



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Estudio experimental de las trayectorias de descarga en fluidos  
reales**

*Autor: Jorge Cuéllar San Felipe*

*Tutor/es: Pedro Prádanos del Pico*

*Laura Palacio Martínez*

## Resumen

El análisis de la velocidad de un fluido en una tubería y de la trayectoria de descarga del fluido una vez sale de la tubería es una cuestión que, aunque puede parecer simple, se puede abordar mediante varios planteamientos distintos. En este trabajo se expondrán 3 de ellos: la teoría de fluido ideal, la teoría de capa límite y lo que se denominará método de la velocidad media. Después se compararán los resultados calculados con estos métodos con los resultados experimentales obtenidos a través de un dispositivo de descarga de fluidos variando la presión del agua y el diámetro y entronque de la tubería de salida.

## Abstract

The analysis of the velocity of the fluid in a pipe and the discharge path of the fluid when it leaves the pipe is a subject that, although it may seem simple, can be approached through several different methods. In this work 3 of them will be exposed: the ideal fluid theory, the boundary layer theory and what will be called the average velocity method. Afterwards, the results calculated with these methods will be compared with the experimental results obtained through a fluid discharge device varying the water pressure and the diameter and connection of the outlet pipe.

<u>Contenido</u>	
<b>Resumen</b> .....	2
<b>Abstract</b> .....	2
<b>Contenido</b> .....	3
<b>Introducción</b> .....	4
<b>Motivación</b> .....	6
<b>Fundamento teórico</b> .....	7
<i>Fluido ideal</i> .....	7
<i>Fluido viscoso en una tubería circular de sección recta</i> .....	8
<i>Teoría de capa límite</i> .....	11
<b>Metodología</b> .....	18
<i>Teoría de fluido ideal</i> .....	20
<i>Método de la velocidad media</i> .....	20
<i>Teoría de capa límite</i> .....	20
<b>Resultados</b> .....	21
<i>Estudio de la variación de presión para una misma tubería de salida</i> .....	21
<i>Estudio de diferentes tuberías de salida para presiones casi idénticas</i> .....	25
<b>Conclusiones</b> .....	30
<b>Bibliografía</b> .....	31

## Introducción

La descarga de fluidos está presente de varias maneras en nuestro día a día, desde en una acción tan simple como pueda ser la de llenar una taza de café o de té hasta en el más complejo de los sistemas industriales. Por tanto, el estudio de las trayectorias de descarga en fluidos tiene muchísimas aplicaciones en campos más alejados de la docencia, pero también puede ser muy útil en ésta, ya que nos permite estudiar de un modo simple y muy visual la importancia del rozamiento con el aire, con las paredes sólidas y con el propio fluido y las imprecisiones que se cometen cuando se consideran fluidos reales en sistemas que distan de serlo. En este trabajo, en base a los resultados experimentales obtenidos, no se tendrá en cuenta el rozamiento con el aire, así que todas las variaciones en la trayectoria de descarga se analizarán estudiando el fluido en la tubería de salida.

Aunque el estudio de los fluidos parezca una ciencia relativamente moderna gracias a los últimos avances como el túnel de aire o las simulaciones informáticas, el ser humano lleva decenas de siglos interesado en el comportamiento de los fluidos. Tal vez el primer ejemplo que venga a la mente sea el de Arquímedes, que en el siglo III a. C. desarrolló los principios de la hidrostática. El estudio de los fluidos quedó relegado a un segundo plano durante la Edad Media, pero desde la llegada del Renacimiento se ha ido produciendo un avance continuo con aportaciones de científicos de la talla de Newton, Euler y Bernoulli. Aunque una de las aportaciones más importantes la hizo Ludwig Prandtl, que en 1904 definió la teoría de la capa límite en su famoso artículo “Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung” (Sobre el Movimiento de Fluidos con Fricción Muy Pequeña) (Prandtl, 1905). Éste fue el primer paso en la unificación de los aspectos teóricos (hidrodinámica) y prácticos (hidráulica) de la mecánica de fluidos. Luego, su alumno H. Schlichting continuó con el desarrollo de esta teoría en su libro: “Boundary Layer Theory” (Schlichting & Gersten, 2017). El concepto de capa límite está relacionado con la viscosidad del fluido y solo aparecerá en fluidos que tengan cierta viscosidad cuando estos circulan en contacto con una superficie, ya que al rozar con ésta se crea una fina capa de fluido donde la fricción es considerable. Fuera de esta capa, se puede suponer que el fluido se comporta de forma ideal.

El estudio de todos los fenómenos que tienen lugar dentro de la capa límite es demasiado extenso como para abordarlo en un trabajo de estas dimensiones. Para empezar, la capa límite puede ser laminar o turbulenta y, a parte de todos los efectos que ésta tiene sobre la velocidad, también se pueden analizar los fenómenos térmicos. En este trabajo se estudiarán las variaciones que causa la capa límite en la velocidad del flujo de agua en una tubería recta de sección circular, considerando una capa límite laminar bidimensional, y en ningún caso se tendrán en cuenta los factores térmicos.

Tal vez sea importante definir cómo estudiar el comportamiento de los fluidos antes de empezar con la explicación más formal del trabajo. El estudio de la mecánica de fluidos se dividirá en dos ramas: el estudio de los fluidos en movimiento o dinámica y el estudio de los fluidos en reposo o estática. Muchas de las ecuaciones y leyes que se utilizan en la mecánica de sólidos pueden usarse también para analizar un fluido, por lo que el estudio de estos es relativamente asequible teniendo conocimientos de Física previos.

Además, en el estudio de los fluidos es vital definir si se trabajará con fluidos reales o con fluidos ideales. Los fluidos ideales son aquellos en los que no se tiene en cuenta la viscosidad, mientras que para los fluidos reales si se tendrán en cuenta los efectos de fricción. En este trabajo

experimental se han interpretado los resultados considerando los dos tipos de modelo de fluido, suponiendo siempre que el agua en estas condiciones se puede considerar como un fluido incompresible. Así, la única diferencia entre los modelos de fluido ideal y real es que los segundos tendrán una cierta viscosidad. La viscosidad es una magnitud que da cuenta de la “fluidez” de un fluido. La mejor forma de comprender este concepto es imaginarse un fluido entre dos placas paralelas muy anchas. Una de las placas se mantendrá fija mientras la otra se mueve con una velocidad constante  $U$ , como se muestra en la Ilustración 1.

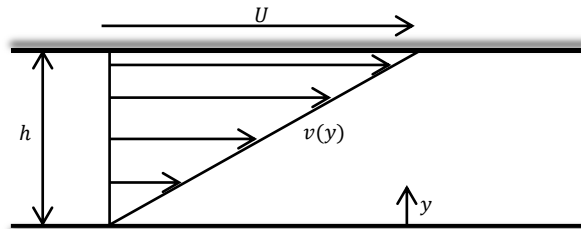


Ilustración 1: Perfil de velocidades de un fluido viscoso entre dos placas paralelas

Esto creará un perfil de velocidades en el fluido que será de la forma:

$$v(y) = \frac{y}{h} U \quad (1)$$

Siendo  $y$  la distancia a la placa fija y  $h$  la distancia entre las placas. Para poder mantener la velocidad constante de la placa es necesario que aparezca una fuerza sobre ésta que contrarreste los efectos de la fricción. Experimentalmente se puede comprobar que esta fuerza  $\tau$  es proporcional a  $U/h$  que se puede reemplazar por  $dv/dy$ . La constante de proporcionalidad será lo que llamaremos viscosidad ( $\eta$ ), será propia de cada fluido y dependerá mucho de la temperatura, aunque en este trabajo trabajaremos en condiciones isotermas y supondremos que la temperatura del agua utilizada es de 20 °C. La ley de Newton de la fricción será:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (2)$$

Y las unidades de la viscosidad serán  $Pa \cdot s$ . (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 1999).

También será de interés introducir la denominada viscosidad cinemática, que será el cociente de la viscosidad y la densidad de un fluido, y se definirá como:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (3)$$

Y sus unidades serán  $m \cdot s^{-2}$ .

Otro de los temas que se tratarán para facilitar algo más la comprensión de todos los conceptos que se exponen en este trabajo es el flujo de fluidos en tuberías. Lo principal a la hora de analizar el flujo en una tubería es definir qué clase de flujo es: laminar, turbulento o de transición. En el flujo laminar la velocidad del fluido, en una tubería de sección recta constante, solo tiene una componente y ésta va a lo largo del eje de la tubería. Para el flujo turbulento aparecen otras componentes de la velocidad, que serán normales al eje de la tubería, aunque la componente de la velocidad predominante seguirá siendo la que va a lo largo del eje. El flujo en transición simplemente será un estado intermedio entre el flujo laminar y turbulento. Además de estas consideraciones, el estudio del flujo en una tubería requiere considerar si estamos en estado estacionario o no. Y en el caso de estar en estado estacionario, si este flujo está totalmente

desarrollado o en desarrollo. El flujo estará totalmente desarrollado cuando el perfil de velocidades es constante a lo largo de la tubería y estará en desarrollo cuando el perfil de velocidades varíe a lo largo de la tubería. Para analizar este desarrollo es importante tener en cuenta el entronque de entrada de la tubería, además de la longitud de ésta y de todos los añadidos que se le hagan al sistema de tubería, ya sean codos, válvulas, uniones o conexiones. En este trabajo solamente se usarán tuberías rectas, por lo que interesará el entronque de entrada y la longitud de la tubería.

