УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/1.1

О.І. Василик[1], *д.ф.-м.н., доцент*
І.І. Ловицька[2], *студ.*

Моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ, проспект Перемоги, 37, e-mail: pasko97ira@gmail.com

O.I. Vasylyk[1], *Dr.Sc., Associate Professor*
I.I. Lovytska[2], *stud.*

Simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
e-mail: vasylyk@matan.kpi.ua

[2]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prosp. Peremohy, Kyiv, Ukraine, 03056,
e-mail: pasko97ira@gmail.com

У роботі розглядається задача моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху. Отримано умови, за яких модель на основі розкладу в ряд наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Ключові слова: φ-субгауссові процеси, дробовий броунівський рух, моделювання випадкових процесів, точність і надійність моделювання.

In the paper, we consider the problem of simulation of a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. Simulation of random processes and fields is used in many areas of natural and social sciences. A special place is occupied by methods of simulation of the Wiener process and fractional Brownian motion, as these processes are widely used in financial and actuarial mathematics, queueing theory etc. We study some specific class of processes of generalized fractional Brownian motion and derive conditions, under which the model based on a series representation approximates a strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in the space $C([0;1])$ in the case, when $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. In order to obtain these results, we use some results from the theory of φ-sub-Gaussian random processes. Necessary simulation parameters are calculated and models of sample pathes of corresponding processes are constructed for various values of the Hurst parameter H and for given reliability and accuracy using the R programming environment.

Key Words: φ-sub-Gaussian processes, fractional Brownian motion, simulation of stochastic processes, accuracy and reliability of simulation.

Статтю представила д.ф.-м.н. Розора І.В.

Вступ

Методи моделювання випадкових процесів та полів використовуються в багатьох областях природничих та соціальних наук. Стохастичне моделювання активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського процесу та процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують, що дані спостережень у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Якраз одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху. Але для моделювання реальних випадкових процесів є сенс розглядати не тільки класичний гауссовий дробовий броунівський рух, а і його узагальнення, зокрема, процеси φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

У 1985 році Ю. Козаченко та Є. Островський [8] розглянули простори $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ випадкових величин, де φ є N-функцією Орліча. Простори $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, або простори φ-субгауссових випадкових величин, – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами. Клас φ-субгауссових випадкових процесів є більш широким, ніж клас субгауссових процесів, тому дає можливість краще моделювати реальні випадкові процеси.

В. Булдигін та Ю. Козаченко досліджували деякі властивості сум випадкових величин і процесів з просторів $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ [1]. Подальший розвиток теорія φ-субгауссових випадкових процесів отримала у роботах Ю. Козаченка та його учнів, наприклад, у монографії [7]. До класу φ-субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ-субгауссових процесів теоретичні результати.

Результати щодо застосування дробового броунівського руху в таких прикладних галузях, як теорія телекомунікаційних мереж та фінансова математика, можна знайти у працях І. Норроса, А. Ширяєва, Ю. Мішури, А. Свіщука, Т. Соттінена та ін.

Робота складається зі вступу та трьох розділів. У першому розділі наведено необхідні означення і властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів. Другий розділ присвячено моделюванню процесів узагальненого дробового броунівського руху. В ньому наведено означення моделі, загальну теорему про моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху, доведену в роботі [4], та основну теорему цієї роботи. Отримана нова теорема містить умови, за яких модель буде наближати процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $|x|\geq 1$, $p>1$. У третьому розділі наведено параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності $\delta>0$ та надійності $1-\nu$, $\nu\in(0;1)$, і представлено реалізації моделей траєкторій таких процесів в програмному середовищі R.

1 Необхідні відомості

У цьому розділі наведено необхідні означення та властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів [1, 3, 7].

Означення 1.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi=\{\varphi(x), x\in\mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орліча*, якщо $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)>0$ при $x\neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x}\to 0$ при $x\to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x}\to\infty$ при $x\to\infty$.

Означення 1.2. Нехай $\varphi=\{\varphi(x), x\in\mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орліча. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x):=\sup_{y\in\mathbb{R}}\left(xy-\varphi(y)\right)$, $x\geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції φ.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо $\liminf\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2}=C>0$. Можливо, що $C=+\infty$.

У книзі [6] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орліча та їх властивостей.

