

## RELACIONES $\varepsilon$ -NTU PARA INTERCAMBIADORES DE PLACAS CON MÚLTIPLES PASOS Y NÚMERO REDUCIDO DE PLACAS

FERNÁNDEZ TORRIJOS, María <sup>(1)</sup>; SOBRINO, Celia <sup>(1)</sup>

ALMENDROS-IBÁÑEZ, José A. <sup>(2,3)</sup>; SANTANA, Domingo <sup>(1)</sup>

ftorrijo@ing.uc3m.es

<sup>(1)</sup> Universidad Carlos III de Madrid, Escuela Politécnica Superior

<sup>(2)</sup> Universidad de Castilla-La Mancha, Escuela de Ingenieros Industriales de Albacete

<sup>(3)</sup> Instituto de Investigación en Energías Renovables, Sección de Solar y Eficiencia Energética

### RESUMEN

Los intercambiadores de placas presentan varias ventajas: alta compacidad, bajo ensuciamiento, altos coeficientes de transferencia de calor y alta flexibilidad. Dentro de esta última ventaja, destaca su capacidad para poder adaptar flujos con grandes diferencias de capacidades caloríficas y/o pérdidas de carga admisibles mediante configuraciones donde uno de los fluidos (el de mayor caudal o calor específico y/o menor pérdida de carga) debe realizar múltiples pasos en el intercambiador para acomodar la pérdida de carga admisible o para aumentar el coeficiente global de transferencia de calor.

Cuando uno de los fluidos realiza varios pasos, el intercambiador se puede analizar como una serie de intercambiadores de flujo en contracorriente y de flujo paralelo alternos. Desde este punto de vista, Kandilkar y Shah [1,2] obtuvieron relaciones entre la eficiencia térmica  $P_1 = \Delta T_1 / (T_{ce} - T_{fe})$  y  $NTU_1 = UA / C_1$  y la relación de capacidades caloríficas  $R_1 = C_1 / C_2$ . Este método presenta un inconveniente de cara al cálculo de un intercambiador con herramientas informáticas, ya que existen diferentes expresiones en función del número de pasos del intercambiador. Además, para un número reducido de placas, la solución propuesta se presenta en forma de tablas y no de ecuaciones algebraicas.

En este trabajo se obtiene la expresión algebraica de un intercambiador de placas en configuración 1 paso – N pasos mediante el método  $\varepsilon$ -NTU, donde el parámetro NTU se define con la capacidad calorífica mínima, lo que lo hace más adecuado para los cálculos. Además se presenta una corrección de la solución analítica, en función del número de placas, para un número de placas reducido en diferentes configuraciones.

## 1. Introducción

En la actualidad, se suele utilizar el método  $\varepsilon$ -NTU para la resolución de intercambiadores de calor, para lo cual es necesario disponer de expresiones que relacionen la eficiencia ( $\varepsilon$ ) con el número de unidades de transferencia de calor (NTU) y la relación de capacidades caloríficas ( $C^*=C_{\text{mín}}/C_{\text{máx}}$ ). En la bibliografía actual disponemos de estas expresiones para el caso de un intercambiador de placas en configuración 1 paso - 1 paso en contracorriente y en paralelo, mientras que para múltiples pasos existen métodos basados en intercambiadores en serie que proporcionan ecuaciones diferentes en función del número de pasos que realiza el fluido [1]. Sin embargo, en un problema de diseño de un intercambiador de placas es necesario un proceso iterativo en el que hay que suponer inicialmente un número de pasos, por lo que es necesario especificar las diferentes ecuaciones de la eficiencia dependiendo del número de pasos que realiza el fluido. En este trabajo se obtiene una expresión genérica de la eficiencia en función de NTU y  $C^*$ , válida para cualquier número de pasos, para aquellos intercambiadores con un número elevado de placas.

