

# **Trabajo de Fin de Grado en Física**

---

## **Simulación numérica de dinámica relativista de partículas cargadas en campos electromagnéticos empleando el método de Boris**

Julio de 2020

Alumno: Pablo Martín Luna

Tutor (1): Benito Gimeno Martínez  
Tutor (2): Daniel Esperante Pereira

# Índice

1. Introducción	2
2. Algoritmo numérico. Método de Boris	3
3. Cálculos relevantes	4
a) Ejemplo sin campo eléctrico: el solenoide finito	5
b) Campo eléctrico armónico. Fuerza de Miller	11
c) Ejemplo real: C-band 1.6 cell	19
4. Conclusiones	25
Apéndice A. Demostración del campo magnético de un solenoide finito	26
Apéndice B. Demostración de los parámetros de la trayectoria helicoidal	28

## Resumen

Las aplicaciones basadas en la aceleración de partículas cargadas son muy diversas: colisionadores de partículas, estudios de la estructura molecular y atómica o de las propiedades de materiales, tratamientos contra el cáncer... Por ello, es necesario saber calcular cómo se mueven (y, en consecuencia, qué energía adquieren) estas partículas en presencia de campos electromagnéticos. De esta forma se podrá optimizar el diseño de la estructura aceleradora dependiendo del propósito final que tengan las partículas aceleradas. Vamos a implementar un algoritmo numérico (el método de Boris) que permite resolver numéricamente de forma sencilla la fuerza de Lorentz relativista. Utilizaremos este método para estudiar las trayectorias descritas por electrones al atravesar un solenoide finito con una densidad de corriente constante y, posteriormente, al caso ideal en el que solo tenemos un campo eléctrico oscilante temporalmente en el que demostraremos que, bajo ciertas condiciones, podemos obtener la trayectoria promedio a partir de la fuerza de Miller. Finalmente, aplicaremos el método de Boris para estudiar una estructura aceleradora real con geometría cilíndrica formada por 1.6 celdas.

## Abstract

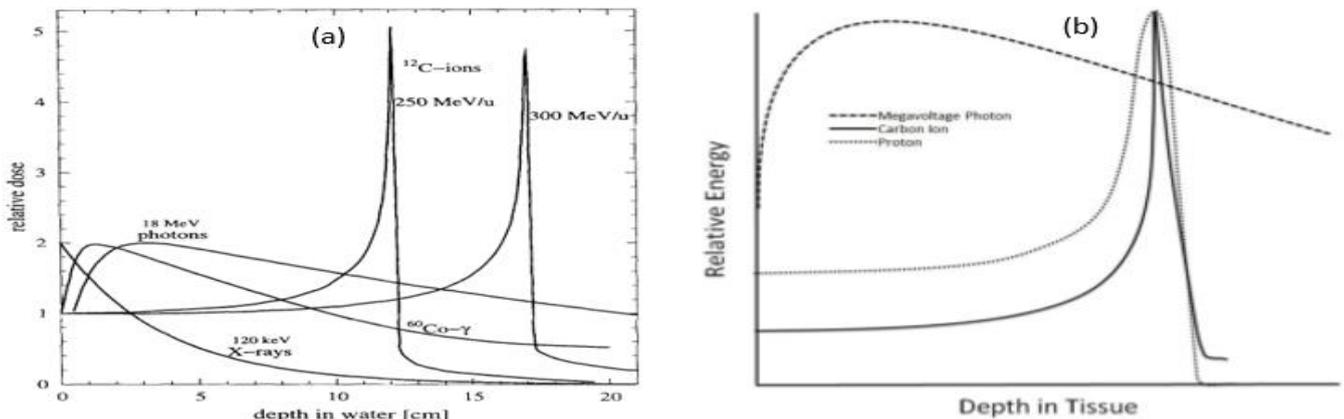
The range of applications based on the acceleration of charged particles is very diverse: particle colliders, studies of molecular and atomic structure or material properties, cancer treatments... Therefore, we must know how to calculate the movement of particles (and, consequently, their energy) in the presence of electromagnetic fields. In this way, the design of the accelerator structure can be optimized depending on the final purpose of the accelerated particles. We will implement a numerical algorithm (the Boris method) that solves numerically the relativistic Lorentz's force. We will use this method to study the trajectories described by electrons when they cross a finite solenoid with a constant current density and, subsequently, to the ideal case where we only have a temporarily oscillating electric field where we will demonstrate that, under certain conditions, we can obtain the average trajectory from Miller's force. Finally, we will apply the Boris method to study a real accelerator structure with cylindrical geometry formed by 1.6 cells.

## 1. Introducció

Los experimentos que necesitan la aceleración de partículas cargadas son muy numerosos y tienen aplicación en un gran abanico de ramas científicas.

Para empezar, las colisiones de partículas con elevadas energías han permitido descubrir experimentalmente nuevas partículas, como el antiprotón en el Bevatrón de Berkeley en 1955, los quarks a partir de los experimentos realizados hacia 1970 en el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) o, más recientemente, las investigaciones en el colisionador de hadrones del CERN que confirman la existencia del bosón de Higgs propuesto por el modelo estándar en los años 60. Así pues, los aceleradores y colisionadores de partículas son y han sido indispensables para la física de partículas.

Por otra parte, en medicina, la hadronterapia es un procedimiento habitual para el tratamiento de tumores. Las primeras partículas usadas en radioterapia fueron neutrones rápidos (con energías del orden de MeV), pero ahora su uso se limita al tratamiento de tumores en las glándulas salivales [1], ya que su curva de Bragg (dosis en función de la distancia de penetración) es muy similar a la de un haz de fotones [2]. En la actualidad la hadronterapia se realiza normalmente con protones o iones pesados (generalmente de carbono 12), ya que su curva de Bragg presenta un pico pronunciado poco antes de que estas partículas queden paradas (y la posición de dicho pico se puede variar cambiando la energía de las partículas, tal y como se observa en la Figura 1), esto es, se puede concentrar de manera muy efectiva la dosis en la zona tumoral, dañando poco las regiones colindantes al tumor. Hasta la fecha, la radioterapia con iones de carbono se ha estudiado para casi todos los tipos de tumores malignos [3]: neoplasias de cabeza y cuello, cánceres de pulmón, mama, gastrointestinal, próstata, piel, sarcomas... Para acelerar los iones de carbono hasta la energía buscada se suelen usar sincrotrones, mientras que para los protones se pueden usar tanto ciclotrones como sincrotrones o incluso aceleradores lineales (linacs) [4].



**Figura 1. (a)** Comparación de la curva de Bragg de diferentes partículas en la que se ve la dependencia con la energía en los iones de carbono-12 y **(b)** comparación entre las curvas de Bragg de fotones, iones de carbono-12 y protones (todos de 6 MeV). Obtenidas de [5] y [3], respectivamente.

Finalmente, podemos destacar la importancia de los haces de electrones que históricamente se han usado en los tubos de rayos catódicos de los televisores, en colisionadores para conocer la estructura atómica y molecular de la materia o con fines médicos como el tratamiento contra el cáncer o la generación de rayos X al acelerar electrones y hacerlos colisionar contra un blanco. Una de sus aplicaciones más recientes es la de los X-ray Free Electron Lasers (XFELs), los cuales generan pulsos de rayos X muy brillantes, ultrarápidos y con una gran coherencia [6]. Estos láseres permiten observar

blancos ultrapequeños con altísimas resoluciones espacio-temporales, permitiendo estudiar la interacción entre la materia y luz de alta frecuencia de alta potencia. Además, se puede estudiar la estructura de moléculas biológicas y virus e incluso crear materia con estados de alta densidad de energía [7]. Para obtener este tipo de radiación se usan aceleradores lineales y onduladores, de forma que al pasar el haz de electrones por estos últimos se emite radiación en la dirección tangencial a la trayectoria de los electrones, esto es, radiación sincrotrón [8].

Así pues, directa o indirectamente, los aceleradores de partículas tienen una gran relevancia en diferentes aspectos de la medicina, la biología, la física de partículas, ciencia de materiales... Por tanto, es de vital importancia conocer las trayectorias seguidas por estas partículas cargadas en los diferentes procesos de aceleración con la finalidad de optimizar el diseño de las estructuras aceleradoras. Por ello, vamos a describir e implementar un algoritmo numérico que nos permita resolver la ecuación de movimiento relativista de partículas cargadas dados unos campos electromagnéticos arbitrarios variables espacio-temporalmente.

## 2. Algoritmo numérico. Método de Boris

Para realizar las simulaciones numéricas debemos utilizar algún método que nos permita resolver numéricamente la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

donde  $m$  y  $q$  son la masa en reposo y la carga de la partícula, respectivamente,  $\vec{u} = \gamma\vec{v}$  es el momento relativista normalizado a la masa en reposo,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$  es el factor relativista, y  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  es el vector velocidad. Así pues, usaremos métodos numéricos explícitos de “salto de rana” [9] que nos permitan calcular las trayectorias de las partículas cargadas en unos ciertos instantes temporales  $t_n$ , separados un intervalo temporal  $\Delta t$ , a partir de una discretización de la fuerza de Lorentz. Estos métodos se basan en tres sencillos pasos [9]:

$$\vec{x}_{n+1/2} = \vec{x}_n + \frac{\vec{u}_n}{2\gamma_n} \Delta t, \quad (2)$$

$$\frac{\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n}{\Delta t} = \frac{q}{m} [\vec{E}(\vec{x}_{n+1/2}, t_{n+1/2}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}_{n+1/2}, t_{n+1/2})], \quad (3)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_{n+1/2} + \frac{\vec{u}_{n+1}}{2\gamma_{n+1}} \Delta t, \quad (4)$$

donde el subíndice  $n$  hace referencia al valor de la magnitud en el instante  $t_n = t_0 + n\Delta t$ . Nótese que el primer y el último paso consisten en calcular la posición de la partícula suponiendo que sigue un movimiento rectilíneo y uniforme durante un tiempo  $\Delta t/2$ , y es en el paso intermedio donde se realiza la discretización de la fuerza de Lorentz evaluando los campos electromagnéticos en la posición calculada en el primer paso, y suponiendo que la partícula tiene una velocidad media  $\vec{v}$ . Dependiendo de cómo se defina dicha velocidad se tiene el método de Boris, el de Vay o el de Higuera-Cary<sup>1</sup>. En el método de Boris su definición es

<sup>1</sup> En la ecuación (21) de [9] hay una errata: donde pone  $\vec{u}^-$  es  $\vec{u}^+$ .



a) Ejemplo sin campo eléctrico: el solenoide finito

El campo magnético producido por un solenoide centrado en el origen, de altura  $h$ , radio  $r_0$  (véase Figura 2 (a)) y densidad superficial de corriente  $\vec{K} = M\hat{\phi}$  ( $M = nI$ , si tenemos un solenoide con  $n$  espiras por unidad de longitud e intensidad constante  $I$ ), lo podemos calcular a partir de la ley de Biot y Savart [13]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times \vec{R}}{R^3} dS', \quad (9)$$

donde  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  es el vector relativo entre el punto donde calculamos el campo  $\vec{r}$  y el vector posición  $\vec{r}'$  que recorre la superficie del solenoide. Tomaremos las coordenadas cilíndricas habituales  $(r, \phi, z)$ . Dada la simetría de revolución del problema y que  $\vec{K} = M\hat{\phi}$ , el campo magnético no puede depender del ángulo acimutal  $\phi$  y lo podemos escribir de la forma (véase su demostración en el apéndice A)

$$\vec{B} = B_r(r, z)\hat{r} + B_z(r, z)\hat{z} \quad (10)$$

con

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \left[ \left( z + \frac{h}{2} \right) k_+ \left[ \left( \frac{1 - \frac{r}{r_0}}{1 + \frac{r}{r_0}} \right) \Pi(\sigma, k_+) + K(k_+) \right] - \left( z - \frac{h}{2} \right) k_- \left[ \left( \frac{1 - \frac{r}{r_0}}{1 + \frac{r}{r_0}} \right) \Pi(\sigma, k_-) + K(k_-) \right] \right], \quad (11)$$

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \sqrt{\frac{16r_0}{r}} \left[ \frac{E(k_+)}{k_+} - \frac{1}{k_+} \left( 1 - \frac{k_+^2}{2} \right) K(k_+) - \frac{E(k_-)}{k_-} + \frac{1}{k_-} \left( 1 - \frac{k_-^2}{2} \right) K(k_-) \right], \quad (12)$$

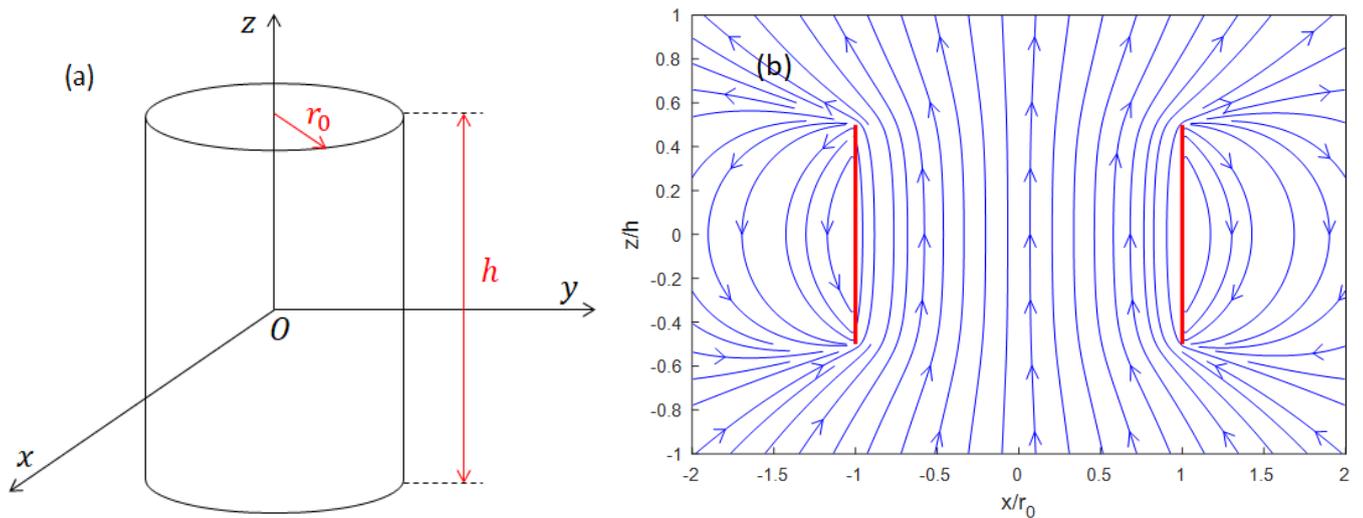
donde se han definido los parámetros

$$k_{\pm} = \sqrt{\frac{4rr_0}{(r + r_0)^2 + \left( z \pm \frac{h}{2} \right)^2}}, \quad \sigma = \frac{4rr_0}{(r + r_0)^2}, \quad (13)$$

y  $K(x)$ ,  $E(x)$  y  $\Pi(\sigma, x)$  son las integrales elípticas completas de primera, segunda y tercera especie, respectivamente [14],

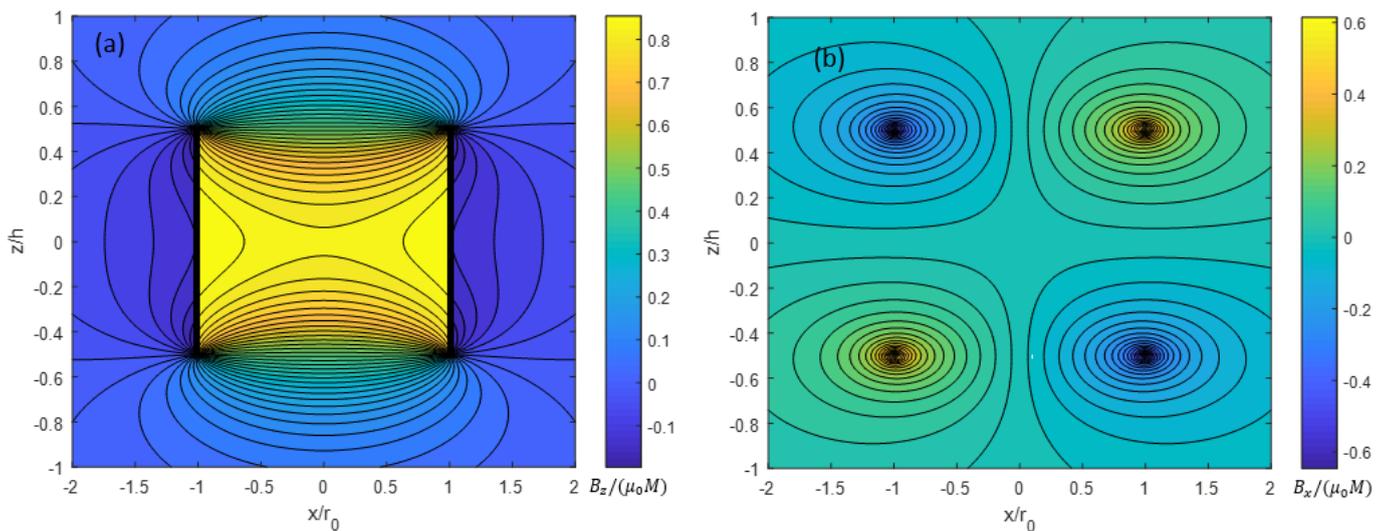
$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}, \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} dt, \quad (14)$$

$$\Pi(\sigma, x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - \sigma \sin^2 t) \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}.$$



**Figura 2.** (a) Representación esquemática del solenoide estudiado y (b) líneas del campo magnético en el plano XZ para  $h = 40$  mm y  $r_0 = h/3$ .