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 1.3. Нехай φ — N-функція Орліча, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi=0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ та існує така стала $a>0$, що для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\left(\lambda\xi\right)\leq\exp\left(\varphi(a\lambda)\right).$$

Теорема 1.1. [1] *Простір $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\tau_{\varphi}(\xi)=\sup_{\lambda\neq 0}\frac{\varphi^{-1}\left(\ln\mathsf{E}\exp\left(\lambda\xi\right)\right)}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\exp\left(\lambda\xi\right) &\leq \exp\left(\varphi(\lambda\tau_{\varphi}(\xi))\right), \qquad (1.1)\\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_{\varphi}(\xi),\end{aligned}$$

де $C>0$ — деяка стала.

Означення 1.4. Випадковий процес $X=(X(t), t\in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$), якщо для всіх $t\in T$ випадкові величини $X(t)\in\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 1.1. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

Означення 1.5. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 1.6. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

Приклад 1.2. [7] Нехай $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$, $t \in T$, де сім'я випадкових величин $\{\xi_k, k = \overline{1,\infty}\}$ є строго φ-субгауссовою з визначальною сталою C_ξ та ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному. Тоді випадковий процес $X(t)$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом з визначальною сталою $C_X = C_\xi$.

2 Моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

2.1 Узагальнений дробовий броунівський рух

Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – це дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0,1)$. Це означає, що $B_H(t)$ є центрованим гауссовим випадковим процесом зі стаціонарними приростами і коваріаційною функцією

$$\mathsf{E}B_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Нехай $T = [a,b], 0 \le a < b < \infty$, або $T = \mathbb{R}^+$.

Означення 2.1. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ узагальненим дробовим броунівським рухом (УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо $\mathsf{E}Z_H(t) = 0$ та

$$R_H(t,s) = \mathsf{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H}+s^{2H}-|s-t|^{2H}).$$

Означення 2.2. [4, 7] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t),\ t \in T\}$ строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ-УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо Z_H з означення 2.1 є строго φ-субгауссовим.

У роботі [2] доведено, що дробовий броунівський рух $B_H(t)$ можна подати в наступному вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n t}{x_n}X_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos y_n t}{y_n}Y_n, \quad (2.1)$$

де ряди в (2.1) збігаються в середньому квадратичному, $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{Y_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові випадкові величини такі, що $\mathsf{E}X_n = \mathsf{E}Y_n = 0$,

$$\mathbf{Var}\, X_n = 2C_H^2 x_n^{-2H}J_{1-H}^{-2}(x_n),$$
$$\mathbf{Var}\, Y_n = 2C_H^2 y_n^{-2H}J_{-H}^{-2}(y_n),$$
$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H),$$

$x_1 < x_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції Бесселя першого роду J_{-H}, а $y_1 < y_2 < \ldots$, – додатні дійсні нулі функції J_{1-H}.

У роботах [4, 7] показано, що зображення (2.1) можна переписати в такому вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{X}_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{Y}_n d_n^H(1-\cos y_n t),$$

де $\{\tilde{X}_n, n = 1,2,\ldots\}$ та $\{\tilde{Y}_n, n = 1,2,\ldots\}$ – незалежні гауссові центровані випадкові величини, такі що $\mathsf{E}\tilde{X}_n^2 = \mathsf{E}\tilde{Y}_n^2 = 1$,

$$c_n^H = \sqrt{2}C_H x_n^{-(H+1)}J_{1-H}^{-1}(x_n), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (2.2)$$
$$d_n^H = \sqrt{2}C_H y_n^{-(H+1)}J_{-H}^{-1}(y_n), \quad n = 1,2,\ldots, \quad (2.3)$$
$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H).$$

Ю.В. Козаченко, О.І. Василик та Т. Соттінен [4, 7] запропонували узагальнити даний розклад на випадок негауссових випадкових процесів, а саме розглянули такий ряд:

$$\tilde{Z}_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n d_n^H(1-\cos y_n t), \quad (2.4)$$

де $t \in [0,1]$, ξ_n, η_n – незалежні центровані випадкові величини такі, що $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1, n = 1,2,\ldots$. Вони довели наступні твердження.