La eficiencia de un intercambiador con un número reducido de placas no sólo depende de NTU y  $C^*$ , sino que también es función del número de placas ( $N_p$ ). En la bibliografía actual disponemos de tablas, como las que aparecen en el trabajo de Kadlikar and Shah [2], que proporcionan el valor del factor corrector del incremento de temperaturas logarítmico medio F en función del número de placas, la relación de capacidades caloríficas ( $R_1=C_1/C_2$ ),  $NTU_1=UA/C_1$  y la eficiencia térmica ( $P_1=\Delta T_1/(T_{ce}-T_{fe})$ ). En un proceso de diseño de un intercambiador de placas, a priori no conocemos el número de placas del intercambiador, por lo que es necesario realizar un proceso iterativo mediante un programa informático, que puede resultar muy tedioso utilizando las tablas mencionadas en dicho proceso. En este trabajo se ha obtenido una expresión que relaciona  $\varepsilon$  con el número de unidades de transferencia de calor total (NTU), la relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ), y el número de placas, de forma que sea posible el diseño de un intercambiador con un número reducido de placas sin necesidad de recurrir a las tablas disponibles en la bibliografía.

## 2. Eficiencia de un intercambiador de placas en configuración 1 paso - N pasos con un número de placas elevado.

A continuación, se presenta el método utilizado para obtener las expresiones analíticas de la eficiencia en función de NTU y  $C^*$  para un intercambiador 1 paso - N pasos con un número de placas elevado. Desarrollaremos el proceso para un intercambiador 1 paso - 2 pasos, para posteriormente generalizarlo a intercambiadores 1 paso - N pasos.

Para obtener la expresión de la eficiencia en un intercambiador 1 paso - 2 pasos, debemos estudiar la configuración de dos intercambiadores en serie: el primero de ellos (que se corresponde con la primera mitad del intercambiador) en contracorriente, y el segundo en paralelo. Para llevar a cabo el análisis, haremos las siguientes suposiciones:

- el número de placas es elevado, por lo que la influencia de la primera y la última placa son despreciables,
- el flujo másico del fluido que hace un paso se divide por igual en cada paso ( $m_1=m_2$ ),
- los coeficientes globales de transferencia de calor son iguales ( $U_1=U_2$ ) y
- las áreas de intercambio son iguales en cada paso ( $A_1=A_2$ ),

donde el subíndice 1 se refiere al primer paso (que supondremos en contracorriente) y el subíndice 2 al segundo paso (en paralelo).

Como consecuencia de las suposiciones anteriores se cumple que  $C_1^*=C_2^*$  y  $NTU_1=NTU_2$ , de forma que podemos relacionar  $C_1^*$  y  $NTU_1$ , que son las de cada paso, con las globales del intercambiador  $C^*$  y NTU. Puesto que la potencia total del intercambiador es la suma de las potencias de cada paso (el primero en contracorriente y el segundo en paralelo), podemos expresar la eficiencia total del intercambiador como una combinación de las eficiencias de cada paso, que a su vez están

expresadas en función de  $C^*$  y NTU globales. Se han obtenido diferentes expresiones, tanto de la eficiencia global del intercambiador, como de las eficiencias de los pasos en contracorriente y paralelo, en función de si el fluido de capacidad calorífica mínima realiza uno o dos pasos, que se resumen en la Tabla 1. A continuación se enumeran los diferentes casos obtenidos:

- 1) La capacidad calorífica mínima es la del fluido que hace un paso
- 2) La capacidad calorífica mínima es la del fluido que hace dos pasos (de forma general, el fluido que realiza N pasos)

En este caso, tenemos tres posibilidades:

2.1) La relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ) es menor que 0.5 (de forma general, menor que  $1/N_{pa}$ , siendo  $N_{pa}$  el número de pasos)

2.2) La relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ) es mayor que 0.5 (de forma general, mayor que  $1/N_{pa}$ )

2.3) La relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ) es igual a 0.5 (de forma general, igual a  $1/N_{pa}$ )

	Eficiencia total	Eficiencia pasos en contracorriente	Eficiencia pasos en paralelo
(1)	$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2} \left(1 - C^* \frac{\varepsilon_1}{2}\right)$	$\varepsilon_1 = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{C^*}{N_{pa}}(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}$	$\varepsilon_2 = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{C^*}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}$
(2.1)	$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2(1 - \varepsilon_1)$	$\varepsilon_1 = \frac{1 - \exp[-\frac{NTU}{N_{pa}}(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{C^*}{N_{pa}}(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}$	$\varepsilon_2 = \frac{1 - \exp[-\frac{1}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{1}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}$
(2.2)	$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2C^*} + \frac{\varepsilon_2}{2C^*} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2C^*}\right)$	$\varepsilon_1 = \frac{1 - \exp[-\frac{NTU}{N_{pa}}(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{C^*}{N_{pa}}(1 - \frac{1}{N_{pa}})]}$	$\varepsilon_2 = \frac{1 - \exp[-\frac{1}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}{1 - \exp[-\frac{1}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}$
(2.3)	$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2(1 - \varepsilon_1)$	$\varepsilon_1 = \frac{NTU}{N_{pa} + NTU}$	$\varepsilon_2 = \frac{1 - \exp[-\frac{1}{N_{pa}}(1 + \frac{1}{N_{pa}})]}{1 + N_{pa}C^*}$