En la Figura 2 (b) se tienen las líneas del campo magnético para un caso concreto (recuérdese que hay simetría de revolución). Se observa que en el interior del solenoide el campo magnético apunta principalmente en la dirección  $\hat{z}$ , y las líneas de campo se cierran por el exterior del solenoide. En la Figura 3 se representan las componentes  $B_z$  y  $B_x$  (normalizadas) del campo magnético.

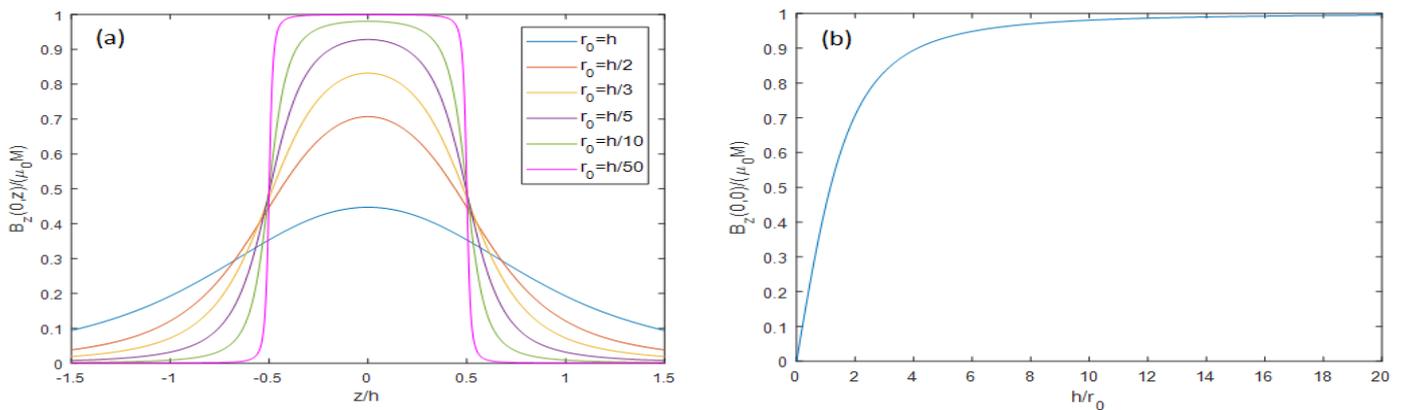


**Figura 3.** (a) Componente  $B_z$  y (b) componente  $B_x$  del campo magnético para  $h = 40$  mm y  $r_0 = h/3$ .

Por otra parte, en el eje Z ( $r = 0$ ) el campo magnético queda

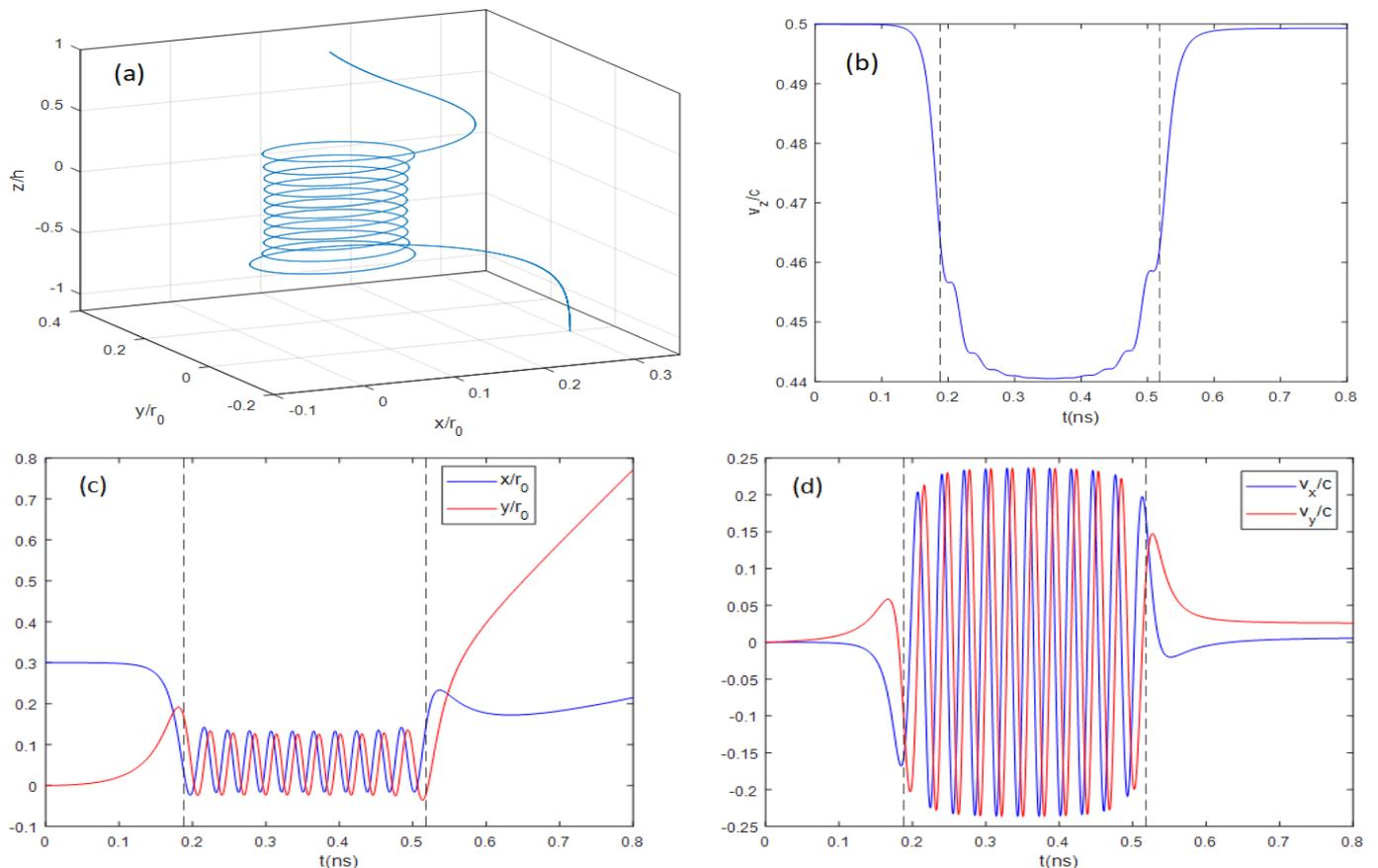
$$\vec{B}(0, z) = B_z(0, z)\hat{z}, \quad B_z(0, z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(z + \frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}} \right). \quad (15)$$

En la Figura 4 se observa que a medida que aumenta  $h/r_0$  se incrementa el valor del campo en el centro del solenoide, y a lo largo del eje Z es aproximadamente constante en el interior del solenoide y nulo fuera.



**Figura 4. (a)** Campo magnético a lo largo del eje Z y **(b)** campo magnético en el centro del solenoide en función de la relación entre  $h$  y  $r_0$  (en el límite  $h \rightarrow 0$  se tiene que  $B_z(0,0)/(\mu_0 M) \rightarrow 0$  porque  $M \rightarrow \infty$ , pero obviamente el campo  $B_z(0,0)$  de una única espira no es nulo).

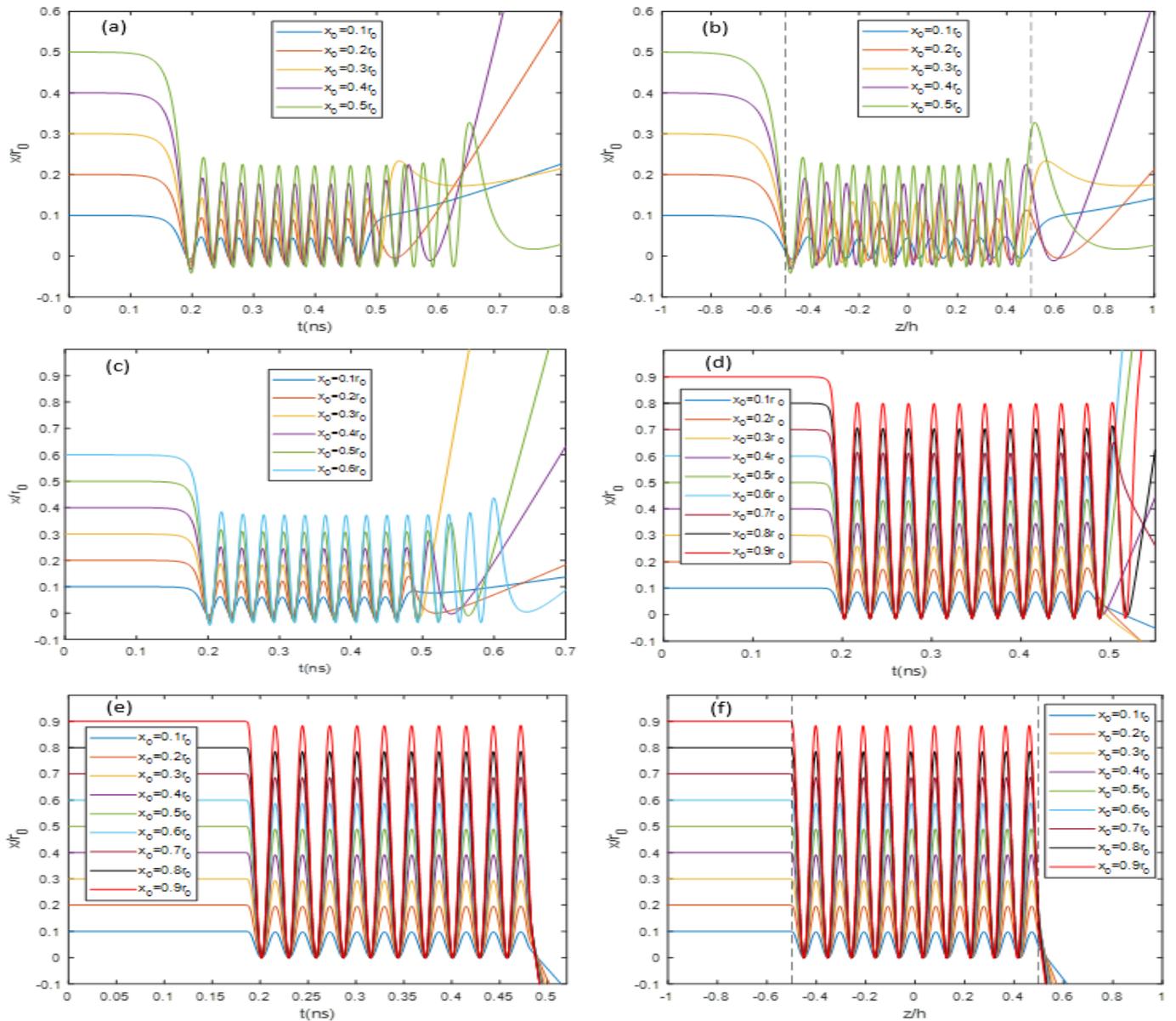
En el caso de un solenoide suficientemente largo, es decir, en el que se cumple  $h \gg r_0$ , se pueden aproximar dichos campos por  $B_z = B_0 = \mu_0 M$  constante en el interior del solenoide ( $|z| < h/2$  y  $r < r_0$ ) y  $B_r = -\frac{r}{2} B_0 \left[ \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z - \frac{h}{2}\right) \right]$  en  $r < r_0$  y nulo si  $r > r_0$ , [12]. La aparición de las deltas de Dirac en la componente radial se debe a la discontinuidad de  $B_z$ , pues se tiene que cumplir la ecuación de Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .



**Figura 5. (a)** Trayectoria espacial de un electrón, **(b)** velocidad en el eje Z, **(c)** coordenadas  $x$  e  $y$  (normalizadas a  $r_0$ ), y **(d)** velocidades en eje X e Y en función del tiempo. Las líneas discontinuas indican la entrada y salida del solenoide. Cálculos realizados para  $M = 1.153 \times 10^6$  A/m,  $h = 44$  mm,  $r_0 = h/10$ ,  $v_0 = c/2$ ,  $x_0 = 0.3r_0$  y  $z_0 = -5$  cm.

Ahora vamos a estudiar las trayectorias seguidas por electrones que se lanzan desde la posición del vector  $\vec{x}_0 = (x_0, 0, z_0)$ , por debajo del solenoide ( $z_0 < -h/2$ ), y en aproximación paraxial, es decir, con velocidad inicial en dirección  $\hat{z}$ :  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{z}$ . A partir de la forma del campo magnético, esperamos que, de forma aproximada, el electrón siga una trayectoria rectilínea en el exterior del solenoide (pues el campo magnético es prácticamente nulo), mientras que en el interior del solenoide seguirá una trayectoria helicoidal (pues el campo  $B_r$  proporciona una fuerza en dirección acimutal al entrar y salir del solenoide, y  $B_z$  es aproximadamente constante), lo que hará que disminuya la velocidad en el eje  $Z$ , ya que se debe conservar la energía. Todo esto se puede observar en la Figura 5.

Para realizar las simulaciones numéricas de este apartado 3.a) usaremos en todo momento las fórmulas exactas del campo del solenoide finito y el método de Boris con pasos temporales de  $\Delta t = 0.1$  ps, que para las dimensiones, densidad superficial del solenoide y  $v_0$  estudiados es del orden de  $T/300$ , siendo  $T$  el período correspondiente a la frecuencia ciclotrón de la trayectoria helicoidal del interior del solenoide.

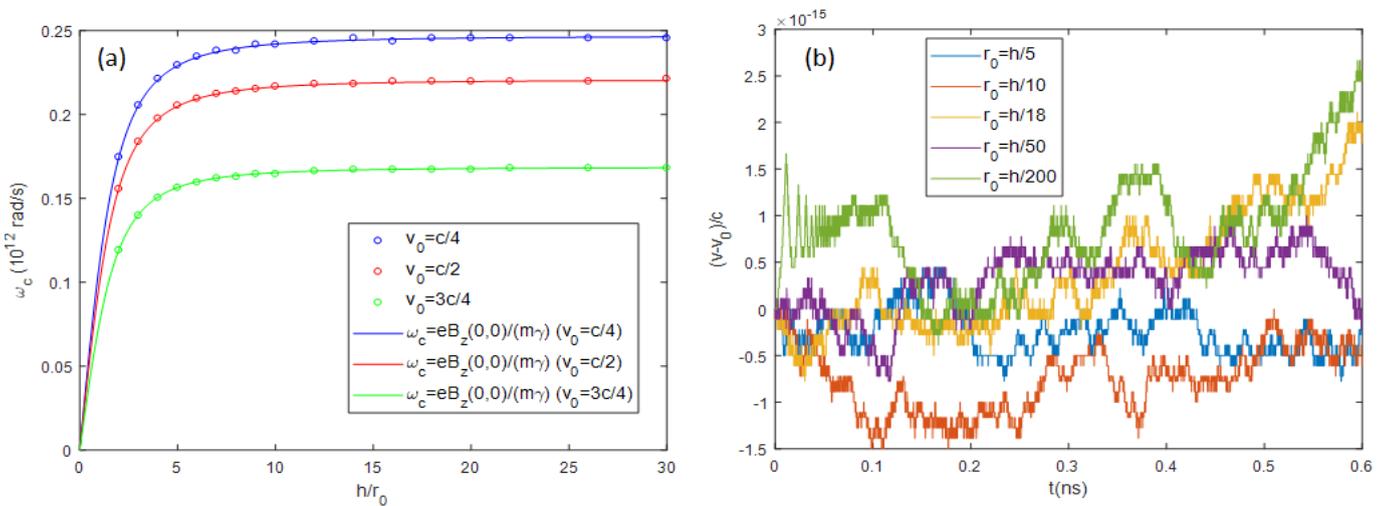


**Figura 6.** Coordenada  $x$  (en unidades de  $r_0$ ) de un electrón lanzado desde  $z_0 = -5$  cm y velocidad  $v_0 = c/2$  en un solenoide con  $M = 1.153 \times 10^6$  A/m y altura  $h = 44$  mm para diferentes valores iniciales de  $x_0$  y valores de  $r_0$ : (a) y (b)  $r_0 = h/10$ , (c)  $r_0 = h/18$ , (d)  $r_0 = h/50$ , (e) y (f)  $r_0 = h/200$ .