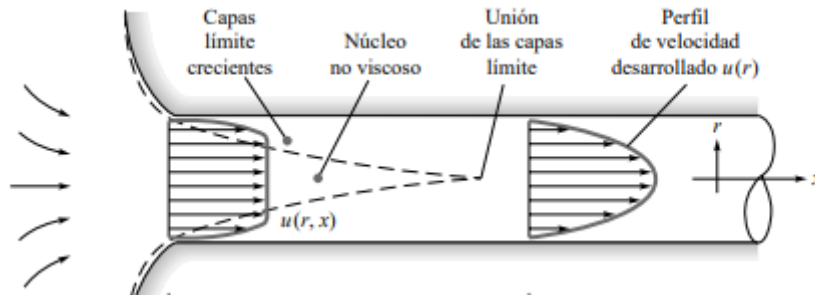


Ilustración 2: Desarrollo del perfil de velocidades en una tubería de sección recta circular. (White, 2004).

### Motivación

El objetivo de este trabajo es el estudio de la trayectoria de descarga de fluidos en función de la presión, del entronque de la tubería de salida y del diámetro de ésta, comparando los valores experimentales de la altura y la velocidad de salida con los obtenidos a través de los modelos de fluido ideal, teoría de la capa límite y método de la velocidad media de salida a partir de la medida del caudal. También se estudiará mediante la teoría de capa límite cómo evoluciona el espesor de ésta.

### Fundamento teórico

En este trabajo se estudió el problema de un flujo por una tubería circular corta en la que el perfil de velocidad no se ha desarrollado por completo. Este problema se abordó mediante 3 métodos distintos: considerando un fluido ideal, considerando un fluido viscoso o real y considerando la teoría de capa límite. En ninguno de estos métodos se ha tenido en cuenta el rozamiento del agua con el aire.

#### *Fluido ideal*

En este caso se considerará que el agua tiene viscosidad nula, por lo tanto, el perfil de velocidad será plano y estará completamente desarrollado. Para modelizar este fluido se ha utilizado la aproximación a las energías (conservación de la energía mecánica), considerando que las pérdidas por fricción son despreciables y que la velocidad del agua dentro del depósito puede aproximarse a cero. Aunque el planteamiento descrito es muy sencillo, si se quiere profundizar más se puede acudir a (Kittel, Knight, Ruderman, Helmholtz, & Moyer, 1982) y a (Mittasch, 2015).

Tomando como origen de alturas la salida del agua, la energía potencial del agua en el depósito será:

$$E_{\text{depósito}} = mgh \quad (4)$$

La energía cinética del agua que sale por la tubería de salida será:

$$E_{\text{salida}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5)$$

Siendo  $m$  la masa,  $g$  la aceleración de la gravedad ( $g = 9,91 \text{ ms}^{-2}$ ),  $h$  la altura de la columna de agua y  $v$  la velocidad de salida del agua.

Estas energías se pueden igualar.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (6)$$

Y despejando se obtendrá la expresión de la velocidad de salida:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (7)$$

Para describir la trayectoria del chorro de agua se recurre al estudio de la velocidad del agua, analizando la componente horizontal y la componente vertical de la velocidad por separado. La componente vertical de la velocidad, que se designa  $v_y$ , depende de la gravedad. La componente horizontal,  $v_x$  en este caso, será constante e igual a la velocidad de salida que se ha calculado anteriormente.

$$v_x = \sqrt{2gh} \quad (8)$$

$$v_y = gt \quad (9)$$

Integrando las ecuaciones (8) y (9) en función del tiempo para conseguir la posición del chorro se obtiene:

$$x = v_x t \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (11)$$

Despejando el tiempo de la ecuación (10) y sustituyendo en la ecuación (11) se conseguirá el valor de la altura en función de la distancia a la tubería de salida y con esto se representará la trayectoria del chorro, introduciendo también la ecuación (8).

$$y(x) = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_x^2} = \frac{1}{4} \frac{x^2}{h} \quad (12)$$

Este método, pese a ser muy sencillo y directo, es muy poco preciso, ya que no tiene en cuenta las pérdidas de energía que provoca el rozamiento del agua. Es decir, no describe convenientemente la realidad observada experimentalmente. Para solventar estos inconvenientes se propone el siguiente modelo.

*Fluido viscoso en una tubería circular de sección recta*

Para modelizar el flujo de un fluido viscoso con densidad constante en una tubería de sección recta circular de radio  $R$  se utilizarán los conceptos expuestos en (Landau & Lifshitz, 2001) y (Munson, Young, Okiishi, & Huebsch, 1999). Las ecuaciones de Navier-Stokes en forma vectorial y sin tener en cuenta la gravedad son:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p = \eta \Delta \vec{v} \quad (13)$$

Para este caso lo idóneo será utilizar las ecuaciones en coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\varphi$  y  $z$ , que se escribirán:

Componente  $r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Componente  $\varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (15)$$



Componente  $z$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

También será de utilidad la ecuación de continuidad, que de forma general se expresa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (17)$$

En coordenadas cilíndricas será:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad (18)$$

En este problema la única velocidad que no es nula será la del eje  $z$ , por lo que  $v_r = v_\varphi = 0$ . Además, el flujo será simétrico alrededor del eje  $z$  así que todas las derivadas respecto de  $\varphi$  se anularán ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ). Aplicando esto a la ecuación (18), en estado estacionario

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow v_z = v_z(r) \quad (19)$$

Aplicando estos resultados y las condiciones anteriores a las ecuaciones (14), (15) y (16) estas quedarán:

Componente  $r$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow p = p(z) \quad (20)$$

La ecuación de Navier-Stokes para la componente  $\varphi$  se anulará completamente.

Componente  $z$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (21)$$

Se llega a la conclusión de que  $\partial p/\partial z = cte$ , por lo que se sustituirá por el gradiente de presión que se expresará como  $-\Delta p/l$ , siendo  $\Delta p$  la diferencia de presión entre el inicio y el final de la tubería y  $l$  la longitud de ésta. Es importante destacar que, en el caso de una tubería circular, al tener la pared curva, debe aparecer un gradiente de presión perpendicular a la pared para equilibrar la fuerza centrífuga (Goldstein, 1965). Introduciendo además la viscosidad dinámica ( $\eta = \nu\rho$ ) la expresión (16) es:

$$-\frac{\Delta p}{\eta l} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (22)$$

Integrando:

$$v_z = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + A \ln r + B \quad (23)$$

Como  $v_z$  debe ser finita en el centro de la tubería,  $A = 0$ . Usando la condición de que  $v_z = 0$  si  $r = R$ , se llega a la conclusión de que  $B = \frac{\Delta p}{4\eta l}R^2$ . Sustituyendo en la ecuación (23) se llega a la expresión de la velocidad en función de la distancia al centro de la tubería o, dicho de otra manera, a la expresión del perfil de velocidad.

$$v_z = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2) \quad (24)$$

El perfil de velocidades en una tubería recta de sección circular será por tanto parabólico.

Integrando para toda el área transversal de la tubería el caudal se expresa como:

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr \quad (25)$$

Es decir:

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}R^4 \quad (26)$$

Si se dispone del valor del caudal, se puede calcular la velocidad media de salida teniendo en cuenta la sección transversal al flujo de la tubería de salida. Sabiendo que  $Q = \langle v \rangle A$  siendo  $\langle v \rangle$  la velocidad media de salida y  $A$  el área de la sección de la tubería será posible usar esos datos para calcular la trayectoria de descarga del chorro de agua. Si se conoce la velocidad media de salida del chorro de agua se puede calcular la altura del chorro en función de su distancia a la tubería de salida utilizando la ecuación:

$$y(x) = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{\langle v \rangle^2} \quad (27)$$

Además, con este método desaparecen todos los problemas que pudieran venir asociados a la inestabilidad del flujo. El razonamiento explicado anteriormente para el cálculo del perfil de velocidades solamente es válido para un flujo laminar. Para flujos turbulentos el gradiente de presión y, en consecuencia, la velocidad no serán constantes, por lo que encontrar la expresión del perfil de velocidad es muy complejo ya que éste será irregular, variando con el tiempo y con la posición.

Otro factor que se debe tener en cuenta es el desarrollo del perfil de velocidades. La expresión obtenida para el perfil de velocidades corresponde a un perfil totalmente desarrollado. Éste no es el caso de este trabajo, ya que al usar una tubería de salida corta el perfil de velocidades no tendrá tiempo para desarrollarse completamente, por lo que no se podrá calcular la velocidad de salida del agua con la precisión adecuada. Para estudiar el desarrollo del perfil de velocidad debido a la capa límite se usará el siguiente modelo.

### Teoría de capa límite

El estudio de este problema mediante la teoría de capa límite permite una aproximación más precisa al desarrollo del perfil de velocidad y, por lo tanto, una mejor aproximación a la velocidad de salida real del agua. En este trabajo se desarrollará la teoría de capa límite como lo hicieron Blasius y Prandtl y como se expone en (Spurk & Aksel, 2020) y (Crespo Martínez, 2011). Para ver otra forma de desarrollarlo acudir a (Lamb, 1945) y (Papanastasiou, Georgiou, & Alexandrou, 2000).

