 = 5VW^2 \tag{4.15}$$

Por otra parte, como $AB = 5BC$, sigue

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB \times AB}{BC \times AB} = \frac{AB^2}{BD^2} = 5 \Rightarrow AB^2 = 5DB^2 \tag{4.16}$$

Ahora bien, $VW = radio\, \Omega = l_6 = BD$. Entonces, de (4.15) y (4.16) se infiere que $ZX = AB$.
(vi) Por último, si suponemos que el diámetro de la esfera es racional, por (4.16)

también lo será el radio BD del círculo Ω y su diámetro $2BD$. Pero, en virtud de la Proposición 4.11, si se inscribe un pentágono regular (téngase presente que su lado es el lado del icosaedro) en un círculo de diámetro racional, su lado es la recta irracional llamada *menor.* $\square$

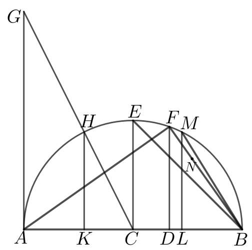
***Nota* 4.5** *En el anterior aserto hay interesantes relaciones numéricas. Así si* $BD = r_\Omega$ *(radio del círculo* Ω*) y* $AB = 2r$ *(radio de la esfera), de (4.16) se deduce que* $r_\Omega = \frac{2}{\sqrt{5}}r$.
Si $l_{6,\Omega}$ *denota el lado del hexágono inscrito en* Ω *es obvio que* $l_{6,\Omega} = \frac{2}{\sqrt{5}}r$.
De otra parte, el lado $l_{10,\Omega}$ *del decágono inscrito en* Ω *es, por la Proposición 4.9,* $l_{10,\Omega} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) r_\Omega = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) r$.
Finalmente, a tenor de la Proposición 4.11, como el lado del icosaedro es el lado del pentágono, resulta que $l_{S_{20}} = l_{5,\Omega} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}r_\Omega = \frac{r}{\sqrt{5}}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Análogamente se procede en

Proposición 4.17 ***(XIII-17).*** *Construir un dodecaedro, envolverlo en una esfera dada y demostrar que su lado es la recta irracional llamada apótoma.*

***Nota* 4.6** *Este aserto nos permite determinar* $l_{S_{12}} = UV = \frac{1}{3}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) r = \sqrt{2\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)}\, r$

Proposición 4.18 ***(XIII-18).*** *Poner los lados de las cinco figuras y compararlas.*



Sea AB el diámetro (racional) de la esfera dada. Lo dividimos a la mitad en C, y en D de modo que $AD = 2DB$, lo que implica que $AB = 3DB$. Describimos el semicírculo de diámetro AB y trazamos las perpendiculares CE y DF al mismo.
(α) Obsérvese que $AB = AD + DB = \frac{3}{2}AD$ y $AD \times AB = AF^2$, por el *teorema del cateto*. Entonces,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB \times AB}{AD \times AB} = \frac{AB^2}{AF^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow AB^2 = \frac{3}{2}AF^2$$

Pero, por la Proposición 4.13, el cuadrado del diámetro de la esfera es $AB^2 = \frac{3}{2}l_{S_4}^2$. Luego, el segmento AF es el lado del tetraedro : $AF = l_{S_4}$
(β) Teniendo en cuenta que $AB = 3BD$, vale

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB \times AB}{BD \times AB} = \frac{AB^2}{BF^2} \Rightarrow AB^2 = 3BF^2$$

Ahora bien, por la Proposición 4.15, sabemos que $AB^2 = 3l_{S_6}^2$, por lo que el lado del cubo es: $BF = l_{S_6}$

(γ) Como $AB = 2BC$, se tiene $\frac{AB}{BC} = \frac{AB\times AB}{BC\times AB} = \frac{AB^2}{BE^2} = 2 \Rightarrow AB^2 = 2BE^2$ En virtud de la Proposición 4.14, $AB^2 = 2l_{S_8}^2$, por consiguiente, el lado del octaedro es: $BE = l_{S_8}$.
(δ) Tracemos $AG \perp AB$ en el punto A y hagamos $AG = AB$. La recta GC corta al semicírculo en H y dibujamos $HK \perp AB$. Por el *teorema de Tales* (VI-4) $\frac{GA}{AC} = \frac{HK}{KC}$ y siendo $GA = AB = 2AC$, se deduce que $HK = 2KC$. Entonces $HK^2 = 4KC^2 \Rightarrow HK^2 + KC^2 = 5KC^2$. No obstante, por el *teorema de Pitágoras*, $HK^2 + KC^2 = HC^2$, así que $HC^2 = 5KC^2$. Pero $BC = HC$, pues son radios del semicírculo, por lo cual concluimos que