Para la aproximación de solenoide suficientemente largo, el electrón seguirá una trayectoria rectilínea y uniforme fuera del solenoide (pues el campo magnético es nulo), al llegar a  $z = -h/2$  el electrón adquirirá, debido a  $B_r$ , una velocidad acimutal  $v_\varphi = x_0 \frac{eB_0}{2\gamma m}$ , y describirá una trayectoria helicoidal en el interior del solenoide con un radio de curvatura  $R_c = x_0/2$ , centrado en  $(x_0/2, 0)$  y frecuencia (de ciclotrón)  $\omega_c = \frac{eB_0}{\gamma m}$  (si el solenoide es finito es una buena aproximación sustituir  $B_0$  por  $B_z(0,0)$ ). La demostración, basada en [12], de estas expresiones se muestra en el apéndice B.

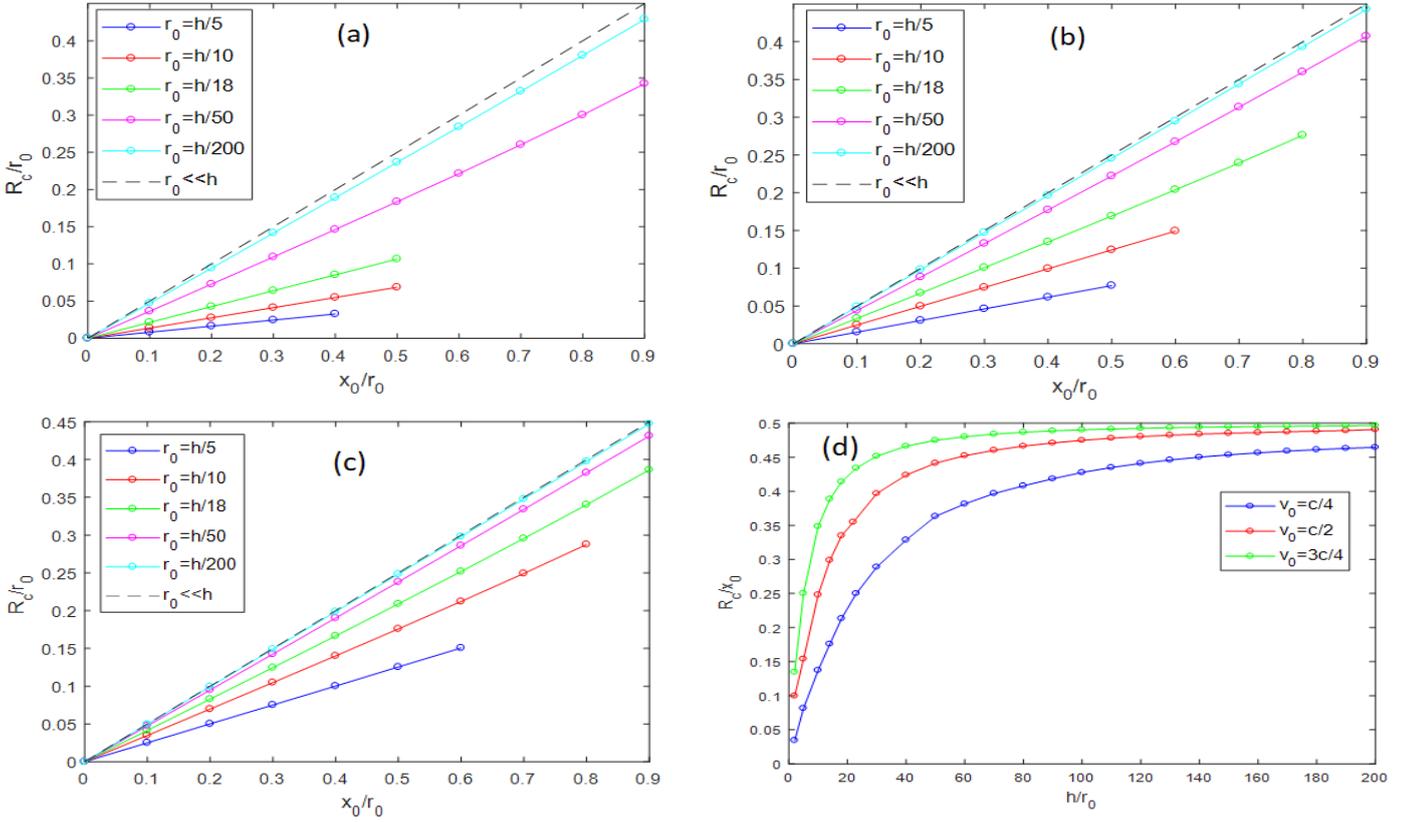
En la Figura 6 (e) y (f), en las que  $r_0 = h/200$ , vemos que el electrón sigue una trayectoria rectilínea hasta que entra en el solenoide y comienza la trayectoria helicoidal con  $R_c \approx x_0/2$  y  $\omega_c \approx 2.21 \times 10^{12}$  rad/s  $\approx \frac{eB_0}{\gamma m}$ , pues  $T \approx 0.0284$  ns, que es lo esperado para un solenoide suficientemente largo.

Sin embargo, a medida que el radio  $r_0$  del solenoide aumenta (con  $h$  constante) la aproximación del campo magnético de [12] es peor y hay una cierta transición entre la trayectoria rectilínea y la helicoidal. En la Figura 6 (b) se observa que los efectos del campo magnético el electrón los empieza a notar sobre  $0.3h$  antes de entrar (y después de salir) en el solenoide. De la Figura 6 se deduce, en primer lugar, que la frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$  no depende prácticamente de  $x_0$  y que disminuye a medida que  $r_0$  aumenta, tendiendo a  $\omega_c = \frac{eB_0}{\gamma m}$  cuando  $h \gg r_0$ , hecho que se observa más claramente en la Figura 7 (a). Esto se debe a que en un solenoide finito, el valor (aproximadamente constante) del campo magnético en el interior del solenoide (que es el que determina  $\omega_c$ ) es ligeramente menor que  $B_0 = \mu_0 M$ , tal y como se puede ver en la Figura 3 (a) o en la Figura 4. Por ello, las curvas de la Figura 7 (a) tienen la misma forma que la Figura 4 (b). Además, cabe destacar que a medida que aumenta  $x_0$  el electrón tarda más en atravesar el solenoide debido a que la velocidad de giro aumenta, por lo que la velocidad en dirección  $\hat{z}$  disminuye (pues se debe conservar la energía). En la Figura 7 (b) representamos la diferencia entre el módulo de la velocidad del electrón y su velocidad inicial (en unidades de  $c$ ) para un caso concreto. Aunque no se obtiene que dicha diferencia es siempre nula, la discrepancia máxima es muy pequeña (del orden de  $10^{-15}$ ), y se debe a que el cálculo numérico se realiza usando 16 decimales, por lo que en cada paso, por redondeos, puede aparecer un pequeño error numérico del orden de  $10^{-16}$ . Por tanto, podemos afirmar que, dentro de los posibles errores numéricos, el método de Boris conserva la energía.



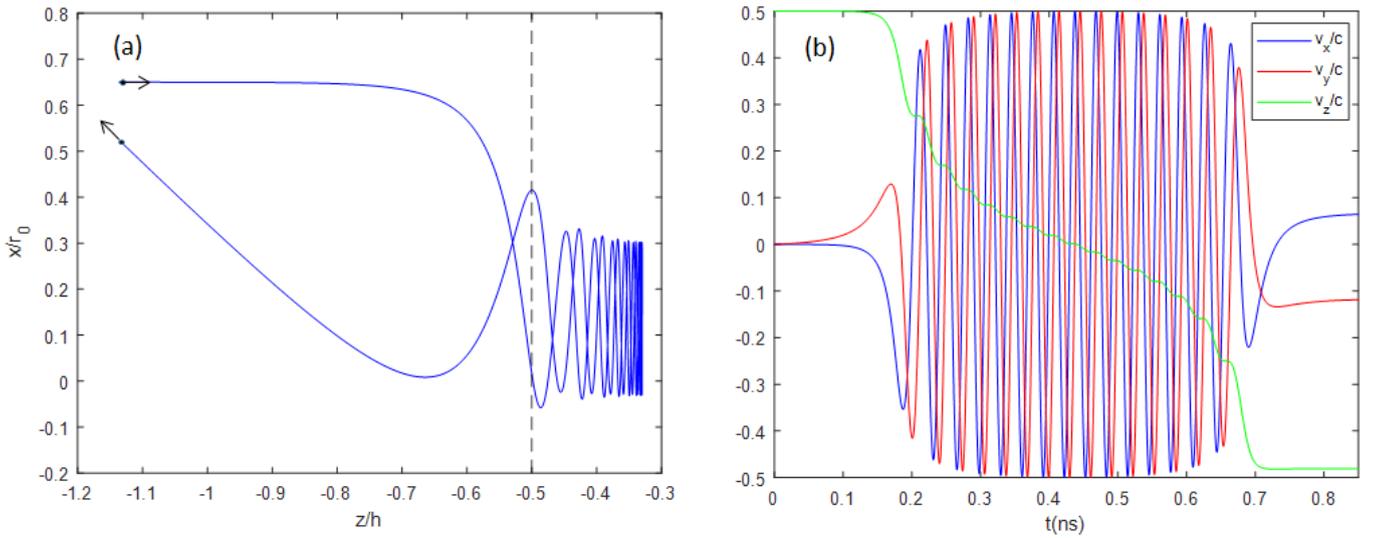
**Figura 7. (a)** Frecuencia de ciclotrón (en el centro del solenoide) en función de la relación altura-radio del solenoide. **(b)** Diferencia entre el módulo de la velocidad y la velocidad inicial (en unidades de  $c$ ) para  $v_0 = c/2$  y  $x_0 = 0.3r_0$ . Ambas gráficas realizadas para  $M = 1.153 \times 10^6$  A/m,  $h = 44$  mm y  $z_0 = -5$  cm.

Por otra parte, de la Figura 6 también se deduce que el radio de curvatura  $R_c$  se aleja más del esperado  $x_0/2$  a medida que  $r_0$  aumenta. Pero  $R_c$  sigue siendo prácticamente proporcional a  $x_0$  (véase Figura 8 (a), (b) y (c)), independientemente de la velocidad inicial. Además, en la Figura 8 (d) vemos que a medida que la velocidad inicial aumenta, el radio de curvatura  $R_c$  se acerca más a  $x_0/2$  (a igualdad de los restantes parámetros), es decir, la aproximación de solenoide suficientemente largo es mejor si los electrones son más energéticos.



**Figura 8.** Radio de curvatura  $R_c$  (en el centro del solenoide) en función de la distancia al eje inicial  $x_0$  (en unidades de  $r_0$ ) para (a)  $v_0 = c/4$ , (b)  $v_0 = c/2$  y (c)  $v_0 = 3c/4$ . (d) Radio de curvatura  $R_c$  (en unidades de  $x_0$ ), es decir, pendiente de las rectas de las figuras (a), (b) y (c) en función de la relación entre la altura (constante) y el radio del solenoide. Cálculos realizados para  $M = 1.153 \times 10^6 \text{ A/m}$ ,  $h = 44 \text{ mm}$  y  $z_0 = -5 \text{ cm}$ .

Para finalizar este apartado, cabe destacar que si el valor de  $x_0$  aumenta lo suficiente (por lo que es necesario un cierto radio  $r_0$  mínimo del solenoide, pues  $|x_0| < r_0$ ) y la velocidad con la que se lanzan los electrones es suficientemente baja ( $\gamma$  pequeña), el electrón no es capaz de llegar a  $z = 0$ , ya que es repelido. Por este motivo, en la Figura 8 (a), (b) y (c) no se ha podido representar hasta  $x_0/r_0 = 0.9$  para los valores de  $r_0$  más grandes. Esto no es más que una consecuencia de que el valor de  $x_0 \frac{eB_0}{2\gamma m}$  (que lo hemos definido antes como  $v_\phi$ ) sea superior a  $v_0$ , pues por el principio de conservación de la energía no se puede cumplir. Obviamente esta condición es exacta si el solenoide es suficientemente largo. En caso contrario, nos sirve como una estimación para saber cuándo el electrón será repelido, pues, si el solenoide es finito, hay que cambiar  $B_0$  por el valor del campo en el interior del solenoide, el cual es inferior a  $B_0$  y los efectos del campo magnético antes de que el electrón llegue al solenoide también pueden afectar. De todas formas, cuando el electrón es repelido en el interior del solenoide sigue una trayectoria circular en el plano XY con velocidad cercana a  $v_0$ , pero la velocidad en la dirección  $\hat{z}$  se acaba haciendo negativa, por lo que no consigue atravesar el solenoide (véase Figura 9).



**Figura 9. (a)** Coordenada  $x$  en funci3n de  $z$  y **(b)** velocidades en las direcciones cartesianas en funci3n del tiempo para  $h = 44$  mm,  $r_0 = h/10$ ,  $x_0 = 0.65r_0$ ,  $z_0 = -5$  mm y  $M = 1.153 \times 10^6$  A/m.

### b) Campo el3ctrico arm3nico. Fuerza de Miller

La fuerza de Miller o fuerza ponderomotiva [15] nos indica la fuerza promedio a la que est3 sometida una part3cula en presencia de una fuerza oscilante. La demostraci3n que vamos a seguir est3 basada en las referencias [16] y [17]. Para demostrar su expresi3n partimos de la ecuaci3n de movimiento de una part3cula cargada en la que podemos separar la parte con dependencia espacial y la parte arm3nica del campo el3ctrico (incluimos tambi3n una eventual fuerza independiente del tiempo)

$$m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E}(\vec{x}) \sin \omega t + \vec{F}(\vec{x}). \quad (16)$$

Aunque elegimos una dependencia temporal senoidal, la demostraci3n es igualmente v3lida para una dependencia cosenoidal. Separando la trayectoria en una parte lenta  $\vec{X}(t) = \langle \vec{x}(t) \rangle_T$ , que es la trayectoria promedio, y una oscilaci3n r3pida que en promedio deber3 ser nula  $\langle \vec{\xi}(t) \rangle_T = 0$ , podemos escribir  $\vec{x}(t) = \vec{X}(t) + \vec{\xi}(t)$ . Obviamente los promedios temporales se realizan en un per3odo  $T = 2\pi/\omega$ .

As3 pues, introduciendo estas definiciones en la ecuaci3n de movimiento, y desarrollando el campo el3ctrico  $\vec{E}(\vec{x})$  en serie de Taylor hasta primer orden alrededor de  $\vec{X}$  se tiene

$$m\ddot{X}_i + m\ddot{\xi}_i \approx q \left[ E_i(\vec{X}) + \vec{\xi} \cdot \nabla E_i \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} \right] \sin \omega t + F_i(\vec{X}) \quad (i = x, y, z). \quad (17)$$

En esta relaci3n podemos identificar la ecuaci3n de movimiento para la parte oscilante  $\vec{\xi}$  y la trayectoria promedio  $\vec{X}$ , respectivamente

$$m\ddot{\xi} \approx q\vec{E}(\vec{X}) \sin \omega t \rightarrow \vec{\xi}(t) \approx -\frac{q\vec{E}(\vec{X})}{m\omega^2} \sin \omega t, \quad (18)$$

$$m\ddot{X}_i \approx F_i(\vec{X}) + q\vec{\xi} \cdot \nabla E_i \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} \sin \omega t \approx F_i(\vec{X}) - \frac{q\vec{E}(\vec{X})}{m\omega^2} \cdot \nabla E_i \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} \sin^2 \omega t \quad (i = x, y, z), \quad (19)$$

donde hemos integrado dos veces para obtener la expresión de  $\vec{\xi}(t)$  (las constantes de integración son nulas debido a que el promedio temporal de la parte oscilante debe ser nulo), la cual hemos sustituido en la ecuación de movimiento de  $\vec{X}(t)$ . Realizando promedios temporales en la ecuación (19), se llega finalmente a (usando que  $\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = 1/2$  y que  $\vec{E}(\vec{X}) \cdot \vec{\nabla} E_i|_{\vec{x}=\vec{X}} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} E^2|_{\vec{x}=\vec{X}}$ )

$$m\ddot{\vec{X}} \approx \vec{F}(\vec{X}) - \frac{q^2}{4m\omega^2} \vec{\nabla} E^2|_{\vec{x}=\vec{X}}. \quad (20)$$

Por tanto, se observa que si queremos calcular la trayectoria promedio de una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  podemos aproximar la fuerza oscilante inicial por la fuerza  $\vec{F}_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \vec{\nabla} E^2|_{\vec{x}=\vec{X}}$  que se denomina fuerza de Miller o fuerza ponderomotiva. Es interesante darse cuenta que, por tanto, podemos definir una energía potencial  $U = \frac{q^2 E^2}{4m\omega^2}$  de manera que la fuerza de Miller adquiere la forma de una fuerza conservativa  $\vec{F}_p = -\vec{\nabla} U$  que “empuja” la partícula hacia donde el campo es menos intenso. Además, vemos que la magnitud importante es el cuadrado de  $q\vec{E}$  (la amplitud de la fuerza oscilante, es decir, la demostración es válida para cualquier fuerza oscilante), por lo que la fuerza ponderomotiva es independiente del signo de la carga de la partícula acelerada.