Se puede definir capa límite como la región de fluido cercana a una superficie en la que el valor de la velocidad con respecto a la superficie pasa de ser nula a tener el valor que es considerado por la teoría de fluido ideal. Además, se considera que en esta región se concentran los fenómenos que se atribuyen a la viscosidad, por lo que el fluido fuera de la capa límite se comportará como un fluido ideal. La capa límite puede ser laminar o turbulenta. En este trabajo se supondrá que la capa límite es laminar en todo momento.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de un fluido dentro de la capa límite se considerará un flujo bidimensional con dirección en el eje  $x$  en contacto con una superficie plana en el plano  $xz$ .

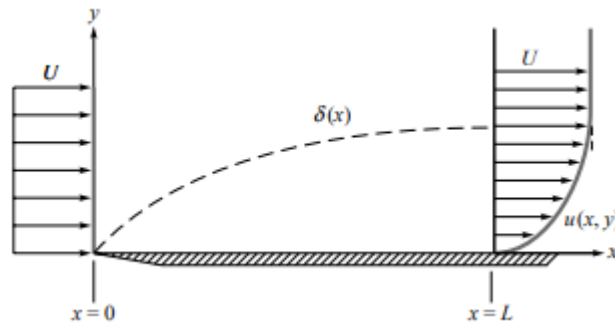


Ilustración 3: Esquema de la capa límite creada por una placa plana en el plano  $xz$  cuando el fluido se mueve en dirección  $x$ . (White, 2004).

Se supondrá que la velocidad es nula en la componente  $z$  y que el flujo es estacionario. Las ecuaciones de Navier-Stokes para este sistema serán:

Componente  $x$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (28)$$

Componente  $y$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (29)$$

La ecuación de continuidad para este sistema será:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

El flujo dentro de la capa límite es mayoritariamente paralelo a la superficie, por lo que:

$$v_x \gg v_y \quad (31)$$

Además, la velocidad varía mucho más rápidamente en el eje  $y$  que en el eje  $x$ , por lo tanto, las derivadas de la velocidad respecto del eje  $y$  serán mucho mayores que las derivadas con respecto al eje  $x$ . Así:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (32)$$

También se llega a la conclusión de que  $\frac{\partial p}{\partial y}$  será mucho menor que  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , por lo que se considerará que:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

Esto provoca que la presión dentro de la capa límite sea igual a la presión del flujo fuera de la capa límite, que solo depende de  $x$ , por lo que  $p = p(x)$ . Gracias a esto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp(x)}{dx} \quad (34)$$

Incluyendo estas condiciones, la ecuación de Navier-Stokes para la componente  $y$  (ecuación (29)) se anula, y las nuevas ecuaciones del movimiento serán:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx} \quad (35)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (36)$$

Como fuera de la capa límite se tiene un flujo potencial, se podrá utilizar la ecuación de Bernoulli para sustituir el término de la presión. La ecuación de Bernoulli será:

$$p + \frac{1}{2} \rho U^2 = cte \quad (37)$$

Donde  $U$  es la velocidad del flujo fuera de la capa límite que se calculará con la ecuación (7). Derivando se obtiene:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx} = U \frac{dU}{dx} \quad (38)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (35) y (36).

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} \quad (39)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (40)$$

Se estudiará a continuación el caso de un flujo plano paralelo en contacto con una lámina plana como el caso que se muestra en la Ilustración 3. La lámina estará en el plano  $xz$  y tendrá su inicio en el origen de coordenadas, extendiéndose hacia los valores positivos de  $x$ . La velocidad fuera de la capa límite ( $U$ ) será constante, así que las ecuaciones del movimiento son:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (42)$$

Para resolver estas ecuaciones se emplearán las siguientes condiciones de contorno y la condición inicial:

$$y = 0, x > 0 \Rightarrow v_x = v_y = 0 \quad (43)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow v_x = U \quad (44)$$

$$x = 0 \Rightarrow v_x = U \quad (45)$$

También se introducirá la función de corriente. Esta función se deriva de la ecuación de continuidad para un flujo bidimensional, que es la ecuación (42). Las componentes de la velocidad se pueden escribir como las derivadas de la función de corriente  $\Psi$ .

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (46)$$

Sustituyendo esta función en la ecuación (41) se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = 0 \quad (47)$$

Las condiciones de contorno y la condición inicial pasarán a ser:

$$y = 0, x > 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (48)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \quad (49)$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U \quad (50)$$

De esta última condición se deduce que la función de corriente para un flujo bidimensional será:

$$\Psi = U y \quad (51)$$

Para el desarrollo posterior se deben introducir las siguientes variables adimensionales  $x', y', v'_x$  y  $v'_y$  que sustituirán a las variables  $x, y, v_x$  y  $v_y$ .

$$x = lx', \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{Re}}, \quad v_x = Uv'_x, \quad v_y = \frac{Uv'_y}{\sqrt{Re}} \quad (52)$$

Siendo:

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \quad (53)$$

Y el espesor de capa, que se definirá como:

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{Re}} \quad (54)$$

De las ecuaciones (51) y (52) se puede extraer:

$$\Psi \sim \frac{Ul}{\sqrt{Re}} \quad (55)$$

Con las expresiones (52) transformamos la función de corriente en una función adimensional, de forma que:

$$\frac{\Psi}{\sqrt{Ul\nu}} = f(x', y') = f\left(\frac{x}{l}, y\sqrt{\frac{U}{l\nu}}\right) \quad (56)$$

Se definen unas nuevas variables que se denominarán:

$$\mu = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (57)$$

$$\frac{\Psi}{\sqrt{Ul\nu}\sqrt{x'}} = \frac{\Psi}{\sqrt{Ux\nu}} \quad (58)$$

La solución por lo tanto será de la forma:

$$\Psi = \sqrt{Ux\nu} f(\mu) \quad (59)$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación (47) se obtiene la llamada Ecuación de Blasius, que tendrá la forma:

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (60)$$

Para definir las nuevas condiciones de contorno y condición inicial se debe tener en cuenta que  $\mu$  tiende a infinito cuando  $x$  tiende a 0 o cuando  $y$  tiende a infinito, de forma que la condición inicial y una condición de contorno llevan al mismo resultado, pasando entonces a tener solo dos condiciones:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad (61)$$

$$f'(\infty) = 1 \quad (62)$$

Además, se puede definir  $v_x$  en función de  $f(\mu)$ :

$$v_x = Uf'(\mu) \quad (63)$$

La Ecuación de Blasius se puede resolver numéricamente usando las condiciones de contorno. Una vez se haya obtenido  $f$  se puede calcular la distribución de velocidades a través de  $f'$ . Esta distribución se representa en el siguiente diagrama:

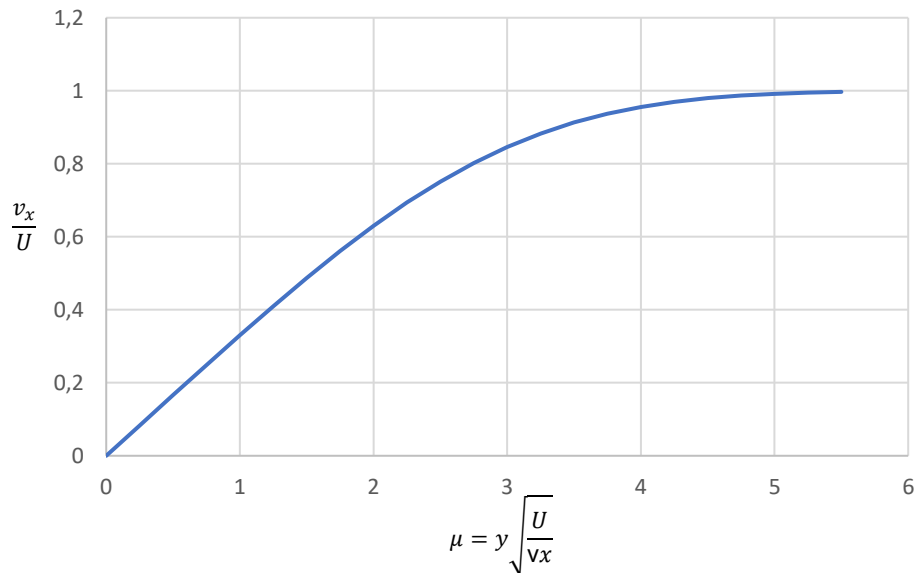


Ilustración 4: Distribución de velocidades para la solución de la capa límite. (Papanastasiou, Georgiou, & Alexandrou, 2000).