Tabla 1. Expresiones para la eficiencia global del intercambiador, así como para la eficiencia de los pasos en contracorriente y en paralelo, para la configuración 1 paso – 2 pasos ( $N_{pa}=2$ ).

Si extrapolamos las expresiones anteriores de la eficiencia para un intercambiador 1 paso - N pasos, obtenemos la siguiente expresión para la eficiencia global del intercambiador:

$$\varepsilon_{Npasos} = \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \frac{\varepsilon_{i_1}}{\alpha} - \frac{\beta}{2! \alpha^2} \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \sum_{i_2=1}^{N_{pa}} \varepsilon_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} + \frac{\beta^2}{3! \alpha^3} \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \sum_{i_2=1}^{N_{pa}} \sum_{i_3=1}^{N_{pa}} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \delta_{i_1 i_2 i_3} - \frac{\beta^3}{4! \alpha^4} \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \sum_{i_2=1}^{N_{pa}} \sum_{i_3=1}^{N_{pa}} \sum_{i_4=1}^{N_{pa}} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4} \delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} + \dots \tag{1}$$

$$\delta_{i_1 \dots i_4} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 \dots i_4 \text{ son distintos} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_4} = \prod_{x=i_1}^{i_4} \varepsilon_x$$

A continuación se presenta la expresión anterior expresada de forma compacta:

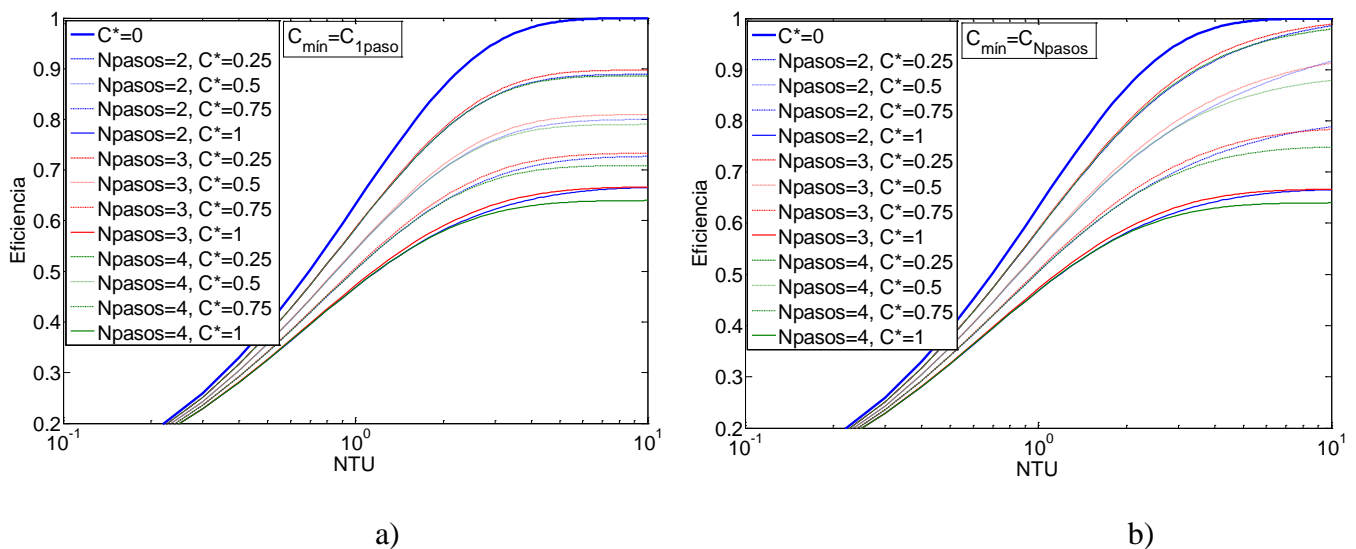
$$\varepsilon_{Npasos} = \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \frac{\varepsilon_{i_1}}{\alpha} + \sum_{a=2}^{N_{pa}} \left( \frac{(-\beta)^{a-1}}{a! \alpha^a} \sum_{i_1=1}^{N_{pa}} \dots \sum_{i_a=1}^{N_{pa}} \varepsilon_{i_1 \dots i_a} \delta_{i_1 \dots i_a} \right) \tag{2}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son unas constantes cuyo valor depende de los diferentes casos enumerados anteriormente. En la Tabla 2 se muestran dichos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

