Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Una introducción a la teoría de categorías

Autor: Silvia Rueda Valencia

Tutor/es: Manuel M. Carnicer Arribas

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es introducir la teoría de categorías dando las definiciones elementales (categoría, funtor y transformación natural), y describiendo algunas construcciones universales, relacionando estos conceptos abstractos con ejemplos vistos en el grado. También demostraremos algunos resultados básicos de la teoría de categorías.

En el primer capítulo, definiremos el concepto de *categoría* y aportaremos una larga lista de ejemplos de categorías con las que vamos a trabajar en los capítulos posteriores. En el lenguaje de categorías hablamos de "objetos" y "morfismos" de una forma abstracta para tratar de forma simultánea conceptos de diferentes áreas de las matemáticas como, por ejemplo, los espacios topológicos y los espacios vectoriales. También definiremos los diferentes tipos de morfismos que existen en una categoría y presentaremos el concepto de *dualidad*. Este último recurso lo utilizaremos con frecuencia en el siguiente capítulo para relacionar unos resultados con otros.

Tras las definiciones básicas que damos en el primer capítulo, trataremos de hablar, de una forma abstracta, de cuatro construcciones universales que podemos encontrar en diferentes categorías: el *producto*, el *coproducto*, el *pull-back* y el *push-out*. Generalizaremos construcciones que se estudian en el grado como el producto cartesiano de conjuntos y la suma directa de grupos abelianos.

En el último capítulo, definimos *funtor* como la herramienta para relacionar unas categorías con otras dando también ejemplos vistos en el grado pero que, hasta ahora, no habíamos llamado funtores. Para finalizar, hablamos de las *transformaciones naturales* que nos permiten establecer relaciones entre funtores, y demostramos uno de los resultados más importantes de la teoría de categorías: el lema de Yoneda. En un estudio más exhaustivo podríamos profundizar más en las aplicaciones de este lema, pero va más allá de lo que pretendemos con este trabajo.

Capítulo 1

Categorías

El concepto de categoría permite tratar diferentes ramas de las matemáticas de una forma abstracta usando el mismo lenguaje. Se pueden traducir resultados de teoría de conjuntos, teoría de grupos y topología en los mismos términos usando objetos y relaciones entre ellos establecidas mediante morfismos.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathfrak{C}$ está formada por:

I. Una clase $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ cuyos elementos se denominan objetos.

II. Para cada par A, B de $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, un conjunto $\mathfrak{C}(A, B)$ cuyos elementos se denominan morfismos de A en B.

III. Para cada tres elementos A, B, C de $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, una ley de composición

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(A,B) \times \mathfrak{C}(B,C) &\longrightarrow \mathfrak{C}(A,C) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned} \tag{1.1}$$

De forma simplificada, escribiremos gf para referirnos a la composición $g \circ f$ de $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{C}(B, C)$.

Una categoría $\mathfrak{C}$ tiene que cumplir los siguientes axiomas:

1. Los conjuntos $\mathfrak{C}(A_1, B_1)$ y $\mathfrak{C}(A_2, B_2)$ son disjuntos a no ser que $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.

2. (Asociatividad de la composición) Sea $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(B, C)$ y $h \in \mathfrak{C}(C, D)$. Entonces
$$h(gf) = (hg)f \tag{1.2}$$

3. (Existencia de identidades) Para cada objeto A existe un morfismo $h \in \mathfrak{C}(A, A)$ tal que para todo $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}(C, A)$,
$$fh = f, \quad hg = g \tag{1.3}$$
El morfismo h es el *morfismo identidad* de A y lo denotamos 1_A. Este morfismo 1_A es único: si existiese otro morfismo identidad $1'_A \in \mathfrak{C}(A, A)$ entonces $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$.

Como podemos observar, hemos definido $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ como una clase, es decir, no tiene que ser necesariamente un conjunto. Se debe a las paradojas conocidas de la teoría de conjuntos. De hecho, es conocido que la clase de todos los conjuntos no es un conjunto, entonces, si hubiesemos definido $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ como un conjunto, tendríamos problemas definiendo una categoría cuyos objetos fuesen todos los conjuntos. Para poder eliminar estos problemas, se define $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ como una clase en lugar de un conjunto.

Para aclarar a qué nos referimos con el primer axioma, consideraremos el siguiente ejemplo. Sea **S** la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones. Las dos aplicaciones coseno
$$\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$
podrían considerarse la misma aplicación a pesar de que la llegada sea a conjuntos diferentes. Sin embargo, aunque dos aplicaciones tomen los mismos valores en los mismos puntos se consideran aplicaciones diferentes si tienen espacios de salida o de llegada diferentes. De hecho, la aplicación coseno con llegada al intervalo $[-1, 1]$ es una aplicación sobreyectiva y la que tiene llegada a $\mathbb{R}$ no lo es. Por tanto, estamos hablando de dos aplicaciones distintas.

Antes de comenzar a dar ejemplos de categorías vamos a aclarar ciertas cuestiones de notación: nos referiremos a los objetos de $\mathfrak{C}$ usando letras mayúsculas y a los de morfismos usando minúsculas. Por tanto, escribiremos $A \in \mathfrak{C}$ para referirnos a un objeto, y $f \in \mathfrak{C}$, en lugar de $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, para referirnos a un morfismo entre dos objetos cualesquiera de $\mathfrak{C}$.

Utilizaremos también como notación $f\colon A \longrightarrow B$ para referirnos a un morfismo del objeto A en el objeto B. Es natural pensar que los elementos

$f \in \mathfrak{C}(A, B)$ son "aplicaciones" entre los objetos A y B de una forma general. Dando algunos ejemplos veremos a continuación que los morfismos de una categoría no necesariamente tienen que ser aplicaciones.

Ejemplos 1.1.2.

1. La categoría $\mathbf{S}$: los elementos de $\mathrm{Obj}(\mathbf{S})$ son los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones. La composición en esta categoría es la composición habitual de aplicaciones.
   Si consideramos el vacío $\emptyset$ como un conjunto, podría suponer un problema definir morfismos con salida o con llegada en el vacío. Para cada conjunto A, como el conjunto $\emptyset$ no tiene ningún elemento, podemos definir $\mathfrak{C}(\emptyset, A)$ como el conjunto con un único morfismo que sería el "morfismos vacío" que envía ningún elemento en ningún elemento, porque el conjunto de salida es el vacío. Los conjuntos $\mathfrak{C}(A, \emptyset)$ de los morfismos con llegada al vacío, no tendrían ningún morfismo porque, por la definición de aplicación, cada elemento de A debería tener imagen en $\emptyset$, pero no existe ningún elemento en el vacío para que sea imagen de los elementos de A. El único morfismo de $\mathfrak{C}(\emptyset, \emptyset)$ sería el morfismo identidad de $\emptyset$, $1_\emptyset$, para que se cumplan los axiomas de una categoría. Cumple la propiedad de la identidad de $\emptyset$ porque si tenemos $f : \emptyset \longrightarrow A$ entonces $f1_\emptyset \in \mathbf{S}(\emptyset, A)$, y como solo hay un morfismo que tiene como salida el vacío y como llegada el objeto A, deducimos que $f1_\emptyset = f$. Esto ya prueba que cumple la propiedad (1.3) porque no existe ningún morfismo con llegada en el vacío, luego no podemos componer $1_\emptyset$ con ninguna aplicación $g : A \longrightarrow \emptyset$.
   Podemos llamar $\tilde{\mathbf{S}}$ a la categoría de los conjuntos y las aplicaciones pero sin considerar que el conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto de esta categoría.

2. La categoría $\mathbf{Top}$: está formada por los espacios topológicos y las aplicaciones continuas. La composición es la composición habitual de aplicaciones continuas. Está bien definida porque si $f \colon A \longrightarrow B$ y $g \colon B \longrightarrow C$ son aplicaciones continuas, su composición $fg \colon A \longrightarrow C$ es también una aplicación continua.

3. la categoría $\mathbf{ParTop}$: tiene como objetos los pares de espacios topológicos (X, A) tal que $A \subset X$, y los elementos de $\mathbf{ParTop}((X, A), (Y, B))$ son las aplicaciones continuas $f \colon X \longrightarrow Y$ que cumplen que $f(A) \subset B$. La composición de morfismos es la composición de aplicaciones. Está bien definida porque si tenemos morfismos $f \in \mathbf{ParTop}((X, A), (Y, B))$ y $g \in \mathbf{ParTop}((Y, B), (Z, C))$, como $f(A) \subset B$ y $g(B) \subset C$, tenemos que $gf(A) \subset g(B) \subset C$ y por tanto $gf \in \mathbf{ParTop}((X, A), (Z, C))$.

4. La categoría **Top***: sus objetos son los espacios punteados (X, x_0), donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Los morfismos entre dos objetos (X, x_0), (Y, y_0) son las aplicaciones continuas de X en Y que cumplen que $f(x_0) = y_0$. Se denominan aplicaciones punteadas. La composición de morfismos vuelve a ser la composición de aplicaciones.

5. Se puede obtener una categoría $\mathcal{A}$ a partir de un conjunto parcialmente ordenado A: los objetos son los elementos del conjunto A, y para cada $X, Y \in A$ definimos:

$$\mathcal{A}(X,Y) = \begin{cases} \{(X,Y)\} & \text{si } X \leq Y \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\mathcal{A}(X,Y)$ es un conjunto con un solo elemento que hemos llamado (X,Y) o es el conjunto vacío. Si $f \in \mathcal{A}(X,Y)$ y $g \in \mathcal{A}(Y,Z)$, la composición se define

$$g \circ f = \begin{cases} \{(X,Z)\} & \text{si } f = (X,Y) \text{ y } g = (Y,Z) \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Está bien definida por la transitividad de la relación de orden ya que si $X \leq Y$ y $Y \leq Z$, es decir, $f = (X,Y)$ y $g = (Y,Z)$, entonces $X \leq Z$ y por tanto, $(X,Z) = g \circ f \in \mathcal{A}(X,Z)$. Por la propiedad reflexiva, como $X \leq X$ para todo $X \in A$, entonces

$$\mathcal{A}(X,X) = \{(X,X)\} = \{1_X\}$$

Que cumple que para $f = (Y,X) \in \mathcal{A}(Y,X)$ y $g = (X,Z) \in \mathcal{A}(X,Z)$

$$1_X f = (X,X)(Y,X) = (Y,X) = f, \quad g1_X = (X,Z)(X,X) = (X,Z) = g$$

Por tanto también está garantizada la existencia de identidades . Es importante hacer énfasis en que los morfismos no tienen que ser necesariamente aplicaciones, como ocurre en este ejemplo.

6. La categoría **Gr**: tiene como objetos los grupos y como morfismos los homomorfismos de grupos. La composición está bien definida porque, como es bien conocido, la composición de dos homomorfismos de grupos es otro homomorfismo de grupos.

7. La categoría **Ab**: los objetos son los grupos abelianos y los morfismos son los homomorfismos de grupos, con la compisición de homomorfismos de grupos.

8. La categoría **Ri**: sus objetos son los anillos y sus morfismos los homomorfismos de anillos. La composición de morfismos es la habitual de homomorfismos de anillos. Está bien definida porque la composición de dos homomorfismos de anillos es de nuevo un homomorfismo de anillos.

9. Fijado un cuerpo K, podemos definir una categoría $\mathbf{Ext}_K$ cuyos objetos son las extesiones de K (los cuerpos F tales que K es un subcuerpo de F) y los morfismos son los homomorfismos de anillos $\alpha\colon E \longrightarrow F$ entre dos extensiones E, F de K que dejan fijos los puntos de K, es decir, $\alpha(x) = x$ para todo $x \in K$. Por supuesto, si tenemos dos morfismos $\alpha\colon E \longrightarrow F$ y $\beta\colon F \longrightarrow G$, su composición $\beta\alpha\colon E \longrightarrow G$, también deja fijos los puntos de K y por tanto, está bien definida la composición en esta categoría.
   Si $\alpha\colon E \longrightarrow F$ es un homomorfismo de anillos entre dos extensiones E, F de K que deja fijos los puntos de K, es conocido que el núcleo de α es un ideal del cuerpo E, y los ideales de un cuerpo son únicamente el propio cuerpo y el ideal nulo. El propio cuerpo no puede ser porque α deja fijos los puntos de K, por tanto el núcleo de α tiene que ser el ideal nulo. Esto quiere decir que todos los homomorfismos de anillos de esta categoría son inyectivos.

10. La categoría $\mathbf{Dif}_n$: fijado $n \in \mathbb{N}$, sus objetos son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sus morfismos las aplicaciones diferenciables entre los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

11. La categoría EV_K: fijado un cuerpo K, definimos la categoría EV_K como aquella cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre el cuerpo K y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales.

1.2. Subcategorías

Definición 1.2.1. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Decimos que $\mathfrak{C}'$ es una *subcategoría* de $\mathfrak{C}$ si:

I. $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}') \subset \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$.

II. $\mathfrak{C}'(A', B') \subset \mathfrak{C}(A', B')$ para todo $A', B' \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}') \subset \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$.

III. La composición de dos morfismos $f \in \mathfrak{C}'(A', B')$ y $g \in \mathfrak{C}'(B', C')$ coincide en $\mathfrak{C}'$ y en $\mathfrak{C}$.

Se dice que una subcategoría $\mathfrak{C}'$ es *plena* si $\mathfrak{C}'(A', B') = \mathfrak{C}(A', B')$ para todo $A', B' \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}')$. Estas subcategorías quedan determinadas mediante la clase $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}')$, ya que los morfismos coinciden con los de la categoría $\mathfrak{C}$. De hecho, si dada una categoría $\mathfrak{C}$ consideramos una subclase $X \subset \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, entonces podemos definir una subcategoría plena $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}') = X$.

Ejemplos 1.2.2.

1. **Ab** es una subcategoría plena de **Gr** ya que los morfismos de **Ab** son los homomorfismos de grupos, como en la categoría **Gr**.

2. Decimos que un grupo $(G, +)$ abeliano es divisible si para cada $g \in G$ y cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g' \in G$ tal que $g = ng'$. Esto es que

$$g = \underbrace{g' + \ldots + g'}_{\text{n veces}}$$

   es decir, operando n veces el elemento $g' \in G$ obtenemos $g \in G$. Definimos la categoría **AbDiv** cuyos objetos son los grupos abelianos divisibles y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos. Es una subcategoría plena de la categoría **Ab** porque los morfismos de **AbDiv** coinciden con los de **Ab**.

3. Podemos definir la subcategoría $\mathbf{Gr}^{\mathbf{C}}$ de **Gr** como aquella cuyos objetos son los grupos cíclicos $G = \langle g \rangle$, es decir, los que pueden ser generados por un solo elemento $g \in G$. Los morfismos son también los homomorfismos de grupos, y por tanto, $\mathbf{Gr}^{\mathbf{C}}(G, H) = \mathbf{Gr}(G, H)$ para todo $G, H \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Gr}^{\mathbf{C}})$, luego es una subcategoría plena de **Gr**.

4. Un ejemplo de subcategoría plena de EV_K, es la categoría EV'_K cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita y sus morfismos son las aplicaciones lineales. Es claro que $\mathrm{Obj}(EV'_K) \subset \mathrm{Obj}(EV_K)$ y que $EV'_K(U', V') = EV_K(U', V')$ para todo $U', V' \in \mathrm{Obj}(EV'_K)$.

5. Podemos obtener la subcategoría $\mathbf{Top}'$ de la categoría **Top** considerando $\mathrm{Obj}(\mathbf{Top}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{Top}')$ y $\mathbf{Top}'(X', Y')$ el conjunto de las aplicaciones continuas inyectivas de X' en Y'. Para todo X', $Y' \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Top}')$ se tiene que $\mathbf{Top}'(X', Y') \subset \mathbf{Top}(X', Y')$, y como la composición de dos aplicaciones inyectivas es también una aplicación inyectiva, la composición de dos morfismos coincide en $\mathbf{Top}'$ y en **Top**. En ese caso, $\mathbf{Top}'$ no es una subcategoría plena. No ocurre que $\mathbf{Top}(X, Y) = \mathbf{Top}'(X, Y)$ porque en el conjunto $\mathbf{Top}(X, Y)$ hay aplicaciones continuas que no son inyectivas y por tanto no pertenecen al conjunto $\mathbf{Top}'(X, Y)$.

6. **Top*** es una subcategoría plena de **ParTop**. Cada par (X, x_0) de **Top*** es un objeto de **ParTop** porque como $\{x_0\} \subset X$, podemos considerar el par $(X, \{x_0\})$, y

$$\mathbf{Top}^*((X, x_0), (Y, y_0)) = \mathbf{ParTop}((X, \{x_0\}), (Y, \{y_0\}))$$

porque $f \in \mathbf{Top}^*((X, x_0), (Y, y_0))$ si y solo si $f(x_0) = y_0$ si y solo si $f(\{x_0\}) \subset \{y_0\}$ si y solo si $f \in \mathbf{ParTop}((X, \{x_0\}), (Y, \{y_0\}))$.
La composición de dos morfismos

$$f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0), \quad g\colon (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$$

en **Top*** sería el morfismo $gf\colon (X, x_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ tal que $gf(x_0) = z_0$, y coincide con la composición de

$$f\colon (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\}), \quad g\colon (Y, \{y_0\}) \longrightarrow (Z, \{z_0\})$$

en **ParTop**.

1.3. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Definición 1.3.1. Dada una categoría $\mathfrak{C}$ y dos objetos $A, B \in \mathfrak{C}$, diremos que $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ es

1. *monomorfismo* si para todo $C \in \mathfrak{C}$ y $g, h \in \mathfrak{C}(C, A)$, $fg = fh$ implica que $g = h$.

2. *epimorfismo* si para todo $C \in \mathfrak{C}$ y $g, h \in \mathfrak{C}(B, C)$, $gf = hf$ implica que $g = h$.

3. *isomorfismo* si existe $f^{-1} \in \mathfrak{C}(B, A)$, tal que $ff^{-1} = 1_B$ y $f^{-1}f = 1_A$. f^{-1} está únicamente determinada por f. Decimos que f^{-1} es la inversa de f.

Proposición 1.3.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría cuyos morfismos son aplicaciones y la composición está dada por la composición de aplicaciones. Si $f \in \mathfrak{C}(A, B)$:*

1. *Si f es inyectivo, entonces es un monomorfismo.*

2. *Si f es sobreyectivo, entonces es un epimorfismo.*

Demostración. *1.* Dados $g, h \in \mathfrak{C}(C, A)$, tal que $f(g(x)) = f(h(x))$, para todo $x \in C$, por ser f inyectivo, entonces $g(x) = h(x)$, para todo $x \in C$, luego $g = h$.