De este diagrama se puede deducir que para  $v_x = 0.99U$ , o lo que es lo mismo, para el borde de la capa límite,  $\mu=5$ . El espesor de la capa límite sería, usando la ecuación (54):

$$\delta(x) \sim 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (64)$$

Esta aproximación no es muy buena, ya que  $v_x$  solo será igual a  $U$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Una aproximación mejor al espesor de la capa límite, que será la que se usará en este trabajo, es considerar el espesor de desplazamiento de la capa límite como la distancia que habría que desplazar la lámina plana dentro del fluido para que, suponiendo que todo el fluido se mueve con velocidad  $U$ , pasase el mismo caudal que pasaba por la capa límite. En forma de ecuación sería:

$$\delta'(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy \quad (65)$$

Aplicando a esta expresión las ecuaciones (57) y (63) e integrando numéricamente se obtiene:

$$\delta'(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{U}} \int_0^{\infty} (1 - f'(\mu)) d\mu = 1.72 \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{U}} \quad (66)$$

Esta solución es la que se puede aplicar a una tubería de salida como la que se analizará en este trabajo porque el espesor de la capa límite es mínimo en comparación con el diámetro de la tubería, por lo que es posible suponer que el radio de curvatura es lo suficientemente grande como para que el fluido dentro de la tubería se comporte como si estuviera en contacto con un plano. Se podrá calcular el espesor de la capa límite en cualquier punto de la tubería de salida para conseguir un estudio más profundo de la evolución del perfil de velocidades y de la velocidad de salida del agua. Para el cálculo de ésta se supondrá que el caudal en la tubería se verá reducido por la aparición de la capa límite, por lo que el nuevo caudal será:

$$Q_{real} = Q_{ideal} - \delta(L)U\pi D \quad (67)$$

Siendo  $Q_{ideal}$  el caudal ideal que viene dado por:

$$Q_{ideal} = \frac{\pi D^2}{4} U \quad (68)$$

$\delta(L)$  es el espesor de desplazamiento de la capa límite calculado mediante la ecuación (66) y  $D$  es el diámetro de la tubería de salida. La velocidad media de salida  $\langle v' \rangle$  se podrá calcular sabiendo que:

$$Q_{real} = \langle v' \rangle A \quad (69)$$

siendo  $A$  el área de la sección de la tubería de salida.

Por la ecuación de continuidad, el caudal debe ser constante a lo largo de toda la tubería, variando el perfil de la velocidad. Para el estudio de la variación ficticia de la velocidad media  $\langle v' \rangle$ , debida a la capa límite a lo largo de la tubería se analizará el incremento del espesor de desplazamiento de la capa límite en función de la distancia  $x$  desde el entronque de la tubería de salida. El espesor de desplazamiento de la capa límite al final de la tubería de salida se deduce de la ecuación (66) y será:

$$\delta'(L) = 1.72 \sqrt{\frac{\sqrt{L}}{U}} \quad (70)$$

siendo  $L$  la longitud de la tubería. Uniendo esta ecuación con la ecuación (66) se concluye que:

$$\delta'(x) = \delta'(L) \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (71)$$

La velocidad media ficticia se podrá despejar de la ecuación (69) (suponiendo el área variable) y al conocer el caudal gracias a la ecuación (67) solo será necesario calcular la variación del área a lo largo de la tubería. Este será el área de la tubería menos el área que ocupa el espesor de desplazamiento de la capa límite, y se expresará como:

$$A(x) = \frac{\pi D^2}{4} - \pi D \delta'(L) \sqrt{\frac{x}{L}} \quad (72)$$



Así, combinando las ecuaciones (69) y (72) se obtiene que la velocidad ficticia media en función de la distancia al entronque será:

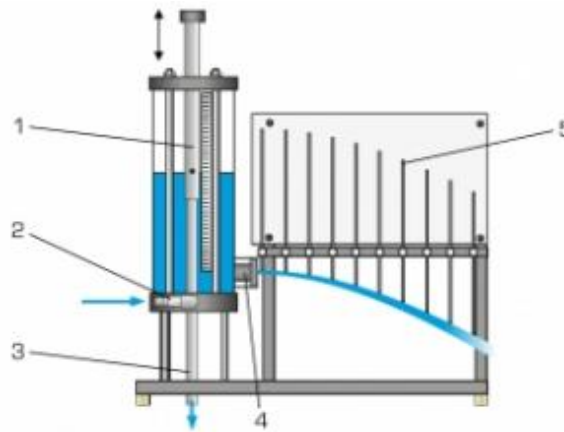
$$\langle v'(x) \rangle = \frac{Q_{real}}{\frac{\pi D^2}{4} - \pi D \delta'(L) \sqrt{\frac{x}{L}}} \quad (73)$$

Aunque la velocidad media en función de  $x$  es un valor ficticio, ésta es la velocidad media real a la entrada de la tubería. No obstante, como el fluido se frena por rozamiento en contacto con las paredes, se modifica el perfil de velocidad y por tanto el valor de la velocidad media se modificará.

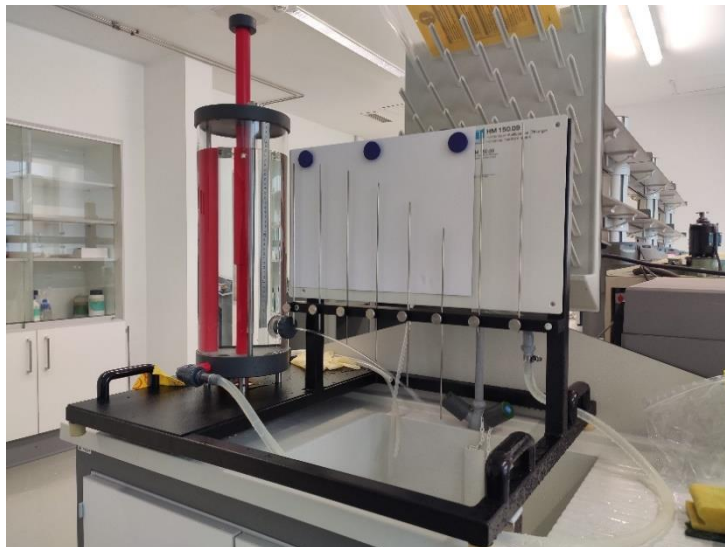
## Metodología

Para la realización de este trabajo se ha utilizado el aparato de orificio y chorro HM 150.09 de la marca alemana Gunt que se puede observar en las Ilustraciones 5 y 6. Este aparato consiste en un depósito cilíndrico de plexiglás con una escala para medir la altura de la columna de agua con una precisión de 0,5 mm, una entrada de agua, un rebosadero para mantener el volumen dentro del depósito constante y una salida en la que se acoplarán las distintas tuberías de salida. Además, el equipo cuenta con un dispositivo palpador que consiste en 8 varillas de metal móviles separadas entre ellas 7 cm y una pantalla que nos permite visualizar la trayectoria de descarga. Para este trabajo se han usado las 4 tuberías de salida distintas que incluía el fabricante y que se muestran en la Ilustración 7. Estas 4 tuberías de salida son:

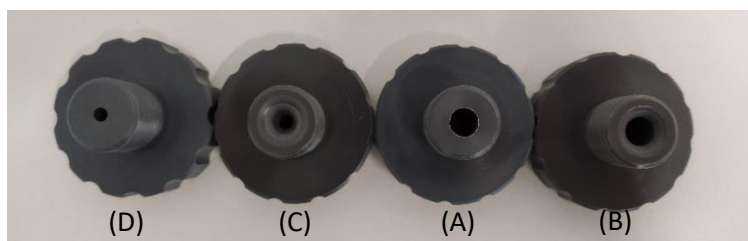
- A. Tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado y longitud de 3,2 cm.
- B. Tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque en ángulo recto y longitud de 3,5 cm.
- C. Tubería de salida de sección recta circular de 4 mm de diámetro con entronque redondeado y longitud de 3 cm.
- D. Tubería de salida de sección recta circular de 4 mm de diámetro con entronque en ángulo recto y longitud de 3,5 cm.



*Ilustración 5: Esquema de HM 150.09. (1): Depósito con rebosadero ajustable. (2): Entrada de agua. (3): Rebosadero de agua. (4): Salida de agua. (5): Dispositivo palpador (GUNT, 2018).*



*Ilustración 6: HM 150.09 Aparato de descarga horizontal por orificios.*



*Ilustración 7: Tuberías de salida utilizadas.*

Lo primero que se hizo fue nivelar el aparato. Una vez nivelado, se conectó a través de un tubo de plástico al sistema de suministro de agua del laboratorio y se acopló la tubería de salida que se estudiará. Para visualizar la trayectoria se colocó una hoja de papel de tamaño aproximado A3 sobre la pantalla de visualización y se aseguró a ésta mediante unos imanes que incluía el fabricante. Una vez hecho todo esto se empezaron a tomar las medidas.

Se tomaron 5 medidas entre las presiones hidrostáticas correspondientes a la altura máxima y la altura mínima de la columna de agua. Se evitaron los extremos donde la altura de la columna de agua pudiera ser más irregular y se eligieron alturas orientativas, ya que mantener un flujo estacionario para todas las tuberías de salida en exactamente la misma altura es prácticamente imposible. Estas alturas orientativas serán 38 cm, 34 cm, 30 cm, 26 cm y 22 cm.