Es importante remarcar cuál es el rango de validez de esta fuerza. Para empezar, la fuerza se debe poder separar en el producto de una parte con la dependencia espacial (que no depende de la velocidad ni de otras derivadas temporales de orden superior) y otra temporal armónica. Además, en todo momento se han usado expresiones no relativistas y se ha supuesto que el campo eléctrico varía espacialmente de forma suave (en comparación con el desplazamiento de la partícula en un período; aproximación que, por tanto, será mejor cuanto más rápido sea el campo oscilante, i.e mayor sea  $\omega$ ).

Ahora vamos a calcular numéricamente las trayectorias seguidas por electrones para algunos campos eléctricos y compararlas con la que seguirían según la fuerza de Miller. Un detalle importante a la hora de calcular numéricamente las trayectorias es que las condiciones iniciales de la trayectoria real  $\vec{x}(t)$  y de la trayectoria promedio  $\vec{X}(t)$  no son las mismas. Obviamente, por definición se cumple que  $\vec{x}(0) = \vec{X}(0) + \vec{\xi}(0)$  y  $\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{X}}(0) + \dot{\vec{\xi}}(0)$ . Por otra parte, de la ecuación (18) se deduce que  $\vec{\xi}(0) = \vec{0}$  y  $\dot{\vec{\xi}}(0) = -\frac{q\vec{E}(\vec{X}(0))}{m\omega}$ . En consecuencia, se tiene que

$$\vec{x}(0) = \vec{X}(0) \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{X}}(0) - \frac{q\vec{E}(\vec{X}(0))}{m\omega} \approx \dot{\vec{X}}(0) - \frac{q\vec{E}(\vec{x}(0))}{m\omega}. \quad (21)$$

En el caso de que la fuerza oscilante inicial fuera de tipo coseno la relación entre las condiciones iniciales de la trayectoria real  $\vec{x}(t)$  y de la trayectoria promedio  $\vec{X}(t)$  son

$$\vec{x}(0) = \vec{X}(0) - \frac{q\vec{E}(\vec{X}(0))}{m\omega^2} \approx \vec{X}(0) - \frac{q\vec{E}(\vec{x}(0))}{m\omega^2} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{X}}(0) \quad (22)$$

pues se tiene que  $\dot{\vec{\xi}}(0) = \vec{0}$ ,  $\vec{\xi}(0) = -\frac{q\vec{E}(\vec{X}(0))}{m\omega^2}$  y  $\vec{E}(\vec{X}(0)) \approx \vec{E}(\vec{x}(0))$ , ya que para obtener la expresión de la fuerza de Miller se supuso que el campo  $\vec{E}$  varía espacialmente de forma suave.

Esto nos indica que dos partículas idénticas con cargas de signo opuesto y mismas condiciones iniciales  $\vec{x}(0)$  y  $\dot{\vec{x}}(0)$  no seguirán la misma trayectoria promedio (véase Figura 10), pues para que fuera idéntica deberían tener las mismas condiciones iniciales en la fuerza de Miller, pero la relación entre las condiciones iniciales de la trayectoria real y la promedio depende del signo de la carga, véase ecuaciones (21) y (22).

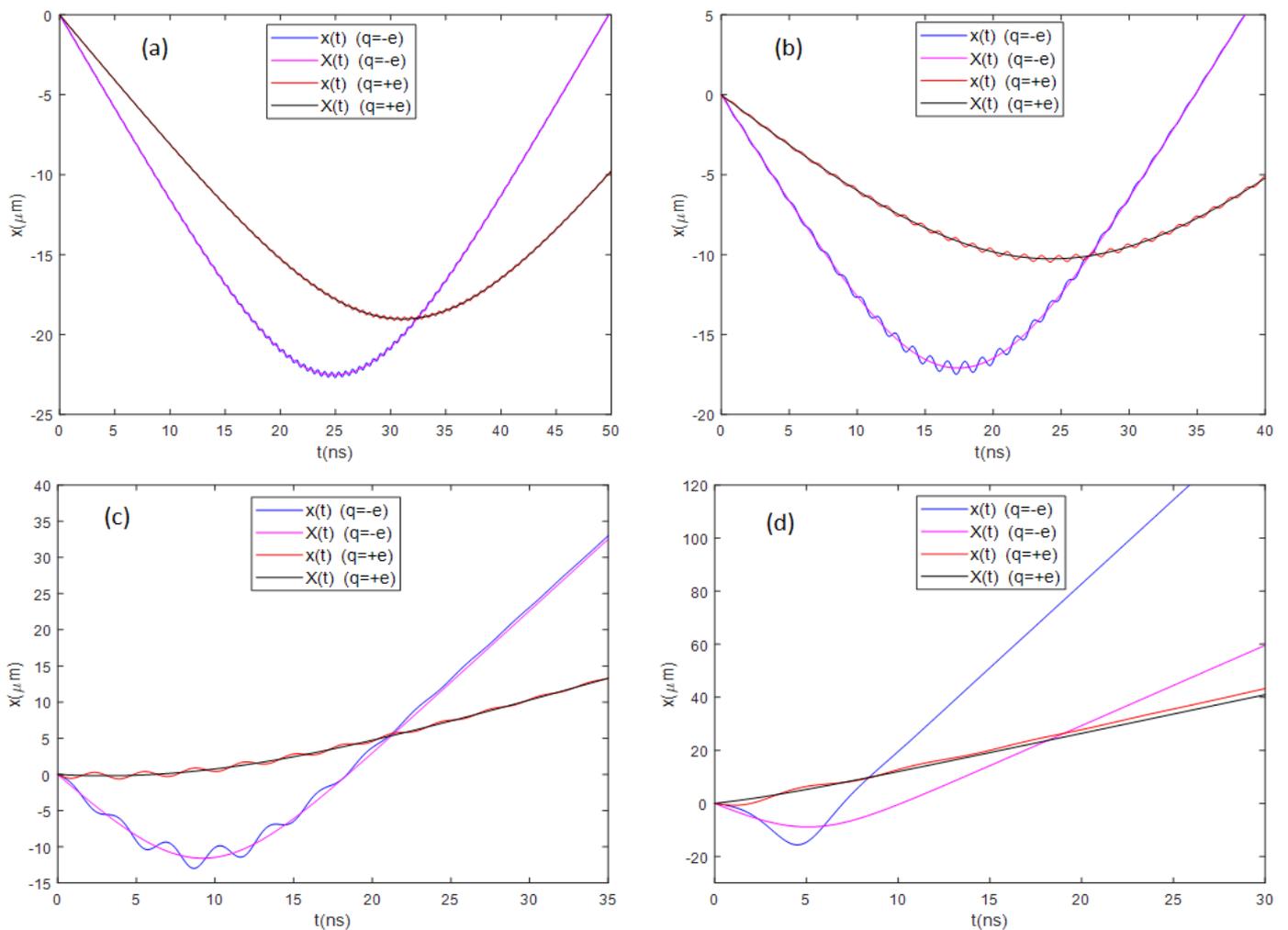
Para realizar los cálculos numéricos usaremos el método de Boris con  $\Delta t = T/300$  (para resolver la fuerza de Miller podemos definir un campo eléctrico  $\vec{E}_p = \vec{F}_p/q$ ). No obstante, nótese que, como no hay campo magnético, el método de Boris, el de Vay y el de Higuera-Cary coinciden, pues la definición de  $\vec{v}$  no influye en (3). Así pues, según las ecuaciones (2),(3) y (4), el cálculo de la trayectoria se reduce a

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{\vec{u}_n}{2\gamma_n} \Delta t + \frac{\vec{u}_n}{2\gamma_{n+1}} \Delta t + \frac{q\vec{E}(\vec{x}_{n+1/2}, t_{n+1/2})}{2m\gamma_{n+1}} (\Delta t)^2 \approx \vec{x}_n + \vec{v}_n \Delta t + \frac{\vec{a}_{n+1/2} (\Delta t)^2}{2}, \quad (23)$$

donde hemos tenido en cuenta que estamos en la aproximación no relativista, y hemos definido la aceleración  $\vec{a} = q\vec{E}/m$ . Esta forma de calcular la trayectoria es similar al algoritmo de Velocity-Verlet [18], que consiste en suponer un movimiento uniformemente acelerado en cada intervalo temporal de la discretización.

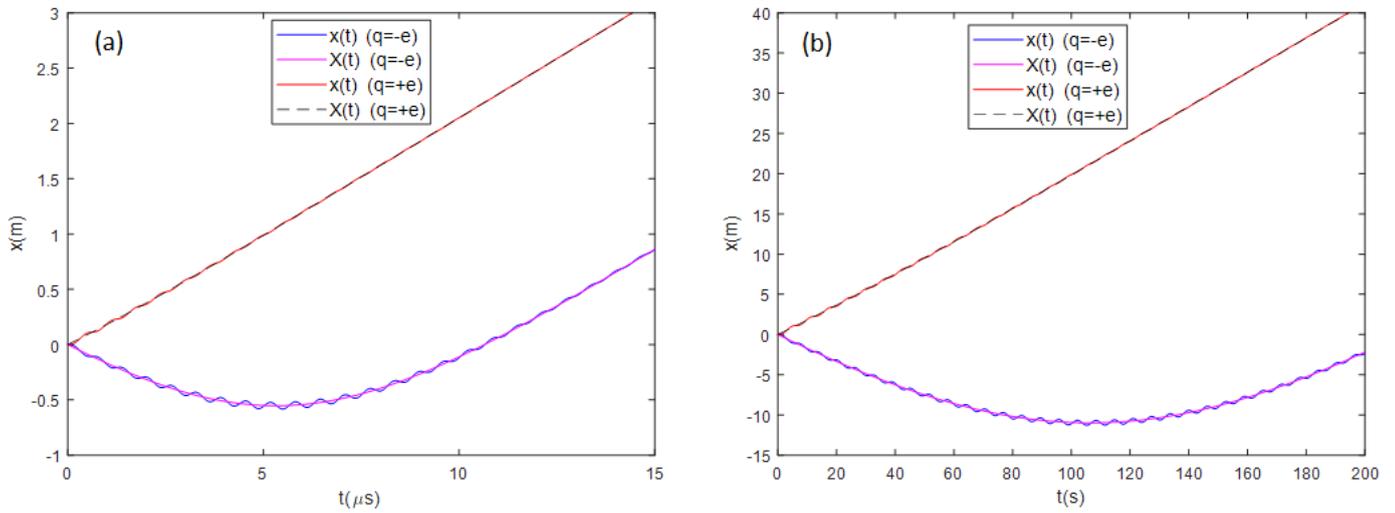
En primer lugar, vamos a considerar un campo eléctrico unidimensional del tipo

$$E_x = E_0 e^{-kx} [\sin \omega t] \rightarrow F_p = - \left. \frac{q^2}{4m\omega^2} \frac{d^2 E^2}{dx^2} \right|_{x=X} = \frac{q^2 E_0^2 k}{2m\omega^2} e^{-2kX}. \quad (24)$$



**Figura 10.** Trayectoria real de un electrón o positrón y comparación con la determinada por la fuerza de Miller para un campo eléctrico unidimensional  $E_x = E_0 e^{-kx} [\sin \omega t]$  con  $E_0 = 10 \text{ V/m}$ ,  $k = 10^5 \text{ m}^{-1}$  y condiciones iniciales  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = -1000 \text{ m/s}$  y frecuencias (a)  $\omega = 10^{10} \text{ rad/s}$ , (b)  $\omega = 5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ , (c)  $\omega = 2 \times 10^9 \text{ rad/s}$  y (d)  $\omega = 10^9 \text{ rad/s}$ .

En la Figura 10 se observa que la trayectoria  $X(t)$  calculada a partir de la fuerza de Miller se ajusta perfectamente al promedio de la trayectoria real cuando  $\omega$  es suficientemente grande (a) y (b), pero a medida que  $\omega$  disminuye las trayectorias no se ajustan perfectamente (c) y son muy distintas (d). Esto es debido a que, como ya hemos comentado anteriormente, se debe cumplir que la parte espacial del campo eléctrico tenga una variación suave durante el período de la oscilación, lo cual no se cumple si disminuimos suficientemente  $\omega$  (aumentamos suficientemente el período). Este hecho no quiere decir que para frecuencias inferiores (por ejemplo, del orden del Hz) no pueda ser válida la fuerza de Miller, pues simplemente se debe cumplir que las condiciones iniciales y los parámetros que determinan el campo (i.e.  $E_0$  y  $k$ ) sean tales que el campo tenga una variación pequeña en el movimiento de la partícula en un período, lo cual se puede conseguir en este caso disminuyendo el valor de  $E_0$  y  $k$  (campo más suave), o si aumentan  $x(0)$  o  $\dot{x}(0)$  para que la partícula se mueva por donde el campo ya ha caído suficiente (obviamente  $\dot{x}(0)$  no puede ser tan grande como queramos), véase Figura 11.



**Figura 11.** Trayectoria real de un electrón o positrón y comparación con la determinada por la fuerza de Miller para un campo eléctrico unidimensional  $E_x = E_0 e^{-kx} [\sin \omega t]$  con **(a)**  $E_0 = 10$  V/m,  $k = 1$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 10^7$  rad/s,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = -1000$  m/s y **(b)**  $E_0 = 10^{-12}$  V/m,  $k = 0.05$  m<sup>-1</sup>,  $\omega = 1$  rad/s,  $x(0) = 0$  y  $\dot{x}(0) = 0$  m/s.