2. Sean $g, h \in \mathfrak{C}(B, C)$ morfismos tal que $g(f(a)) = h(f(a))$, para todo $a \in A$. Por ser f sobreyectivo, para todo $c \in C$ existe $a \in A$ tal que $c = f(a)$ y por tanto, $g(c) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(c)$ para todo $c \in C$, luego $g = h$. □

El recíproco no es cierto en ninguno de los dos casos. Hay categorías en las que los monomorfismos y los epimorfismos no se corresponden con los morfismos inyectivos y sobreyectivos respectivamente.

Por ejemplo, consideramos la categoría **AbDiv** de los grupos abelianos divisibles y los homomorfismos de grupos. El homomorfismo natural $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un monomorfismo. Si $g, h \in \mathbf{AbDiv}(A, \mathbb{Q})$ son dos morfismos tal que $g \neq h$, queremos probar que $fg \neq fh$. Como $g \neq h$, existe $a \in A$ tal que

$$g(a) - h(a) = \frac{x}{n} > 0$$

Si fuese $\frac{x}{n} < 0$, podemos considerar $-a$ en lugar de a, que sí que cumple que $g(-a) - h(-a) = h(a) - g(a) = -\frac{x}{n} > 0$.
Por ser A divisible, sabemos que $a = 2a'$ para algún $a' \in A$. Por tanto se tiene que

$$2(g(a') - h(a')) = 2g(a') - 2h(a') = g(2a') - h(2a') = g(a) - h(a) = \frac{x}{n}$$

lo que implica que

$$g(a') - h(a') = \frac{x}{2n}$$

Utilizando de nuevo la divisibilidad de A, sabemos que existe $b \in A$ tal que $xb = a'$. Entonces,

$$x(g(b) - h(b)) = g(a') - h(a') = \frac{x}{2n}$$

luego

$$fg(b) - fh(b) = f(g(b) - h(b)) = f\left(\frac{1}{2n}\right) \neq 0$$

Es decir, existe $b \in A$ tal que $fg(b) \neq fh(b)$ y, por tanto, $fg \neq fh$ quedando probado que f es un monomorfismo. Es obvio que no es un homomorfismo inyectivo, luego es un ejemplo de un monomorfismo en **AbDiv** que no es inyectivo.

Si ahora consideramos en la categoría **Ri** de los anillos, la aplicación inclusión $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ no es un morfismo sobreyectivo pero sí es un epimorfismo. Sean $g, h \in \mathbf{Ri}(\mathbb{Q}, A)$ Supongamos $hf = gf$, es decir, $h(z) = g(z)$, para todo $z \in \mathbb{Z}$ y sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Entonces,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{b}\right) &= h(a)h\left(\frac{1}{b}\right) = g(a)h\left(\frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)h\left(\frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{a}{b}\right)g(b)h\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= g\left(\frac{a}{b}\right)h(b)h\left(\frac{1}{b}\right) = g\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

y por tanto $h = g$, quedando demostrado que f es un epimorfismo.

En la categoría **S** de los conjuntos, los monomorfismos y epimorfismos sí que corresponden con las aplicaciones inyectivas y sobreyectivas respectivamente.

Proposición 1.3.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría, $g \in \mathfrak{C}(A, B)$ y $f \in \mathfrak{C}(B, C)$. Entonces:*

1. *Si fg es un monomorfismo, entonces g es un monomorfismo.*
2. *Si f y g son monomorfismos, entonces fg es un monomorfismo.*
3. *Si fg es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.*
4. *Si f y g son epimorfismos, entonces fg es un epimorfismo.*

Demostración. Sean $h, k \in (D, A)$, $h', k' \in (C, D)$.

1. Supongamos $gh = gk$. Entonces, $fgh = fgk$. Por ser fg un monomorfismo, implica que $h = k$, y por tanto g es un monomorfismo.

2. Supongamos $fgh = fgk$. Por ser f monomorfismo, $gh = gk$, y por ser g monomorfismo, $h = k$. Por tanto fg es un monomorfismo.

3. Supongamos que $h'f = k'f$. Entonces, $h'fg = k'fg$. Por ser fg un epimorfismo, implica que $h' = k'$ y por tanto f es un epimorfismo.

4. Supongamos que $h'fg = k'fg$. Por se g un epimorfismo, $h'f = k'f$, y por ser f un epimorfismo, implica que $h' = k'$. Por tanto fg es un epimorfismo.

$\square$

Proposición 1.3.4. *Todo isomorfismo es monomorfismo y epimorfismo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ un isomorfismo. Por definición, existe $f^{-1} \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $ff^{-1} = 1_B$ y $f^{-1}f = 1_A$.
Sean $g, g' \in \mathfrak{C}(C, A)$ tal que $fg = fg'$. Entonces,

$$g = (f^{-1}f)g = f^{-1}(fg) = f^{-1}(fg') = (f^{-1}f)g' = g'$$

y por tanto, f es un monomorfismo.
De la misma forma pero con dos funciones $h, h' \in \mathfrak{C}(B, C)$, tal que $hf = h'f$, obtenemos que f es un epimorfismo.

□

También ocurre que en algunas categorías los isomorfismos no se corresponden con las aplicaciones biyectivas. Un ejemplo es la categoría **Top**. En esta categoría, los isomorfismos son los homeomorfismos, que además de ser biyectivos, la aplicación inversa tiene que ser continua. Podemos encontrar funciones continuas biyectivas cuya inversa no sea continua.

En la categoría **S**, los isomorfismos son las aplicaciones biyectivas.

1.4. Dualidad

A partir de una categoría $\mathfrak{C}$, podemos construir su categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ como veremos a continuación:

Definición 1.4.1. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Su categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$ es tal que

I. $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$.

II. $\mathfrak{C}^{op}(A, B) = \mathfrak{C}(B, A)$ para todo A, $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$.

III. Para cada A, B, $C \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ la ley de composición se define
$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{op}(A, B) \times \mathfrak{C}^{op}(B, C) &\longrightarrow \mathfrak{C}^{op}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g * f := f \circ g \end{aligned} \tag{1.4}$$

La ley de compisición está bien definida ya que $fg \in \mathfrak{C}(C, A) = \mathfrak{C}^{op}(A, C)$ es la composición en la categoría $\mathfrak{C}$ de los morfismos $f \in \mathfrak{C}(B, A) = \mathfrak{C}^{op}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{C}(C, B) = \mathfrak{C}^{op}(B, C)$. Además, se cumple que dados tres morfismos $f \in \mathfrak{C}^{op}(A, B)$, $g \in \mathfrak{C}^{op}(B, C)$ y $h \in \mathfrak{C}^{op}(C, D)$, entonces

$$h * (g * f) = h * (fg) = fgh = (gh) * f = (h * g) * f \tag{1.5}$$

luego la composición (1.4) es asociativa, y los morfismos identidad en $\mathfrak{C}^{op}$ son los mismos morfismos que en $\mathfrak{C}$.

Ocurre que si consideramos la categoría $(\mathfrak{C}^{op})^{op}$, la categoría opuesta de $\mathfrak{C}^{op}$, entonces

$$\mathrm{Obj}((\mathfrak{C}^{op})^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$$
$$(\mathfrak{C}^{op})^{op}(A, B) = \mathfrak{C}^{op}(B, A) = \mathfrak{C}(A, B)$$

Por tanto, tenemos que $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = \mathfrak{C}$. Es decir, la categoría opuesta de $\mathfrak{C}^{op}$ es, de nuevo, la categoría $\mathfrak{C}$.

Cualquier concepto que usamos trabajando en la categoría $\mathfrak{C}$ se corresponde con el concepto opuesto en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$. Si ponemos como ejemplo los conceptos de monomorfismo y epimorfismo en una categoría $\mathfrak{C}$ (vistos en la sección anterior) probaremos a continuación que corresponden con los conceptos de epimorfismo y monomorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$ respectivamente:

Proposición 1.4.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Entonces,*

1. *f es un monomorfismo en $\mathfrak{C}$ si y solo si es un epimorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$.*
2. *f es un epimorfismo en $\mathfrak{C}$ si y solo si es un monomorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$.*

Demostración. 1: Sea $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ es un monomorfismo en $\mathfrak{C}$. Por tanto, cumple que para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op})$ y $g, h \in \mathfrak{C}(C, A)$, $fg = fh$ implica que $g = h$.
Si lo traducimos en términos de $\mathfrak{C}^{op}$, decir que $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ es un monomorfismo es lo mismo que decir que $f \in \mathfrak{C}^{op}(B, A)$ cumple que para todo $C \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y $g, h \in \mathfrak{C}^{op}(A, C)$, $g * f = fg = fh = h * f$ implica que $g = h$, que es la definición de epimorfismo en $\mathfrak{C}^{op}$.
2: Como $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = \mathfrak{C}$, podemos aplicar el resultado 1 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ y obtenemos el resultado que queríamos probar.

□

En muchas ocasiones es muy útil expresar algunos resultados en términos de la categoría dual $\mathfrak{C}^{op}$, ya que un resultado es cierto en $\mathfrak{C}$ si y solo si el resultado opuesto es cierto en $\mathfrak{C}^{op}$.
Por ejemplo, como podemos observar en la proposición 1.3.3, el enunciado

3. Si fg es un epimorfismo, entonces f es un epimorfismo.

en una categoría $\mathfrak{C}$ se puede traducir a que

Si fg es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.

en su categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$, que corresponde con el primer resultado de la proposición, y por tanto, una vez probado *1* para todas las categorías, en particular está probado para $\mathfrak{C}^{op}$ y por tanto tenemos también probado *3*. Lo mimo ocurre con los otros dos enunciados de la proposición:

4. Si f y g son epimorfismos, entonces fg es un epimorfismo.

es el enunciado opuesto de

2. Si f y g son monomorfismos, entonces fg es un monomorfismo.

En este caso, probando los dos primeros enunciados de la proposición quedaría probada toda la proposición.

En el siguiente capítulo, necesitamos en varias ocasiones demostrar un enunciado y también su enunciado opuesto. Utilizaremos la dualidad para las demostraciones de los resultados opuestos.

Capítulo 2

Construcciones universales

Las construcciones universales en una categoría, son objetos de esta categoría que cumplen cierta propiedad universal. En este capítulo definiremos cuatro construcciones universales y veremos algunos resultados relacionados con cada construcción.

2.1. Producto en una categoría

Antes de dar la definición de producto en una categoría, veamos el siguiente ejemplo: consideremos la categoría $\mathbf{S}$. El producto cartesiano de A y B es el conjunto

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Además, sabemos que existen dos aplicaciones llamadas proyecciones

$$p_A \colon A \times B \longrightarrow A \quad p_B \colon A \times B \longrightarrow B \tag{2.1}$$

tal que $p_A(a,b) = a$ y $p_B(a,b) = b$. Dado un conjunto C, podemos establecer una biyección

$$\mathbf{S}(C, A \times B) \longrightarrow \mathbf{S}(C, A) \times \mathbf{S}(C, B) \tag{2.2}$$

de la siguiente forma:
a cada $h \in \mathbf{S}(C, A \times B)$ le asociamos $(p_A h, p_B h) \in \mathbf{S}(C,A) \times \mathbf{S}(C,B)$ y a cada par de aplicaciones $(f,g) \in \mathbf{S}(C,A) \times \mathbf{S}(C,B)$, la aplicación que envía cada $c \in C$ en $(f(c), g(c)) \in A \times B$.
Dicho de otra manera, para cada $(f,g) \in \mathbf{S}(C,A) \times \mathbf{S}(C,B)$ hay un único morfismo $h \colon C \longrightarrow A \times B$ tal que $p_A h = f$ y $p_B h = g$, es decir, hay un único

morfismo $h\colon C \longrightarrow A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & A \times B \arrow[u, "p_A"'] \arrow[d, "p_B"] \\ & B \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Esta propiedad, llamada propiedad universal del producto, caracteriza el producto cartesiano de los conjuntos como vamos a ver en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.1. *Sean A, B, $C \in Obj(\mathbf{S})$, $f_1 \in \mathbf{S}(C, A)$ y $f_2 \in \mathbf{S}(C, B)$. Si $(C; f_1, f_2)$ es una terna que cumple que para cualquier conjunto D y morfismos $f\colon D \longrightarrow A$, $g\colon D \longrightarrow B$ existe un único morfismo $h\colon D \longrightarrow C$ tal que*

$$f_1 h = f, \quad f_2 h = g$$

entonces $(C; f_1, f_2)$ es isomorfo a $(A \times B; p_A, p_B)$.

Demostración. Consideramos $A \times B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$ y las proyecciones p_A y p_B definidas en (2.1). Por hipótesis, existe un único morfismo $h\colon A \times B \longrightarrow C$ tal que $f_1 h = p_A$ y $f_2 h = p_B$.
Si ahora consideramos el objeto C y los morfismos f_1 y f_2, por la propiedad universal del producto $A \times B$, existe un único morfismo $h'\colon C \longrightarrow A \times B$ tal que $p_A h' = f_1$ y $p_B h' = f_2$.
Además tenemos que

$$\begin{aligned} p_A(h'h) &= (p_A h')h = f_1 h = p_A \\ p_B(h'h) &= (p_B h')h = f_2 h = p_B \end{aligned}$$

pero el morfismo $1_{A\times B} : A \times B \longrightarrow A \times B$ también cumple que $p_A 1_{A\times B} = p_A$ y $p_B 1_{A\times B} = p_B$. Por la unicidad de la propiedad universal del producto $A \times B$ aplicada al objeto $A \times B$ y los morfismos p_A y p_B, como $h'h$ y $1_{A\times B}$ son dos morfismos que cumplen la propiedad universal, tiene que ser $h'h = 1_{A\times B}$. De la misma forma, aplicando la propiedad de C al objeto C y los morfismos f_1 y f_2, como

$$\begin{aligned} f_1(hh') &= (f_1 h)h' = p_A h' = f_1 = f_1 1_C \\ f_2(hh') &= (f_2 h)h' = p_B h' = f_2 = f_2 1_C \end{aligned}$$

concluimos que $hh' = 1_C$, y por tanto $h\colon A \times B \longrightarrow C$ es un isomorfismo tal que $f_1 h = p_A$ y $f_2 h = p_B$.

□

Esta propiedad universal que caracteriza el producto en la categoría **S** es la que define el producto en cualquier categoría. Definimos el producto en una categoría $\mathfrak{C}$ arbitraria de la siguiente forma:

Definición 2.1.2. Sean A y B dos objetos de la categoría $\mathfrak{C}$. Decimos que la terna $(A \times B; p_A, p_B)$ es un producto de A y B en $\mathfrak{C}$ siendo $A \times B$ un objeto de $\mathfrak{C}$ y

$$p_A\colon A \times B \longrightarrow A \quad p_B\colon A \times B \longrightarrow B$$

dos morfismos en $\mathfrak{C}$, si para cualquier objeto C y cualquier par de morfismos $f\colon C \longrightarrow A$ y $g\colon C \longrightarrow B$ existe un único morfismo $h\colon C \longrightarrow A \times B$ tal que

$$p_A h = f, \quad p_B h = g \tag{2.4}$$

Ahora generalizaremos esta noción de producto de dos objetos al producto de una familia arbitraria de objetos de $\mathfrak{C}$:

Definición 2.1.3. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que I es un conjunto, una familia de objetos de la categoría $\mathfrak{C}$. Entonces un *producto* $(X; \{p_i\})$ de los objetos X_i es un objeto X, junto con morfismos $p_i\colon X \longrightarrow X_i$ para cada $i \in I$ llamados *proyecciones*, con la propiedad universal de que para cualquier objeto Y y morfismos $f_i\colon Y \longrightarrow X_i$, $i \in I$, existe un único morfismo $< f_i >\colon Y \longrightarrow X$ tal que

$$p_i < f_i >= f_i \text{ para todo } i \in I. \tag{2.5}$$

Proposición 2.1.4. *Sean $(X; \{p_i\})$, $(X'; \{p'_i\})$ dos productos de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{C}$. Existe un único isomorfismo $\phi\colon X \longrightarrow X'$ tal que $p'_i\phi = p_i$, $i \in I$.*

Demostración. Consideramos el objeto X' y las proyecciones $p'_i\colon X' \longrightarrow X_i$, $i \in I$. Por la propiedad universal del producto $(X, \{p_i\})$, existe un único morfismo $\eta\colon X' \longrightarrow X$ tal que $p_i\eta = p'_i$.
Si ahora consideramos el objeto X y las proyecciones $p_i\colon X \longrightarrow X_i$, $i \in I$, por la propiedad universal del producto $(X'; \{p'_i\})$, existe un único morfismo $\phi\colon X \longrightarrow X'$ tal que $p'_i\phi = p_i$. Además, para todo $i \in I$,

$$\begin{aligned} p_i(\eta\phi) &= (p_i\eta)\phi = p'_i\phi = p_i \\ p_i 1_X &= p_i \end{aligned}$$

Por la unicidad de la propiedad universal del producto $(X, \{p_i\})$ tiene que ser $\eta\phi = 1_X$.
De forma análoga, por la propiedad universal del producto $(X, \{p'_i\})$ obtenemos que $\phi\eta = 1_{X'}$, y concluimos que ϕ es un isomorfismo.

□

Con este resultado, ya podemos empezar a hablar de el producto de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$, ya que este es único salvo isomorfismo, y lo denotaremos $X = \prod_{i\in I} X_i$. Como podemos observar, un producto puede no existir en una categoría $\mathfrak{C}$ ya que, por definición, $\prod_{i\in I} X_i$ tiene que ser un objeto de $\mathfrak{C}$, y esto no siempre ocurre.

Antes de comenzar a enunciar y probar resultados del producto en una categoría, damos la siguiente definición que usaremos posteriormente:

Definición 2.1.5. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y sea $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. Se dice que f es una *retracción* si existe $g \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$.

Proposición 2.1.6. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría tal que $\mathfrak{C}(X, Y) \neq \emptyset$ para todo par de objetos X, Y de $\mathfrak{C}$. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{C}$. Si existe $\prod_{i\in I} X_i$, entonces cada p_i, $i \in I$ es una retracción.*

Demostración. Sea $j \in I$. Tomamos $Y = X_j \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, y los morfismos $\{f_i\}_{i\in I}$ tal que $f_j = 1_{X_j} \colon X_j \longrightarrow X_j$, y para $i \neq j$, f_i es un morfismo arbitrario de $\mathfrak{C}(X_j, X_i)$.
Por la propiedad universal del producto $\prod_{i\in I} X_i$, existe un único morfismo $f \colon X_j \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ tal que $p_i f = f_i$ para todo $i \in I$. Por tanto,

$$p_j f = f_j = 1_{X_j}$$

lo que implica que $p_j \colon \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ es una retracción. Por tanto, p_j es una retracción para todo $j \in I$.

□

Es fácil de ver que, si $\mathfrak{C}$ es una categoría arbitraria, toda retracción en $\mathfrak{C}$ es un epimorfismo: si $f \colon A \longrightarrow B$ es una retracción en $\mathfrak{C}$ y h_1, $h_2 \in \mathfrak{C}(B, C)$ son dos morfismos tal que $h_1 f = h_2 f$, entonces componiendo a ambos lados por el morfismo $g \in \mathfrak{C}(A, B)$ tal que $fg = 1_B$, obtenemos que $h_1 = h_2$. Por tanto, las proyecciones son epimorfismos.