El proceso para cada una de las tuberías fue idéntico. Tras colocar la tubería que se iba a estudiar se llenó el depósito hasta una altura cercana a los 38 cm en la que el flujo fuera estacionario y la altura constante. Una vez conseguido esto, se regularon las varillas de ajuste de derecha a izquierda de forma que la parte inferior de éstas estuviera lo más cerca posible del chorro de agua sin llegar a tocarlo, ya que si ocurre esto la trayectoria de descarga se puede ver modificada. Debido a las limitaciones del aparato de medida y al rozamiento del chorro de agua con el aire no siempre es posible ajustar todas las varillas para que estén cerca del chorro de agua, por lo que en algunas trayectorias de descarga se tendrán más puntos que en otras. Una vez todas las varillas se encontraban en la posición adecuada y tras asegurarse de que la trayectoria de descarga no variaba a lo largo del tiempo se tomaron las medidas de la altura de las varillas. Con un lápiz se marcó en el papel previamente colocado en la pantalla de visualización la posición de la parte superior de las varillas. Con esto se consiguieron las alturas experimentales. Además, sabiendo que la separación entre cada varilla era de 7 cm se pudo representar la trayectoria experimental.

Tras esto, sin variar la altura de la columna de agua, se midió el caudal de salida unas 5 veces con una probeta de 1000 ml o de 500 ml (dependiendo de la tubería de salida) y un cronómetro y se hizo la media de los caudales medidos.

Una vez hecho todo esto, se disminuyó la altura de la columna del agua y se repitió el proceso descrito para una altura cercana a 34 cm, a 30 cm, a 26 cm y a 22 cm respectivamente. Cuando ya se tomaron las 5 medidas para una sola tubería se vació el depósito y se colocó una nueva tubería de salida, repitiendo los pasos.

Una vez tomadas todas las medidas experimentales se calcularon las medidas teóricas para los distintos modelos.

### *Teoría de fluido ideal*

En este caso se usó la ecuación (12), ya que al conocer la distancia desde la tubería de salida hasta cada una de las varillas es posible utilizar la ecuación directamente y calcular las alturas para cada punto y la trayectoria sin mayor dificultad.

Para el cálculo de la velocidad de salida en este modelo se usó la ecuación (7) con un valor de la gravedad de  $g = 9,91 \text{ ms}^{-2}$ .

### *Método de la velocidad media*

Con este método, al conocer la medida del caudal ya que ésta se tomó experimentalmente, se puede calcular la velocidad media de salida teniendo en cuenta la sección de cada tubería de salida. Una vez calculada la velocidad media de salida y siendo la distancia a la tubería de salida conocida se utilizó la ecuación (27) para calcular las alturas en cada punto y así poder visualizar la trayectoria. El uso de este método supone de forma implícita que a la salida la velocidad tiene un perfil plano y que el rozamiento con el aire es despreciable.

### *Teoría de capa límite*

En este caso lo primero que se calculó es el espesor de desplazamiento de la capa límite, que viene dado por la ecuación (66) sustituyendo  $x$  por la longitud de la tubería de salida y siendo  $v = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Al considerar la longitud de la tubería de salida se tuvo en cuenta la curvatura del entronque de entrada, ya que ésta disminuye la longitud de la tubería de salida.

Tras haber calculado el espesor de desplazamiento de la capa límite se obtuvo con éste el caudal de salida con la capa límite a través de las ecuaciones (67) y (68), y con este caudal se calculó la velocidad media de salida con la ecuación (69). Con la velocidad media de salida se podrá representar la trayectoria de nuevo usando la ecuación (12) como se ha hecho en los modelos anteriores.

Para visualizar cómo varía la velocidad media a lo largo de la tubería de salida se representó la ecuación (73) dando valores a  $x$  hasta llegar a la longitud de cada tubería. No debemos perder de vista que ésta es una velocidad ficticia, consecuencia de la definición del espesor de desplazamiento.

## Resultados

Primero se expondrán las trayectorias a distintas presiones para una tubería de salida y posteriormente se analizarán las trayectorias para varias tuberías de salida a una presión similar.

En las ilustraciones 8 a 12 se representarán la trayectoria del agua experimental (Trayectoria experimental), la trayectoria calculada considerando el agua como un fluido ideal (Flujo ideal), la trayectoria calculada considerando el agua con un fluido real y teniendo en cuenta la capa límite (Modelo capa límite) y la trayectoria calculada a través del caudal de salida del agua que se ha medido experimentalmente (Método de la velocidad media).

También en la Tabla 1 se incluye el valor del caudal medio medido para cada presión ( $\langle Q \rangle$ ) y los valores de las velocidades media obtenidas experimentalmente ( $\langle v \rangle$ ), las calculadas a través de las energías considerando un fluido ideal ( $v_x$ ) y las calculadas con la aproximación a un fluido real con el modelo de capa límite ( $\langle v' \rangle$ ). En la Tabla 2 se exponen las mismas magnitudes, pero esta vez para el caso de tuberías distintas. Para visualizar mejor estos resultados se expone el espesor de la capa límite a la salida, calculado usando este modelo ( $\delta'(L)$ ) y la variación de la velocidad a través de la tubería de salida en las ilustraciones 13 y 18.

### Estudio de la variación de presión para una misma tubería de salida

Para este apartado se usarán las medidas tomadas para la tubería de salida de sección recta circular de 8mm de diámetro con entronque redondeado.

#### 0,381 m

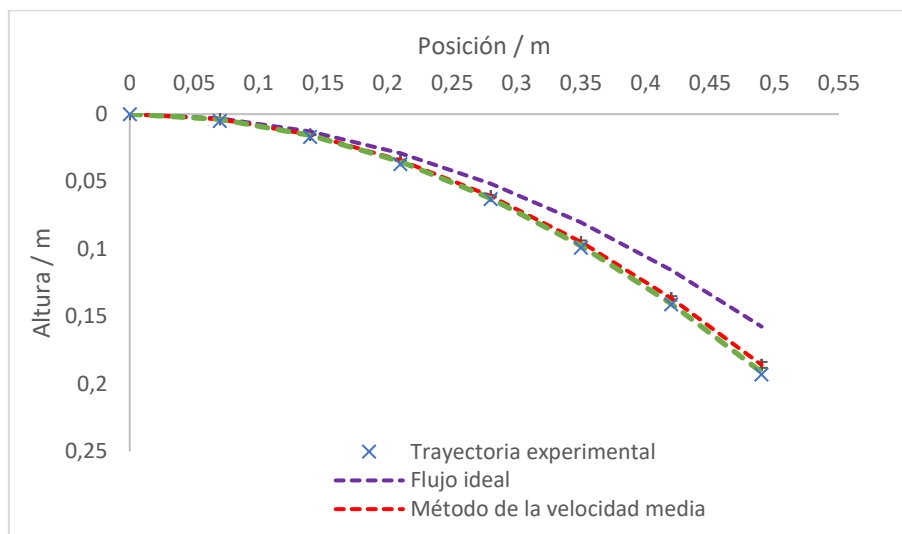


Ilustración 8: Trayectorias de descarga para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado con una altura de la columna de agua de 0,381 m.

### 0,3415 m

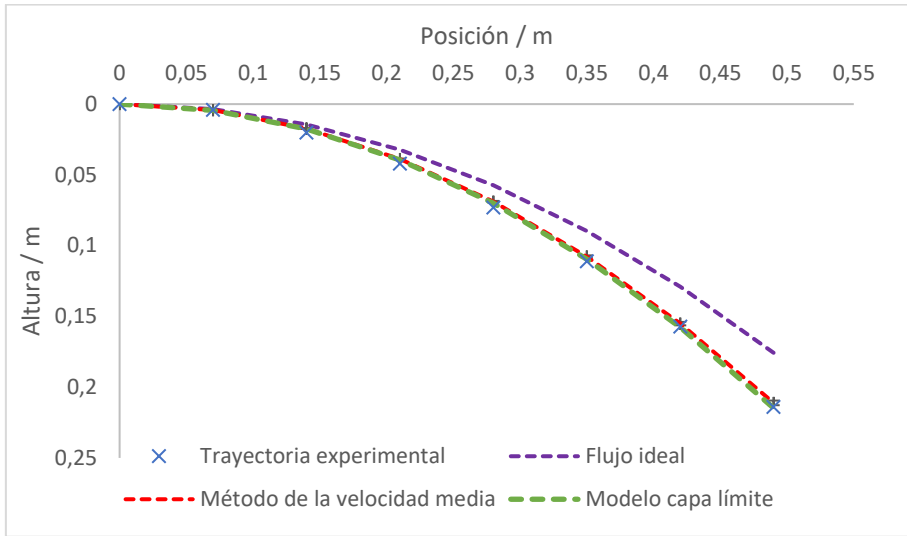


Ilustración 9: Trayectorias de descarga para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado con una altura de la columna de agua de 0.3415 m.