(1)	$\alpha = N_{pa}$	$\beta = C^*$
(2.1)	$\alpha = 1$	$\beta = 1$
(2.2)	$\alpha = N_{pa} \cdot C^*$	$\beta = 1$
(2.3)	$\alpha = 1;$	$\beta = 1$

Tabla 2. Valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ .

En las Figuras 1 (a) y (b) se representa la eficiencia en función de NTU y de  $C^*$  para diferente número de pasos del fluido que realiza múltiples pasos. La Figura 1 (a) muestra los resultados cuando la capacidad calorífica mínima es la del fluido que hace un paso, mientras que en la Figura 1(b) se presentan los datos para el caso contrario. Podemos observar que, en el caso de que el fluido de capacidad calorífica mínima realice un paso, para un NTU de 10, la eficiencia alcanza un valor asintótico. Sin embargo, cuando el fluido de capacidad calorífica mínima realiza varios pasos, para un NTU de 10, la eficiencia continúa aumentando, por lo que, para valores elevados de NTU, obtenemos mayor eficiencia cuando el fluido de capacidad calorífica mínima realiza varios pasos. También podemos observar que, en general, obtenemos mayor eficiencia para un intercambiador 1 paso - 3 pasos, ya que en los intercambiadores con un número impar de pasos, tenemos un paso más en contracorriente que en paralelo (se ha considerado que el primer paso del intercambiador siempre es en contracorriente).



Figuras 1(a) y 1(b). Eficiencia en función de NTU y diferentes valores de  $C^*$  para un intercambiador en configuración 1 paso - N pasos, siendo la capacidad mínima la del fluido que realiza un paso (a), o la del fluido que realiza N pasos (b).

### 3. Eficiencia de un intercambiador de placas en configuración 1 paso - 1 paso con un número de placas reducido.

Como hemos mencionado anteriormente, en un intercambiador con un número reducido de placas, la eficiencia es función de NTU,  $C^*$  y el número de placas. Por tanto, en este trabajo se

presenta una corrección de la expresión analítica en función del número de placas, utilizando para ello un método numérico.

Se presenta a continuación el análisis para un intercambiador 1 paso - 1 paso, que puede aplicarse de forma análoga a intercambiadores de 1 paso – N pasos. Para ello, dividimos cada canal en un número N de nodos, y realizamos un balance de energía en cada nodo, a partir del cual obtenemos una expresión para la temperatura adimensional de cada nodo. A continuación mostramos el esquema de nodos i y canales j para el caso de un intercambiador en contracorriente y en paralelo, en el que podemos observar que, en cada canal, hemos considerado el nodo de entrada del fluido como el primer nodo.

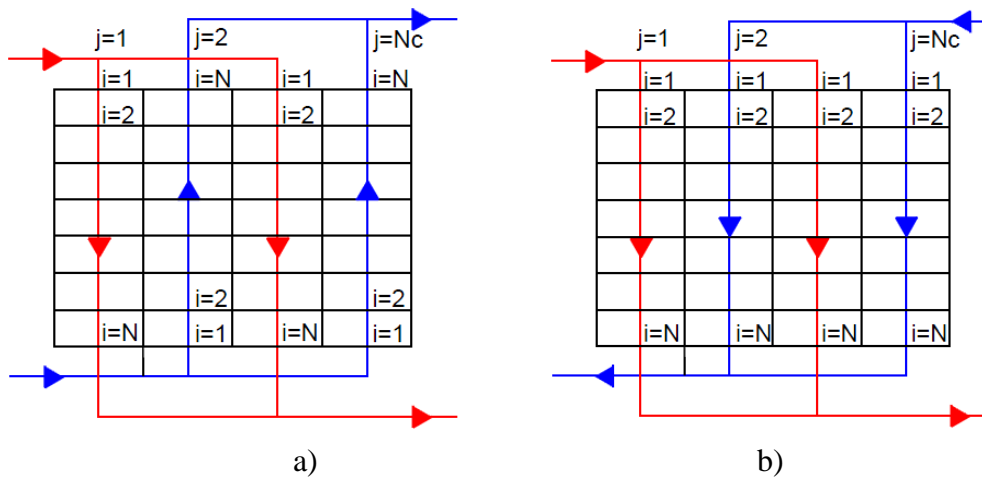


Figura 2. a) Intercambiador 1 paso - 1 paso en contracorriente. b) Intercambiador 1 paso - 1 paso en paralelo.