$$BC^2 = 5KC^2 \tag{4.17}$$

Así y todo, $BD = AB - AD = 2BC - 2BD = 2CD$, es decir, $BD = 2CD$; y como $BC = CD + DB = 3CD$, sigue que $BC^2 = 9CD^2$. Comparando con (4.17), queda $5KC^2 = 9CD^2$, lo que entraña que $KC^2 > CD^2$ y, por ello $KC > CD$. Pongamos ahora $CL = KC$ y levantemos $LM \perp AB$, que corta a la semicircunferencia en el punto M. Teniendo en cuenta que $AB = 2BC$ y $KL = 2CK$, se obtiene de (4.17) que $AB^2 = 4BC^2 = 4\cdot 5KC^2 = 5(2KC)^2 = 5KL^2$, esto es, $AB^2 = 5KL^2$ Pero, de acuerdo con la Nota 4.4, $AB^2 = (2r)^2 = 5l_{6,\Omega}^2$, o sea, $l_{6,\Omega} = KL$. En palabras, el segmento KL representa el radio del círculo sobre el que se construye el icosaedro, que coincide con el lado del hexágono inscrito en él.
Si volvemos a la Proposición 4.16, $AB = XZ = l_{6,\Omega} + 2l_{10,\Omega} = KL + 2l_{10,\Omega}$, esto es, $2l_{10,\Omega} = AB - KL = AKLB = 2LB$, ya que $AC = CB$ y $CL = CK$. Por consiguiente, el aldo del decǵono es $l_{10,\Omega} = LB$. De otra parte, dado que los puntos K y L son simétricos respecto del centro C del semicírculo, $HK = ML$ y además, $HK = 2KC = KC + CL = KL$, se desprende que $KL = ML$, es decir, $ML = l_{6,\Omega}$. Combinando por el *teorema de Pitágoras* (I-47) y la Proposición 4.10, concluimos que $MB^2 = ML^2 + LB^2 = l_{6,\Omega}^2 + l_{10,\Omega}^2$, es decir, $MB = l_{5,\Omega}$ es el lado del pentágono inscrito en el referido círculo. Y conocemos, por la construcción del icosaedro llevada a cabo en la Proposición 4.16 que precisamente ese lado del pentágono es el lado o arista del icosaedro: $MB = l_{S_{20}}$
(ε) En el apartado β se vio que $FB = l_{S_6}$ y, aplicando la Proposición 4.17, si se corta el lado FB del cubo en *e.y.m.r.*, el segmento mayor NB es el lado del dodecaedro: $NB = l_{S_{12}}$
Nótese que en base a las anteriores consideraciones resulta

$$lS_4{}^2 = \frac{4}{3}lS_8{}^2 \quad , \quad l_{S_4}^2 = 2l_{S_6}^2 \quad , \quad lS_8{}^2 = \frac{3}{2}lS_6{}^2 \tag{4.18}$$

Ello prueba que las aristas del tetraedro, octaedro y cubo guardan unas con otras razones racionales: son magnitudes conmensurables en cuadrado. Sin embargo, las aristas del icosaedro y del dodecaedro no guardan entre sí ni con ninguna de las

otras figuras razones racionales, pues son rectas irracionales, la *menor* en el caso del icosaedro, y la *apótoma* para el dodecaedro.
Por fin, bien de (4.18) o constatando el tamaño de los arcos y, por ende, la longitud de sus cuerdas, resulta que $AF > BE > BF > MB$. Vamos a probar que el lado del icosaedro es mayor que el del dodecaedro, es decir, $MB > NB$. Nótese que $\tau(FDB) \sim \tau(FAB)$, pues tienen dos ángulos iguales $\widehat{AFB} = \widehat{FDB} (= \widehat{R})$ y $\widehat{B}$ común. Así pues, $\frac{BD}{BF} = \frac{BF}{AB}$. Teniendo en cuenta este resultado y recordando que $AB = 3BD$, se tiene $\frac{BD}{AB} = \frac{BD}{BF} \cdot \frac{BF}{AB} = \frac{BD^2}{BF^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow BF^2 = 3BD^2$. Por otra parte, como $AD = 2BD$, sigue que $AD^2 = 4DB^2$; luego, $AD^2 > BF^2$, de donde $AD > BF$. Como $AL > AD$, se concluye que $AL > BF$. Pero AL ha sido dividida en $e.y.m.r.$ en K, siendo KL el segmento mayor, mientras que BF lo ha sido en N con NB su parte mayor, por lo cual $KL > NB$. Ahora bien, $KL = KM = ML$, de modo que $ML > NB$. Y NB es la hipotenusa de $\overset{\triangle}{MLB}$, $\widehat{L} = \widehat{R}$, lo que supone que $MB > ML$. De $MB > ML$ y $ML > NB$, se desprende por fin que $MB > NB$.
En definitiva tenemos que $AF > BE > BF > MB > NB$, que fija el siguiente orden entre las aristas de los poliedros regulares