### 0,302 m

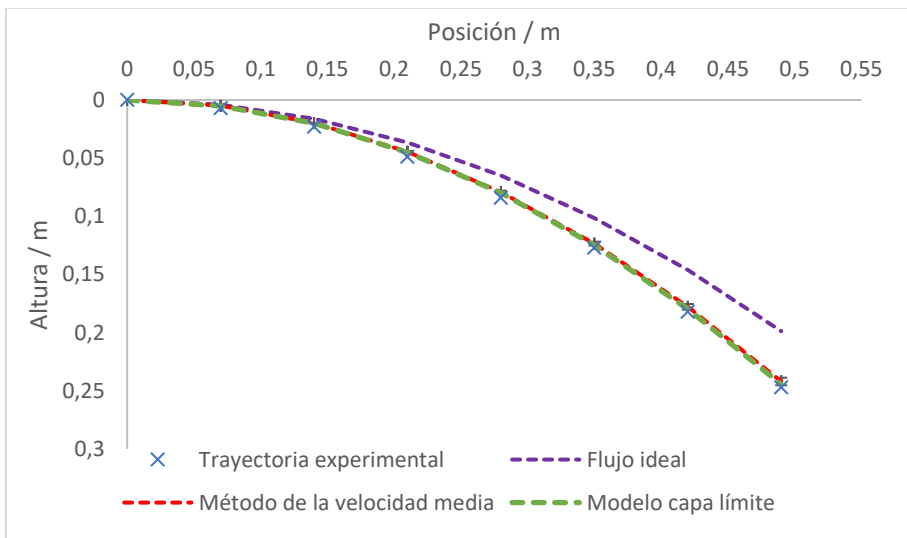


Ilustración 10: Trayectorias de descarga para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado con una altura de la columna de agua de 0.302 m.

### 0,2605 m

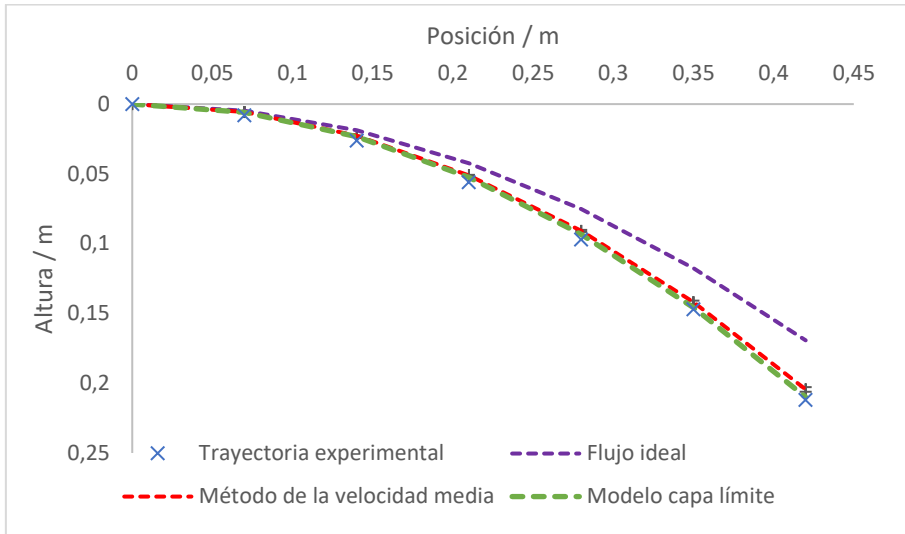


Ilustración 11: Trayectorias de descarga para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado con una altura de la columna de agua de 0.2605 m.

### 0,2205 m

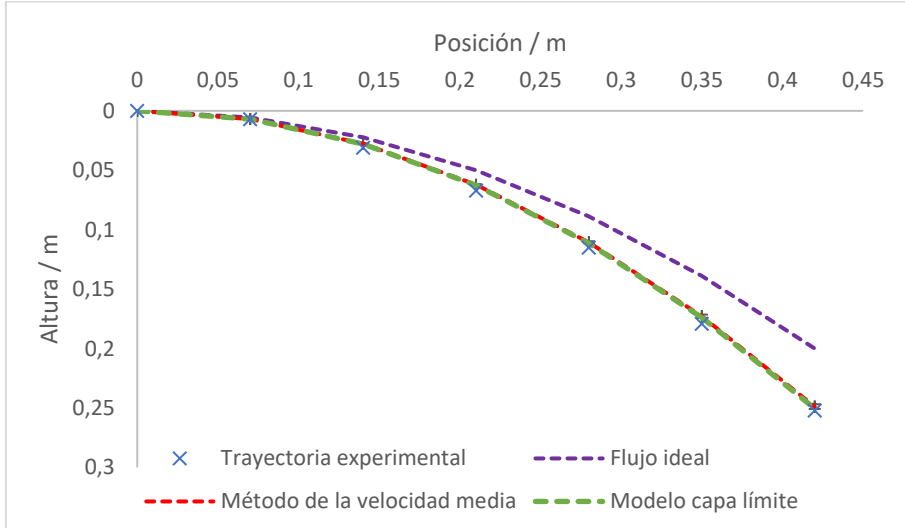


Ilustración 12: Trayectorias de descarga para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado con una altura de la columna de agua de 0.2205 m.

Altura de la columna de agua (m)	$\langle Q \rangle$ (m <sup>3</sup> /s)	$\langle v \rangle$ (m/s)	$v_x$ (m/s)	$\langle v' \rangle$ (m/s)	$\delta'(L)$ (m)
0,381	0,000127	2,53	2,748	2,493	0,0001856
0,3415	0,000119	2,374	2,602	2,353	0,0001908
0,302	0,000111	2,217	2,447	2,206	0,0001967
0,2605	0,000103	2,068	2,272	2,040	0,0002041
0,222	$9,4 \cdot 10^{-5}$	1,874	2,091	1,868	0,0002128

Tabla 1: Magnitudes calculadas para distintas alturas de la columna de agua para la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado.

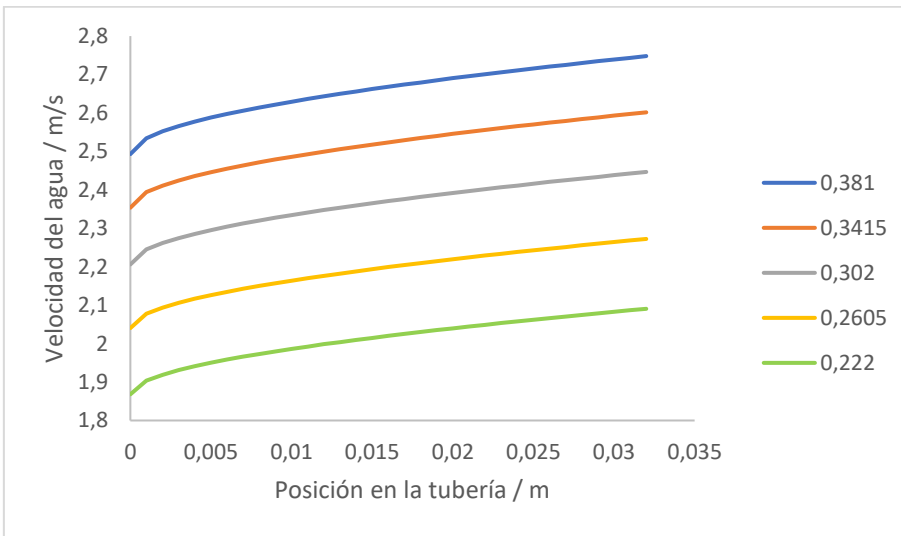


Ilustración 13: Comparación de la variación de la velocidad en la tubería de salida para distintas alturas de la columna de agua.

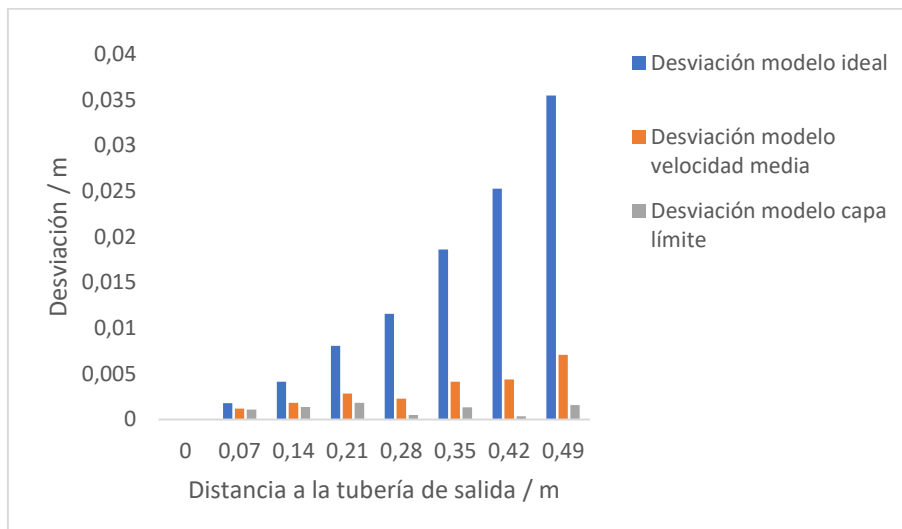
Lo primero que se observa es que el modelo de flujo ideal sobreestima la velocidad de salida y por tanto la trayectoria. En todos los casos, a medida que disminuye la altura de la columna de agua, y por tanto la presión, también disminuyen el alcance y la velocidad de salida, como era de esperar. Es importante destacar que en este caso (tubería de 8 mm con entronque redondeado) los valores experimentales de la trayectoria son prácticamente idénticos a los determinados a partir de caudal experimental y a los calculados teniendo en cuenta la capa límite. Esto nos lleva a la conclusión de que el rozamiento del agua con el aire es mínimo en este caso.