A continuación, mostramos las expresiones en diferencias finitas obtenidas para los nodos interiores de un intercambiador 1 paso - 1 paso en contracorriente, que son diferentes dependiendo si el fluido considerado es el de capacidad calorífica mínima (3) o máxima (4)

$$\theta_{i,j} = \frac{NTU \cdot N_c \cdot (\theta_{N+1-i,j-1} + \theta_{N+1-i,j+1}) + N_p \cdot N \cdot \theta_{i-1,j}}{2 \cdot NTU \cdot N_c + N_p \cdot N} \quad (3)$$

$$\theta_{i,j} = \frac{NTU \cdot N_c \cdot C^* \cdot (\theta_{N+1-i,j-1} + \theta_{N+1-i,j+1}) + N_p \cdot N \cdot \theta_{i-1,j}}{2 \cdot NTU \cdot C^* \cdot N_c + N_p \cdot N} \quad (4)$$

Donde  $\theta$  es la temperatura adimensional, N es el número de nodos en cada canal,  $N_p$  es el número de placas, y  $N_c$  el número de canales por cada paso del fluido. Las ecuaciones en diferencias finitas se han calculado mediante el algoritmo iterativo de Jacobi. La temperatura de salida de los fluidos se ha calculado como una media de las temperaturas de salida de cada canal y, a partir de estas temperaturas de salida, se ha obtenido la eficiencia del intercambiador. Se ha calculado dicha eficiencia en función del número de placas, para un intercambiador 1 paso - 1 paso, para las cuatro configuraciones diferentes posibles, dependiendo si el intercambiador es en contracorriente o en paralelo, y si el número de placas es par o impar.

En la Figura 3 se puede observar que la máxima eficiencia se obtiene para un intercambiador de una placa, y esta eficiencia coincide con la eficiencia para un número elevado de placas para el caso de flujo en contracorriente. La eficiencia mínima se da para un intercambiador de tres placas, la cual irá aumentando progresivamente al aumentar el número de placas, hasta alcanzar el valor de la eficiencia para un número muy elevado de placas.

numero de placas

Figura 3. Eficiencia de un intercambiador 1 paso - 1 paso en contracorriente en función del número de placas para diferentes valores de NTU, C\* y un número de placas impar

Se puede observar que las curvas de las gráficas anteriores son crecientes y tienen una asíntota horizontal, por lo que se han ajustado a una función exponencial creciente. Los resultados numéricos para la configuración 1 paso - 1 paso con un número variable de placas se pueden ajustar a una ecuación del tipo:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{m\acute{a}x}}{\varepsilon_{m\acute{a}x} - \varepsilon_{m\acute{i}n}} = F_1 \cdot \exp(F_2 \cdot N_p), \quad (5)$$

donde

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} - \varepsilon_{m\acute{i}n} = F_3 + F_4 \cdot C^* \quad (6)$$

Y cada una de las funciones  $F_i$  tiene la forma:

$$F_i = a_{i0} + a_{i1} \cdot NTU + a_{i2} \cdot NTU^2 \quad (7)$$

En las ecuaciones anteriores  $N_p$  es el número de placas,  $C^* = C_{m\acute{i}n} / C_{m\acute{a}x}$ ,  $NTU = UA_{total} / C_{m\acute{i}n}$  y los demás parámetros  $a_i$  son constantes ajustadas con los resultados numéricos, cuyos valores se resumen en la tabla 3.  $\varepsilon_{m\acute{a}x}$  es el valor de la eficiencia para un número elevado de placas ( $\varepsilon_{N_p \rightarrow \infty}$ ). De esta forma, de acuerdo a la Ecuación (5) podemos expresar la eficiencia como

$$\varepsilon = \varepsilon_{N_p \rightarrow \infty} + \Delta\varepsilon \quad (8)$$

donde

$$\Delta\varepsilon = [F_3 + F_4 \cdot C^*] \cdot F_1 \cdot \exp[F_2 \cdot N_p] \quad (9)$$