Proposición 2.1.7. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathfrak{C}$, y $f_i \colon X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in I$ una familia de morfismos. Si existen los productos*

$(X;\{p_i\})$ y $(Y;\{q_i\})$ (siendo $X=\prod_{i\in I}X_i$ e $Y=\prod_{i\in I}Y_i$), entonces, existe un único morfismo

$$\prod_{i\in I} f_i\colon X\longrightarrow Y \tag{2.6}$$

tal que

$$q_i(\prod_{i\in I} f_i)=f_ip_i \tag{2.7}$$

Demostración. Consideramos el objeto X de $\mathfrak{C}$ y la familia de morfismos $f_ip_i\colon X\longrightarrow Y_i$, $i\in I$.
Por la propiedad universal del producto $(Y;\{q_i\})$, existe un único morfismo $\prod_{i\in I}f_i\colon X\longrightarrow Y$ tal que $q_i(\prod_{i\in I}f_i)=f_ip_i$.

□

Proposición 2.1.8. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathfrak{C}$. Sean $f_i\colon Z\longrightarrow X_i$, $g\colon W\longrightarrow Z$, $g_i\colon X_i\longrightarrow Y_i$, $i\in I$. Si los productos $(\prod_{i\in I}X_i;\{p_i\})$ y $(\prod_{i\in I}Y_i;\{q_i\})$ existen, entonces,*

$$<f_i>g=<f_ig>,\quad (\prod_{i\in I}g_i)<f_i>=<g_if_i> \tag{2.8}$$

Demostración. Usando la propiedad universal del producto $(\prod_{i\in I}X_i;\{p_i\})$, con las familias de morfismos $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{f_ig\}_{i\in I}$ obtenemos que para todo $i\in I$

$$p_i<f_ig>=f_ig=p_i<f_i>g$$

Por la unicidad del morfismo $<f_ig>$, tiene que ser $<f_i>g=<f_ig>$.
Para la segunda igualdad, usando ahora la propiedad universal del produto $(\prod_{i\in I}Y_i;\{q_i\})$, considerando las familias de morfismos $g_ip_i<f_i>\colon Z\longrightarrow Y_i$ y $g_if_i\colon Z\longrightarrow Y_i$ para todo $i\in I$, tenemos que

$$q_i(\prod_{i\in I}g_i)<f_i>=g_ip_i<f_i>=g_if_i=q_i<g_if_i>$$

Por la unicidad del morfismo con esta propiedad, $(\prod_{i\in I}g_i)<f_i>=<g_if_i>$.

□

Proposición 2.1.9. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría en la cual cualquier par de objetos admite un producto. Si dados X, Y, $Z\in\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y las proyecciones*

$$\begin{array}{lcl} p_1\colon X\times Y &\longrightarrow& X, \\ p_2\colon X\times Y &\longrightarrow& Y, \end{array}\qquad \begin{array}{lcl} q_1\colon (X\times Y)\times Z &\longrightarrow& X\times Y, \\ q_2\colon (X\times Y)\times Z &\longrightarrow& Z \end{array} \tag{2.9}$$

entonces, $((X\times Y)\times Z;p_1q_1,p_2q_1,q_2)$ es el producto de X, Y, Z. En general, cualquier colección finita de objetos de $\mathfrak{C}$ admite un producto.

Demostración. Sean X, Y, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$. Como todo par de objetos de $\mathfrak{C}$ admite un producto, y tenemos que $(X \times Y) \in \mathfrak{C}$ y $Z \in \mathfrak{C}$, entonces su producto $(X \times Y) \times Z$ también es un objeto de $\mathfrak{C}$. Falta probar que los morfismos p_1q_1, p_2q_1 y q_2 cumplen la propiedad universal del producto. Sea $W \in \mathrm{Obj}(C)$ y sean $f_1\colon W \longrightarrow X$, $f_2\colon W \longrightarrow Y$, $f_3\colon W \longrightarrow Z$ morfismos. Por la propiedad universal del producto $(X \times Y; p_1, p_2)$ sabemos que existe un único morfismo $g\colon W \longrightarrow X \times Y$ tal que $p_1g = f_1$ y $p_2g = f_2$. Entonces, podemos construir
$$h\colon W \longrightarrow (X \times Y) \times Z$$
tal que $q_1h = g$, $q_2h = f_3$, luego $p_1q_1h = f_1$ y $p_2q_1h = f_2$. Veamos que este morfismo h es único. Supongamos que existe $h'\colon W \longrightarrow (X \times Y) \times Z$ tal que $q_1h' = g$, $q_2h' = f_3$. Entonces,
$$p_1q_1h = p_1q_1h', \quad p_2q_1h = p_2q_1h', \quad q_2h = q_2h'$$
Por la propiedad del producto $X \times Y$ tiene que ser $q_1h = q_1h'$ y como $q_2h = q_2h'$, por la propiedad del producto de $(X \times Y)$ por Z, implica que $h = h'$.
Para demostrar que cualquier colección finita de objetos de $\mathfrak{C}$ admite un producto, podemos razonar por inducción. Acabamos de demostrar el caso para $n = 3$. Ahora consideramos una familia finita $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ de objetos de $\mathfrak{C}$ y otra familia $f_i\colon W \longrightarrow X_i$, $i = 1, \ldots, n$ con $n > 3$ y suponemos que la familia $\{X_i\}_{i=1}^{n-1}$ admite un producto, Podemos realizar una construcción similar al caso $n = 3$ con las aplicaciones
$$\begin{array}{rcl} p_i\colon X_1 \times \cdots \times X_{n-1} & \longrightarrow & X_i, \\ q_1\colon (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n & \longrightarrow & X_1 \times \cdots \times X_{n-1}, \\ q_2\colon (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n & \longrightarrow & X_n \end{array} \tag{2.10}$$
y obtener el morfismo
$$h\colon W \longrightarrow (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$
tal que $p_iq_1h = f_i$, $i = 1_{n-1}$, y $q_2h = f_n$, que tiene que ser único por la propiedad universal de los poductos $X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ y $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. Por tanto, $((X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n; p_1q_1, p_2q_1, \ldots, p_{n-1}q_1, q_2)$ es el producto de la familia $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ en $\mathfrak{C}$.

□

Esta última proposición demuestra que el producto $X \times Y \times Z$ de tres objetos es equivalente a $(X \times Y) \times Z$ y a $X \times (Y \times Z)$, si utilizamos las aplicaciones
$$\begin{array}{rcl} q_1\colon X \times (Y \times Z) & \longrightarrow & Y \times Z, \\ q_2\colon X \times (Y \times Z) & \longrightarrow & X \end{array} \tag{2.11}$$

Lo que quiere decir que el producto en una categoría tiene la propiedad asociativa.

Ejemplos 2.1.10.

1. En la categoría **S**, el producto es el producto cartesiano de los conjuntos. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, entonces las proyecciones del producto $(\prod_{i\in I} X_i; \{p_i\})$ son las aplicaciones

$$\begin{array}{rrcl} p_i\colon & \prod_{i\in I} X_i & \longrightarrow & X_i \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_i \end{array} \tag{2.12}$$

2. En la categoría **Top**, el producto de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de espacios topológicos, es el producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ dotado con la topología producto. Las proyecciones coinciden con las definidas en (2.12).

3. En la categoría **Gr**, el producto de una familia de grupos $\{(G_i, \bullet_i)\}_{i\in I}$ es el producto directo $(\prod_{i\in I} G_i, \bullet)$. El conjunto $\prod_{i\in I} G_i$ es el producto cartesiano de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ y tiene la operación de multiplicación componente a componente de forma que si x, $y \in \prod_{i\in I} G_i$ entonces $x \bullet y = (x_i \bullet_i y_i)_{i\in I}$, siendo $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$. Las proyecciones son los homomorfismos de grupos

$$\begin{array}{rrcl} p_i\colon & \prod_{i\in I} G_i & \longrightarrow & G_i \\ & (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_i \end{array} \tag{2.13}$$

4. En la categoría **Ab**, el producto es también el producto directo de grupos como en la categoría **Gr**, con las proyecciones definidas en (2.13). Lo que ocurre es que, como **Ab** es una subcategoría plena de **Gr**, y como, en este caso, si hacemos el producto de una familia de grupos abelianos $\{(G_i, \bullet_i)\}_{i\in I}$ en **Gr**, obtenemos el grupo $(\prod_{i\in I} G_i, \bullet)$ que es también abeliano, es decir, un objeto de la categoría **Ab**, no hay ningún problema con la existencia del producto en **Ab**.

5. Para también mostrar que no siempre existe el producto en una categoría, consideramos la subcategoría plena $\mathbf{S}_2$ de **S** formada por los conjuntos con dos elementos y las aplicaciones. Sean $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ y $C = \{c_1, c_2\}$ objetos de $\mathbf{S}_2$, y sean $f_1\colon C \longrightarrow A$, $f_2\colon C \longrightarrow B$ dos aplicaciones tales que $f_1(C) = \{a_1\}$ y $f_2(C) = \{b_2\}$. Veamos que no existe el producto $A \times B$. Si existiera $(A \times B; p_1, p_2)$, tendría que ser $A \times B = \{d_1, d_2\} \in \mathbf{S}_2$. Entonces, existiría una aplicación $h\colon C \longrightarrow A \times B$ tal que

$$p_1 h = f_1, \quad p_2 h = f_2 \tag{2.14}$$

Las proyecciones p_1 y p_2 son sobreyectivas: si consideramos dos aplicaciones sobreyectivas $f : C \longrightarrow A$ y $g\colon C \longrightarrow B$, entonces existe una aplicación $h'\colon C \longrightarrow A \times B$ tal que $p_1 h' = f$ y $p_2 h' = g$, lo que implica que p_1 y p_2 son sobreyectivas por serlo f y g.
Como p_1 y p_2 son sobreyectivas, podemos suponer que $p_1(d_i) = a_i$, $p_2(d_i) = b_i$ para $i = 1, 2$ sin pérdida de la generalidad. Por (2.14), tiene que ser $p_1(h(C)) = f_1(C) = \{a_1\}$ y también $p_2(h(C)) = f_2(C) = \{b_2\}$, lo que implica que $h(C) = \{d_1\}$ y $h(C) = \{d_2\}$, llegando a contradicción, porque esto quiere decir que cada c_i, $i = 1, 2$, tiene dos imágenes, (d_1 y d_2) lo cuál no puede ocurrir porque h es una aplicación.

En este caso, no ocurre como en el ejemplo anterior. $\mathbf{S}_2$ es una subcategoría plena de $\mathbf{S}$, pero el producto de A y B en $\mathbf{S}$, es el conjunto

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$$

que tiene cuatro elementos. Es decir, $A \times B \notin \mathbf{S}_2$ y por tanto, si existiese el producto de A y B en $\mathbf{S}_2$, no coincidiría con su producto en $\mathbf{S}$. Con las funciones anteriores, la función $f\colon C \longrightarrow A \times B$ que cumpliría (2.14) sería $f(c_1) = f(c_2) = (a_1, b_2)$.

6. Consideramos la familia $\{\mathbb{Z}_{p^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de gupos cíclicos de orden p^k, siendo p primo. En la categoría $\mathbf{Gr}$, el producto de esta familia sí que existe, siendo el producto directo, pero si consideramos la subcategoría $\mathbf{Gr}^{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{Gr}$, no existe el producto para ningún par $\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\mathbb{Z}_{p^l}$: supongamos que existe $(\mathbb{Z}_m; p_1, p_2)$ producto de $\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\mathbb{Z}_{p^l}$. Por la misma razón del ejemplo anterior, los homomorfismos p_1 y p_2 son sobreyectivos. Suponemos que $l \leq k$, entonces $m = np^k$. Elegimos a, b, c generadores de $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_{p^k}$ y $\mathbb{Z}_{p^l}$ respectivamente tal que $p_1(a) = b$ y $p_2(a) = c$. Si consideramos los morfismos

$$\begin{array}{rcl} 1\colon \mathbb{Z}_{p^k} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{p^k}, \\ x & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 0\colon \mathbb{Z}_{p^k} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{p^l} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

por la propiedad universal del producto existiría $f\colon \mathbb{Z}_{p^k} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ tal que $p_1 f = 1$ y $p_2 f = 0$. Si suponemos que $f(b) = sa$ entonces $p_1(sa) = b$ y $p_2(sa) = 0$ lo que implica que $s \equiv 1 \bmod p^k$ y $s \equiv 0 \bmod p^l$, llegando a una contradicción.

En este ejemplo lo que ocurre de nuevo es que el producto $\mathbb{Z}_{p^k} \times \mathbb{Z}_{p^l}$ en $\mathbf{Gr}$ no es un grupo cíclico. Si en lugar de potencias de un mismo primo p, hubiesemos consideramos p y q primos entre sí, entonces el producto directo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ es cíclico y sí que existe el producto de $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$ en $\mathbf{Gr}^{\mathbf{C}}$ y coincide con su producto en $\mathbf{Gr}$.

2.2. Coproducto en una categoría

De nuevo, antes de generalizar el coproducto de una familia arbitraria $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos de una categoría $\mathfrak{C}$, consideramos la categoría $\mathbf{S}$. Sean A y B dos conjuntos. Se llama unión disjunta de A y B al conjunto

$$A \amalg B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$$

Consideramos ahora las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} q_A\colon A & \longrightarrow & A \amalg B, \\ a & \longmapsto & (a,1) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} q_B\colon B & \longrightarrow & A \amalg B \\ b & \longmapsto & (b,2) \end{array} \tag{2.15}$$

Ahora para cada conjunto C tenemos la siguiente biyección

$$\mathbf{S}(A \amalg B, C) \longrightarrow \mathbf{S}(A,C) \times \mathbf{S}(B,C)$$

si a cada $h \in \mathbf{S}(A \amalg B, C)$ le asociamos $(hq_A, hq_B) \in \mathbf{S}(A,C) \times \mathbf{S}(B,C)$, y a cada $(f,g) \in \mathbf{S}(A,C) \times \mathbf{S}(B,C)$, el morfismo $h\colon A \amalg B \longrightarrow C$ tal que

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y = 1 \\ g(x) & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

Por tanto, para cada par $(f,g) \in \mathbf{S}(A,C) \times \mathbf{S}(B,C)$ existe un único morfismo $h\colon A \amalg B \longrightarrow C$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "q_A"] \\ C & A \amalg B \arrow[l, "h"'] \\ & B \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "q_B"'] \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

Esta propiedad es la propiedad universal del coproducto. Caracteriza la unión disjunta de los conjuntos como podemos comprobar con la siguiente proposición, cuya demostración es análoga a la realizada en la sección de productos:

Proposición 2.2.1. *Sean A, B, $C \in Obj(\mathbf{S})$, $f_1 \in \mathbf{S}(A,C)$ y $f_2 \in \mathbf{S}(B,C)$. Si $(C; f_1, f_2)$ es una terna que cumple que para cualquier objeto D y morfismos $f\colon A \longrightarrow D$, $g\colon B \longrightarrow D$ existe un único morfismo $h\colon C \longrightarrow D$ tal que*

$$hf_1 = f, \quad hf_2 = g$$

entonces $(C; f_1, f_2)$ es isomorfo a $(A \amalg B; q_1, q_2)$.

Si ahora consideramos una categoría $\mathfrak{C}$ arbitraria y dos objetos A y B de $\mathfrak{C}$ definimos el coproducto de A y B en $\mathfrak{C}$ como sigue:

Definición 2.2.2. Decimos que la terna $(A \amalg B; q_A, q_B)$ es un coproducto de A y B en $\mathfrak{C}$ siendo

$$q_A\colon A \longrightarrow A \amalg B, \qquad q_B\colon B \longrightarrow A \amalg B$$

morfismos de $\mathfrak{C}$ si cumplen que para cada par de morfismos $f\colon A \longrightarrow C$, $g\colon B \longrightarrow C$ existe un único morfismo $h\colon A \amalg B \longrightarrow C$ tal que

$$hq_A = f, \quad hq_B = g \tag{2.17}$$

De forma general, considerando una familia arbitraria $\{X_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathfrak{C}$ definimos su coproducto en $\mathfrak{C}$ de la siguiente forma:

Definición 2.2.3. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ tal que I es un conjunto, una familia de objetos de la categoría $\mathfrak{C}$. Entonces un *coproducto* $(X; \{q_i\})$ de los objetos X_i es un objeto X, junto con morfismos $q_i\colon X_i \longrightarrow X$, para cada $i \in I$ llamados *inyecciones*, con la propiedad universal de que para cualquier objeto Y y morfismos $f_i\colon X_i \longrightarrow Y$, $i \in I$, existe un único morfismo $\ll f_i \gg\colon X \longrightarrow Y$ tal que

$$\ll f_i \gg q_i = f_i \text{ para todo } i \in I. \tag{2.18}$$

También podemos entender el coproducto de una familia $\{X_i\}_{i\in I}$ en la categoría $\mathfrak{C}$ como el producto de $\{X_i\}_{i\in I}$ en su categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$: la propiedad universal del coproducto de $\{X_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{C}$ enunciada en $\mathfrak{C}^{op}$ dice que dado un objeto Y y morfismos $f_i\colon Y \longrightarrow X_i$, $i \in I$, existe un único morfismo $f\colon Y \longrightarrow X$ tal que

$$q_i * f = fq_i = f_i \text{ para todo } i \in I.$$

que es la propiedad universal del producto de $\{X_i\}_{i\in I}$ en $\mathfrak{C}^{op}$.

Proposición 2.2.4. *Sean* $(X; \{q_i\})$, $(X'; \{q'_i\})$ *dos coproductos de la familia* $\{X_i\}_{i \in I}$ *en* $\mathfrak{C}$. *Existe un único isomorfismo* $\phi\colon X' \longrightarrow X$ *tal que* $\phi q'_i = q_i$, $i \in I$.

Demostración. Veamos si se cumple el enunciado opuesto en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$.
Consideramos la categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$: $(X; \{q_i\})$, $(X'; \{q'_i\})$ son productos de $\mathfrak{C}^{op}$ y queremos ver que existe un único isomorfismo $\phi\colon X \longrightarrow X'$ tal que $\phi q'_i = q'_i * \phi = q_i$, $i \in I$.
Pero este es el enunciado de la proposición 2.1.4 que ya demostramos en la sección de productos para cualquier categoría.
Por tanto, se cumple el enunciado opuesto en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$, lo que implica que la proposición es cierta en la categoría $\mathfrak{C}$.

□

Con esta proposición, queda demostrado que el coproducto es único salvo isomorfismo. Entonces a partir de ahora hablaremos de el coproducto de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ y lo denotamos $\amalg_{i \in I} X_i$. También puede ocurrir que haya categorías en las que no exista el coproducto para una familia de objetos como ocurría con el producto.