Sobre la capa límite se puede observar que a medida que disminuye la presión (menor caudal y menor valor de  $U$ ) aumenta el espesor de la capa. Lo cual es esperable de acuerdo con la ecuación (70). Además, la velocidad de salida calculada teniendo en cuenta la presencia de la capa límite se aproxima mucho a la velocidad media de salida experimental, aunque en todos los casos la velocidad calculada es algo menor que la experimental. Esto podría indicar que el modelo usado subestima los efectos viscosos al considerar que el radio de curvatura tiende a infinito comparado con el espesor de la capa límite. No obstante, estas diferencias están dentro de la cota de error de los valores determinados experimentalmente.

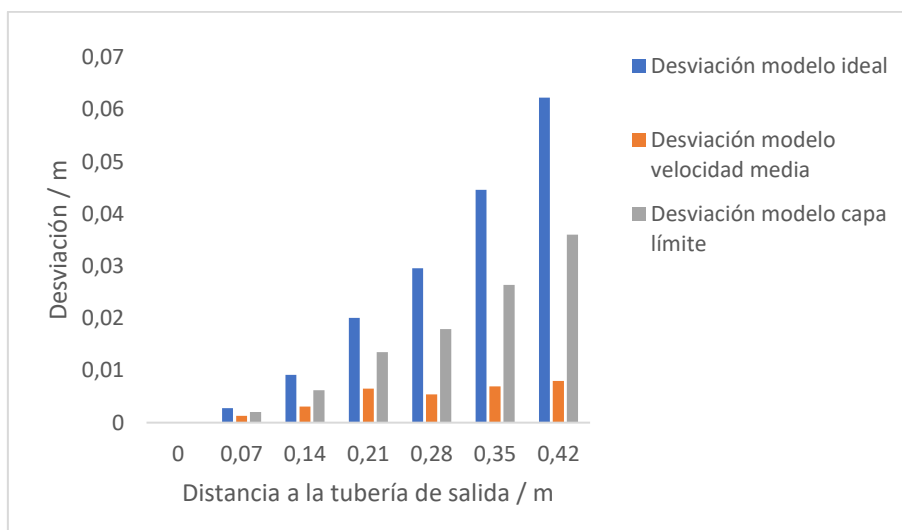


*Estudio de diferentes tuberías de salida para presiones casi idénticas*

Para este caso se analizarán las desviaciones de las alturas de las trayectorias calculadas de los distintos modelos con el valor de la altura del chorro experimental para las medidas tomadas a presión máxima, con una columna de agua de unos 38 cm de altura. Ver ilustraciones 14 a 17.



*Ilustración 14: Desviaciones para la tubería de salida de sección recta circular de 8mm de diámetro, con entronque redondeado.*



*Ilustración 15: Desviaciones para la tubería de salida de sección recta circular de 8mm de diámetro, con entronque en ángulo recto.*

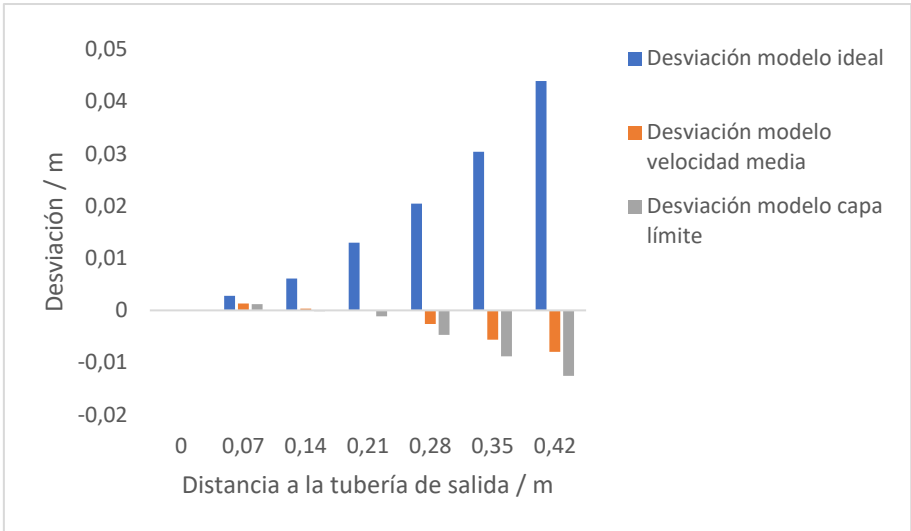


Ilustración 16: Desviaciones para la tubería de salida de sección recta circular de 4mm de diámetro, con entronque redondeado.

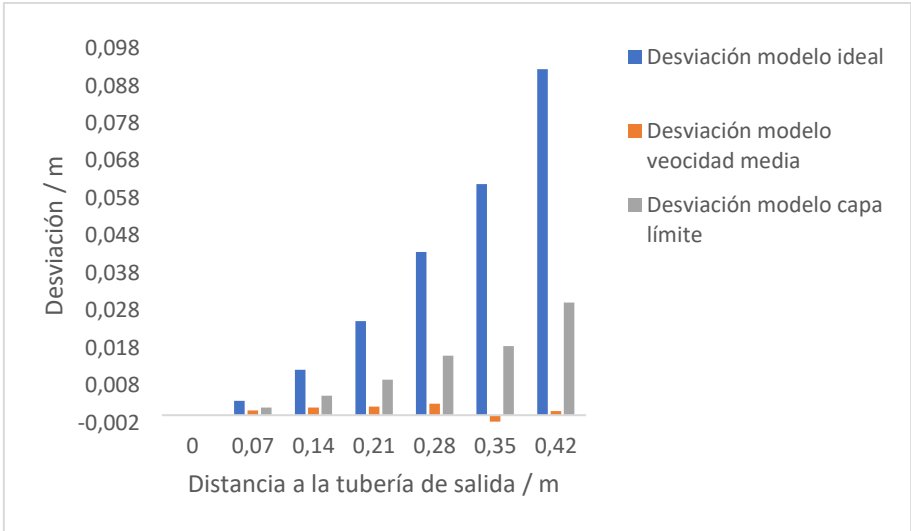


Ilustración 17: Desviaciones para la tubería de salida de sección recta circular de 4mm de diámetro, con entronque en ángulo recto.

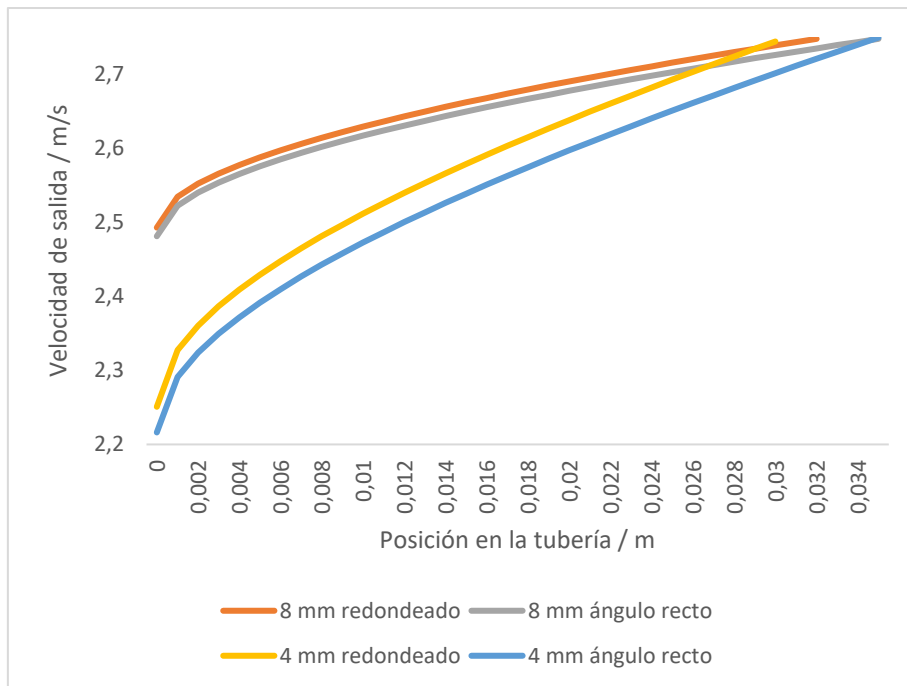


Ilustración 18: Variación de la velocidad en la tubería de salida para las 4 tuberías de salida.

Tubería de salida	$\langle Q \rangle$ (m <sup>3</sup> /s)	$\langle v \rangle$ (m/s)	$v_x$ (m/s)	$\langle v' \rangle$ (m/s)	$\delta'(L)$ (m)
8 mm redondeado	0,000127	2,53	2,748	2,493	0,0001856
8 mm ángulo recto	0,000114	2,267	2,748	2,481	0,0001941
4 mm redondeado	$2,86 \cdot 10^{-5}$	2,282	2,744	2,251	0,0001798
4 mm ángulo recto	$2,58 \cdot 10^{-5}$	2,055	2,75	2,216	0,0001941

Tabla 2: Magnitudes calculadas para distintas tuberías de salida con una columna de agua de unos 38 cm de altura.