	Contracorriente- N° placas impar	Contracorriente- N° placas par	Paralelo- N° placas impar	Paralelo- N° placas par
$a_{10} \times 10^4$	-13327.045	-13819.011	-13152.716	-13969.267
$a_{11} \times 10^4$	119.794	105.365	52.087	357.385
$a_{12} \times 10^4$	0.000	0.000	0.000	0.000
$a_{20} \times 10^4$	-1200.880	-672.853	-1162.600	-685.335
$a_{21} \times 10^4$	89.238	77.426	74.746	105.281
$a_{22} \times 10^4$	0.000	0.000	0.000	0.000

$a_{30} \times 10^4$	-11.150	8.747	-19.905	56.267
$a_{31} \times 10^4$	269.747	221.760	300.320	140.312
$a_{32} \times 10^4$	-47.026	-37.580	-47.790	-26.958
$a_{40} \times 10^4$	-37.211	14.585	153.435	28.508
$a_{41} \times 10^4$	61.140	-132.550	-192.212	-126.471
$a_{42} \times 10^4$	0.000	26.342	24.895	22.022

Tabla 3. Valores de las constantes de la Ecuación (7).

En la Figura 4 se ha representado el máximo error relativo entre los resultados del modelo numérico y el ajuste para cada uno de los valores considerados de NTU.

NTU

Figura 4. Error relativo máximo obtenido con el ajuste propuesto en función de NTU para diferentes configuraciones de intercambiadores 1 paso - 1 paso.

Podemos observar que el error máximo relativo se produce para el caso de flujo en paralelo con número de placas impar, y está en torno a un 2% y siempre para un número de placas muy reducido. Para un número de placas mayor de diez, el error relativo está siempre por debajo del 1 %

#### 4. Conclusiones

En este trabajo se ha obtenido, en primer lugar, una expresión general de la eficiencia para intercambiadores de calor con un número elevado de placas en los que un fluido realiza un paso, mientras que el otro fluido realiza un número cualquiera de pasos. Dicha expresión de la eficiencia es función del número de unidades de transferencia de calor (NTU) y la relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ) calculados con los caudales totales y el área total de todo el intercambiador (Ecuación 2).

Esta expresión muestra que, cuanto mayor es la relación de capacidades caloríficas ( $C^*$ ), menor es la eficiencia del intercambiador para un mismo número de unidades de transferencia de calor (NTU), y la eficiencia para valores altos de NTU es mayor en el caso de que el fluido que realiza varios pasos sea el de capacidad calorífica mínima.

Por otra parte, se ha desarrollado un método numérico para obtener la expresión de la eficiencia de intercambiadores 1 paso - 1 paso con un número reducido de placas. Los resultados de la eficiencia obtenidos mediante la resolución numérica del intercambiador se ajustan a una función exponencial creciente (Ecuación 5). Es decir, la eficiencia del intercambiador aumenta con el número de placas, y toma el valor de la eficiencia obtenida mediante las expresiones analíticas cuando el número de placas es elevado.

Comparando los resultados numéricos de la eficiencia con los resultados del ajuste, podemos determinar que, para el caso del intercambiador 1 paso - 1 paso, el máximo error relativo es del 2.36 %, que se produce en el ajuste de un intercambiador con flujos en paralelo. Es importante señalar que los máximos errores relativos en el ajuste de los resultados se producen para un número muy reducido de placas (inferior a 10), de forma que, a medida que aumenta el número de placas, las expresiones de la eficiencia obtenidas se ajustan con mayor precisión a los resultados numéricos (error menor del 1%).

Las expresiones presentadas pueden utilizarse para el diseño de intercambiadores de calor de placas con múltiples pasos, sin necesidad de recurrir a procesos iterativos ni al uso de tablas.

## 5. Bibliografía

KANDLIKAR, S.G.; SHAH R.K. *Asymptotic effectiveness-NTU formulas for mutipass plate heat exchangers*. Journal of Heat Transfer, 1989, vol. 111, pp. 314-321.

KANDLIKAR, S.G.; SHAH R.K. *Multipass plate heat exchangers – Effectiveness-NTU results and guidelines for selecting pass arrangements*. Journal of Heat Transfer, 1989, vol. 111, pp. 300-313.