Podemos traducir todas las proposiciones enunciadas en la sección de productos ahora para coproductos. Si nos fijamos, los siguientes enunciados son los enunciados opuestos de las proposiciones de la sección de productos. Su demostración es directa aplicando en cada ocasión la proposición adecuada para productos en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$:

Definición 2.2.5. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y sea $f \in \mathfrak{C}(A, B)$. Se dice que f es una *sección* si existe $g \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$.

Proposición 2.2.6. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una categoría tal que* $\mathfrak{C}(X, Y) \neq \emptyset$ *para todo par de objetos* X, Y *de* $\mathfrak{C}$, *y* $\{X_i\}_{i \in I}$ *una familia de objetos de* $\mathfrak{C}$. *Si existe* $\amalg_{i \in I} X_i$, *entonces cada* q_i, $i \in I$ *es una sección.*

Demostración. El resultado opuesto se cumple para $\mathfrak{C}^{op}$ ya que se corresponde con la proposición 2.1.6.

□

También es fácil ver que toda sección es un monomorfismo en una categoría $\mathfrak{C}$ arbitraria: si $f\colon A \longrightarrow B$ es una sección en la categoría $\mathfrak{C}$ y h, $h' \in \mathfrak{C}(C, A)$ son dos morfismos tal que $fh = fh'$, entonces componiendo a ambos lados por el morfismo $g \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$, obtenemos que

$h = h'$. Por tanto, las inyecciones de un coproducto son monomorfismos.

Proposición 2.2.7. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathfrak{C}$, y $f_i\colon X_i \longrightarrow Y_i$, $i \in I$ una familia de morfismos. Si existen los coproductos $(X; \{p_i\})$, $(Y; \{q_i\})$, entonces, existe un único morfismo*

$$\amalg_{i\in I} f_i\colon X \longrightarrow Y \tag{2.19}$$

tal que

$$(\amalg_{i\in I} f_i) q_i = p_i f_i \tag{2.20}$$

Demostración. Si aplicamos la proposición 2.1.7 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$, obtenemos el resultado que queríamos probar para $\mathfrak{C}$.

□

Proposición 2.2.8. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de objetos de $\mathfrak{C}$. Sean $f_i\colon X_i \longrightarrow Z$, $g\colon Z \longrightarrow W$, $g_i\colon Y_i \longrightarrow X_i$, $i \in I$. Si los coproductos $(\amalg_{i\in I} X_i; \{p_i\})$ y $(\amalg_{i\in I} Y_i; \{q_i\})$ existen, entonces,*

$$g \ll f_i \gg = \ll g f_i \gg, \quad \ll f_i \gg (\amalg_{i\in I} g_i) = \ll f_i g_i \gg \tag{2.21}$$

Demostración. Aplicando la proposición 2.1.8 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos lo que queríamos probar.

□

Proposición 2.2.9. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría en la cual cualquier par de objetos admite un coproducto. Si dados X, Y, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y las proyecciones*

$$\begin{array}{rcl} q_1\colon X & \longrightarrow & X \amalg Y, \\ q_2\colon Y & \longrightarrow & X \amalg Y, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} r_1\colon X \amalg Y & \longrightarrow & (X \amalg Y) \amalg Z, \\ r_2\colon Z & \longrightarrow & (X \amalg Y) \amalg Z \end{array} \tag{2.22}$$

entonces, $((X\amalg Y)\amalg Z; r_1 q_1, r_1 q_2, r_2)$ es el coproducto de X, Y, Z. En general, cualquier colección finita de objetos de $\mathfrak{C}$ admite un coproducto.

Demostración. Aplicando la proposición 2.1.9 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos lo que queríamos probar.

□

Ejemplos 2.2.10.

1. En la categoría **S**, el coproducto es la unión disjunta de conjuntos. Si $\{(X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos, su coproducto es $(\amalg_{i\in I} X_i; \{q_i\})$ siendo $\amalg_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\}$ y las inyecciones q_i, $i \in I$, son las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} q_i\colon X_i & \longrightarrow & \amalg_{i\in I} X_i \\ x_i & \longmapsto & (x_i, i) \end{array} \tag{2.23}$$

2. En la categoría **Top**, el coproducto de una familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ de espacios topológicos es la unión disjunta $\amalg_{i\in I} X_i$ dotada la topología engendrada por

$$\bigcup_{i\in I}\{U_i \times \{i\} : U_i \in \tau_i\}$$

Las inyecciones en esta categoría son las definidas en (2.23).

3. En la categoría **Gr**, el coproducto es el producto libre: si G y H son dos grupos, su producto libre es el grupo $(G * H, \diamond)$ cuyos elementos son de la forma

$$c = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n, \quad a_i \in G, b_i \in H \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Los elementos de $G * H$ se llaman palabras reducidas de $G \cup H$. Estas se definen como aquellas secuencias $x_1 x_2 ... x_n$ de elementos de $G \cup H$ tales que ningún x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es el neutro de G o de H y que para ningún par de elementos consecutivos se tiene que ambos pertenecen a G o que ambos pertenecen a H. La operación $\diamond$ de este grupo está definida de la siguiente forma: si c, c' son dos elementos de $G * H$, entonces $c \diamond c'$ es la palabra reducida que resulta de escribir c' a continuación de c. El elemento neutro de $G * H$ es la palabra vacía y la denotaremos por 0.
En esta categoría, las inyecciones son los morfismos

$$\begin{array}{rcl} q_1 \colon G & \longrightarrow & G * H \\ a & \longmapsto & a \\ e_G & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} q_2 \colon H & \longrightarrow & G * H \\ b & \longmapsto & b \\ e_H & \longmapsto & 0 \end{array}$$

siendo e_G el elemento neutro de G y e_B el elemento neutro de H. Están bien definidos porque $G \subset G * H$ y $H \subset G * H$.

4. En la categoría **Ab**, el coproducto es la suma directa. La suma directa de una familia finita de grupos $\{G_i\}_{i=1}^n$, coincide con el producto directo de grupos, y se denota por $G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n$, o de forma abreviada $\bigoplus G_i$. En este caso, las inyecciones son los morfismos

$$\begin{array}{rcl} q_i \colon G_i & \longrightarrow & G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_n \\ x_i & \longmapsto & (e_1, e_2, \dots, x_i, \dots e_n) \end{array} \tag{2.24}$$

siendo e_i el elemento neutro de G_i, $i \in \{1, 2, \dots n\}$.
Si consideramos una familia infinita de grupos $\{G_n\}_{i\in I}$, los elementos de la suma directa $\bigoplus G_i$ de esta familia son de la forma $(x_i)_{i\in I}$ tal que tiene un número finito de componenetes distintos del elemento neutro. Las inyecciones son también los morfismos definidos en (2.24).

5. En la categoría $\mathbf{S}_2$, cuyos objetos son los conjuntos con dos elemento y los morfismos son las aplicaciones, vimos que no existía producto para un par de objetos de esta categoría. Vamos a demostrar que tampoco existe coproducto. Sean $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$ y $C = \{c_1, c_2\}$ objetos de $\mathbf{S}_2$, y $f_1 \colon C \longrightarrow A$, $f_2 \colon C \longrightarrow B$ dos aplicaciones tales que $f_1(A) = \{c_1\}$ y $f_2(B) = \{c_2\}$. Si existiera el coproducto $(A \amalg B, q_A, q_B)$, tendría que ser $A \amalg B = \{d_1, d_2\} \in \mathbf{S}_2$. Entonces, existiría una aplicación única $h \colon A \amalg B \longrightarrow C$ tal que

$$hq_A = f_1, \quad hq_2 = f_2 \tag{2.25}$$

Las aplicaciones q_1 y q_2 son inyectivas, porque si consideramos dos aplicaciones inyectivas $f : A \longrightarrow C$ y $g \colon B \longrightarrow C$, entonces existe una aplicación $h' \colon C \longrightarrow A \times B$ tal que $h'q_1 = f$ y $h'q_2 = g$, luego la composición de aplicaciones $h'q_1$ y $h'q_2$ es inyectiva, lo que implica que p_1 y p_2 son inyectivas.
Entonces, podemos suponer que $q_A(d_i) = a_i$, $q_B(d_i) = b_i$ para $i = 1, 2$ sin pérdida de la generalidad. Por (2.25), $h(q_A(A)) = f_1(A) = \{c_1\}$ y $h(q_B(B)) = f_2(B) = \{c_2\}$. Como $q_A(A) = q_B(B) = A \amalg B$, implica que $h(A \amalg B) = \{c_1\}$ y $h(A \amalg B) = \{c_2\}$, llegando a contradicción.

Ocurre lo mismo que en el ejemplo 5 de productos. El coproducto de $A \amalg B$ en la categoría $\mathbf{S}$ si que existe y es el conjunto de cuatro elementos

$$A \amalg B = \{(a_1, 1), (a_2, 1), (b_1, 2), (b_2, 2)\}$$

con las aplicaciones q_A, q_B definidas en (2.15). Con las funciones anteriores, la función $h \colon A \amalg B \longrightarrow C$ que cumpliría (2.25) sería

$$h(x, y) = \begin{cases} c_1 & \text{si } y = 1 \\ c_2 & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

2.3. Pull-back

Otro ejemplo de construcción universal es el pull-back. Está basado en la idea de que dados dos morfismos $\varphi \colon A \longrightarrow X$ y $\psi \colon B \longrightarrow X$ en una categoría $\mathfrak{C}$, podamos encontrar morfismos que formen diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd} \tag{2.26}$$

Haciendo que dos morfismos $\alpha\colon Y \longrightarrow A$, $\beta\colon Y \longrightarrow B$, cumplan cierta propiedad universal, podemos producir diagramas conmutativos como el de (2.26), para cualquier objeto Z de $\mathfrak{C}$.

Definición 2.3.1. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Dados $\varphi\colon A \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ en $\mathfrak{C}$, un *pull-back* de (φ, ψ) es la terna $(Y; \alpha, \beta)$ siendo Y un objeto de $\mathfrak{C}$ y $\alpha\colon Y \longrightarrow A$, $\beta\colon Y \longrightarrow B$ dos morfismos tales que $\varphi\alpha = \psi\beta$ y con la propiedad universal de que dados $\gamma\colon Z \longrightarrow A$, $\delta\colon Z \longrightarrow B$ tal que $\varphi\gamma = \psi\delta$, existe un único $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ con $\gamma = \alpha\xi$ y $\delta = \beta\xi$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\xi"'] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd} \tag{2.27}$$

Escribiremos $(Y; \alpha, \beta)$, o de forma abreviada (α, β), para referirnos al pull-back de (φ, ψ). Como ocurre en el producto y en el coproducto, si (α, β) es el pull-back de (φ, ψ) es único salvo isomorfismo único:

Proposición 2.3.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Sean $\varphi\colon Z \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ en $\mathfrak{C}$, dos morfismos de $\mathfrak{C}$. Si (α, β), (α', β') siendo*

$$\begin{array}{lcllcl}
\alpha\colon Y & \longrightarrow & A & \beta\colon Y & \longrightarrow & B \\
\alpha'\colon Y' & \longrightarrow & A & \beta'\colon Y' & \longrightarrow & B
\end{array}$$

son dos pull-backs de (φ, ψ). Existe un único isomorfismo $\phi\colon Y \longrightarrow Y'$ tal que $\alpha'\phi = \alpha$, $\beta'\phi = \beta$.

Demostración. Como $\varphi\alpha = \beta\psi$, usando la propiedad universal de (α', β') con los morfismos $\alpha\colon Y \longrightarrow A$ y $\beta\colon Y \longrightarrow B$, sabemos que existe un único $\phi\colon Y \longrightarrow Y'$ tal que $\alpha'\phi = \alpha$, $\beta'\phi = \beta$. Veamos que ϕ es un isomorfismo.
Si ahora usamos la propiedad universal de (α, β) con $\alpha'\colon Y' \longrightarrow A$ y con $\beta'\colon Y' \longrightarrow B$, sabemos que existe un único $\eta\colon Y' \longrightarrow Y$ tal que $\alpha\eta = \alpha'$ y $\beta\eta = \beta'$.
Además, usando la propiedad universal de (α', β') con los morfismos α' y β', tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha'(\phi\eta) &= (\alpha'\phi)\eta = \alpha\eta = \alpha' = \alpha' 1_{Y'} \\
\beta'(\phi\eta) &= \beta\eta = \beta' = \beta' 1_{Y'}
\end{aligned}$$

Como $\phi\eta$ y $1_{Y'}$ son dos morfismos que cumplen la propiedad universal de (α', β') y, por definición, el morfismo que cumple esta propiedad universal es único, deducimos que $\phi\eta = 1_{Y'}$. De la mima forma, como

$$\alpha(\eta\phi) = (\alpha\eta)\phi = \alpha'\phi = \alpha = \alpha 1_Y$$
$$\beta(\eta\phi) = (\beta\eta)\phi = \beta'\phi = \beta = \beta 1_Y$$

por la unicidad de la propiedad universal de (α, β), tiene que ser $\eta\phi = 1_Y$. Por tanto, $\phi\colon Y \longrightarrow Y'$ es un isomorfismo y es único.

□

Proposición 2.3.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Sean $\varphi\colon A \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ dos monomorfismos y sea $(Y; \alpha, \beta)$ su pull-back en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si φ es un monomorfismo entonces β es un monomorfismo.*

2. *Si ψ es un monomorfismo entonces α es un monomorfismo.*

Demostración. 1. Supongamos que $\varphi\colon A \longrightarrow X$ es un monomorfismo. Sean f, $g \in \mathfrak{C}(Z, B)$ dos morfismos tales que $\beta f = \beta g$. Veamos que $f = g$.
Como $\beta f = \beta g$, entonces

$$\varphi\alpha f = \psi\beta f = \psi\beta g = \varphi\alpha g \tag{2.28}$$

Por ser φ un monomorfismo, implica que $\alpha f = \alpha g$. Utilizando la propiedad universal del pull-back $(Y; \alpha, \beta)$ con $\alpha f (= \alpha g)$ y $\beta g (= \beta f)$, existe un único morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $\alpha f = \alpha\xi$ y $\beta f = \beta\xi$. Por la unicidad de este morfismo, como

$$\alpha g = \alpha f = \alpha\xi$$
$$\beta f = \beta g = \beta\xi$$

debe ser $g = \xi = f$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha f = \alpha g"] \arrow[ddr, bend right, "\beta g = \beta f"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd} \tag{2.29}$$

2. La demostración es similar a la realizada para demostrar *1.*

□

Ejemplos 2.3.4.

1. Consideramos la categoría $\mathbf{S}$. Sea X un conjunto y sean A, $B \subset X$. Definimos los morfismos

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon A & \longrightarrow & X \\ a & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \psi\colon B & \longrightarrow & X \\ b & \longmapsto & b \end{array}$$

Como las inclusiones de A y B en X. Entonces, $(A \cap B; \alpha, \beta)$ es el pull-back de (φ, ψ) siendo α y β los morfismos

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon A \cap B & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta\colon A \cap B & \longrightarrow & B \\ b & \longmapsto & b \end{array}$$

Veamos que cumple la propiedad universal. Sea Z un conjunto y sean $\gamma\colon Z \longrightarrow A$, $\delta\colon Z \longrightarrow B$ dos morfismos tales que $\varphi(\gamma(z)) = \psi(\delta(z))$, para todo $z \in Z$. Por cómo hemos definido φ y ψ, esto implica que $\gamma(z) = \delta(z)$, para todo $z \in Z$. Es decir, la imagen de γ y de δ está contenida en $A \cap B$. Por tanto, si definimos

$$\begin{array}{rcl} \xi\colon Z & \longrightarrow & A \cap B \\ z & \longmapsto & \gamma(z) \end{array}$$

este es el único morfismo con $\gamma = \alpha\xi$ y $\delta = \beta\xi$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\xi"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& A \cap B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Considerando el vacío como un objeto de $\mathbf{S}$, no hay problemas en la existencia del pull-back si ocurriese que $A \cap B = \emptyset$. Por supuesto, se seguiría cumpliendo que $\varphi\alpha = \psi\beta$, porque ambos morfismos pertenecen a $\mathbf{S}(\emptyset, X)$, y este conjunto tiene un solo elemento. Para ver que se sigue cumpliendo la propiedad universal, sean $\gamma\colon Z \longrightarrow A$ y $\delta\colon Z \longrightarrow B$ dos aplicaciones tales que $\varphi(\gamma(z)) = \psi(\delta(z))$, para todo $z \in Z$. Como φ y ψ son los morfismos inclusión y $A \cap B = \emptyset$, esta igualdad solo se da en el caso de que $Z = \emptyset$ por la misma razón que antes ($\mathbf{S}(\emptyset, X)$ tiene un solo elemento). Si $Z = \emptyset$, el único morfismo $\xi : \emptyset \longrightarrow \emptyset$ tal que $\gamma = \alpha\xi$ y $\delta = \beta\xi$ es el morfismo identidad $1_\emptyset$. Luego también cumple la propiedad del pull-back.

Si estuviesemos trabajando en la categoría $\tilde{\mathbf{S}}$, como el conjunto vacío no es un objeto, si $A \cap B = \emptyset$, entonces $(A \cap B; \alpha, \beta)$ no podría ser el pull-back de (φ, ψ) en esta categoría. De hecho, en este caso, no existiría el pull-back de (φ, ψ) en $\tilde{\mathbf{S}}$.

Si en vez de considerar dos aplicaciones concretas consideramos morfismos $\varphi\colon A \longrightarrow X$, y $\psi\colon B \longrightarrow X$ en $\mathbf{S}$, entonces su pull-back es $(Y : \alpha, \beta)$ donde Y es el conjunto

$$Y = \{(a, b) \in A \times B : \varphi(a) = \psi(b)\} \tag{2.30}$$

y las aplicaciones $\alpha\colon Y \longrightarrow A$ y $\beta\colon Y \longrightarrow B$ se definen como

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon Y & \longrightarrow & A \\ (a, b) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta\colon Y & \longrightarrow & B \\ (a, b) & \longmapsto & b \end{array}$$

La prueba es muy similar a la que hacemos a continuación para la categoría $\mathbf{Gr}$. En el caso concreto donde φ y ψ son las inclusiones de A y B en X, el conjunto Y corresponde con

$$Y = \{(a, a) \in A \times B\} \tag{2.31}$$

por tanto, podemos identificar este conjunto Y con $A \cap B$ mediante la biyección

$$\begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & A \cap B \\ (a, a) & \longmapsto & a \end{array}$$

2. En la categoría $\mathbf{Gr}$, sean $\varphi\colon G \longrightarrow X$, $\psi\colon H \longrightarrow X$ dos homomorfismos de grupos. Su pull-back en $\mathbf{Gr}$ es $(Y; p_G, p_N)$ donde Y es el subgrupo de $G \times H$ definido como

$$Y = \{(g, h) \in G \times H : \varphi(g) = \psi(h)\} \tag{2.32}$$

con la operación componente a componente, y los morfismos p_G, p_H son las proyecciones

$$\begin{array}{rcl} p_G\colon Y & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \longmapsto & g \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} p_H\colon Y & \longrightarrow & H \\ (g, h) & \longmapsto & h \end{array}$$

Es evidente que, por la definición de Y, $\varphi p_G = \psi p_H$. Veamos ahora que cumple la propiedad universal del pull-back: sea Z un objeto de

Gr y sean $\gamma\colon Z \longrightarrow G$, $\delta\colon Z \longrightarrow H$ dos morfismos tal que $\varphi\gamma = \psi\delta$. Esto implica que $\varphi(\gamma(z)) = \psi(\delta(z))$, para todo $z \in Z$, y por tanto, $(\gamma(z), \delta(z)) \in Y$, para todo $z \in Z$. Podemos definir el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \xi\colon Z & \longrightarrow & Y \\ z & \longmapsto & (\gamma(z), \delta(z)) \end{array}$$

Este morfismo que cumple que $p_G\xi(z) = p_G(\gamma(z), \delta(z)) = \gamma(z)$ y $p_H\xi(z) = p_H(\gamma(z), \delta(z)) = \delta(z)$, para todo $z \in Z$. Para ver que este morfismo es único, supongamos que existe $\xi'\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $p_G\xi' = \gamma$ y $p_H\xi' = \delta$. Entonces, $p_G\xi' = p_G\xi$ y $p_H\xi' = p_H\xi$. Por tanto, $\xi'(z) = (p_G\xi(z), p_H\xi(z)) = \xi(z)$, para todo $z \in Z$. Esto quiere decir que $\xi' = \xi$.