Lo primero que se puede extraer de estas gráficas es la confirmación de los resultados expuestos anteriormente. Las alturas obtenidas mediante la velocidad media experimental y mediante la aproximación de la capa límite son más precisas que las obtenidas considerando un fluido ideal. Las alturas calculadas con la velocidad media experimental se aproximan mejor en general a las alturas reales que las obtenidas a través del modelo de la capa límite. Esto es esperable, ya que cuando usamos la velocidad media medida a través del caudal, las diferencias de altura con el valor experimental se deben principalmente a errores experimentales. De hecho, si calculamos las desviaciones del valor de  $y$  experimental y calculado a partir del caudal, siempre es menor que el 41,4%. Además, el modelo de la capa límite será menos preciso para el caso de la tubería de salida con entronque en ángulo recto.

El entronque redondeado permite minimizar las perturbaciones cuando el agua entra en la tubería de salida, evitando la aparición de turbulencias. Esto causa que la velocidad calculada a través del modelo de capa límite de Blasius coincida casi perfectamente con la velocidad real. El hecho de que la boquilla redondeada de 8 mm de diámetro tenga menor curvatura hace que la concordancia del modelo de capa límite sea mejor que para el caso de la boquilla de 4 mm, lo

que se puede observar estudiando las desviaciones entre la medida experimental y los cálculos a través del modelo de la capa límite. Para el caso de la tubería de salida de 8 mm de diámetro con entronque redondeado la desviación es de 4,49%, mientras que para el entronque en ángulo recto es de 6,9%. Para la tubería de salida de 4 mm de diámetro se encuentra una desviación de -7,46% para el caso del entronque redondeado y de 14,52% para el caso del entronque en ángulo recto. Esto se debe a que estamos usando la solución de Blasius obtenida para un plano en la pared de una tubería con cierta curvatura. El entronque en ángulo recto genera más turbulencias ya que la fricción a la entrada de la tubería es mayor, y no tendremos un flujo laminar. Por tanto, la velocidad calculada mediante la aproximación de capa límite de Blasius pierde validez. Esto, junto al hecho de que el modelo de capa límite es más preciso para el caso del entronque redondeado, nos lleva a la conclusión de que el modelo de capa límite de Blasius es una aproximación muy buena en los casos en los que tengamos una capa límite muy estrecha en comparación con el diámetro de la tubería.

Estos resultados, aunque no se trate en profundidad en este trabajo, están relacionados con el coeficiente de pérdida de la entrada de la tubería de salida. Este coeficiente cambia para las distintas geometrías de la tubería, siendo mayor para el caso de entrada en ángulo recto y disminuyendo según se va redondeando más la entrada de la tubería, teniendo en cuenta el cociente entre el radio de curvatura y el diámetro de la tubería (Smits, 2019). Algunos de los valores serán:

Tipo de entrada	Coeficiente de pérdida
Ángulo recto	0,5
Redondeada ( $r/D = 0.02$ )	0,28
Redondeada ( $r/D = 0.06$ )	0,15
Redondeada ( $r/D > 0.1$ )	0,04

Tabla 3: Valores para el coeficiente de descarga en función del radio de curvatura ( $r$ ) y del diámetro de la tubería ( $D$ ). (Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías. Technical Paper No. 410M, 1982).

Esta disminución del coeficiente de pérdida mostrado en la Tabla 3 se traduce en un aumento del caudal a medida que el coeficiente disminuye. Esto se observa claramente en los valores experimentales del caudal recogidos en la Tabla 2, donde se observa que el caudal es mayor para el entronque redondeado comparando las tuberías del mismo diámetro.

En la Ilustración 17 se muestra como variaría un perfil de velocidad plano como consecuencia del estrechamiento de la tubería. Es decir, aplicando el concepto de espesor de desplazamiento. No tenemos que perder de vista que éste no es el comportamiento real del fluido sino un método que nos permite resolver este tipo de problemas. En la realidad el caudal es constante, la sección de la tubería también, y por tanto también debe serlo la velocidad media, de acuerdo con la ecuación de continuidad. No obstante, a la entrada de la tubería debemos tener un perfil plano, que se va desarrollando a perfil parabólico a medida que avanza el fluido (ver Ilustración 2).

En el caso de la tubería de 4 mm de diámetro con entronque redondeado las desviaciones calculadas para el modelo a través del caudal de salida y para el modelo de la capa límite son negativas. Esto quiere decir que las alturas del chorro de agua en estos casos serán mayores que las alturas experimentales, lo que es imposible ya que en el caso real la acción del rozamiento del agua con el aire provocará que la altura sea mayor que en los modelos. Tras repetir las medidas varias veces y calcular los errores de estas, se llega a la conclusión de que no es ni un error experimental ni un error de aplicación de los modelos. Como se ha mencionado anteriormente, la causa más probable para esta anomalía puede ser la curvatura de la tubería.

En las consideraciones del modelo de la capa límite se ha supuesto que el espesor de ésta es muy pequeño comparado con el radio de curvatura de la tubería de salida, pero en la tubería de 4 mm de diámetro el espesor de la capa límite puede ser lo suficientemente grande como para causar las variaciones observadas. Aun así, esto no explicaría porque en la tubería de 4 mm de diámetro con entronque en ángulo recto no se observan las mismas anomalías, a no ser que las turbulencias sean importantes y tengamos un perfil de velocidad con desarrollo logarítmico en vez de parabólico.

## Conclusiones

En este trabajo se han analizado las trayectorias de descarga y las velocidades de salida del agua a través de varias tuberías de distintos diámetros y entronques, variando también la presión del agua para cada caso a través de la altura de la columna de agua. Tras esto se han calculado las velocidades y las trayectorias de descarga mediante las siguientes teorías y métodos: teoría de fluido ideal, método de la velocidad media a partir del caudal y teoría de la capa límite. Comparando los resultados obtenidos con estos métodos con los resultados experimentales se extraen las siguientes conclusiones:

- La teoría del fluido ideal es la menos precisa de todas las teorías utilizadas en este trabajo. Las alturas calculadas para el cálculo de la trayectoria son mucho menores que las alturas experimentales. Esto se debe a que en esta teoría no se tienen en cuenta el rozamiento del agua con el aire, el rozamiento del agua con la tubería de salida y el rozamiento del agua consigo mismo. Para el estudio de la velocidad de salida se puede observar que la extraída con este modelo es mucho mayor que la calculada a través de los caudales experimentales.

- El método de la velocidad media es el método más preciso que se ha utilizado para modelizar la trayectoria excepto para el caso de la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado. Este grado de precisión se debe a que en este caso no es necesario modelizar la velocidad de salida, simplemente se usará la que se calcula a través de las medidas del caudal. Este también es el mayor inconveniente de este método, ya que no siempre será posible medir el caudal de salida.

- La teoría de la capa límite permite hacer una aproximación bastante precisa de la velocidad de salida real. En cuanto a las trayectorias de descarga, aunque no es tan preciso como el método a través de la velocidad media en la mayoría de los casos, es lo suficientemente preciso como para considerarlo como una buena estimación, al menos en el caso de que la tubería de salida tenga entronque redondeado. Cabe destacar el caso de la tubería de salida de sección recta circular de 8 mm de diámetro con entronque redondeado, ya que la teoría de capa límite supone una aproximación muy buena en ese caso, con una desviación siempre menor al 1,5% en las alturas más alejadas de la tubería de salida. Sobre la capa límite se puede observar que el espesor de desplazamiento es menor para el caso de las tuberías de salida con entronque redondeado. Además, gracias al incremento del espesor de desplazamiento de la capa límite se ha estudiado la variación del perfil de velocidad a lo largo de la teoría, viendo como pasa de un perfil plano a uno parabólico, pero sin que le dé tiempo a desarrollarse completamente.

## Bibliografía

- Anderson Jr., J. D. (2005). Ludwig Prandtl's Boundary Layer. *Physics Today*, 58, 42.
- Crespo Martínez, A. (2011). *Mecánica de Fluidos*. Ediciones Parainfo S. A.
- Erhard, P., Etling, D., Müller, U., Riedel, U., Sreenivasan, K. R., & Warnatz, J. (2010). *Prandtl–Essentials of Fluid Mechanics*. Springer.
- Flujo de fluidos en válvulas, accesorios y tuberías. Technical Paper No. 410M*. (1982). Crane.
- Goldstein, S. (1965). *Modern Developments in Fluid Dynamics*. Dover Publications.
- GUNT. (2018). *Hoja técnica de dispositivo HM 150.09 "Descarga horizontal por orificios"*.
- Kittel, C., Knight, W. D., Ruderman, M. A., Helmholtz, A. C., & Moyer, B. J. (1982). *Mecánica*. Editorial Reverté.
- Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*. Dover Publications.
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (2001). *Física Teórica Vol. VI: Mecánica de Fluidos*. Editorial Reverte S. A.
- Mittasch, P. (2015). *Manual de experimentos Gunt HM 150.09*.
- Munson, B. R., Young, D. F., Okiishi, T. H., & Huebsch, W. W. (1999). *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. Limusa.
- Papanastasiou, T. C., Georgiou, G. C., & Alexandrou, A. N. (2000). *Viscous Fluid Flow*. CRC Press.
- Prandtl, L. (1905). Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904*, 484.
- Schlichting, H., & Gersten, K. (2017). *Boundary-Layer Theory*. Springer.
- Smits, A. J. (2019). *A Physical Introduction to Fluid Mechanics*.
- Spurk, J. H., & Aksel, N. (2020). *Fluid Mechanics*. Springer.
- White, F. M. (2004). *Mécanica de Fluidos*. McGraw-Hill.