$$l_{S_4} > l_{S_8} > l_{S_6} > l_{S_{20}} > l_{S_{12}}$$

Estos resultados teóricos vienen corroborados por los valores numéricos obtenidos en las Notas 4.2 a 4.6, en los que se a tomado $r = 1$

$$\sqrt{\frac{8}{3}} > \sqrt{2} > \sqrt{\frac{4}{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} > \frac{1}{3}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$$

respectivamente.
Euclides finaliza este libro XIII, y por tanto su obra *los Elementos*, afirmando que no hay más poliedros regulares que estos cinco. Razona que no se construye ningún ángulo sólido con dos triángulos equiláteros (Definición 2.11). Sin embargo, con tres se obtiene el tetraedro $(2\widehat{R})$, con cuatro el octaedro $\left(\frac{8}{3}\widehat{R}\right)$, y con cinco el icosaedro $\left(\frac{10}{3}\widehat{R}\right)$; pero con seis es imposible, ya que la suma de sus ángulos es $4\widehat{R}$, lo que contradice la Proposición 2.11. Cada ángulo sólido de un cubo está comprendido por tres cuadrados, y con cuatro no existe ningún poliedro, pues su suma sería $4\widehat{R}$. Finalmente, como el ángulo interno de un pentágono regular es $\frac{6}{5}\widehat{R}$, con este tipo de polígonos sólo se puede construir el dodecaedro, ya que $3 \cdot \frac{6}{5}\widehat{R} = \frac{18}{5}\widehat{R} < 4\widehat{R}$ y con cuatro se superaría claramente los $4\widehat{R}$. Y no es factible tampoco con ningún otro polígono (hexágono, heptágono,...), porque en todos los casos restantes el triple del ángulo interior es mayor o igual a $4\widehat{R}$ [1].

[1] Se sobreentiende que *Euclides* se refiere a poliedros convexos, si bien, actualmente que existan cinco, y sólo cinco, poliedros regulares -como asevera *Euclides*- hay que entenderlo en el marco de una definición de regularidad mucho más restrictiva, que se sale del objeto de este trabajo.

Bibliografía

[1] APOSTOL, TOM M. *Calculus.* Vol. I, Barcelona, 1979.

[2] BATISTA CRUZ, SARA GABRIELA. *Los Elementos de Euclides. Libros VII-VIII-IX.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2018.

[3] EUCLIDES. *Elementos (Libros I-IV)*, traducción al español y notas de M.L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1991.

[4] EUCLIDES. *Elementos (Libros V-IX)*, traducción al español y notas de M.L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1994.

[5] EUCLIDES. *Elementos (Libros X-XIII)*, traducción al español y notas de M.L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1996.

[6] GORRÍN HERNÁNDEZ, CANDELARIA NOEMÍ. *Los Elementos de Euclides. Libros I-IV.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2016.

[7] HEATH, THOMAS LITTE. *A History of Greek Mathematics. From Thales to Euclid.* Vol. I, Dover, New York, (1981[1921]).

[8] HEIBERG, J. L. *Euclid's Elements of Geometry.* The Greek text from *Euclidis Elements*, edidit et Latine interpretus est I. L. Heiberg, in aedibus G. G. Teubneri (1883-1885), edited and provided with a modern English translation, by R. Fitzpatrick.

[9] HERNÁNDEZ ALONSO, MELANIE. *Los Elementos de Euclides. Libros V-VI.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2017.

[10] HERNÁNDEZ CABEZAS, LAURA. *Los Elementos de Euclides. Libro X.* Trabajo de Fin de Grado presentado en la sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ULL, 2019.

[11] MILLÁN GASCA, A. *La fuerza del razonamiento matemático.* Nívola, Madrid, 2004.

[12] NEWMAN, JAMES ROY. *Sigma. El mundo de las matemáticas.* Vol. I, Barcelona: Grijalbo, 1976.

[13] PLA I CABRERA, JOSEP. *Euclides, la geometría. Las matemáticas presumen de figura.* RBA, Madrid, 2012.

[14] REY PASTOR, JULIO Y JOSÉ BABINI (1984). *Historia de la matemática.* Vol. I, Gedisa, Barcelona, 1984.

Euclid: Books XI, XII and XIII

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Lina María Hernández Brito
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100619478.edu.es

In this Final Degree Project we study Books XI, XII and XIII of *Euclid's Elements*, which deal with the geometry in te space.