El pull-back en una categoría $\mathfrak{C}$ guarda una relación con el producto de dos objetos de $\mathfrak{C}$ como veremos a continuación. Pero antes necesitamos dar las siguientes definiciones:

Definición 2.3.5. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Decimos que $I \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ es un *objeto inicial* de $\mathfrak{C}$ si cumple que para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ el conjunto $\mathfrak{C}(I, X)$ tiene un único elemento.

Definición 2.3.6. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Decimos que $F \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ esun *objeto final* de $\mathfrak{C}$ si cumple que para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ el conjunto $\mathfrak{C}(X, F)$ tiene un único elemento. Es fácil ver que F es un objeto inicial de $\mathfrak{C}^{op}$.

Definición 2.3.7. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Decimos que $0 \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ es *objeto cero* de $\mathfrak{C}$ si es inicial y final a la vez.

Definición 2.3.8. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero. Para cada par X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo $f\colon X \longrightarrow 0$ y un único morfismo $g\colon 0 \longrightarrow Y$. Llamamos *morfismo cero* al morfismo $0_{XY} = gf \in \mathfrak{C}(X, Y)$. Para cualquier $f\colon W \longrightarrow X$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ en $\mathfrak{C}$ cumple que

$$0_{XY}f = 0_{WY}, \quad g0_{XY} = 0_{XZ} \tag{2.33}$$

porque si llamamos h_X, h_Y, h_W a los morfismos únicos de $\mathfrak{C}(X, 0)$, $\mathfrak{C}(0, Y)$ y $\mathfrak{C}(W, 0)$ respectivamente, como $h_Xf \in \mathfrak{C}(W, 0)$, tiene que ser $h_Xf = h_W$. Entonces

$$0_{XY}f = h_Yh_Xf = h_Yh_W = 0_{WY}$$

De la misma forma deducimos que $g0_{XY} = 0_{XZ}$.

Estos tipos de objetos no existen en todas las categorías. A continuación daremos unos ejemplos de objetos iniciales, finales y cero en diferentes categorías.

Ejemplos 2.3.9.

1. En la categoría **S**, el conjunto vacío es un objeto inicial y los conjuntos con un solo elemento son objetos finales porque la única aplicación $f : A \longrightarrow \{p\}$ que existe entre un conjunto A y el conjunto con un solo elemento $\{p\}$ es aquella tal que $f(a) = p$, para todo $a \in A$. No tiene ningún objeto inicial ni ningún objeto cero.
   En la categoría $\tilde{\mathbf{S}}$, no habría ningún objeto inicial ni cero y los conjuntos con un solo elemento serían también objetos finales.

2. En la categoría **Top**, los espacios topológicos con un solo elemento son los objetos finales. No tiene ningún objeto inicial, luego tampoco objeto cero.

3. En la categoría **Top***, los espacios topológicos con un solo elemento son iniciales y finales, es decir, son objetos cero. Los morfismos cero se corresponden con las aplicaciones constates: Sea $(\{x_0\}, x_0)$ un objeto cero de **Top***, y (Y, y_0), (Z, z_0) dos objetos. Los únicos morfismos de $\mathbf{Top}*((Y, y_0), (\{x_0\}, x_0))$ y $\mathbf{Top}*((\{x_0\}, x_0), (Z, z_0))$ son

$$\begin{array}{rcl} h_Y\colon (Y, y_0) & \longrightarrow & (\{x_0\}, x_0) \\ y & \longmapsto & x_0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h_Z\colon (\{x_0\}, x_0) & \longrightarrow & (Z, z_0) \\ x_0 & \longmapsto & z_0 \end{array}$$

   Entonces, $0_{YZ} = h_Z h_Y$ es la aplicación constantemente igual a z_0.

4. Tanto en la categoría **Gr** como en **Ab**, el grupo trivial formado únicamente por el elemento neutro es un objeto cero. Vamos a ver cómo son los morfismos cero de esta categoría. Sean G, H dos grupos. Los únicos morfismos de $\mathbf{Gr}(G, 0)$ y $\mathbf{Gr}(0, H)$ son

$$\begin{array}{rcl} h_G\colon G & \longrightarrow & 0 \\ g & \longmapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h_H\colon 0 & \longrightarrow & H \\ 0 & \longmapsto & e_H \end{array}$$

   siendo e_H el elemento neutro de H. Luego $0_{GH}(g) = e_H$ para todo $g \in G$, es decir, 0_{GH} es el homomorfismo de grupos que envía todos los elementos de G a el elemento neutro del H.

5. En la subcategoría de **Ri**, formada por los anillos unitarios y los homomorfismos de anillos, el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un objeto inicial. Si R es un anillo unitario, el único homomorfismo de anillos

$f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow R$ es tal que $f(1) = 1_R$ y $f(n) = nf(1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, siendo 1_R la unidad de R. No tiene ningún objeto inicial y tampoco objeto cero.

Proposición 2.3.10. *Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con un objeto final $F \in \mathfrak{C}$ y A, B son dos objetos de $\mathfrak{C}$ tal que su producto $(A \times B; p_1, p_2)$ existe, entonces el pull-back de los únicos morfismos $\varphi\colon A \longrightarrow F$, $\psi\colon B \longrightarrow F$ es la terna $(A \times B; p_1, p_2)$.*

Demostración. En primer lugar, como F es un objeto final, $\mathfrak{C}(A\times B, F)$ tiene un único morfismo. Como φp_1 y ψp_2 son elementos de $\mathfrak{C}(A\times B, F)$, tiene que ser $\varphi p_1 = \psi p_2$.
Veamos si cumple la propiedad universal del pull-back. Sean $f_1\colon Z \longrightarrow A$ y $f_2\colon Z \longrightarrow B$ tal que $\varphi f_1 = \psi f_2$ (esta igualdad siempre se da porque $\mathfrak{C}(Z, F)$ tiene un solo elemento y tanto φf_1 como ψf_2 pertenecen a $\mathfrak{C}(Z, F)$). Queremos ver que existe un único morfismo $f\colon Z \longrightarrow A\times B$ tal que $f_1 = p_1 f$, $f_2 = p_2 f$. Esto es inmediato porque por la propiedad universal de producto $(A\times B; p_1, p_2)$ sabemos que existe un único $f\colon Z \longrightarrow A\times B$ tal que $p_1 f = f_1$, $p_2 f = f_2$. Por tanto, cumple la propiedad universal del pull-back.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "f"'] \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_2"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & F
\end{tikzcd} \tag{2.34}$$

□

Por otro lado, si tenemos una categoría $\mathfrak{C}$ arbitraria, definimos una nueva categoría $\mathfrak{C}_X$: sus objetos son los morfismos de la categoría $\mathfrak{C}$ que tienen como llegada el objeto X, es decir, sus objetos son de la forma $f_A \in \mathfrak{C}(A, X)$ donde A un objeto de $\mathfrak{C}$. Para cada par de objetos f_A y f_B de $\mathfrak{C}_X$ (siendo $f_A \in \mathfrak{C}(A, X)$ y $f_B \in \mathfrak{C}(B, X)$), los morfismos $\sigma\colon f_A \longrightarrow f_B$ de la categoría $\mathfrak{C}_X$ entre estos dos objetos son morfismos $\sigma\colon A \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ que cumplen que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f_A"'] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
X & B \arrow[l, "f_B"]
\end{tikzcd} \tag{2.35}$$

conmuta, es decir, $f_B\sigma = f_A$. La composición de morfismos en $\mathfrak{C}_X$ está bien definida: Tenemos los morfismos $\sigma\colon f_A \longrightarrow f_B$ y $\tau : f_B \longrightarrow f_C$ en $\mathfrak{C}_X$.

Entonces, $\sigma \in \mathfrak{C}(A,B)$ cumpliendo que $f_A = f_B\sigma$, y $\tau \in \mathfrak{C}(B,C)$ cumpliendo que $f_B = f_C\tau$. La composición $\tau\sigma\colon f_A \longrightarrow f_C$ es el morfismos $\tau\sigma\colon A \longrightarrow C$ en $\mathfrak{C}$ y que cumplen que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f_A"'] \arrow[dr, "\tau\sigma"] & \\ X & C \arrow[l, "f_C"] \end{tikzcd} \tag{2.36}$$

conmuta porque $f_C\tau\sigma = f_B\sigma = f_A$. Luego pertenece a $\mathfrak{C}_X(f_A, f_C)$. Como se trata de la composición de dos morfismos en $\mathfrak{C}$, tenemos que los morfismos de $\mathfrak{C}_X$ cumplen la asociatividad de la composición y los morfismos identidad en $\mathfrak{C}_X$ son los morfismos identidad de $\mathfrak{C}$.

Proposición 2.3.11. *Si $(Y;\alpha,\beta)$ es el pull-back de (f_A, f_B) en $\mathfrak{C}$, entonces $(\triangle;\alpha,\beta)$ es el producto de f_A, f_B en $\mathfrak{C}_X$ si definimos $\triangle \in \mathfrak{C}(Y,X)$ como $\triangle = f_A\alpha = f_B\beta$.*

Demostración. En primer lugar, $\triangle\colon Y \longrightarrow X$ es un objeto de $\mathfrak{C}_X$. También se tiene que $\alpha \in \mathfrak{C}_X(\triangle, f_A)$ porque $\alpha \in \mathfrak{C}(Y,A)$ y además, cumple que $\triangle = f_A\alpha$ por la definición de $\triangle$. De la misma forma, $\beta \in \mathfrak{C}_X(\triangle, f_B)$ porque $\beta \in \mathfrak{C}(Y,B)$ y, por definición, $\triangle = f_B\beta$. Falta ver que $(\triangle;\alpha,\beta)$ cumple la propiedad universal del producto.

Sea $f_Z\colon Z \longrightarrow X$ un objeto de $\mathfrak{C}_X$ y sean $\gamma\colon f_Z \longrightarrow f_A$ y $\delta\colon f_Z \longrightarrow f_B$ dos morfismos de $\mathfrak{C}_X$. Queremos ver que existe un único morfismo $\xi\colon f_Z \longrightarrow \triangle$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & f_A \\ f_Z \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\delta"'] & \triangle \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ & f_B \end{tikzcd} \tag{2.37}$$

conmuta, es decir, tal que $\alpha\xi = \gamma$ y $\beta\xi = \delta$.
Como γ es un morfismo $\gamma\colon Z \longrightarrow A$ en $\mathfrak{C}$ tal que $f_A\gamma = f_Z$ y δ es un morfismo $\delta\colon Z \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$ tal que $f_B\delta = f_Z$, entonces $f_A\gamma = f_B\delta$. Por la propiedad universal del pull-back $(Y;\alpha,\beta)$ existe un único morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $\alpha\xi = \gamma$ y $\beta\xi = \delta$. Además,

$$\triangle\,\xi = f_A\alpha\xi = f_A\gamma = f_Z \tag{2.38}$$

Por tanto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "f_Z"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ X & Y \arrow[l, "\triangle"] \end{tikzcd} \tag{2.39}$$

conmuta y el morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{C}$ es el único morfismo $\xi\colon f_Z \longrightarrow \triangle$ en $\mathfrak{C}_X$ tal que $\alpha\xi = \gamma$ y $\beta\xi = \delta$. La unicidad se debe a que si hubiese otro morfismo $\xi'\colon f_Z \longrightarrow \triangle$ en $\mathfrak{C}_X$ tal que $\alpha\xi' = \gamma$ y $\beta\xi' = \delta$, por la definición de los morfismos de la categoría $\mathfrak{C}_X$, quiere decir que existe un morfismo $\xi'\colon Z \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{C}$ tal que $\alpha\xi' = \gamma$ y $\beta\xi' = \delta$. Como el morfismo que cumple la propiedad universal del pull-back $(Y; \alpha, \beta)$ es único, implica que $\xi' = \xi$.

□

Podemos definir el pull-back de una familia de morfismos en lugar de solo dos morfismos de esta forma:

Definición 2.3.12. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría . Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{C}$, siendo I un conjunto. El *pull-back* en $\mathfrak{C}$ de la familia de morfismos $f_i\colon X_i \longrightarrow X$, $i \in I$, es $(Y; \{\alpha_i\})$ siendo Y un objeto de $\mathfrak{C}$ y $\alpha_i\colon Y \longrightarrow X_i$, $i \in I$, morfismos tales que

$$f_i\alpha_i = f_j\alpha_j \quad \text{para todo } i, j \in I$$

con la propiedad universal de que para cualquier objeto Z y familia de morfismos $g_i\colon Z \longrightarrow X_i$, $i \in I$ tales que

$$f_i g_i = f_j g_j \quad \text{para todo } i, j \in I$$

existe un único morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ tal que

$$\alpha_i\xi = g_i \quad \text{para todo } i \in I$$

La relación entre el pull-back en una categoría $\mathfrak{C}$ y el producto en la categoría $\mathfrak{C}_X$, asegura que todas las proposiciones demostradas en la sección 2.1 enunciadas en $\mathfrak{C}_X$ se pueden traducir adecuadamente para obtener resultados sobre el pull-back en la categoría $\mathfrak{C}$. A continuación probaremos un teorema sobre el pull-back en categorías con objeto cero, pero antes daremos la definición de núcleo de un morfismo:

Definición 2.3.13. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathfrak{C}$. El *núcleo* de f es el par (K, g) con $K \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y $g\colon K \longrightarrow A$ tal que

1. $fg = 0_{KB}$
2. Si $h\colon C \longrightarrow A$ es un morfismo tal que $fh = 0_{CB}$ entonces existe un único morfismo $h'\colon C \longrightarrow K$ tal que $h = gh'$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
& K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "0_{KB}"] & B \\
C \arrow[uur, bend left, "h"] \arrow[ur, dashed, "h'"] \arrow[urr, bend right, "0_{CB}"'] & &
\end{tikzcd} \tag{2.40}$$

El núcleo de un morfismo también es una construcción universal que tiene como propiedad universal el punto 2 que hemos enunciado en la definición 2.3.13.

Ejemplos 2.3.14.

1. En la categoría **Top***, los objetos cero eran los espacios topológicos de un elemento, $(\{x_0\}, x_0)$, y los morfismos cero son las aplicaciones constantes. Veamos que el núcleo $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ en **Top*** es (K, i) siendo $K = f^{-1}(y_0)$, la contraimagen de y_0, y el morfismo $i\colon (K, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ la aplicación inclusión de K en X. En primer lugar,
$$f(i(x)) = f(x) = y_0 = 0_{KY}(x) \quad \text{para todo } x \in K$$
Veamos ahora que cumple la segunda propiedad del núcleo. Sea (Z, z_0) un objeto de **Top*** y $h\colon (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ tal que $fh = 0_{ZY}$. Entonces, $f(h(z)) = y_0$ para todo $z \in Z$, luego $h(Z) \subset f^{-1}(y_0) = K$. Por lo tanto, podemos definir
$$\begin{array}{rcl} h'\colon (Z, z_0) & \longrightarrow & (K, x_0) \\ z & \longmapsto & h(z) \end{array}$$
y este es el único morfismo tal que $h = ih'$. Es claro que si existiese otro morfismo $h''\colon (Z, z_0) \longrightarrow (K, x_0)$ tal que $h = ih''$, entonces tendríamos que $ih' = ih''$, lo que quiere decir que $h''(z) = ih''(z) = ih'(z) = h'(z)$, para todo $z \in (Z, z_0)$, es decir, $h'' = h'$.

2. En la categoría **Gr**, el objeto cero es el grupo 0 que solo tiene el elemeto neutro. Sea $f\colon G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Vamos a ver que el núcleo de f es (K, g) siendo $K = f^{-1}(e_H)$ (e_H es el elemento neutro de H) y $g\colon K \longrightarrow G$ el homomorfismo tal que $g(x) = x$ para todo $x \in G$, es decir, la inclusión de K en G. Como
$$f(g(x)) = f(x) = e_H = 0_{KH}(x) \quad \text{para todo } x \in K$$

queda probada la primera propiedad del núcleo de f.
Por otro lado, sea $h\colon J \longrightarrow G$ un homomorfismo de grupos tal que $fh = 0_{JH}$. Entonces, $f(h(x)) = e_H$ para todo $x \in J$, lo que implica que $h(J) \subset f^{-1}(e_H) = K$. Por lo tanto, está bien definido el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} h'\colon J & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & h(x) \end{array}$$

y es el único morfismo tal que $h = gh'$. Como ocurría en el ejemplo anterior, como g es la inclusión de K en G, si existiese otro morfismo $h''\colon J \longrightarrow K$ con $h = gh''$, tiene que ser $h'' = h'$.

Proposición 2.3.15. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathfrak{C}$. Si (K, g) es el núcleo de f entonces g es un monomorfismo.*

Demostración. Sean h_1, $h_2 \in \mathfrak{C}(C, K)$, tal que $gh_1 = gh_2$. Queremos ver que $h_1 = h_2$.
Como $fg = 0_{KB}$, tenemos que $fgh_1 = 0_{CB}$. Por la segunda propiedad del núcleo de f, existe un único morfismo $h'\colon C \longrightarrow K$ tal que $gh_1 = gh'$. Pero tenemos que los morfismos $h_1\colon C \longrightarrow K$ y $h_2\colon C \longrightarrow K$ también cumplen la segunda propiedad del núcleo porque $gh_1 = gh_1$ y $gh_1 = gh_2$. Como el morfismo con esta propiedad es único, tiene que ser $h_2 = h' = h_1$, quedando probado que g es un monomorfismo.