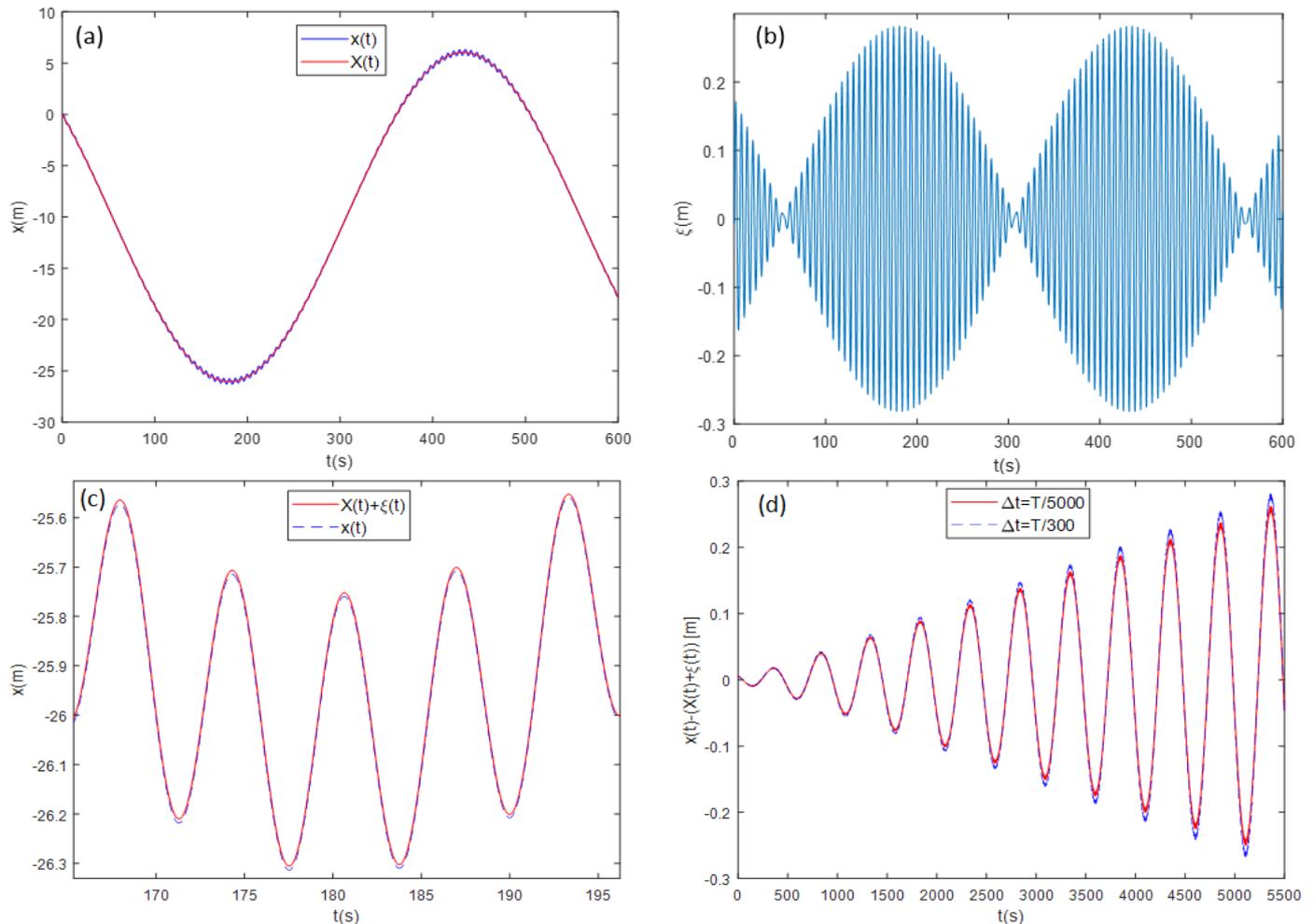
Este primer ejemplo nos ha servido para comprobar la validez de la expresión de la fuerza ponderomotiva y ver que dos partículas idénticas con carga opuesta no siguen la misma trayectoria (aunque la expresión de la fuerza de Miller sea la misma). Así pues, a partir de ahora solo analizaremos la trayectoria de electrones. El segundo caso que estudiaremos será un campo eléctrico del tipo  $E_x = E_0(1 + kx)[\sin \omega t]$ , que nos permite resolver analíticamente la fuerza de Miller **(20)**

$$X(t) = \frac{\dot{X}(0)}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \left( X(0) + \frac{1}{k} \right) \cos(\omega_m t) - \frac{1}{k}, \quad \omega_m = \frac{qE_0 k}{\sqrt{2}m\omega}. \quad (25)$$

Las condiciones iniciales  $X(0)$  y  $\dot{X}(0)$  están relacionadas con las de la trayectoria real  $x(t)$  según **(21)**. Una vez conocida la expresión de  $X(t)$  también podemos resolver analíticamente la ecuación de movimiento de la parte oscilante,  $m\ddot{\xi} \approx q\vec{E}(\vec{X}(t)) \sin \omega t$ ,

$$\begin{aligned} \xi(t) = & -\frac{qE_0 k}{m} \frac{\dot{X}(0)}{\omega_m} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\omega - \omega_m)^2} \cos[(\omega - \omega_m)t] - \frac{1}{(\omega + \omega_m)^2} \cos[(\omega + \omega_m)t] \right) + \\ & -\frac{qE_0 k}{m} \left( X(0) + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\omega - \omega_m)^2} \sin[(\omega - \omega_m)t] + \frac{1}{(\omega + \omega_m)^2} \sin[(\omega + \omega_m)t] \right). \end{aligned} \quad (26)$$

En la Figura 12 (a) se observa que la trayectoria real (calculada numéricamente con el método de Boris) está en concordancia con la promedio obtenida analíticamente. Además, en la Figura 12 (c), donde ampliamos 5 oscilaciones, vemos que la suma de la trayectoria promedio y la parte oscilante (calculadas analíticamente) coincide en gran medida con la trayectoria real. No obstante, a medida que pasa el tiempo la discrepancia es mayor (aunque sigue siendo muy pequeña, véase la Figura 12 (d)) debido a que la frecuencia  $\omega_m$  de la trayectoria  $X(t)$  es ligeramente inferior a la de la trayectoria real (el error se puede minimizar, pero no eliminar, haciendo la discretización temporal más pequeña), por lo que se desfasan ambas trayectorias poco a poco.

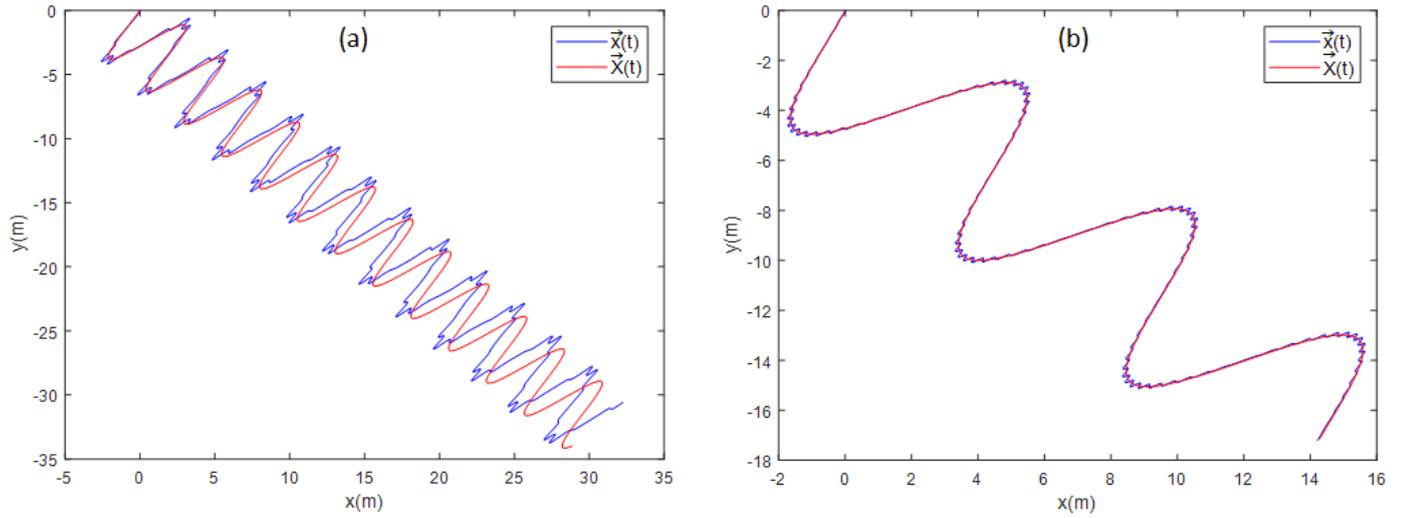


**Figura 12.** (a) Comparación de la trayectoria real  $x(t)$  y la promedio  $X(t)$ , (b) parte oscilante  $\xi(t)$ , (c) comparación de la trayectoria real obtenida numéricamente y la suma de la trayectoria promedio y la parte oscilante calculadas analíticamente y (d) diferencia entre ambas para dos discretizaciones temporales distintas. Cálculos realizados para un campo del tipo  $E_x = E_0(1 + kx)[\sin \omega t]$  con  $E_0 = 10^{-12} \text{V/m}$ ,  $k = 0.1 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  y condiciones iniciales  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.02 \text{ m/s}$ .

La demostración que realizamos de la fuerza de Miller es válida también en 2 y 3 dimensiones, así que vamos a analizar un campo eléctrico bidimensional (en 3-D las representaciones gráficas son más confusas). Analizaremos un campo del tipo  $E_x = E_y = E_0(1 + k(x + y))[\sin \omega t]$ . Así pues, la fuerza de Miller queda

$$\vec{F}_P = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \vec{\nabla} E^2 \Big|_{\vec{x}=\vec{x}} = -\frac{q^2 E_0^2 k}{m\omega^2} (1 + k(x + y))(\hat{x} + \hat{y}). \quad (27)$$

En la Figura 13 se observa que la trayectoria calculada a partir de la fuerza de Miller, como en casos anteriores, se asemeja más a la trayectoria real si la frecuencia  $\omega$  es superior.



**Figura 13.** Trayectoria en el plano XY (calculada durante  $100T; T = 2\pi/\omega$ ) para un campo bidimensional del tipo  $E_x = E_y = E_0(1 + k(x + y))[\sin \omega t]$  con  $E_0 = 10^{-12}$  V/m,  $k = 0.5 \text{ m}^{-1}$ , y condiciones iniciales  $\vec{x}(0) = (0,0)$ ,  $\dot{\vec{x}}(0) = (0.02, -0.08) \text{ m/s}$  para (a)  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , (b)  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .

Hasta ahora hemos analizado un campo eléctrico oscilante a una única frecuencia  $\omega$ . No obstante, aplicando el principio de superposición podemos realizar la demostración de la fuerza de Miller para un campo con varias frecuencias de oscilación. Así pues, si partimos de la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\vec{x}} = q \sum_{n=0} \vec{E}_n^{(s)}(\vec{x}) \sin \omega_n^{(s)} t + q \sum_{m=0} \vec{E}_m^{(c)}(\vec{x}) \cos \omega_m^{(c)} t + \vec{F}(\vec{x}), \quad (28)$$

y descomponemos la trayectoria real en una promedio  $\vec{X}(t)$  y una suma de partes oscilantes, esto es,

$$\vec{x}(t) = \vec{X}(t) + \sum_{n=0} \vec{\xi}_n^{(s)}(t) + \sum_{m=0} \vec{\xi}_m^{(c)}(t), \quad (29)$$

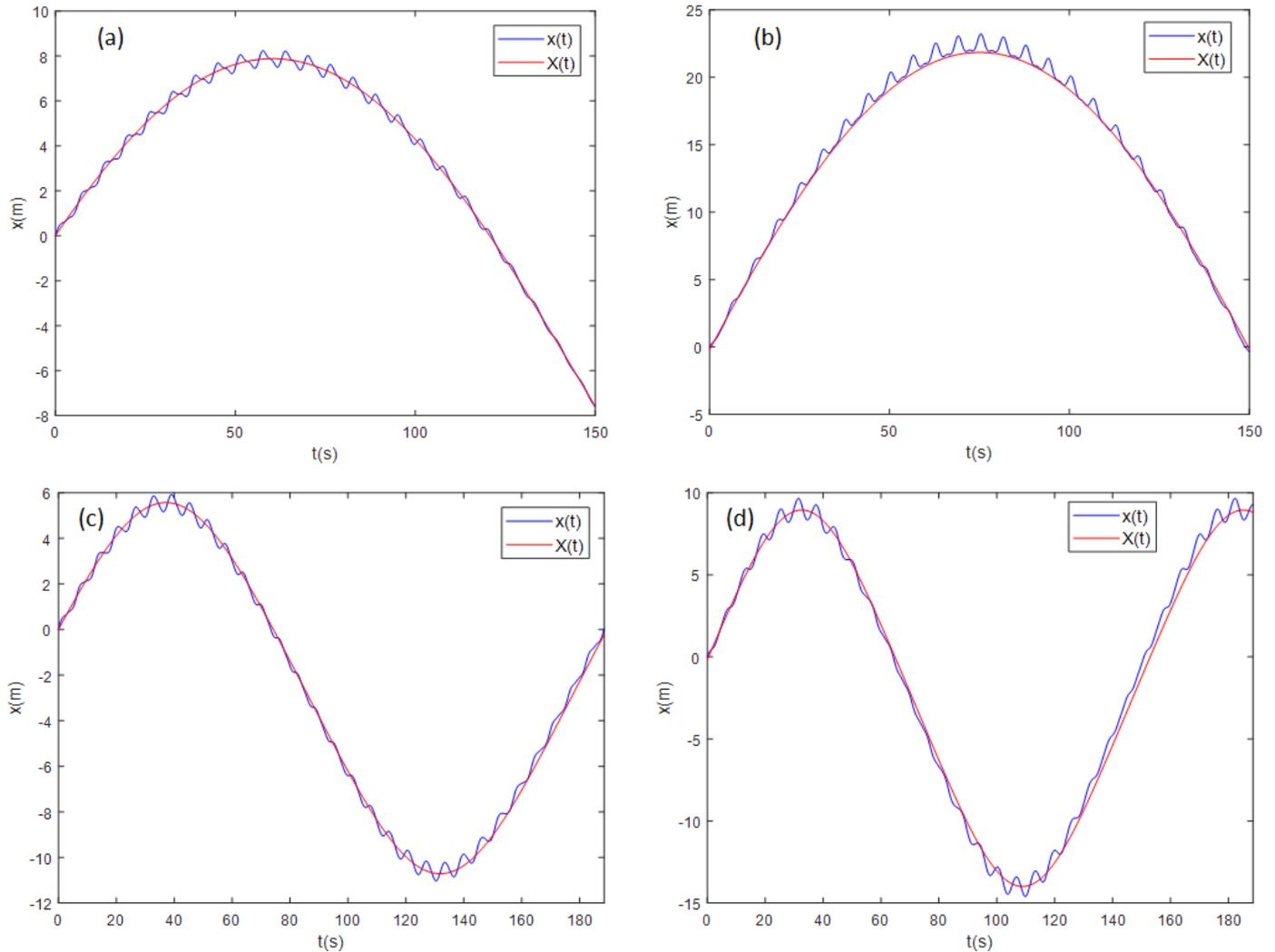
llegamos, procediendo de forma análoga a como se hizo para una única frecuencia, a

$$m\ddot{\vec{X}} \approx \vec{F}(\vec{X}) - \frac{q^2}{4m} \sum_{n=0} \vec{\nabla} (E_n^{(s)})^2 \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} \frac{1}{(\omega_n^{(s)})^2} - \frac{q^2}{4m} \sum_{m=0} \vec{\nabla} (E_m^{(c)})^2 \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} \frac{1}{(\omega_m^{(c)})^2}, \quad (30)$$

donde ahora la fuerza de Miller se ha convertido en una suma para cada uno de los campos oscilantes (más el eventual campo no oscilante  $\vec{F}(\vec{X})$ ). Por tanto, la fuerza de Miller es aplicable a cualquier fuerza periódica, ya que siempre podremos desarrollarla en serie de Fourier: combinación lineal de senos y cosenos (de frecuencias angulares múltiplo de  $\omega$ ) más una constante. Además, vemos que si el campo tiene la forma  $E_x = E_0 \cos(kx - \omega t) = E_0(\cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t)$  de onda plana, la fuerza de Miller, según (30), es nula. Por otra parte, las condiciones iniciales de la trayectoria real y la promedio se relacionan por las expresiones

$$\vec{x}(0) \approx \vec{X}(0) - \frac{q}{m} \sum_{m=0} \vec{E}_m^{(c)}(\vec{x}(0)) \frac{1}{(\omega_m^{(c)})^2}, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{X}}(0) - \frac{q}{m} \sum_{n=0} \vec{E}_n^{(s)}(\vec{x}(0)) \frac{1}{\omega_n^{(s)}}. \quad (31)$$

Para comprobar la veracidad de estas expresiones vamos a estudiar algunos campos eléctricos unidimensionales con dos fuerzas armónicas de distinta frecuencia, tal y como se expone en la Figura 14. Se observa que en todos los casos hay un buen acuerdo entre la trayectoria real y la que predice la fuerza de Miller.



**Figura 14.** Comparación entre la trayectoria real y la obtenida por la fuerza de Miller para los campos **(a)**  $E_x = E_1(1 + k_1x) \sin \omega_1 t + E_1(1 + k_2x) \sin \omega_2 t$ , **(b)**  $E_x = E_1(1 + k_1x) \cos \omega_1 t + E_1(1 + k_2x) \cos \omega_2 t$ , **(c)**  $E_x = E_1(1 + k_1x + b_1x^2) \sin \omega_1 t + E_1 e^{-b_2x^2} \sin \omega_2 t$  y **(d)**  $E_x = E_1(1 + k_1x + b_1x^2) \cos \omega_1 t + E_1 e^{-b_2x^2} \sin \omega_2 t$ . Valores numéricos:  $E_1 = 10^{-12} \text{V/m}$ ,  $k_2 = 2k_1 = 0.2 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 2\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$ ,  $b_1 = 2b_2 = 0.02 \text{ m}^{-2}$ ,  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.5 \text{ m/s}$ . Discretización temporal  $\Delta t = T_2/300$  con  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ . En los campos (a) y (b) la fuerza de Miller tiene solución analítica del tipo (25) o (34).