1. Chapter 1. Life and work of Euclid

LITTLE is known about of *Euclid of Alexandria* (325-265 BC), one of the most famous classical Greek mathematicians, considered the "father of Geometry". Due to Proclus (412-485 AD), a prestigious Greek Neoplatonist philosopher, we know that *Euclid* lived and tauhght mathematics in Alexandria during the reign of Pharaoh Ptolemy I Soter (367-283 BC), creating a mathematical school around the celebrated Museum of this city. He wrote a dozen works about Geometry, Astronomy, Mechanics and Optics. But he will be remembered for his *magnum opus, the Elements*, one of the most important and influential works in the history of mathematics, in which the author introduced the deductive axiomatic method.

2. Chapter 2. Geometry in the space

AT the beginning of Book XI we can find a collection of 28 definitions used in these three books. The greatest part of this text, with 39 propositions, focalizes in a detailed analysis of the parallelepiped solids. The proofs of first three assertions are not at all correct. The fail lies in the fact that *Euclid* did not considerer a set of axioms for the three-dimensional space. We have selected the propositions

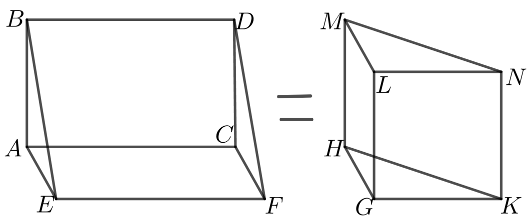
(i) "If two stright-lines are cut by parallel planes, then they will be cut in the same ratios" (XI-17).

(ii) "Any solid angle is contained by plane angles whose sum is less than four right-angles" (XI-21).

(iii) "Parallelepiped solids which are on equal bases, and have the same height, are equal to one another" (XI-31).

(iv) "If there are two equal height prisms, and one has a parallelogram, and the other a triangle, as a base, and the parallelogram is double the triangle, then the prisms will be equal" (XI-39).

That is, if $AB = MH$ and $plg(AF) = 2\,\overset{\triangle}{HGK}$,



3. Chapter 3. Stereometry

IN Book XII, through 18 propositions, *Euclid* relates prisms and cylinders, pyrramids and cones, and spheres with the cubed ratio of their respective diameters, by using theory of proportion and the method of exhaustion.
We select the following results

(i) "Pyramids which are of the same height, and have polygonal bases, are to one another as their bases" (XII-6).

(ii) "Any prism having a triangular base is divided into three pyramids having triangular bases which are equal to one another" (XII-7). Corollary: "Any pyramid is the third part of the prism which has the same base as it, and equal height".

(iii) "Every cone is the third part of the cylinder which has the same base as it, and an equal height" (XII-10).

(iv) "Spheres are to one another in the cubed ratio of their respective diameters" (XII-18).

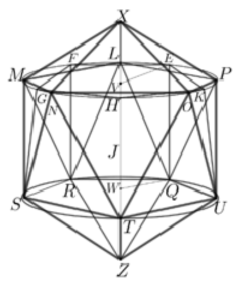
4. Chapter 4. Platonic solids

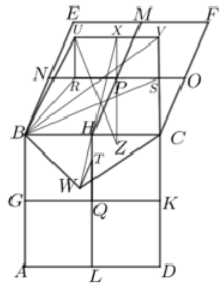
BOOK XIII is a very satisfactory finish to Euclid's Elements with the construction of the five regular polyhedrons: tetrahedron, cube, octahedron, dodecahedron and icosahedron.

(i) "If an equilateral pentagon is inscribed in a circle, then the square on the side of the pentagon is equal to the sum of the squares on the sides of the hexagon and of the decagon inscribed in the same circle" (XIII-10). $l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2$.

(ii) "If an equilateral pentagon is inscribed in a circle which has a rational diameter then the side of the pentagon is that irrational straight-line called *minor*" (XIII-11).

(iii) "To construct an icosahedron, and to enclose it in a sphere, and to show that the side of the icosahedron is that irrational called *minor*" (XIII-16).





(iv) "To construct a dodecahedron, and to enclose it in a sphere, and to show that its side is that irrational called an *apotome* (XIII-17).

(v) $l_{S_4} > l_{S_8} > l_{S_6} > l_{S_{20}} > l_{S_{12}}$ (XIII-18).

$$\sqrt{\tfrac{8}{3}} > \sqrt{2} > \sqrt{\tfrac{4}{3}} > \tfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} > \tfrac{1}{3}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$$

References

[1] EUCLIDES. *Elementos (Libros X-XIII)*, traducción al español y notas de M.L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1996.

[2] HEATH, THOMAS LITTE. *A History of Greek Mathematics. Froma Thales to Euclid.* Vol. I, Dover, New York, (1981[1921]).