□

Teorema 2.3.16. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sean $\varphi\colon A \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ dos morfismos tales que existe su pull-back $(Y; \alpha, \beta)$ en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si (J, μ) es el núcleo de β, entonces $(J, \alpha\mu)$ es el núcleo de φ.*

2. *Si (J, σ) es el núcleo de φ, entonces σ se puede factorizar como $\sigma = \alpha\mu$ siendo (J, μ) el núcleo de β.*

Demostración. 1. Sea (J, μ) el núcleo de β. Queremos probar que $(J, \alpha\mu)$ es el núcleo de φ. En primer lugar, como $\varphi\alpha = \psi\beta$ por la definición de pull-back, observamos que

$$\varphi(\alpha\mu) = (\varphi\alpha)\mu = (\psi\beta)\mu = \psi(\beta\mu) = \psi 0_{JB} = 0_{JX} \tag{2.41}$$

Quedando probada la primera propiedad del núcleo de φ.
En segundo lugar, sea $\tau\colon Z \longrightarrow A$ un morfismo tal que $\varphi\tau = 0_{ZX}$. Queremos ver que existe un único morfismo $\tau'\colon Z \longrightarrow J$ tal que $\tau = (\alpha\mu)\tau'$.
Consideramos el objeto Z de $\mathfrak{C}$ y los morfismos $\tau\colon Z \longrightarrow A$, $0_{ZB}\colon Z \longrightarrow B$.

Como $\varphi\tau = 0_{ZX} = \psi 0_{ZB}$, por la propiedad univeral del pull-back, existe un único morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $\alpha\xi = \tau$, $\beta\xi = 0_{ZB}$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\xi"'] \arrow[drr, bend left, "\tau"] \arrow[ddr, bend right, "0_{ZB}"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd} \tag{2.42}$$

Como (J, μ) es el núcleo de β y $\beta\xi = 0_{ZB}$, entonces existe un único morfismos $\tau'\colon Z \longrightarrow J$ tal que $\xi = \mu\tau'$. Por tanto, $\tau = \alpha\xi = \alpha\mu\tau'$ como queríamos probar. Este morfismo τ' es único porque si existiese otro morfismo $\tau''\colon Z \longrightarrow J$ tal que $\tau = \alpha\mu\tau''$ entonces también tendríamos que $\tau = \alpha\xi = \alpha\mu\tau''$, pero por la unicidad de ξ solo puede ser $\xi = \mu\tau''$. Usando ahora que $\tau'\colon Z \longrightarrow J$ es el único morfismo tal que $\xi = \mu\tau'$, tiene que ser $\tau' = \tau''$.

2. Sea (J, σ) el núcleo de φ. Si consideramos el objeto J de $\mathfrak{C}$ y los morfismos $\sigma\colon J \longrightarrow A$ y $0_{JB}\colon J \longrightarrow B$, como $\varphi\sigma = 0_{JX} = \psi 0_{JB}$, por la propiedad universal del pull-back de (φ, ψ), existe un único morfismo $\mu\colon J \longrightarrow Y$ tal que $\alpha\mu = \sigma$ y $\beta\mu = 0_{JB}$. De esta forma, queda ya probada la factorización de σ y la primera propiedad del núcleo (J, μ).
Sea $\tau\colon Z \longrightarrow Y$ un morfismo tal que $\beta\tau = 0_{ZB}$. Para que (J, μ) sea el núcleo de β, falta ver que existe un único morfismo $\tau'\colon Z \longrightarrow J$ tal que $\tau = \mu\tau'$.
Como $\beta\tau = 0_{ZB}$, entonces $\varphi\alpha\tau = \psi\beta\tau = 0_{ZX}$. Usando la propiedad universal del pull-back con los morfismos $\alpha\tau\colon Z \longrightarrow A$, $\beta\tau\colon Z \longrightarrow B$, existe un único morfismo $\xi\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $\alpha\xi = \alpha\tau$ y $\beta\xi = \beta\tau$. Como el morfismo $\tau\colon Z \longrightarrow Y$ también cumple esta propiedad, deducimos que $\xi = \tau$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "\tau"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha\tau"] \arrow[ddr, bend right, "\beta\tau"'] & & \\
& Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd} \tag{2.43}$$

Por otro lado, como $\varphi(\alpha\tau) = \psi\beta\tau = 0_{ZX}$, por la segunda propiedad del núcleo (J, σ) de φ, sabemos que existe un único morfismo $\tau'\colon Z \longrightarrow J$ tal que $\alpha\tau = \sigma\tau' = \alpha\mu\tau'$. Como $\beta\tau = 0_{ZB} = \beta\mu\tau'$ (porque $\beta\mu = 0_{JB}$), $\mu\tau'\colon Z \longrightarrow Y$ es otro morfismo tal que $\alpha\tau = \alpha\mu\tau'$ y $\beta\tau = \beta\mu\tau'$, es decir, cumple la propiedad universal del pull-back para los morfismos $\alpha\tau\colon Z \longrightarrow A$ y $\beta\tau\colon Z \longrightarrow B$.

Como τ era el único morfismo que cumplía esta propiedad, tiene que darse $\tau = \mu\tau'$.
Para probar que este morfismo τ' es único, supongamos que existe otro morfismo $\tau'' : Z \longrightarrow J$ tal que $\tau = \mu\tau''$. Esto implica que $\alpha\tau = \alpha\mu\tau''$, lo que quiere decir que también cumple la segunda propiedad del núcleo $(J, \alpha\mu)$ de φ. Como τ' era el único morfismo que lo cumplía, concluimos que $\tau'' = \tau'$.

□

Por supuesto, de forma análoga podemos enunciar el teorema esta vez con el núcleo de ψ y el núcleo de α:

Teorema 2.3.17. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sean $\varphi\colon A \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ dos morfismos tales que existe su pull-back $(Y;\alpha,\beta)$ en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si (K,λ) es el núcleo de α, entonces $(K,\beta\lambda)$ es el núcleo de ψ.*

2. *Si (K,θ) es el núcleo de ψ, entonces θ se puede factorizar como $\theta = \beta\lambda$ siendo (K,λ) el núcleo de α.*

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 2.3.16.

□

Con estos dos últimos resultados, podemos relacionar el pull-back de dos morfismos con su núcleo.

2.4. Push-out

El concepto de push-out es el dual del concepto de pull-back, es decir, $(Y;\alpha,\beta)$ es un push-out de (φ,ψ) en una categoría $\mathfrak{C}$ si y solo si es un pull-back en su categoría opuesta $\mathfrak{C}^{op}$. Enunciando la definición de pull-back en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos la definición de push-out en $\mathfrak{C}$:

Definición 2.4.1. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Dados $\varphi\colon X \longrightarrow A$, $\psi\colon X \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$, un *push-out* de (φ,ψ) es la terna $(Y;\alpha,\beta)$ siendo Y un objeto de $\mathfrak{C}$ y $\alpha\colon A \longrightarrow Y$, $\beta\colon B \longrightarrow Y$ dos morfismos tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{2.44}$$

conmuta y tiene la propiedad universal de que dados $\gamma\colon A \longrightarrow Z$, $\delta\colon B \longrightarrow Z$ tal que $\gamma\varphi = \delta\psi$, existe un único $\xi\colon Y \longrightarrow Z$ con $\gamma = \xi\alpha$ y $\delta = \xi\beta$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\delta"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\
& & Z
\end{tikzcd} \tag{2.45}$$

Denotamos $(Y;\alpha,\beta)$, o de forma abreviada (α,β), al push-out de (φ,ψ). Como ocurría con el producto y el coproducto, podemos enunciar los resultados opuestos de la sección de pull-back en la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ para obtener resultados sobre el push-out en $\mathfrak{C}$.

Proposición 2.4.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Sean $\varphi\colon X \longrightarrow A$, $\psi\colon X \longrightarrow B$ en $\mathfrak{C}$, dos morfismos de $\mathfrak{C}$. Si (α,β), (α',β') siendo*

$$\begin{array}{lclclcl}
\alpha\colon A & \longrightarrow & Y & \quad & \beta\colon B & \longrightarrow & Y \\
\alpha'\colon A & \longrightarrow & Y' & \quad & \beta'\colon B & \longrightarrow & Y'
\end{array}$$

son dos push-out de (φ,ψ). Existe un único isomorfismo $\phi\colon Y' \longrightarrow Y$ tal que $\phi\alpha' = \alpha$, $\phi\beta' = \beta$.

Demostración. Aplicando la proposición 2.3.2 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$, obtenemos lo que queríamos demostrar.

□

Proposición 2.4.3. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Sean $\varphi\colon X \longrightarrow A$, $\psi\colon X \longrightarrow B$ dos monomorfismos y sea $(Y;\alpha,\beta)$ su push-out en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si φ es un epimorfismo entonces β es un epimorfismo.*

2. *Si ψ es un epimprfismo entonces α es un epimorfismo.*

Demostración. Corresponde con el enunciado opuesto de la proposición 2.4.3 que ya hemos demostrado. Por tanto basta aplicar la proposición 2.4.3 a $\mathfrak{C}^{op}$.

□

Ejemplos 2.4.4.

1. Consideramos la categoría **S**. Sean A, B dos conjuntos. Definimos los morfismos

$$\begin{array}{rclcrcl}
\varphi\colon A\cap B & \longrightarrow & A & \quad & \psi\colon A\cap B & \longrightarrow & B \\
a & \longmapsto & a & \quad & b & \longmapsto & b
\end{array} \tag{2.46}$$

Entonces, $(A \cup B; \alpha, \beta)$ es el push-out de (φ, ψ) siendo α y β los morfismos

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon A & \longrightarrow & A \cup B \\ a & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta\colon B & \longrightarrow & A \cup B \\ b & \longmapsto & b \end{array}$$

Veamos que cumple la propiedad universal del push-out. Sea Z un conjunto y $\gamma\colon A \longrightarrow Z$, $\delta\colon B \longrightarrow Z$ dos morfismos tales que $\gamma\varphi = \delta\psi$. Esto quiere decir que $\gamma(x) = \delta(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Entonces, la aplicación $\xi\colon A \cup B \longrightarrow Z$ tal que

$$\xi(x) = \begin{cases} \gamma(x) & \text{si } x \in A \\ \delta(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

está bien definida y es el único morfismo tal que $\gamma = \xi\alpha$ y $\delta = \xi\beta$.

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\delta"'] & A \cup B \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

2. En la categoría **Gr**, el push-out de dos homomorfismos $\varphi\colon X \longrightarrow G$, $\psi : X \longrightarrow H$ es $(G *_X H; q'_G, q'_H)$, siendo $G *_X H = (G * H)/N$ el producto libre amalgamado de G y H y siendo los morfismos q'_G, q'_H las inyecciones (q_G, q_H) del coproducto $G * H$ compuestas con el paso al cociente $G * H \longrightarrow G *_X H$. N es el menor subgrupo normal de $G * H$ que contiene
$$A = \{\varphi(x)\psi(x)^{-1} : x \in X\}$$
siendo $\psi(x)^{-1}$ el inverso de $\psi(x)$. Esto es, el subgrupo generado por
$$\{gag^{-1} : g \in G * H, \quad a \in A\}$$
En $(G * H)/N$, las clases de equivalencia de los elementos de A son el neutro. Por la definición de N, tenemos que para todo $x \in X$, $[\varphi(x)][\psi(x)^{-1}] = [\varphi(x)\psi(x)^{-1}] = 1$ (siendo 1 el neutro de $G *_X H$), luego
$$q'_G(\varphi(x)) = [\varphi(x)] = [\psi(x)] = q'_H(\psi(x))$$
lo que quiere decir que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d, "q'_G"] \\ H \arrow[r, "q'_H"'] & G *_X H \end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos ahora que cumple la propiedad universal del push-out. Sean $f_1 \colon G \longrightarrow Z$, $f_2 \colon H \longrightarrow Z$ dos homomorfismos tales que $f_1\varphi = f_2\psi$. Por la propiedad universal del coproducto, sabemos que existe un único morfismo $\xi \colon G * H \longrightarrow Z$ tal que $\xi q_G = f_1$ y $\xi q_H = f_2$. Como tenemos que $f_1(\varphi(x)) = f_2(\psi(x))$ para todo $x \in X$, entonces,

$$\xi(\varphi(x)\psi(x)^{-1}) = \xi(\varphi(x))\xi(\psi(x))^{-1} = f_1(\varphi(x))f_2(\psi(x))^{-1} = e_Z$$

donde e_Z es el neutro de Z. Entonces, $\xi(a) = e_Z$ para todo $a \in A$, luego

$$\xi(gag^{-1}) = \xi(g)\xi(a)\xi(g^{-1}) = \xi(g)\xi(g)^{-1} = e_Z$$

para todo $g \in G * H$, $a \in A$ y podemos definir el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \xi' \colon G *_X H & \longrightarrow & Z \\ {[x]} & \longmapsto & \xi(x) \end{array}$$

Este es el único homomorfismo $\xi' \colon G *_Z H \longrightarrow Z$ tal que $\xi' q'_G = f_1$ y $\xi' q'_H = f_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d, "q'_G"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
H \arrow[r, "q'_H"'] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & G *_X H \arrow[dr, dashed, "\xi'"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

La relación que mantienen el pull-back y el producto en $\mathfrak{C}^{op}$, corresponde con la relación entre el push-out y el coproducto en la categoría $\mathfrak{C}$:

Proposición 2.4.5. *si $\mathfrak{C}$ es una categoría con un objeto inicial $I \in \mathfrak{C}$ y A, B son dos objetos de $\mathfrak{C}$ tal que su coproducto $(A \amalg B; q_1, q_2)$ existe, entonces el push-out de los únicos morfismos $\varphi \colon I \longrightarrow A$, $\psi \colon I \longrightarrow B$ son las inyecciones $q_1 \colon A \longrightarrow A \amalg B$, $q_2 \colon B \longrightarrow A \amalg B$.*

Demostración. Aplicando la proposición 2.3.10 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos este resultado.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
B \arrow[r, "q_2"'] \arrow[drr, bend right, "\delta"'] & A \amalg B \arrow[dr, dashed, "\xi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd} \tag{2.47}$$

□

Por otro lado, si ahora definimos la categoría $\mathfrak{C}^X = \mathfrak{C}_X^{op}$ que sería aquella cuyos objetos son los morfismos $g_A \in \mathfrak{C}^{op}(A, X) = \mathfrak{C}(X, A)$ y cuyos morfismos $\sigma\colon g_B \longrightarrow g_A$ entre los dos objetos g_B y g_A de $\mathfrak{C}^X$ (siendo $g_B \in \mathfrak{C}(X, B)$ y $g_A \in \mathfrak{C}(X, A)$) son morfismos $\sigma \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $g_A = g_B * \sigma = \sigma g_B$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "\sigma"] & \\ X \arrow[u, "g_B"] \arrow[r, "g_A"'] & A \end{tikzcd} \tag{2.48}$$

conmuta en $\mathfrak{C}$.

Proposición 2.4.6. *Si $(Y; \alpha, \beta)$ es el push-out de (g_A, g_B) en $\mathfrak{C}$, entonces $(\triangle; \alpha, \beta)$ es el coproducto de g_A, g_B en $\mathfrak{C}^X$ si definimos $\triangle \in \mathfrak{C}(X, Y)$ como $\triangle = \alpha g_A = \beta g_B$.*

Demostración. Aplicando la proposición 2.3.11 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos el resultado que queríamos probar.

□

También se puede definir el push-out de una familia de morfismos en lugar de solo dos morfismos:

Definición 2.4.7. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría . Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de $\mathfrak{C}$, siendo I un conjunto. El *push-out* en $\mathfrak{C}$ de la familia de morfismos $f_i\colon X \longrightarrow X_i$, $i \in I$, es $(Y; \{\beta_i\})$ siendo Y un objeto de $\mathfrak{C}$ y $\beta_i\colon X_i \longrightarrow Y$, $i \in I$, morfismos tales que

$$\beta_i f_i = \beta_j f_j \quad \text{para todo } i, j \in I$$

con la propiedad universal de que para cualquier objeto Z y familia de morfismos $g_i\colon X_i \longrightarrow Z$, $i \in I$ tales que

$$g_i f_i = g_j f_j \quad \text{para todo } i, j \in I$$

existe un único morfismo $\xi\colon Y \longrightarrow Z$ tal que

$$\xi\beta_i = g_i \quad \text{para todo } i \in I$$

Por supuesto, con la relación que hemos establecido entre el push-out de una categoría $\mathfrak{C}$ y el copoducto en $\mathfrak{C}^X$ se pueden enunciar las proposiciones de la sección 2.2 en la categoría $\mathfrak{C}^X$ para obtener resultados equivalentes sobre el push-out de $\mathfrak{C}$. Por último, definiremos el concepto de conúcleo y enunciaremos los teoremas sobre el push-out en categorías con objeto cero que se corresponde con los duales del teorema 2.3.16 y el teorema 2.3.17:

Definición 2.4.8. Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathfrak{C}$. El *conúcleo* de f es el par (K, g) con $K \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y $g\colon B \longrightarrow K$ tal que

1. $gf = 0_{AK}$.

2. Si $h\colon B \longrightarrow C$ es un morfismo tal que $hf = 0_{AC}$ entonces existe un único morfismo $h'\colon K \longrightarrow C$ tal que $h = h'g$.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "0_{AK}"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddl, bend right, "0_{AC}"'] & \\
 & K \arrow[dl, dashed, "h'"] & B \arrow[l, "g"] \arrow[dll, bend left, "h"] \\
C & &
\end{tikzcd}
\tag{2.49}
$$

El conúcleo de un morfismo es la construcción universal opuesta de el núcleo de un morfismo. Esto quiere decir, que si definimos el núcleo de la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ obtenemos la definición de conúcleo.

Ejemplos 2.4.9.

1. En la categoría **Top***, los objetos cero eran los espacios topológicos de un elemento, $(\{x_0\}, x_0)$, y los morfismos cero son las aplicaciones constantes. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos objetos de **Top***. Sea $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ un morfismo de **Top***. El conúcleo de f es $((K, k_0), p)$, siendo K el espacio cociente obtenido de Y al reducir el conjunto $f(X)$ al punto k_0, y $p\colon (Y, y_0) \longrightarrow (K, k_0)$ la aplicación de paso al cociente. Veamos que cumple las dos propiedades del conúcleo de f.
   Componiendo los morfismos f y p, obtenemos que
   $$p(f(x)) = k_0 = 0_{XK}(x) \quad \text{para todo } x \in X$$
   luego cumple la primera propiedad. Veamos que también cumple la segunda. Sea $h\colon (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ un morfismo de **Top*** tal que $hf(x) = z_0$, para todo $x \in X$. Podemos definir el morfismo
   $$\begin{aligned} h'\colon (K, k_0) &\longrightarrow (Z, z_0) \\ [y] &\longmapsto h(y) \end{aligned}$$

Es un morfismo de **Top*** porque, como k_0 es el punto al que hemos reducido el subconjunto $f(X)$ y $hf(x) = z_0$, para todo $x \in X$, entonces $h'(k_0) = z_0$. Este es el único morfismo tal que $h = h'p$, porque si existiese otro morfismo $h''\colon (K, k_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ tal que $h = h''p$, entonces tendríamos que $h''(p(y)) = h'(p(y))$ para todo $y \in (Y, y_0)$. Como p es sobreyectiva por ser la aplicación de paso al cociente, para todo $k \in (K, k_0)$ existe un $y \in (Y, y_0)$ tal que $k = p(y)$. Entonces, $h''(k) = h''(p(y)) = h'(p(y)) = h(k)$, para todo $k \in (K, k_0)$, es decir, $h'' = h'$.