Para finalizar este apartado, vamos a considerar que la parte temporal es de tipo diente de sierra, que denotamos como  $\text{diente}(t)$ . Su desarrollo en serie de Fourier es

$$\text{diente}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt). \quad (32)$$

En la Figura 15 (a) tenemos su representación gráfica y comparación con la serie de Fourier tomando 5 y 10 términos, respectivamente. Por otra parte, consideraremos que la parte espacial del

campo eléctrico es del tipo lineal  $E_x = E_0(1 + kx)[\text{diente}(t)]$ , ya que nos permite resolver la fuerza de Miller de forma analítica. Aplicando las ecuaciones (30) y (32) llegamos a la ecuación diferencial

$$\ddot{X} + kCX = -C, \quad C = \frac{2E_0^2 k q^2}{4m^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right]^2 = \frac{2E_0^2 k q^2}{4m^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \zeta(4) = \frac{E_0^2 k q^2}{45m^2} \pi^2, \quad (33)$$

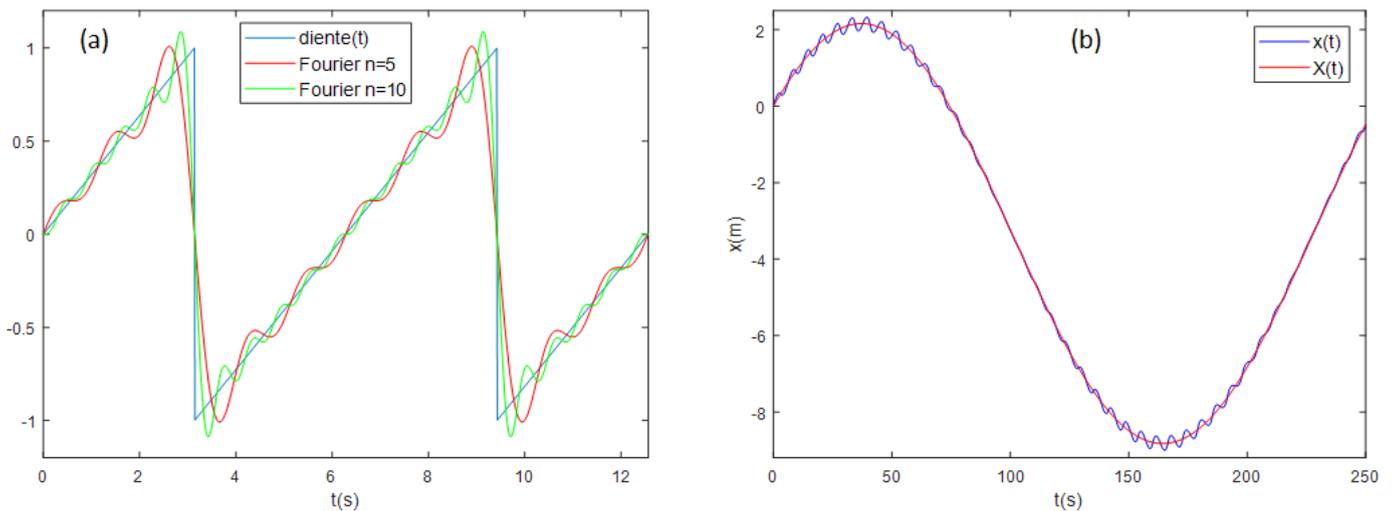
donde  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  es la función zeta de Riemann. La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$X(t) = \frac{\dot{X}(0)}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + \left(X(0) + \frac{1}{k}\right) \cos(\omega_m t) - \frac{1}{k}, \quad \omega_m = \sqrt{kC} = \frac{qE_0 k \pi}{\sqrt{45}m}, \quad (34)$$

y las condiciones iniciales  $X(0)$  y  $\dot{X}(0)$  están relacionadas con las de la trayectoria real según (31) como

$$X(0) = x(0), \quad \dot{X}(0) = \dot{x}(0) + \frac{qE_0}{m} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{n} = \dot{x}(0) + \frac{qE_0}{m} \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{12} = \dot{x}(0) + \frac{qE_0}{m} \frac{\pi}{6}. \quad (35)$$

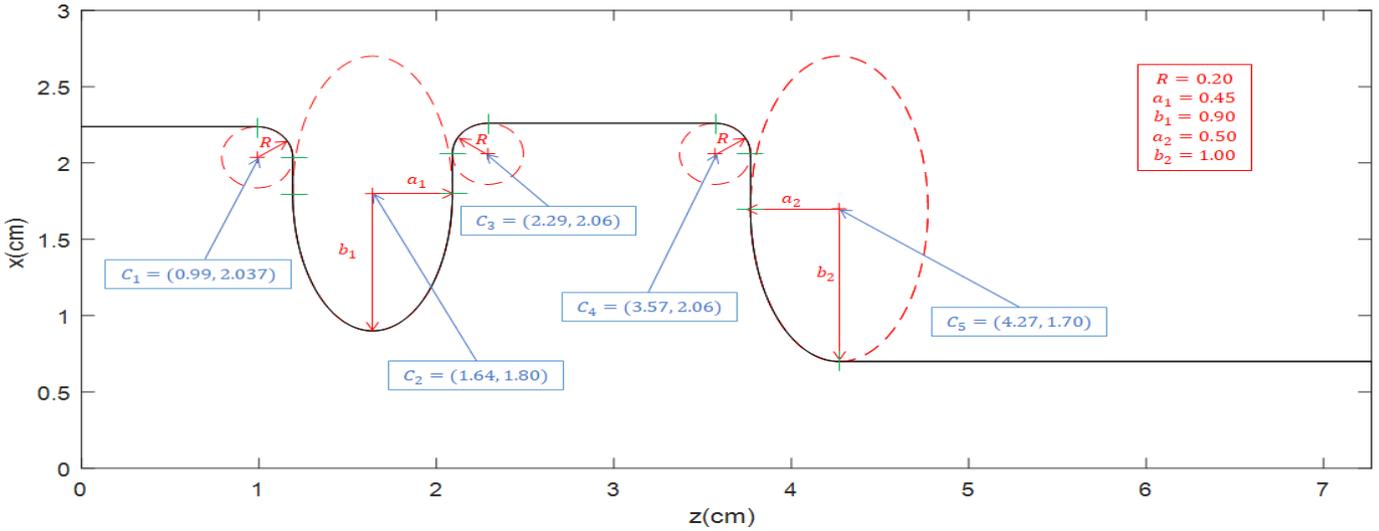
En la Figura 15 (b) comparamos la trayectoria real y la predicha por la fuerza de Miller para unos valores numéricos concretos. Nótese que es similar a la Figura 12 (a), ya que, aunque la parte temporal sea diferente, la fuerza de Miller es similar. Se pueden repetir los mismos cálculos y gráficas que se hicieron para ese caso, obteniéndose los mismos resultados cualitativamente.



**Figura 15.** (a) Representación gráfica de la función de  $\text{diente}(t)$  y comparación con la serie de Fourier con 5 y 10 términos. (b) Trayectoria real  $x(t)$  (calculada numéricamente) y promedio  $X(t)$  (34) para un campo  $E_x = E_0(1 + kx)[\text{diente}(t)]$  con  $E_0 = 10^{-12} \text{V/m}$ ,  $k = 0.3 \text{ m}^{-1}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0.2 \text{ m/s}$ .

c) Ejemplo real: C-band 1.6 cell.

En este apartado vamos a estudiar las trayectorias seguidas por un electrón en el interior de un acelerador cuya geometría se muestra en la Figura 16. Esta estructura consiste en dos celdas (de diferente longitud) de RF con una señal de banda C (entre 4 y 8 GHz) y permite acelerar electrones (generados previamente por efecto fotoeléctrico en un fotocátodo) obteniéndose una fuente de electrones (radiación sincrotrón tipo XFEL).



**Figura 16.** Geometría del perfil estudiado (con simetría cilíndrica), donde  $C_1, C_3$  y  $C_4$  indican el centro de las tres circunferencias de radio  $R$ ;  $C_2$  y  $C_5$  los centros de las elipses de semieje menor  $a_1$  y  $a_2$ , y semieje mayor  $b_1$  y  $b_2$ , respectivamente. Las líneas verdes indican el punto de tangencia entre un tramo recto y la circunferencia o elipse. Los datos numéricos están en cm.

En este caso desconocemos la expresión analítica de los campos electromagnéticos, pero debido a la simetría cilíndrica del acelerador sabemos que tendrán la forma

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_r(r, z)\hat{r} + E_z(r, z)\hat{z}) \sin(\omega t + \alpha), \quad (36)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu_0 H_\phi(r, z)\hat{\phi} \cos(\omega t + \alpha) \quad (37)$$

con  $f = 5549.4249$  MHz. Por otra parte, podemos calcular numéricamente  $E_r(r, z)$ ,  $E_z(r, z)$  y  $H_\phi(r, z)$  en un conjunto de puntos usando el software Poisson Superfish [19]. En la Figura 17 se muestra la dirección de la amplitud del campo eléctrico y las componentes no nulas del campo electromagnético en el interior del acelerador (en el plano XZ). Se observa que los campos son prácticamente nulos en la zona final del acelerador, la componente  $E_r$  solo es apreciable en las zonas cercanas a las superficies elípticas, y  $H_\phi$  en las zonas alejadas del eje axial. Por tanto, si los electrones a acelerar se inyectan desde  $z = 0$  con velocidades fundamentalmente en dirección axial y desde posiciones cercanas al eje será la componente  $E_z$  la más importante. Así pues, para conseguir una aceleración óptima necesitaremos que cuando se inyecte el electrón, la función  $\sin(\omega t + \alpha)$  sea negativa y cuando el electrón llegue a la segunda celda (situada entre 2 y 4 cm) dicha función haya cambiado de signo, esto es, haya transcurrido un semiperiodo. De esta forma se conseguirá que el electrón sea acelerado en las dos zonas donde  $E_z$  tiene un mayor valor.



No obstante, ahora no podemos usar directamente las expresiones del método de Boris descritas anteriormente, ya que desconocemos las expresiones analíticas de los campos electromagnéticos. Así pues, para obtener el valor de dichos campos en un punto general  $(r, z)$  vamos a realizar una interpolación bilineal [20], que no es más que una generalización en dos dimensiones de la interpolación lineal habitual. La expresión general de esta interpolación es

$$f(x, y) = (x_2 - x_1)^{-1}(y_2 - y_1)^{-1} [f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y) + f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1)], \quad (38)$$

cuya interpretación geométrica se puede ver en la Figura 18, que nos indica que el valor de la función en un punto arbitrario  $(x, y)$  es la media del valor de la función en los 4 puntos más cercanos  $Q_{ij}$  (en los que conocemos su valor) ponderados por el área del rectángulo opuesto a dichos vértices y normalizado al área total (suma de la superficie de los cuatro rectángulos).

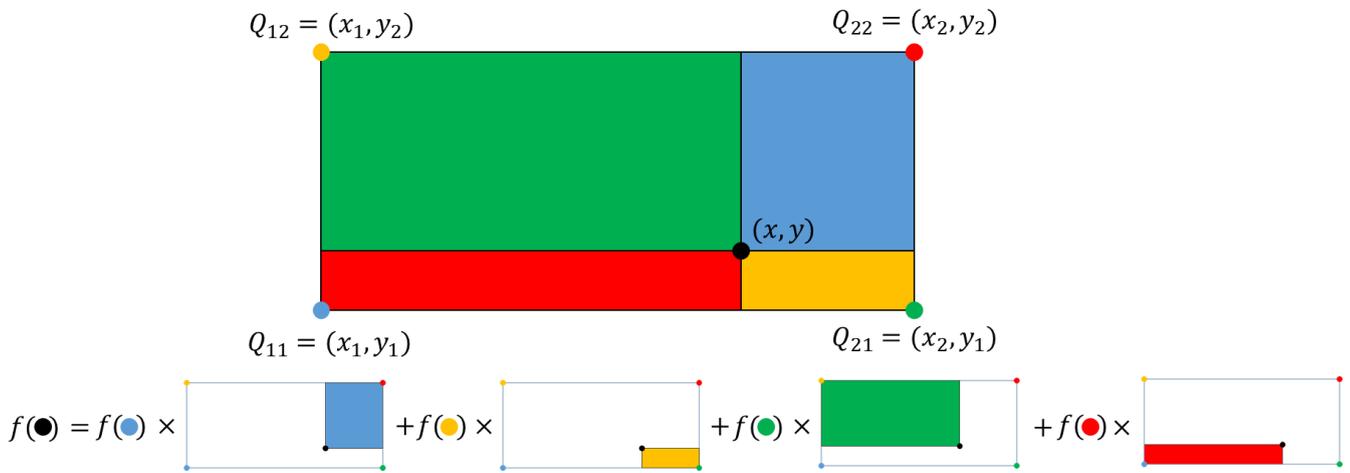
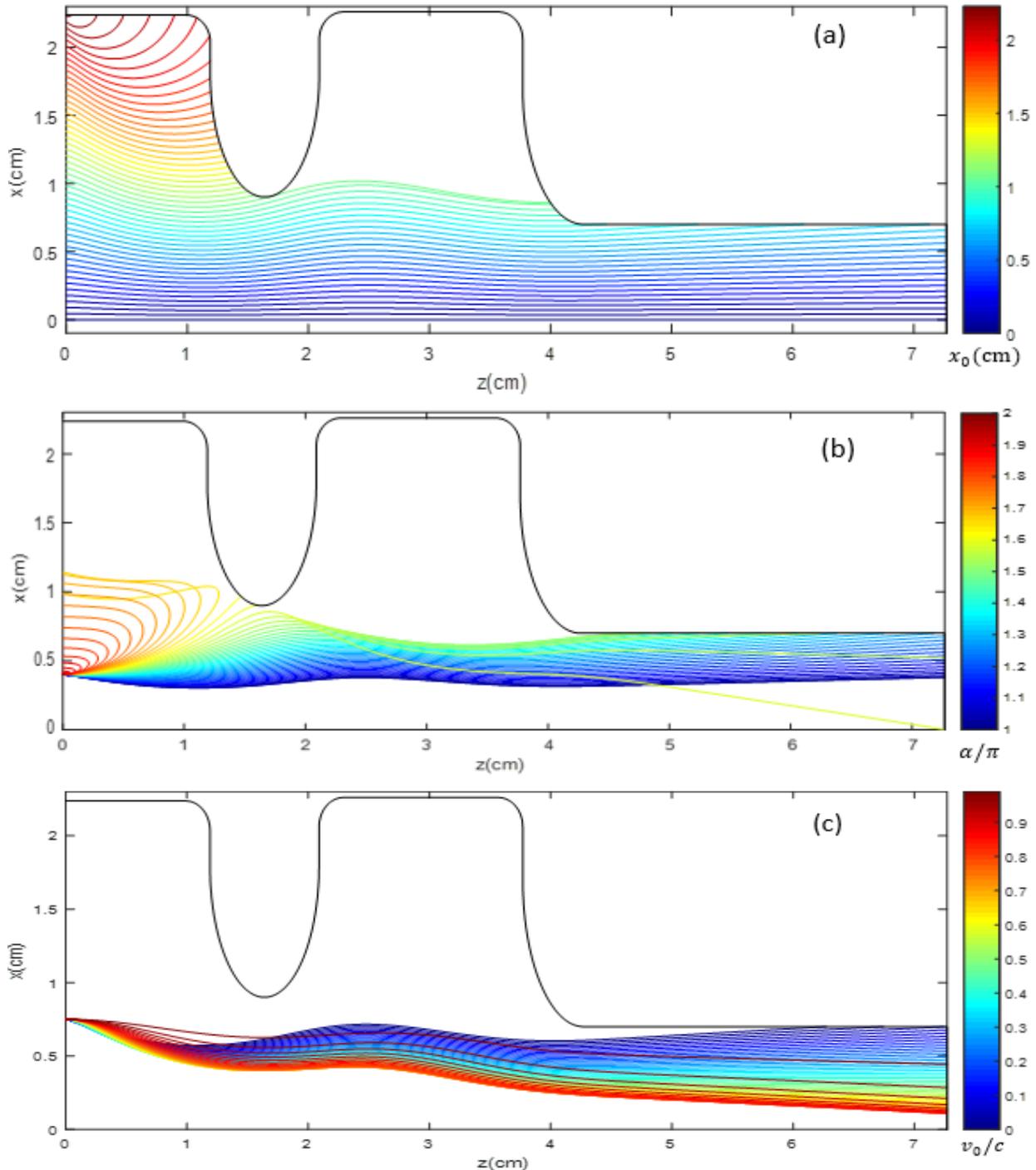


Figura 18. Interpretación geométrica de la interpolación bilineal.