Твердження 2.1. *[4, 7] Ряди в (2.4) збігаються в середньому квадратичному, та коваріаційна функція процесу $\tilde{Z}_H$ має вигляд:*

$$\mathsf{E}\tilde{Z}_H(s)\tilde{Z}_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Твердження 2.2. *[4] Ряди в (2.4) рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця до процесу $\tilde{Z}_H(t)$ та процес $\tilde{Z}_H(t)$ є вибірково неперервним на $[0,1]$ з ймовірністю одиниця.*

2.2 Моделювання узагальненого дробового броунівського руху

У роботах [4, 5, 7] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ на основі розкладу в ряд:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\, \eta_n, \tag{2.5}$$

$t \in [0;1]$, де

$$c_n = \frac{\pi^H \sqrt{2c}}{x_n^{H+1} J_{1-H}(x_n)}, \qquad n = 1,2,\dots,$$
$$d_n = \frac{\pi^H \sqrt{2c}}{y_n^{H+1} J_{-H}(y_n)}, \qquad n = 1,2,\dots,$$
$$c = \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}.$$

$\xi_n, \eta_n, n = 1,2,\dots,$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathsf{E}\xi_n^2 = \mathsf{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1,2,\dots$. Тут і далі припускається, що функція $\varphi(\sqrt{\cdot})$ опукла.

З Твердження 2.1 та Прикладу 1.2 випливає, що випадковий процес Z виду (2.5) є строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом.

Означення 2.3. [7] Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |Z_t - \tilde{Z}_t| > \delta\right) \le \nu.$$

Природною моделлю для процесу Z, є така сума

$$\sum_{n=1}^{N} \left(c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \; + \; d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\, \eta_n\right).$$

Але більш реальним є припущення про те, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n, y_n обчислюються тільки приблизно. Зауважимо, що сталі c_n та d_n залежать від значень нулів відповідних функцій Бесселя [4, 7].

Позначимо через $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ наближені значення c_n та d_n, відповідно. Нехай

$$|\tilde{c}_n - c_n| \le \gamma_n^c,$$

$$|\tilde{d}_n - d_n| \le \gamma_n^d,$$

$n = 1,\dots,N$. Похибки γ_n^c та γ_n^d вважаються відомими. Нехай $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення відповідних нулів x_n та y_n з похибками

$$|\tilde{x}_n - x_n| \le \gamma_n^x,$$

$$|\tilde{y}_n - y_n| \le \gamma_n^y.$$

Похибки γ_n^x та γ_n^y теж вважаються відомими.

Тоді модель процесу Z матиме вигляд

$$\tilde{Z}_t = \sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)\, \xi_n \; + \; \tilde{d}_n\big(1-\cos(\tilde{y}_n t)\big)\, \eta_n\right). \tag{2.6}$$

А похибка моделювання дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta_t &:= Z_t - \tilde{Z}_t \\ &= \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \Big(c_n \sin(x_n t) - \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)\Big)\xi_n \\ &\quad + \Big(d_n\big(1-\cos(y_n t)\big) - \tilde{d}_n\big(1-\cos(\tilde{y}_n t)\big)\Big)\eta_n \Big\} \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big\{ c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \; + \; d_n\big(1-\cos(y_n t)\big)\eta_n \Big\}.\end{aligned}$$

Для того, щоб оцінити Δ в $C([0,1])$, потрібно було знайти оцінки для $\tau_\varphi(\Delta_t)$ та $\tau_\varphi(\Delta_t - \Delta_s)$ для всіх $s,t \in [0,1]$. [4, 7]

На основі отриманих оцінок для похибки моделювання та з використанням відповідних оцінок розподілів супремумів φ-субгауссових випадкових процесів було сформульовано загальну теорему про моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ (див. [4, 7]).

Теорема 2.1. *[4, 7] Нехай b та α такі числа, що $0 < b < \alpha < H$. Модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає випадковий процес Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta>0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі три нерівності:*

$$\gamma_0 < \delta,$$
$$\frac{\beta\gamma_0}{\gamma_\alpha} < \frac{\delta}{2^\alpha(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha},$$
$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)\right\}$$
$$\times\left(\frac{1}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})}\left(\frac{\gamma_\alpha\delta}{\beta\gamma_0}\right)^{\frac{b}{\alpha}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}},$$

де параметри $\gamma_0=\gamma_0(N)$, $\gamma_\alpha=\gamma_\alpha(N)$ і $\beta=\min\{\gamma_0,\frac{\gamma_\alpha}{2^\alpha}\}$ грунтуються на оцінках, отриманих для похибки моделювання, та $l^{(-1)}$ – узагальнена обернена функція до щільності l функції φ.

Припустимо, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n та y_n обчислені точно.