2. En la categoría **Ab**, el objeto cero es el grupo 0 que solo tiene el elemeto neutro. Sea $f\colon G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. El conúcleo de f es (K, g) siendo $K = H/f(G)$ y g el morfismo

$$\begin{aligned} g\colon H &\longrightarrow H/f(G) \\ x &\longmapsto x + f(G) \end{aligned}$$

Hemos elegido la categoría **Ab** en lugar de **Gr** porque, si H no es abeliano, para que esté bien definido $K = H/f(G)$ es necesario que $f(G)$ sea un subgrupo normal de H (esto es que para todo $g \in f(G)$, se tenga que $gHg^{-1} \subset H$). Como estamos trabajando con un homomorfismo $f\colon G \longrightarrow H$ arbitrario, no podemos asegurar que $f(G)$ sea normal. Sin embargo, todo subgrupo de un grupo abeliano es normal, y por tanto, trabajando en la categoría **Ab**, $K = H/f(G)$ siempre está bien definido. Veamos que cumple las dos propiedades del conúcleo de f. Como

$$g(f(x)) = f(x) + f(G) = 0 + f(G) = 0_{GK}(x) \quad \text{para todo } x \in G$$

(K, g) cumple la primera propiedad del conúcleo de f. Por otro lado, sea $h\colon H \longrightarrow J$ un homomorfismo de grupos tal que $hf = 0_{GJ}$. Entonces, $h(f(x)) = e_H$ para todo $x \in J$. Por lo tanto, está bien definido el homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} h'\colon H/f(G) &\longrightarrow J \\ x + f(G) &\longmapsto h(x) \end{aligned}$$

y es el único morfismo tal que $h = h'g$. Si hubiese otro morfismo $h''\colon H/f(G) \longrightarrow J$ con esta propiedad, como g es sobreyectiva, razonando como en ejemplo anterior deducimos fácilmente que tiene que ser $h'' = h'$.

Proposición 2.4.10. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sea $f\colon A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathfrak{C}$. Si (K, g) es el conúcleo de f entonces g es un epimorfismo.*

Demostración. Aplicando la proposición 2.3.15 a $\mathfrak{C}^{op}$ conseguimos el resultado que queríamos demostrar.

□

Teorema 2.4.11. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero. Sean $\varphi\colon X \longrightarrow A$, $\psi\colon X \longrightarrow B$ dos morfismos tales que existe su push-out $(Y; \alpha, \beta)$ en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si (J, μ) es el conúcleo de β, entonces $(J, \mu\alpha)$ es el conúcleo de φ.*
2. *Si (J, σ) es el conúcleo de φ, entonces el morfismo σ se puede factorizar como $\sigma = \mu\alpha$ siendo (J, μ) el conúcleo de β.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.3.16 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ para obtener este resultado.

□

Teorema 2.4.12. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y sean $\varphi\colon A \longrightarrow X$, $\psi\colon B \longrightarrow X$ dos morfismos tales que existe su pull-back $(Y; \alpha, \beta)$ en $\mathfrak{C}$. Entonces:*

1. *Si (K, λ) es el conúcleo de α, entonces $(K, \lambda\beta)$ es el núcleo de ψ.*
2. *Si (K, θ) es el conúcleo de ψ, entonces θ se puede factorizar como $\theta = \lambda\beta$ siendo (K, λ) el conúcleo de α.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.3.17 a la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ para obtener este resultado.

□

Capítulo 3

Funtores y transformaciones naturales

3.1. Funtores

En las categorías, podemos establecer relaciones entre diferentes objetos mediante los morfismos. Es natural pensar que también necesitamos una forma de relacionar unas categorías con otras. Para ello, tenemos los funtores entre dos categorías y los definimos de la siguiente forma:

Definición 3.1.1. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un *funtor* o *funtor covariante* $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ consiste en

I. Una asignación $F\colon \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$, que relaciona cada objeto A de $\mathfrak{C}$ con un objeto FA de $\mathfrak{D}$.

II. Aplicaciones $F\colon \mathfrak{C}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{D}(FA,FB)$ para todo $A,B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, que a cada morfismo $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ le asocia el morfismo $Ff \in \mathfrak{D}(FA,FB)$ tal que

$$F(fg) = (Ff)(Fg), \quad F(1_A) = 1_{FA} \tag{3.1}$$

Definición 3.1.2. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un *cofuntor* o *funtor contravariante* $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ consiste en

I. Una asignación $F\colon \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$, que relaciona cada objeto A de $\mathfrak{C}$ con un objeto FA de $\mathfrak{D}$.

II. Aplicaciones $F\colon \mathfrak{C}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{D}(FB,FA)$ para todo $A,B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$, que a cada morfismo $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ le asocia el morfismo $Ff \in \mathfrak{D}(FB,FA)$ tal que

$$F(fg) = (Fg)(Ff), \quad F(1_A) = 1_{FA} \tag{3.2}$$

La definición de cofuntor $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ se corresponde con la definición de funtor $F\colon \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathfrak{D}$, que tiene como salida la categoría opuesta de $\mathfrak{C}$, porque relaciona $\mathfrak{C}^{op}(A,B) = \mathfrak{C}(B,A)$ en $\mathfrak{D}(FA,FB)$ y

$$F(f * g) = F(gf) = (Fg)(Ff)$$

Veamos ahora que la composición de funtores está bien definida: si $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías y $F\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$, $G\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ son funtores, entonces la composición $GF\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{D}$ cumple que

$$\begin{aligned} GF(1_A) &= G(1_{FA}) = 1_{GF(A)} \\ GF(fg) &= G((Ff)(Fg)) = GF(f)GF(g) \end{aligned} \tag{3.3}$$

luego es un funtor covariante.
Como podemos observar, si F y G son ambos cofuntores, la composición $GF\colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un funtor, ya que

$$GF(fg) = G((Fg)(Ff)) = GF(f)GF(g) \tag{3.4}$$

Sin embargo, si alguno de los dos, F o G, es un funtor contravariante, la composición GF es también un funtor contravariante.

Ejemplos 3.1.3.

1. $\mathrm{Id}\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ (funtor identidad): dada una categoría $\mathfrak{C}$, podemos definir el funtor identidad tal que

$$\mathrm{Id}(X) = X, \quad \mathrm{Id}(f) = f$$

para todo $X, f \in \mathfrak{C}$.

2. $\pi_1\colon$ **Top*** $\longrightarrow$ **Gr** (funtor grupo fundamental): cada objeto (X, x_0) de **Top*** lo relaciona con su grupo fundamental relativo al punto base x_0, $\pi_1(X, x_0)$, que es el conjunto con las clases de homotecias de los caminos en X que empiezan y acaban en x_0.
A cada morfismo $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ de **Top*** le asocia el homomorfismo

$$\pi_1(f) = f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

siendo $f_*([h]) = [f \circ h]$.

3. $\mathrm{Abel}\colon$ **Gr** $\longrightarrow$ **Ab**. (funtor de abelianización): a cada grupo G se lo asocia con su grupo abelianizado G/G', el cociente entre G y su subgrupo conmutador, que es el subgrupo generado por los conmutadores

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} \quad a, b \in G$$

Dado un homomorfismo de grupos $f\colon G \longrightarrow H$, entonces podemos definir $\mathrm{Abel}(f)\colon G/G' \longrightarrow H/H'$ como $\mathrm{Abel}(f)(a+G') = f(a)+H'$. Está bien definido porque si $[a,b]$ es un conmutador de G, entonces,

$$f([a,b]) = f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1})f(b^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}f(b)^{-1}$$

Por tanto, $f(G') \subset H'$.

4. O: **Top** $\longrightarrow$ **S** (funtor olvido): asigna a cada espacio topológico X, el conjunto X sin la estructura de espacio topológico, y a cada aplicación continua de **Top** la misma aplicación pero sin tener en cuenta la propiedad de ser continua. También se pueden establecer funtores olvido entre otras categorías como O: **Ab** $\longrightarrow$ **Gr**, "olvidando" la propiedad de ser abeliano, o como O: **Top*** $\longrightarrow$ **Top**, enviando cada espacio topológico (X, x_0) en el propio espacio topológico X sin destacar ningún punto.

5. Gal: $\mathbf{Ext'}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow$ **Gr** (cofuntor de Galois): fijado el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los número racionales, una extensión F de $\mathbb{Q}$ se dice que es normal si es algebraica (lo que quiere decir que todo $\alpha \in F$ es raíz de algún polinomio no nulo de $\mathbb{Q}[x]$), y cualquier polinomio irreducible de $\mathbb{Q}[x]$ que tiene una raíz en F, tiene todas sus raíces en F. Consideramos la subcategoría plena $\mathbf{Ext'}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbf{Ext}_{\mathbb{Q}}$ cuyos objetos son las extensiones normales de $\mathbb{Q}$. El funtor contravariante Gal: $\mathbf{Ext'}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow$ **Gr** relaciona cada extensión normal F con su grupo de Galois, que es el conjunto

$$\mathrm{Gal}(F) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(F)\colon \alpha(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}\}$$

siendo $\mathrm{Aut}(F)$ el conjunto de los isomorfismos $\alpha\colon F \longrightarrow F$ (automorfismos de F), con la operación de composición. A cada morfismo $T : F \longrightarrow E$ entre extensiones de cuerpos le podemos asociar

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gal}(T)\colon \mathrm{Gal}(E) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(F) \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha|_F) \circ T \end{array}$$

Podemos ver $(\alpha|_F) \circ T$ como un automorfismo de $\mathrm{Gal}(F)$ porque, en primer lugar, como estamos trabajando con extensiones normales, para cada $\alpha \in \mathrm{Gal}(E)$ tenemos que si restringimos este automorfismo a una extensión normal E' de $\mathbb{Q}$ contenida en E, entonces $\alpha|_{E'} \in \mathrm{Gal}(E')$. Por tanto, la imagen del homomorfismo de anillos $\alpha \circ T : F \longrightarrow E$ está contenida en $T(F)$ porque $\alpha|_{T(F)} \in \mathrm{Gal}(T(F))$. Por otro lado, como T es inyectiva, podemos identificar $T(F)$ con F. Esto quiere decir que podemos ver $\alpha \circ T\colon F \longrightarrow E$ como el automorfismo $(\alpha|_F) \circ T \in \mathrm{Gal}(F)$.

6. Dual: $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}^{op}$: definimos el funtor Dual tal que para cada $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y $f \in \mathfrak{C}(A, B)$

$$\mathrm{Dual}(A) = A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}^{op}), \quad \mathrm{Dual}(f) = f \in \mathfrak{C}^{op}(B, A) \tag{3.5}$$

   Como vamos a observar a continuación, Dual es un funtor contravariante ya que

$$\mathrm{Dual}(fg) = g * f = \mathrm{Dual}(g)\mathrm{Dual}(f) \tag{3.6}$$

7. $*\colon EV_K \longrightarrow EV_K$: sea $V \in \mathrm{Obj}(EV_K)$. El espacio dual (algebraico) V^* de V es el conjunto de todas las funciones lineales $V \longrightarrow K$. Para cada morfismo $f\colon V \longrightarrow W$ se define su traspuesta como el morfismo $f^t\colon W^* \longrightarrow V^*$ tal que $f^t(\phi) = \phi \circ f$, para todo $\phi \in W^*$.
   Se puede definir el funtor contravariante $*\colon EV_K \longrightarrow EV_K$ que envía cada espacio vectorial V en su dual V^* y cada morfismo $f\colon V \longrightarrow W$ en su traspuesta $f^t\colon W^* \longrightarrow V^*$.
   También podemos definir el funtor $**\colon EV_F \longrightarrow EV_F$ envía cada espacio vectorial V en su bidual V^{**} (el dual de V^*, es decir,

$$V^{**} = \{f\colon V^* \longrightarrow K : f \text{ es lineal}\}$$

   y cada morfismo $f\colon V \longrightarrow W$ en el morfismo $f^{**}\colon V^{**} \longrightarrow W^{**}$ que es la traspuesta de f^t, es decir,

$$\begin{array}{rcl} f^{**}\colon V^{**} & \longrightarrow & W^{**} \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ f^t \end{array}$$

   siendo $\psi \circ f^t\colon W^* \longrightarrow K$ la aplicación tal que $(\psi \circ f^t)(\phi) = \psi(\phi \circ f)$, para todo $\phi \in W^*$.

8. Consideramos una categoría $\mathfrak{C}$. Fijamos $A \in \mathfrak{C}$ y $f \in \mathfrak{C}(B, C)$. Entonces podemos definir una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C}(A, f)\colon \mathfrak{C}(A, B) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(A, C) \\ g & \longmapsto & fg \end{array} \tag{3.7}$$

   y otra aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{C}(f, A)\colon \mathfrak{C}(C, A) & \longrightarrow & \mathfrak{C}(B, A) \\ h & \longmapsto & hf \end{array} \tag{3.8}$$

$\mathfrak{C}(A,-)\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{S}$ definido de forma que a cada $B \in \mathfrak{C}$ y $f \in \mathfrak{C}(B,C)$ le asocia

$$\begin{array}{ccc} B & \longmapsto & \mathfrak{C}(A,B) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S}) \\ f & \longmapsto & \mathfrak{C}(A,f) \end{array} \tag{3.9}$$

es un funtor covariante. Para demostrarlo, veamos que $\mathfrak{C}(A,-)$ que cumple las dos propiedades de (3.1):
Sean $f \in \mathfrak{C}(B,C)$ y $g \in \mathfrak{C}(C,D)$ dos morfismos. Sea $h \in \mathfrak{C}(A,B)$ otro morfismo de $\mathfrak{C}$. Tenemos que

$$\mathfrak{C}(A,gf)(h) = (gf)h = g(fh) = \mathfrak{C}(A,g)\mathfrak{C}(A,f)(h)$$

Por tanto, $\mathfrak{C}(A,gf) = \mathfrak{C}(A,g)\mathfrak{C}(A,f)$.
Por otro lado, $\mathfrak{C}(A,1_B)(h) = 1_B h = h = 1_{\mathfrak{C}(A,B)}(h)$ lo que implica que $\mathfrak{C}(A,1_B) = 1_{\mathfrak{C}(A,B)}$. Podemos concluir que $\mathfrak{C}(A,-)$ está bien definido.

También tenemos que $\mathfrak{C}(-,A)\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{S}$ que envía

$$\begin{array}{ccc} B & \longmapsto & \mathfrak{C}(B,A) \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{S}) \\ f & \longmapsto & \mathfrak{C}(f,A) \end{array} \tag{3.10}$$

es un funtor contravariante. Este cofuntor se puede ver también como el funtor $\mathfrak{C}(A,-)\colon \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{S}$, luego también está bien definido.

Para algunas categorías $\mathfrak{C}$, podemos considerar la llegada de los funtores $\mathfrak{C}(A,-)$ y $\mathfrak{C}(-,A)$ a otra categoría que no sea $\mathbf{S}$. Por ejemplo, podemos definir el funtor $\mathrm{EV}_K(U,-)\colon \mathrm{EV}_K \longrightarrow \mathrm{EV}_K$, con llegada en la categoría de los espacios vectoriales, porque el conjunto $\mathrm{EV}_K(U,V)$ de aplicaciones entre espacios vectoriales, forma también un espacio vectorial. Por tanto, si el funtor $\mathrm{EV}_K(U,-)\colon \mathrm{EV}_K \longrightarrow \mathrm{EV}_K$ es aquel que asocia

$$\begin{array}{ccc} V & \longmapsto & \mathrm{EV}_K(U,V) \\ f & \longmapsto & \mathrm{EV}_K(U,f) \end{array} \tag{3.11}$$

está bien definido porque $\mathrm{EV}_K(U,V) \in \mathrm{Obj}(\mathrm{EV}_K)$ y $\mathrm{EV}_K(U,f)$ es un morfismo entre espacios vectoriales.

3.2. Transformaciones naturales

Ya podemos relacionar unos objetos con otros en una categoría utilizando morfismos y pasar de una categoría a otra con funtores. Ahora, desarollaremos la idea de transformar un funtor en otro mediante las transformaciones naturales.

Definición 3.2.1. Sean F y G dos funtores covariantes de la categoría $\mathfrak{C}$ en la categoría $\mathfrak{D}$. Una *transformación natural* $t\colon F \longrightarrow G$ es una relación que a cada objeto X de $\mathfrak{C}$ le asigna un morfismo $t_X\colon FX \longrightarrow GX$ en $\mathfrak{D}$ tal que para cualquier morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{C}$ se tiene que $t_Y Ff = Gf t_X$, es decir, el siguente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"] & GY \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Si F y G fuesen funtores contravariantes, debe cumplir que para cualquier morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{C}$ se tiene $t_X Ff = Gf t_Y$, es decir, el siguente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FY \arrow[r, "t_Y"] \arrow[d, "Ff"'] & GY \arrow[d, "Gf"] \\ FX \arrow[r, "t_X"] & GX \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

Si t_X es un isomorfismo para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ entonces decimos que $t\colon F \longrightarrow G$ es una *equivalencia natural*, y escribimos $F \cong G$. Implica que la transformación natural $t^{-1}\colon F \longrightarrow G$ dada por $t_X^{-1} = (t_X)^{-1}$ es también una equivalencia natural. En el caso de que existe una equivalencia natural entre dos funtores diremos que son *naturalmente isomorfos*.