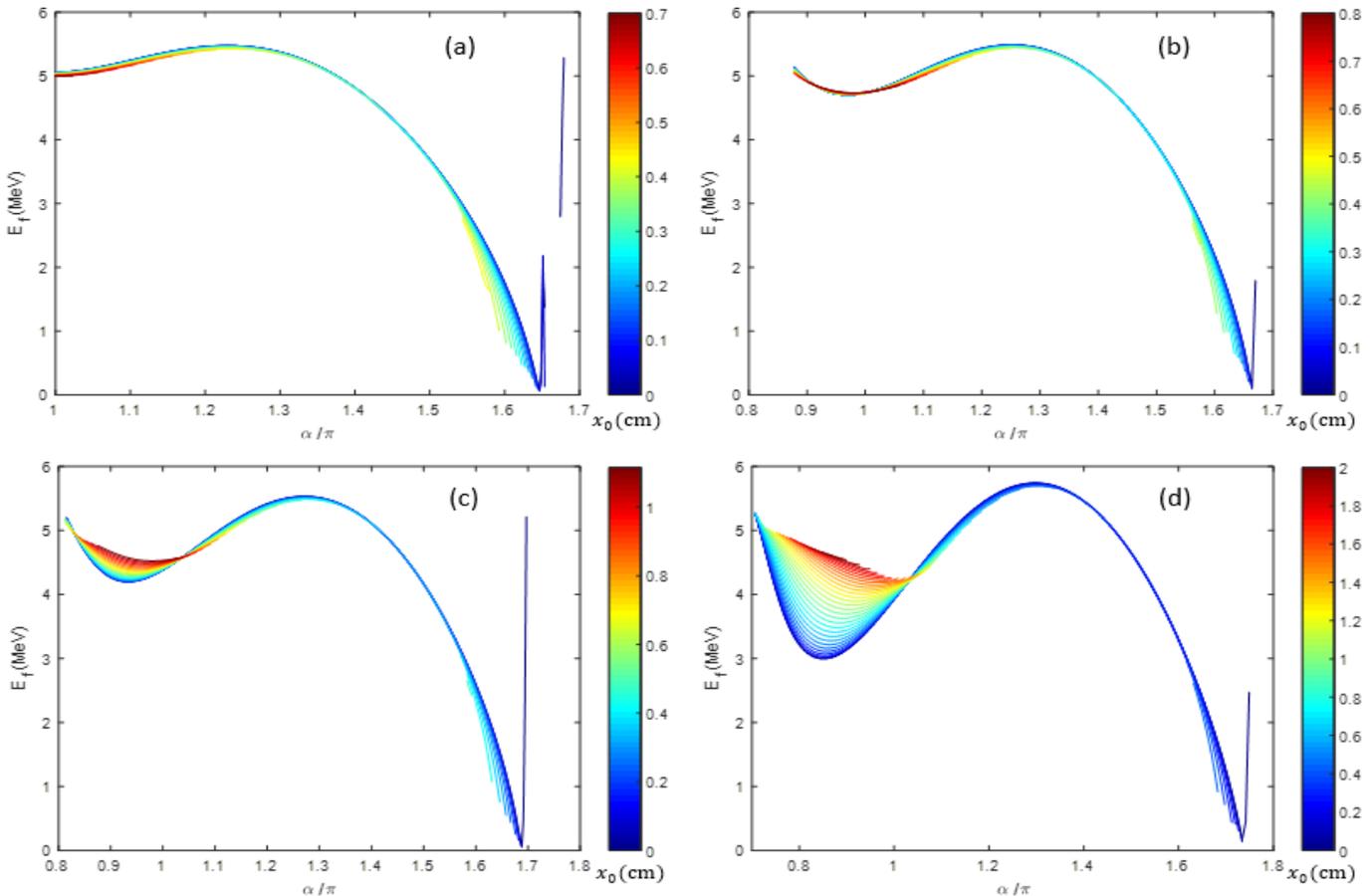
Una vez explicado el procedimiento para obtener el valor de los campos electromagnéticos, ya podemos proceder a realizar las simulaciones numéricas de la dinámica de partículas. Nos restringiremos a condiciones iniciales del tipo  $\vec{x}_0 = (x_0, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_0 = (0, 0, v_0)$  con  $x_0, v_0 \geq 0$ , esto es, inyectaremos electrones desde  $y_0 = z_0 = 0$  a una distancia  $x_0$  del eje y con velocidad inicial en dirección axial. De esta manera, dada la forma que tienen los campos electromagnéticos (ecuaciones (37) y (38)) la trayectoria de los electrones se restringirá al plano XZ, lo que facilitará la visualización de las representaciones gráficas. Tomaremos como tiempo inicial  $t_0 = 0$ , de forma que el parámetro  $\alpha$  nos informará sobre la parte temporal de los campos al comenzar la simulación. Por otra parte, diseñamos el programa para que se detenga cuando el electrón vuelva a la entrada o llegue al final (i.e cuando  $z = 0$  o  $z = 7.27$  cm), o cuando choque con las paredes, es decir, suponemos que los electrones se absorben si chocan con las paredes del acelerador. En realidad, cuando un electrón choca con una pared metálica se pueden dar tres casos diferentes: reflexión elástica, reflexión inelástica, o emisión secundaria de electrones con un cierto número medio de electrones emitidos cuya probabilidad sigue una distribución de Poisson (por lo que puede que no se emitan electrones y se absorba el incidente). La probabilidad de cada caso y el número medio de electrones emitidos en el caso de emisión secundaria de electrones depende fundamentalmente de la energía del electrón al colisionar y del ángulo respecto de la normal (y de diferentes parámetros fenomenológicos del metal). Para altas energías, como es nuestro caso, predomina la emisión secundaria de electrones con un valor medio de electrones emitidos muy pequeño, por lo que lo más probable es que el electrón sea absorbido [21], lo que justifica la suposición de que todos los electrones sean absorbidos.

En la Figura 19 (a) y (b) se representan las trayectorias de electrones inicialmente en reposo para diferentes valores de  $x_0$  y de  $\alpha$ , respectivamente. Se observa que para posiciones cercanas al eje axial, los electrones son capaces de atravesar el acelerador, mientras que para valores más alejados acaban colisionando con las paredes. Por otra parte, para valores de  $\alpha$  inferiores a  $\pi$  el electrón no llega a entrar en el acelerador, pues la fuerza a la entrada los expulsa hacia fuera. Para valores entre  $\pi$  y  $2\pi$ , los electrones entran en el acelerador, pero puede que sean repelidos y vuelvan a  $z = 0$ , choquen con las paredes o atraviesen totalmente el acelerador, dependiendo de los valores de  $x_0$  y  $\alpha$ . En la Figura 19 (c) representamos un ejemplo de las trayectorias según la velocidad inicial  $v_0$  en el que vemos que casi todos los electrones atraviesan el acelerador (salvo los menos energéticos).



**Figura 19.** Trayectorias de electrones inicialmente en reposo ( $v_0 = 0$ ): **(a)** en función de  $x_0$  con  $\alpha = \pi$  y **(b)** en función de  $\alpha$  para  $x_0 = 0.4$  cm. **(c)** Trayectorias en función de  $v_0$  para  $\alpha = \pi$  y  $x_0 = 0.75$  cm.

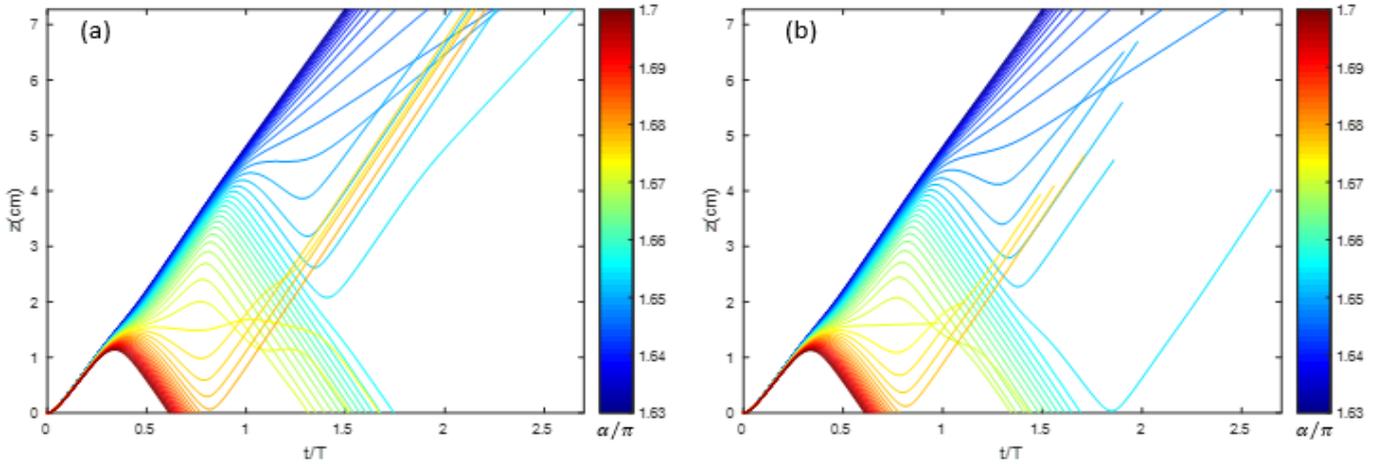
Ahora vamos a estudiar la aceleración que sufren los electrones al atravesar la estructura. En la Figura 20 representamos la energía cinética relativista final  $E_f$  de los electrones para cuatro energías iniciales  $E_i$  en función del valor de  $\alpha$  y de  $x_0$  (solo representamos los valores de  $\alpha$  y  $x_0$  para los que los electrones atraviesan totalmente la estructura). Se observa que para las cuatro casos la forma de las curvas es similar: la máxima energía final se obtiene para un valor de  $\alpha$  cercano a  $1.25\pi$  (la posición del máximo aumenta ligeramente con  $E_i$ ) y para los valores de  $x_0$  menores (para los cuales además hay un rango mayor de valores de  $\alpha$  para los que los electrones consiguen atravesar el acelerador). Para los mayores valores de  $x_0$  solo se consigue atravesar el acelerador para los menores valores de  $\alpha$  y para valores intermedios se consigue tanto para los menores valores de  $\alpha$  como en el rango  $\alpha = (1.5 - 1.6)\pi$ . El aumento brusco del final de la curva se debe a que para esos valores de  $\alpha$  algunos electrones de los inyectados en el eje se quedan muy cerca de ser repelidos, pero finalmente consiguen atravesar el acelerador, mientras que en los inyectados con pequeños valores de  $x_0$  a partir de un cierto valor de  $\alpha$  no son capaces de atravesar totalmente el acelerador, tal y como se observa en la Figura 21. La energía máxima  $E_{f,max}$  obtenida en los cuatro casos es bastante similar, si bien parece aumentar con la energía cinética inicial, siendo la diferencia  $E_{f,max} - E_i$  aproximadamente constante (aunque en el caso de  $E_i = 50$  keV es algo inferior).



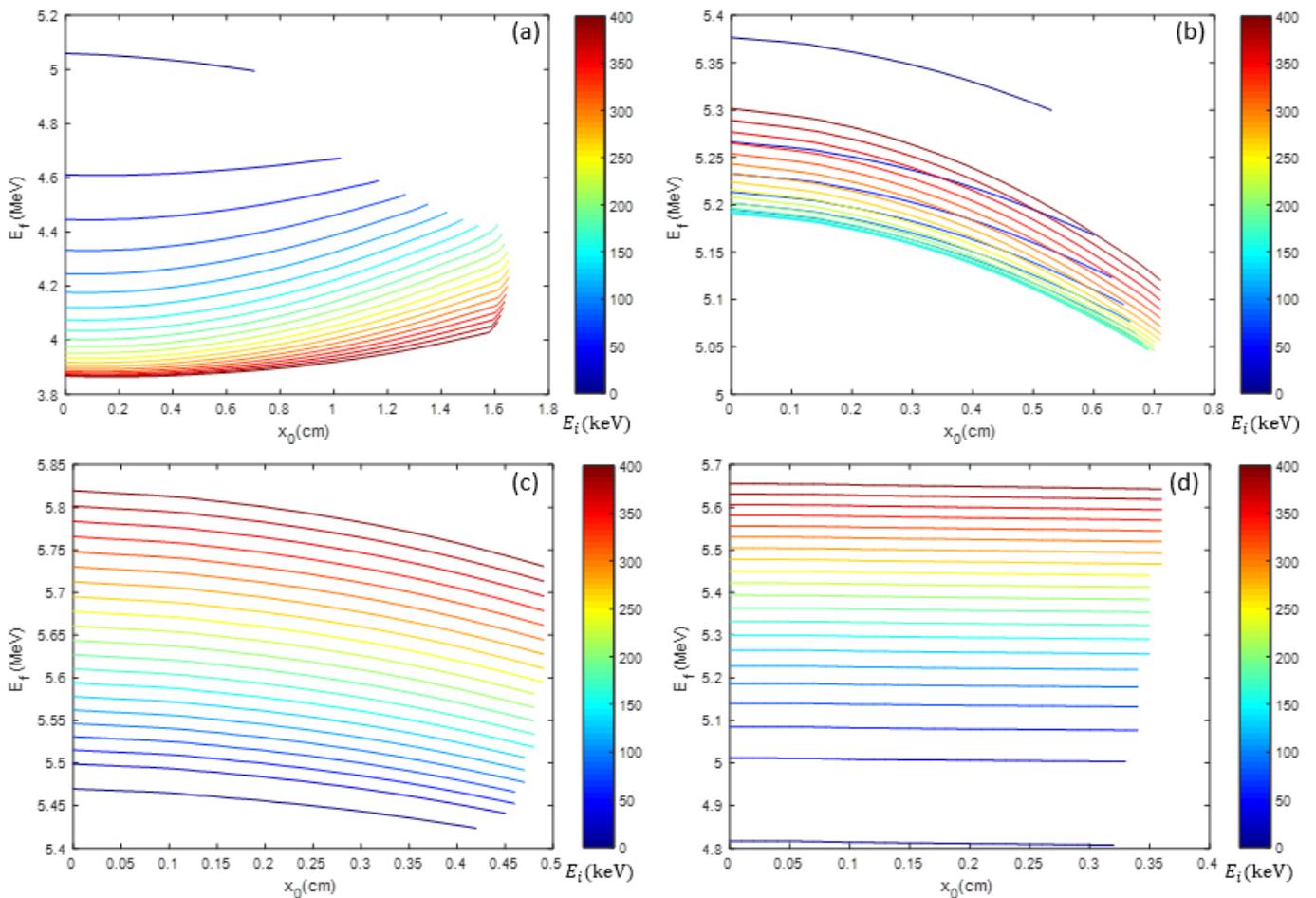
**Figura 20.** Energía cinética final  $E_f$  en función de  $\alpha$  (normalizado a  $\pi$ ) y de  $x_0$  para diferentes energías cinéticas iniciales: **(a)**  $E_i = 0$ , **(b)**  $E_i = 10$  keV, **(c)**  $E_i = 50$  keV y **(d)**  $E_i = 250$  keV.

Para ver más claramente la dependencia de la energía final en función de la energía inicial, en la Figura 22 representamos  $E_f$  en función de  $x_0$  para valores de  $E_i$  de hasta 400 keV para 4 valores de  $\alpha$ . Se observa que para  $\alpha = \pi$ ,  $E_f$  disminuye a medida que aumenta  $E_i$  (aunque para valores de  $E_i$  superiores,  $E_f$  empieza a aumentar). Para  $\alpha = 1.15\pi$ , la energía final es mayor si los electrones

inicialmente tienen energía nula;  $E_f$  disminuye al aumentar  $E_i$  hasta unos 150 keV cuando empieza a aumentar. Para  $\alpha = 1.25\pi$  (que recordemos que es el valor de  $\alpha$  con el que aproximadamente se consigue la máxima  $E_f$ ) y  $\alpha = 1.4\pi$ ,  $E_f$  aumenta con  $E_i$ . Vemos que en general  $E_f$  es mayor cuanto menor sea  $x_0$ , esto es, cuanto más cercanos al eje axial se inyecten los electrones (excepto para el caso de  $\alpha = \pi$ ). En el caso de  $\alpha = 1.4\pi$ ,  $E_f$  prácticamente no depende de  $x_0$ .



**Figura 21.** Valor de  $z$  en función del tiempo para diferentes valores de  $\alpha/\pi$  en el intervalo 1.63-1.70 y (a)  $x_0 = 0$  y (b)  $x_0 = 0.05$  cm. Electrones inicialmente en reposo.



**Figura 22.** Energía relativista cinética final  $E_f$  en función de  $x_0$  y de  $E_i$  para diferentes valores de  $\alpha$ : (a)  $\alpha = \pi$ , (b)  $\alpha = 1.15\pi$ , (c)  $\alpha = 1.25\pi$  y (d)  $\alpha = 1.4\pi$ .