Podemos definir la composición de transformaciones naturales: si tenemos tres funtores F, G y H, y dos transformaciones naturales $t\colon F \longrightarrow G$, $u\colon G \longrightarrow H$, la composición $ut\colon F \longrightarrow H$ dada por $(ut)_X = (u_X)(t_X)$ es una transformación natural porque

$$Hf(ut)_X = (Hfu_X)(t_X) = u_Y(Gft_X) = (u_Y)(t_Y)Ff = (ut)_Y Ff \tag{3.14}$$

lo que implica que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "Gf"] & HX \arrow[d, "Hf"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"'] & GY \arrow[r, "u_Y"'] & HY \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

Si F, G y H fuesen funtores contravariantes, la composición $ut\colon F \longrightarrow H$ también estaría bien definida ya que

$$Hf(ut)_Y = (Hfu_y)(t_Y) = u_X(Gft_Y) = (u_X)(t_X)Ff = (ut)_X Ff \tag{3.16}$$

Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, podríamos pensar que se puede formar una categoría que tiene como objetos los funtores entre estas dos categorías y como morfismos las transformaciones naturales entre dos funtores con esta composición. El problema está en que no podemos asegurar que

$$\{t\colon F \longrightarrow G : t \text{ es transformación natural}\} \tag{3.17}$$

sea un conjunto. Si $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ es un conjunto y para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ definimos el conjunto $\mathrm{Mor}(X)$ formado por todos los morfismos $f : FX \longrightarrow GX$, entonces el producto cartesiano $\prod_{X\in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})} \mathrm{Mor}(X)$ es un conjunto. Como una transformación natural $t\colon F \longrightarrow G$ es una familia de morfismos $\{t_X\}_{X\in\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})}$, se puede ver como un elemento de $\prod_{X\in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})} \mathrm{Mor}(X)$, es decir, (3.17) está contenido en $\prod_{X\in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})} \mathrm{Mor}(X)$ que es un conjunto, y por tanto, es también un conjunto . Si $\mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ es un conjunto, diremos que $\mathfrak{C}$ es *pequeña* y entonces estaría bien definida la categoría cuyos objetos son los funtores $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales cuando $\mathfrak{C}$ es pequeña. En los casos en los que exista esta categoría de funtores, la denotamos $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ y denotamos $\mathrm{Nat}(F, G)$ al conjunto de todas las transformaciones naturales de F en G.

Ejemplos 3.2.2.

1. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Para cualquier funtor $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$, podemos definir la transformación natural $t\colon F \longrightarrow F$ tal que, para cada $X \in \mathfrak{C}$, $t_X = 1_{FX}\colon FX \longrightarrow FX$.

2. Consideramos los funtores $\mathrm{Id}\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Gr}$ y $\mathrm{Abel}\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{Ab}$. Definimos la transformación natural $t\colon \mathrm{Id} \longrightarrow \mathrm{Abel}$ tal que para cada grupo G, $t_G\colon G \longrightarrow G/G'$ envía cada $x \in G$ en su clase $x + G' \in G/G'$. Estos morfismos hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "t_G"] \arrow[d, "\mathrm{Id}(f)"'] & G/G' \arrow[d, "\mathrm{Abel}(f)"] \\ H \arrow[r, "t_H"] & H/H' \end{tikzcd}$$

conmute: para $x \in G$,

$$(t_H)\mathrm{Id}(f)(x) = t_H(f(x)) = f(x){+}H' = \mathrm{Abel}(f)(x{+}G') = \mathrm{Abel}(f)(t_G)(x)$$

3. Sea K un cuerpo y EV_K la categoría de los espacios vectoriales sobre K. Definimos para cada $V \in EV_K$ el morfismo

$$\begin{aligned} t_V\colon V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

siendo $\tilde{v}\colon V^* \longrightarrow K$ el morfismo tal que $\tilde{v}(\phi) = \phi(v)$, para todo morfismo $\phi \in V^*$. Veamos que esta familia de morfismos define una transformación natural $t\colon \mathrm{Id} \longrightarrow **$. Para ello tenemos que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "t_V"] \arrow[d, "\mathrm{Id}(f)"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ W \arrow[r, "t_W"] & W^{**} \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

conmuta para $f\colon V \longrightarrow W$. Sea $v \in V$. Entonces,

$$\begin{aligned} (t_W)Id(f)(v) &= t_W(f(v)) = \widetilde{f(v)} \\ f^{**}(t_W)(v) &= f^{**}(\tilde{v}) = \tilde{v} \circ f^t \end{aligned}$$

Para cada $\phi \in W^*$, $(\tilde{v} \circ f^t)(\phi) = \tilde{v}(\phi \circ f) = \phi(f(v)) = \widetilde{f(v)}(\phi)$. Por tanto, $\widetilde{f(v)} = \tilde{v} \circ f^t$ y queda probado que el diagrama (3.18) conmuta. Si en vez de la categoría EV_K hubiesemos considerado la subcategoría plena EV'_K de EV_K cuyos objetos son los espacios vectoriales sobre K de dimesión finita, entonces es un resultado conocido que los morfismos

$$\begin{aligned} t_V\colon V &\longrightarrow V^{**} \\ v &\longmapsto \tilde{v} \end{aligned}$$

son isomorfismo. Por tanto, en este caso, la transformación natural $t : Id \longrightarrow **$ es una equivalencia natural.

3.3. Funtores representables

Dedicaremos esta sección a definir el concepto de funtor representable y dar algún ejemplo. Con estas definiciones y el lema de Yoneda, que demostraremos en la siguiente sección, concluimos el trabajo.

Definición 3.3.1. Decimos que el funtor $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un *funtor representable* si existe una equivalencia natural entre F y $\mathfrak{C}(A, -)$ para algún $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$. Se dice que F está representado por A.

El funtor $\mathfrak{C}(A, -)$ es el que hemos definido en el último ejemplo de la sección de funtores. Normalmente, este funtor tiene llegada en la categoría $\mathbf{S}$. Esto quiere decir que para que $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ sea naturalmente isomorfo a $\mathfrak{C}(A, -)$ debería ser $\mathfrak{D} = \mathbf{S}$, pero vimos que también puede estar bien definido si tiene llegada en otras categorías.

Como un cofuntor $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es el funtor $F\colon \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathfrak{D}$, y sabemos que $\mathfrak{C}(-,A)\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{S}$ es el funtor $\mathfrak{C}(A,-)\colon \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{S}$, de forma análoga, podemos definir cofuntor representable:

Definición 3.3.2. Decimos que el cofuntor $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es un *cofuntor representable* si existe una equivalencia natural entre F y $\mathfrak{C}(-,A)$ para algún $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$.

Ejemplos 3.3.3.

1. El funtor olvido $O\colon \mathbf{Gr} \longrightarrow \mathbf{S}$ es un funtor representable y está representado por el grupo $\mathbb{Z}$. Para probarlo, veremos que la transformación natural $t\colon \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},-) \longrightarrow O$ tal que, para cada $G \in \mathbf{Gr}$,

$$\begin{aligned} t_G\colon \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},G) &\longrightarrow OG \\ \phi &\longmapsto \phi(1) \end{aligned}$$

es una equivalencia natural. En primer lugar, veamos que es una transformación natural. Para ello probaremos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},G) \arrow[r, "t_G"] \arrow[d, "\mathbf{Gr}(\mathbb{Z},f)"'] & OG \arrow[d, "O(f)"] \\ \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},H) \arrow[r, "t_H"] & OH \end{tikzcd}$$

conmuta para cada homomorfismo $f\colon G \longrightarrow H$. Sea $\phi \in \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},G)$. Tenemos que

$$t_H\mathbf{Gr}(\mathbb{Z},f)(\phi) = t_H(f\phi) = f\phi(1) = f(t_G(\phi))$$

luego t es una transformación natural. Veamos ahora que para cada grupo G el morfismo t_G es un isomorfismo. Como $\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico generado por 1, cada homomorfismo $\phi \in \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},G)$ está determinado por $\phi(1) \in O(G)$. Por tanto, para cada $g \in O(G)$ existe un único homomorfismo $\phi \in \mathbf{Gr}(\mathbb{Z},G)$ tal que $\phi(1) = g$ (si existiesen dos morfismo, ϕ ψ que lo cumplen, entonces $\phi(1) = g = \psi(1)$ luego $\phi = \psi$). Por tanto, el morfismo t_G es una biyección entre conjuntos que implica que es un isomorfismo.

3.4. Lema de Yoneda

En esta sección vamos a demostrar uno de los resultados más importantes de la teoría de categorías. Tiene como precedente el teorema de Cayley de teoría de grupos, que dice que todo grupo es isomorfo a un grupo de permutaciones de algún conjunto.

Lema 3.4.1 (Lema de Yoneda)**.** *Sea* $\mathfrak{C}$ *una categoría. Sea* $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{S}$ *un funtor y sea* $A \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$*. Consideramos el funtor* $\mathfrak{C}(A,-)\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathbf{S}$*. Entonces, el morfismo*

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),F) & \longrightarrow & FA \\ t & \longmapsto & t_A(1_A) \end{array} \tag{3.19}$$

es un isomorfismo entre el conjunto $\mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),F)$ *de las transformaciones naturales de* $\mathfrak{C}(A,-)$ *en* F *y el conjunto* FA*.*

Demostración. Queremos ver que la aplicación de (3.19) es un isomorfismo entre dos conjuntos, por tanto tenemos que ver que es biyectiva.
Primero probaremos la inyectividad: sea t una transformación natural. Queremos probar que t está únicamente determinada por $t_A(1_A) \in FA$. Sea $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ y $f\colon A \longrightarrow B$. Como t es una transformación natural, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,A) \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,f)"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ \mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, "t_B"] & FB \end{tikzcd}$$

luego $t_B(f) = t_B(f1_A) = t_B(\mathfrak{C}(A,f)(1_A)) = Ff(t_A(1_A))$, lo que prueba que Φ es inyectiva porque si exisitiese otra transformación natural u tal que $u_A(1_A) = t_A(1_A)$ entonces $u_B(f) = Ff(u_A(1_A)) = Ff(t_A(1_A)) = t_B(f)$ para todo $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ lo que implica que $u = t$.
Para probar la sobreyectividad, queremos ver que para cada $x \in FA$ existe una transformación natural $t\colon \mathfrak{C}(A,-) \longrightarrow F$ tal que $\Phi(t) = t_A(1_A) = x$. Por tanto, para cada $x \in FA$ definimos

$$\begin{array}{rcl} t_B\colon \mathfrak{C}(A,B) & \longrightarrow & FB \\ f & \longmapsto & (Ff)(x) \end{array} \tag{3.20}$$

para cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$. Es claro que $t_A(1_A) = (F1_A)(x) = 1_{FA}(x) = x$. Veamos que define una transformación natural. Sea $g\colon B \longrightarrow C$ y queremos ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(A,B) \arrow[r, "t_B"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,g)"'] & FB \arrow[d, "Fg"] \\ \mathfrak{C}(A,C) \arrow[r, "t_C"] & FC \end{tikzcd}$$

Para cada $f \in \mathfrak{C}(A,B)$ tenemos que

$$(t_C)\mathfrak{C}(A,g)(f) = (t_C)(gf) = (Fgf)(x) = (Fg)(Ff)(x) = Fg(t_B)(f)$$

Por tanto, t es una transformación natural y queda probado que Φ es sobreyectiva.
El isomorfismo Φ^{-1}, la inversa de Φ, es

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1}\colon FA & \longrightarrow & \mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),FA) \\ x & \longmapsto & t^x \end{array} \tag{3.21}$$

siendo t^x la transformación natural definida en (3.20).

□

Corolario 3.4.2. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y sean A, A' objetos de $\mathfrak{C}$. Hay un isomorfismo*

$$\Psi\colon \mathfrak{C}(A',A) \longrightarrow \mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),\mathfrak{C}(A',-)) \tag{3.22}$$

definido por

$$\Psi(f) = f^*, \quad f \in \mathfrak{C}(A',A) \tag{3.23}$$

siendo $f^*\colon \mathfrak{C}(A,-) \longrightarrow \mathfrak{C}(A',-)$ la transformación natural definida como $f^*_B = \mathfrak{C}(f,B)$ para todo $B \in \mathfrak{C}$.

Demostración. Aplicando el lema de Yoneda al funtor $F = \mathfrak{C}(A',-)$ obtenemos el isomorfismo

$$\Phi\colon \mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),\mathfrak{C}(A',-)) \longrightarrow FA = \mathfrak{C}(A',A)$$

siendo $\Phi(t) = t_A(1_A)$. Vimos en la demostración anterior que la inversa de Φ es

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{-1}\colon FA = \mathfrak{C}(A',A) & \longrightarrow & \mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),\mathfrak{C}(A',-)) \\ f & \longmapsto & t^f \end{array}$$

siendo t^f la transformación natural definida para cada $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ como en (3.20). Por tanto, para cada morfismo $g \in \mathfrak{C}(A,B)$, tenemos que

$$t^f_B(g) = (Fg)(f) = \mathfrak{C}(A',g)(f) = gf = \mathfrak{C}(f,B)(g)$$

Luego $t^f_B = \mathfrak{C}(f,B)$. Por tanto, en este caso el isomorfismo $f \longmapsto t^f$ es igual a $f \longmapsto f^*$, es decir, $\Psi = \Phi^{-1}$.

□

Proposición 3.4.3. *Sean* $t\colon \mathfrak{C}(A,-) \longrightarrow \mathfrak{C}(A',-)$, $t'\colon \mathfrak{C}(A',-) \longrightarrow \mathfrak{C}(A'',-)$ *dos transformaciones naturales tal que*

$$\Phi(t) = f,\ \Phi(t') = f' \quad \textit{con } f \in \mathfrak{C}(A',A),\ f' \in \mathfrak{C}(A'',A') \tag{3.24}$$

siendo Φ *el isomorfismo de (3.19). Entonces,* $\Phi(t't) = ff'$.
En particular, t *es una equivalencia natural si y solo si* f *es un isomorfismo.*

Demostración. Como $\Phi(t) = f$, por el corolario anterior,

$$t = \Psi(\Phi(t)) = \Psi(f) = f^*$$

luego $t_B = \mathfrak{C}(f,B)$ para cada $B \in \mathfrak{C}$. De la misma forma, $t'_B = \mathfrak{C}(f',B)$ para cada $B \in \mathfrak{C}$. Por tanto,

$$(t't)_B = (t'_B)(t_B) = \mathfrak{C}(f',B)\mathfrak{C}(f,B) = \mathfrak{C}(ff',B) \tag{3.25}$$

para cada $B \in \mathfrak{C}$, lo que implica que $t't = (ff')^* = \Psi(ff')$, luego tenemos que $\Phi(t't) = \Phi(\Psi(ff')) = ff'$.
Si f es un isomorfismo, en particular, si $A'' = A$ y $f' = f^{-1}$, entonces, por (3.25),

$$(t'_B)(t_B) = (t't)_B = \mathfrak{C}(ff^{-1},B) = \mathfrak{C}(1_A,B) = 1_{\mathfrak{C}(A,B)}$$

y también

$$(t_B)(t'_B) = (tt')_B = \mathfrak{C}(f^{-1}f,B) = \mathfrak{C}(1_{A'},B) = 1_{\mathfrak{C}(A',B)}$$

Lo que implica que t_B es un isomorfismo para todo $B \in \mathfrak{C}$, es decir, t es una equivalencia natural.
Recíprocamente, si $t\colon \mathfrak{C}(A,-) \longrightarrow \mathfrak{C}(A',-)$ es una equivalencia natural, tal que $\Phi(t) = f$ y consideramos si inversa $t^{-1}\colon \mathfrak{C}(A',-) \longrightarrow \mathfrak{C}(A,-)$ con $\Phi(t^{-1}) = f'$, entonces $1_{\mathfrak{C}(A,B)} = (t_B^{-1})(t_B) = (t^{-1}t)_B = \mathfrak{C}(ff',B)$ luego $ff' = 1_A$ por la unicidad del morfismo identidad.
De la misma forma, $1_{\mathfrak{C}(A',B)} = (t_B)(t_B^{-1}) = (tt^{-1})_B = \mathfrak{C}(f'f,B)$ lo que implica que $f'f = 1'_A$. Por tanto, f es un isomorfismo.

□

Para finalizar el trabajo, demostraremos un importante corolario del lema de Yoneda: la inmersión de Yoneda. Gracias a este resultado, podemos identificar cada categoría $\mathfrak{C}^{op}$ como una subcategoría plena de $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C},\mathbf{S})$.

Definición 3.4.4. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías y $F\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un funtor. Diremos que F es

1. *pleno* si para todo $A, B \in \mathfrak{C}$ la aplicación $F\colon \mathfrak{C}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{D}(FA,FB)$ es sobreyectiva.

2. *fiel* si para todo $A, B \in \mathfrak{C}$ la aplicación $F\colon \mathfrak{C}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{D}(FA,FB)$ es inyectiva.

3. *inmersión* si F es pleno y fiel, es decir, si para todo $A, B \in \mathfrak{C}$ la aplicación $F\colon \mathfrak{C}(A,B) \longrightarrow \mathfrak{D}(FA,FB)$ es biyectiva, y la asignación entre objetos $F\colon \mathrm{Obj}(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathrm{Obj}(\mathfrak{D})$ es inyectiva.

Corolario 3.4.5 (Inmersión de Yoneda)**.** *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría (pequeña). Entonces, el funtor*

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathfrak{C}^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Fun}(\mathfrak{C},\mathbf{S}) \\ A & \longmapsto & \mathfrak{C}(A,-) \\ f & \longmapsto & f^* \end{array} \tag{3.26}$$

es una inmersión, siendo f^* la transformación natural definida en el corolario 3.4.2 y $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C},\mathbf{S})$ *la categoría de los funtores y las transformaciones naturales.*

Demostración. Por el corolario 3.4.2, la aplicación $f \longmapsto f^*$ es una biyección para cada $f \in \mathfrak{C}(A',A) = \mathfrak{C}^{op}(A,A')$, luego F es pleno y fiel.
Veamos entonces que la asignación $A \longmapsto \mathfrak{C}(A,-)$ es inyectiva. Sean A, $B \in \mathrm{Obj}(\mathfrak{C})$ tales que $F(A) = F(B)$, es decir, $\mathfrak{C}(A,-) = \mathfrak{C}(B,-)$. Entonces, en particular, $\mathfrak{C}(A,-)(A) = \mathfrak{C}(B,-)(A)$, es decir, $\mathfrak{C}(A,A) = \mathfrak{C}(B,A)$. Por el primer axioma de la definición de categoría, tiene que ser $A = B$.

□

Con este corolario, como el funtor F es una inmersión de $\mathfrak{C}^{op}$ en $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C},\mathbf{S})$, podemos afirmar que $F(\mathfrak{C}^{op})$ es una subcategoría plena de $\mathrm{Fun}(\mathfrak{C},\mathbf{S})$: sus objetos son los funtores $\mathfrak{C}(A,-)$, siendo A objeto de $\mathfrak{C}$, y cada conjunto $F(\mathfrak{C}^{op}(A,A'))$ está en biyección con $\mathrm{Nat}(\mathfrak{C}(A,-),\mathfrak{C}(A',-))$.

Bibliografía

[1] Alexey Beshenov. *Introducción al lenguaje funtorial*. Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018.

[2] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Reprint of the 1980 Edition. Ed. Springer.

[3] P.J. Hilton, U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra*. Second Edition 1997. Ed. Springer.

[4] P.J. Hilton, U. Stammbach. *A Course in the theory of Groups*. Second Edition 1996. Ed. Springer.

[5] James R. Munkres. *Topology*. 2º Ed. 2000, Prentice Hall, Inc.

[6] Bodo Pareigis. University of Munich, Germany. *Categories and functors*. 1970. Ed. Academic Press.