Así pues, teniendo en cuenta todos estos cálculos, podemos afirmar que esta estructura aceleradora permite obtener electrones del orden de 5 – 6 MeV si inyectamos electrones con energías cinéticas relativistas inferiores o del orden de cientos de keV con dirección axial, cercanos al eje de simetría y con un valor de  $\alpha$  de aproximadamente  $1.25\pi$ .

## 4. Conclusiones

En este trabajo se ha descrito e implementado el método de Boris, un algoritmo que permite resolver numéricamente la fuerza de Lorentz relativista.

En primer lugar, hemos aplicado este método para estudiar las trayectorias descritas por electrones al atravesar un solenoide finito con una densidad superficial de corriente constante en aproximación paraxial. Los resultados obtenidos son los esperados cualitativamente: trayectorias rectas fuera del solenoide y helicoidales en el interior del solenoide con una zona de transición entre ambas a la entrada y salida del solenoide (debida a su longitud finita). Hemos visto que el radio de curvatura de la trayectoria helicoidal es proporcional a la distancia al eje del electrón (siempre que no sea repelido), y que la frecuencia de ciclotrón es, en buena medida, proporcional al campo magnético en el centro del solenoide. En el caso de un solenoide suficientemente largo los resultados cuantitativos obtenidos coinciden totalmente con los calculados analíticamente. Además, hemos comprobado que el método de Boris conserva la energía relativista total cuando no hay campo eléctrico.

Más tarde, se ha demostrado que, dada una partícula sometida a una fuerza oscilante, se puede calcular su trayectoria promedio a partir de la fuerza de Miller. Hemos visto que incluso se puede generalizar la fuerza de Miller para una fuerza periódica cualquiera. No obstante, para que la fuerza ponderomotiva sea una buena aproximación se debe cumplir que la amplitud de la fuerza varíe espacialmente de forma suave en la región en la que se mueve la partícula durante un periodo, es decir, la aproximación será mejor a medida que aumente la frecuencia de la fuerza oscilante. Las simulaciones numéricas nos han permitido comparar las trayectorias totales y las promedio predichas por la fuerza ponderomotiva, obteniéndose resultados satisfactorios cuando se cumplen las condiciones requeridas para que la fuerza de Miller sea válida. Estos dos primeros casos en los que podemos comparar algunos resultados con valores analíticos nos han servido para confirmar el buen funcionamiento del método de Boris.

Finalmente, hemos estudiado una estructura aceleradora real. Como en este caso no se tiene una expresión analítica de los campos electromagnéticos, su cálculo en cada paso de integración del método de Boris se hace por interpolación bilineal a partir de una serie de valores tabulados. Hemos visto que la estructura permite obtener electrones con energías (cinéticas) de más de 5 MeV, siempre que estos se inyecten cercanos al eje axial (para que no colisionen con las paredes), y el valor del desfase  $\alpha$  sea de aproximadamente  $1.25\pi$ , que es el valor que permite una aceleración óptima.

En conclusión, se ha programado un método con el que se puede estudiar la dinámica relativista de partículas cargadas en presencia de campos electromagnéticos que era el principal objetivo de este trabajo de fin de grado.

## Conclusions

We have described and implemented the Boris method, an algorithm that allows to solve numerically the relativistic Lorentz's force.

First, we have applied this method to study the trajectories described by electrons when they cross a finite solenoid with a surface density of constant current in paraxial approximation. The results obtained are those qualitatively expected: a straight line outside and helical trajectories inside the solenoid with a transition zone at the entrance and exit of the solenoid (due to its finite length). We have seen that the radius of curvature of the helical trajectory is proportional to the distance to the axis (when it is not repelled), and that the cyclotron frequency is proportional to the magnetic field in the center of the solenoid. In the case of a sufficiently long solenoid the quantitative results obtained are fully consistent with those calculated analytically. In addition, we have found that the Boris method conserves total relativistic energy when there is no electric field.

Later, it has been shown that, given a particle under an oscillating force, its average trajectory can be calculated from Miller's force. We have shown that Miller's force can be generalized for any periodic force. However, we have seen that the ponderomotive force is a good approximation if the amplitude of the force spatially changes smoothly in the region in which the particle moves for a period (i.e. the approximation is better when the frequency of the oscillating force increases). Numerical simulations have allowed us to compare the average (predicted by the ponderomotive force) and the total trajectories, obtaining satisfactory results when the conditions required for Miller's force validity are fulfilled. These first two cases in which we can compare some results with analytical values have helped us to confirm the proper functioning of Boris method.

Finally, we have studied a real accelerator structure. As in this case there is no analytical expression of electromagnetic fields, its calculation at each step of integration has been performed by bilinear interpolation from a series of tabulated values. We have seen that the structure allows to obtain electrons with relativistic energies (kinetics) of more than 5 MeV, provided that these are injected close to the axial axis (so that they do not collide with the walls), and the value of the offset  $\alpha$  is about  $1.25\pi$ , which is the value that allows optimal acceleration.

In conclusion, a method has been programmed to study the relativistic dynamics of charged particles in the presence of electromagnetic fields, which was the main purpose of this end of degree work.

## Apéndice A. Demostración del campo magnético de un solenoide finito

Debido a la simetría cilíndrica, vamos a calcular el campo magnético en un punto arbitrario del plano XZ,  $\vec{r} = (x, 0, z)$ . La densidad superficial de corriente es  $\vec{K} = M\hat{\varphi}' = M(-\sin \varphi', \cos \varphi', 0)$  y el vector  $\vec{r}' = (r_0 \cos \varphi', r_0 \sin \varphi', z')$  recorre la superficie del solenoide. Así pues, sustituyendo en la ley de Biot y Savart (9) tenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times \vec{R}}{R^3} dS' = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int \frac{((z - z') \cos \varphi', (z - z') \sin \varphi', r_0 - x \cos \varphi')}{(x^2 + r_0^2 - 2r_0 x \cos \varphi' + (z - z')^2)^{3/2}} dS'.$$

Vemos que la función a integrar en la componente Y es impar en la variable de integración  $\varphi'$ , por lo que la integral es nula. Por tanto, la componente acimutal del campo magnético es nula en todo el espacio y el campo  $B_x$  de la integral anterior es la componente radial  $B_r$  del campo (cambiando  $x$  por  $r$ ). En consecuencia, la componente radial y axial son, respectivamente

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z') \cos \varphi' r_0}{(r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \varphi' + (z - z')^2)^{3/2}} dz' d\varphi',$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(r_0 - r \cos \varphi') r_0}{(r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \varphi' + (z - z')^2)^{3/2}} dz' d\varphi'.$$

Usando las integrales

$$\int \frac{x}{(b + x^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{b + x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(b + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{b\sqrt{b + x^2}},$$

obtenemos

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 M r_0}{4\pi} (I_- - I_+) \quad \text{con} \quad I_{\pm} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \varphi' + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}},$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 M r_0}{4\pi} (I'_+ - I'_-) \quad \text{con} \quad I'_{\pm} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{r_0 - r \cos \varphi'}{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \varphi'} \frac{z \pm h/2}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \varphi' + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}}.$$

Haciendo los cambios de variable  $\varphi' = 2\theta$  y  $\theta = \pi/2 - u$  se tiene

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \int_0^{\pi} \frac{2 \cos 2\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r (2 \cos^2 \theta - 1) + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}} = -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u du}{\sqrt{(r + r_0)^2 - 4r_0 r \sin^2 u + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}} = \\ &= -4 \frac{k_{\pm}}{\sqrt{4r_0 r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \sin^2 u) du}{\sqrt{1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u}} = -4 \frac{k_{\pm}}{\sqrt{4r_0 r}} K(k_{\pm}) - \frac{8}{k_{\pm} \sqrt{4r_0 r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u) du}{\sqrt{1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u}} = \\ &= -\sqrt{\frac{16}{r r_0}} \left( \frac{E(k_{\pm})}{k_{\pm}} - \frac{1}{k_{\pm}} \left(1 - \frac{k_{\pm}^2}{2}\right) K(k_{\pm}) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'_{\pm} &= \int_0^{\pi} \frac{(r_0 - r \cos 2\theta) 2d\theta}{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r (2 \cos^2 \theta - 1)} \frac{z \pm \frac{h}{2}}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r (2 \cos^2 \theta - 1) + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}} = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(r_0 + r \cos 2u) du}{(r + r_0)^2 - 4r_0 r \sin^2 u} \frac{z \pm \frac{h}{2}}{\sqrt{(r + r_0)^2 - 4r_0 r \sin^2 u + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}} = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(r_0 + r(1 - 2 \sin^2 u)) du}{(r + r_0)^2 (1 - \sigma \sin^2 u)} \frac{z \pm \frac{h}{2}}{\sqrt{(r + r_0)^2 - 4r_0 r \sin^2 u + \left(z \pm \frac{h}{2}\right)^2}} = \\ &= \left( \frac{z \pm \frac{h}{2}}{r + r_0} \right) \frac{2k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1 - \sigma \sin^2 u) \sqrt{1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u}} + \frac{k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4r \sin^2 u du}{(r + r_0)^2 (1 - \sigma \sin^2 u) \sqrt{1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left( \frac{z \pm \frac{h}{2}}{r + r_0} \right) \frac{k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \Pi(\sigma, k_{\pm}) + \frac{k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \frac{1}{r_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 1 - \sigma \sin^2 u) du}{(1 - \sigma \sin^2 u)} \frac{z \pm \frac{h}{2}}{\sqrt{1 - k_{\pm}^2 \sin^2 u}} = \\
 &= 2 \left( \frac{z \pm \frac{h}{2}}{r + r_0} \right) \frac{k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \Pi(\sigma, k_{\pm}) + \frac{k_{\pm}}{\sqrt{r_0 r}} \frac{1}{r_0} \left( z \pm \frac{h}{2} \right) \left( K(k_{\pm}) - \Pi(\sigma, k_{\pm}) \right),
 \end{aligned}$$

donde  $k_{\pm}$  y  $\sigma$ , y  $K(x)$ ,  $E(x)$  y  $\Pi(\sigma, x)$  vienen definidos por (13) y (14), respectivamente. Sustituyendo las expresiones de  $I_{\pm}$  e  $I'_{\pm}$  obtenemos las expresiones buscadas: (12) y (11).

## Apéndice B. Demostración de los parámetros de la trayectoria helicoidal

Teniendo en cuenta que  $B_r = -\frac{r}{2} B_0 \left[ \delta \left( z + \frac{h}{2} \right) - \delta \left( z - \frac{h}{2} \right) \right]$  y  $B_z = B_0 = \mu_0 M$  para el límite de solenoide suficientemente largo, y que suponemos que la velocidad inicial del electrón es  $\vec{v} = v_z \hat{z}$ , la fuerza de Lorentz cuando el electrón entra en el solenoide ( $z = -h/2$ ) queda

$$\vec{F} = m \frac{d(\gamma \vec{v})}{dt} = -e \vec{v} \times \vec{B} = -e v_z B_r \hat{\phi} = \frac{e v_z x_0 B_0}{2} \delta \left( z + \frac{h}{2} \right) \hat{\phi},$$

donde  $x_0$  es la distancia del electrón al eje axial. Como solo hay campo magnético, la energía total relativista se conserva y el factor relativista  $\gamma$  es constante. Así pues, podemos escribir

$$m \gamma \frac{dv_{\phi}}{dt} = \frac{e x_0 B_0}{2} \frac{dz}{dt} \delta \left( z + \frac{h}{2} \right),$$

que integrando en un entorno cercano a  $z = -h/2$  queda

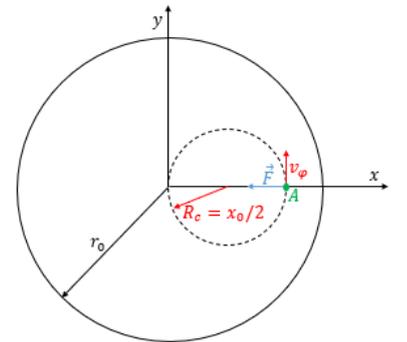
$$m \gamma \int_0^{v_{\phi}} dv_{\phi} = \frac{e x_0 B_0}{2} \int_{-h/2-\Delta z}^{-h/2+\Delta z} \delta \left( z + \frac{h}{2} \right) dz \rightarrow v_{\phi} = \frac{e x_0 B_0}{2 m \gamma}.$$

Por tanto, el electrón adquiere una velocidad en el plano XY al entrar en el solenoide, reduciéndose su velocidad en dirección axial a  $v'_z = \sqrt{v_z^2 - v_{\phi}^2}$ . En el interior del solenoide tenemos un campo magnético  $B_0$  constante en dirección  $\hat{z}$ , por lo que el electrón describirá una trayectoria helicoidal (es decir, un movimiento circular uniforme en el plano XY y rectilíneo uniforme con velocidad  $v'_z$  en el eje Z). Igualando el módulo de la fuerza de Lorentz a la expresión de la fuerza centrípeta relativista tenemos (suponemos que  $B_0$  es positivo)

$$|\vec{F}| = |-e \vec{v} \times \vec{B}| = e v_{\phi} B_0 = m \gamma \omega_c^2 R_c \rightarrow \omega_c = \frac{e B_0}{\gamma m} \text{ y } R_c = \frac{v_{\phi}}{\omega_c} = \frac{x_0}{2},$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia ciclotrón,  $R_c$  el radio de curvatura y se relacionan por  $v_{\phi} = \omega_c R_c$ .

Así pues, dado un electrón que entra en el solenoide en un punto A a una distancia  $x_0$  del eje, la trayectoria en el plano XY será un movimiento circular uniforme de radio  $x_0/2$  y frecuencia de ciclotrón  $\omega_c$ , tal y como se esquematiza en la Figura 23.



**Figura 23.** Esquema de la proyección (línea rayada) en el plano XY de la trayectoria seguida por un electrón con velocidad axial que entra en el solenoide en el punto A.

## Referencias

- [1] U. Amaldi et al, «Accelerators for hadrontherapy: From Lawrence cyclotrons to linacs», *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, vol. 620, pp. 563-577, 2010.
- [2] U. Amaldi, «Cancer Therapy with Particle Accelerators», *Nuclear Physics A*, vol. 654, pp. 375-399, 1999.
- [3] T. Malouff et al, «Carbon Ion Therapy: A Modern Review of an Emerging Technology», *Frontiers in Oncology*, vol. 10, pp. 1-13, 2020.
- [4] S. Benedetti et al, «High gradient linac for proton therapy», *Physical Review Accelerators and Beams*, vol. 20, pp. 1-19, 2017.
- [5] G. Kraft, «Tumor Therapy with Heavy Charged Particles», *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 45, pp. 473-544, 2000.
- [6] M. Yabashi et al, «Compact XFEL and AMO sciences: SACLA and SCSS», *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 46, pp. 1-19, 2013.
- [7] T. Osaka et al, «A Bragg beam splitter for hard X-ray free-electron lasers», *Optics Express*, vol. 21, nº 3, pp. 2823-2831, 2013.
- [8] E. L. Saldin et al, «Coherence properties of the radiation from X-ray free electron laser», *Optics Communications*, vol. 281, pp. 1179-1188, 2008.
- [9] B. Ripperda et al, «A Comprehensive Comparison of Relativistic Particle Integrators», *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 235, nº 1, pp. 1-20, 2018.
- [10] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [11] «Mathworks», <https://es.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [12] V. Kumar, «Understanding the focusing of charged particle beams in a solenoid magnetic field», *American Association of Physics Teachers*, pp. 737-741, 2009.
- [13] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [14] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, San Diego: Academic Press, 2007.
- [15] A. V. Gaponov y M. A. Miller, «Potential Wells for Charged Particles in a High-Frequency Electromagnetic Field», *Soviet Physics JETP-USSR*, vol. 7, pp. 168-169, 1958.
- [16] L. Jönsson, «Energy shifts due to the ponderomotive potential», *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 4, nº 9, pp. 1422-1425, 1987.
- [17] G. Schmidt, *Physics of high temperature plasmas*, Second edition, pp. 47-49, New York: Academic Press, 1979.
- [18] W. C. Swope et al, « A computer-simulation method for the calculation of equilibrium-constants for the formation of physical clusters of molecules - application to small water clusters», *Journal of Chemical Physics*, vol. 76, pp. 637-649, 1982.
- [19] «Los Alamos National Laboratory», <https://laacg.lanl.gov/laacg/services/sfregis.php>.
- [20] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling y B. P. Flannery, *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, New York: Cambridge University Press, 1997.
- [21] J. de Lara et al, «Multipactor Prediction for On-Board Spacecraft RF Equipment With the MEST Software Tool», *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 34, nº 2, pp. 476-484, 2006.