Наслідок 2.1. *[4, 7] Нехай похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c=\gamma_n^d=\gamma_n^x=\gamma_n^y=0$. Тоді умови теореми 2.1 виконуються, якщо*

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1; \right. \tag{2.7}$$

$$\left.\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1;\ 2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

та

$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0}-1\right)\right\}\times \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{2Hb/\alpha}}{2^b\left(1-\frac{b}{\alpha}\right)A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}}l^{-1}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}},$$

де

$$A_0 = a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}},$$

$$A_\alpha = 2^{1-\alpha}a_\varphi\pi^\alpha\sqrt{\frac{c}{H-\alpha}}.$$

На основі наведених вище результатів виведемо умови, за яких модель виду (2.6) наближатиме процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{|x|^p}{p}, & |x|\geq 1 \\ \frac{|x|^2}{p}, & |x|<1 \end{cases}, \quad p>1.$$

У наступній теоремі припускається, що похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c=\gamma_n^d=\gamma_n^x=\gamma_n^y=0$.

Для зручності обчислень вибрано $\alpha=\frac{H}{2}$ і $b=\frac{H}{4}$.

Теорема 2.2. *Нехай $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $|x|\geq 1$, $p>1$, та $\varphi(x)=\frac{|x|^2}{p}$, $|x|<1$. У цьому випадку модель $\tilde{Z}$, визначена в (2.6), наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta>0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі умови:*

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{\frac{1}{H}}+1; \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\} \tag{2.9}$$

та

$$2\mu\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\}N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}} \leq \nu, \tag{2.10}$$

де

$$\mu = \pi^2 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4}5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}}\times$$
$$\times\left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}}\left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}},$$

$a_\varphi=\tau_\varphi(\xi_n)=\tau_\varphi(\eta_n)$.

Доведення. Оскільки ми припускаємо, що похибка наближення відсутня, то можемо скористатись наслідком 2.1.

У нашому випадку $\varphi^*(x)=\frac{x^q}{q}$, $x\geq 1$, де q таке число, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $l(x)=\varphi'(x)=x^{p-1}$, $x\geq 1$; $l^{(-1)}(x)=x^{\frac{1}{p-1}}$, $x\geq 1$.
За припущенням $\alpha=\frac{H}{2}$, $b=\frac{H}{4}$ матимемо: $A_\alpha=A_{\frac{H}{2}}=2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}$.

Спочатку розглянемо умову (2.7). Для заданої функції φ отримаємо

$$\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{1/H}+1=$$

$$\left(\frac{A_0(e^{\frac{1}{p}}-1)^{\alpha}}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1\leq\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1,$$

де $p>1, \alpha\in(0,1)$. Далі,

$$2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=2\left(\frac{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}{2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{5c}{H}}}\right)^{\frac{2}{H}}=$$

$$2\left(\frac{1}{2^{1-\frac{H}{2}}\pi^{\frac{H}{2}}}\sqrt{\frac{5c}{2H}\cdot\frac{H}{2c}}\right)^{\frac{2}{H}}=$$

$$=\frac{2\cdot 5^{\frac{1}{H}}}{2^{\frac{2}{H}-1}\pi\ 2^{\frac{2}{H}}}=\frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}.$$

Отже, умова (2.7) набуває вигляду

$$N\geq\max\left\{\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{H}}\right)^{\frac{1}{H}}+1;\frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\}.$$

В умові (2.8) матимемо:

$$\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0}-1\right)=\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q,$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{\frac{2Hb}{\alpha}}}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}}\times\right.$$

$$\left.l^{(-1)}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}}=$$

$$=\left(\frac{\left(\delta a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}2^{1-\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}\right)^{\frac{1}{2}}(N+1)^{2H\cdot\frac{1}{2}}}{2^{\frac{H}{4}}(1-\frac{1}{2})\left(a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}}N^{(H-\frac{H}{2})\cdot\frac{1}{2}}}\times\right.$$

$$\left.\left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^{\frac{1}{p-1}}+1\right)^{\frac{8}{H}}=(*)$$

Оскільки N - велике число, то

$$(*)\approx\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}a_\varphi^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{H}{4}}2^{\frac{1}{2}-\frac{H}{4}}\cdot(\frac{2c}{H})^{\frac{1}{4}}N^H}{2^{\frac{H}{4}-1}a_\varphi(\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2}}N^{\frac{H}{4}}}\cdot\frac{\delta^{\frac{1}{p-1}}N^{\frac{H}{p-1}}}{a_\varphi^{\frac{1}{p-1}}(\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2(p-1)}}}\right)^{\frac{8}{H}}=$$

$$=\pi^2\left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}}\cdot 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4}\cdot 5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}}\times$$

$$\times\left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}}\cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}}=\mu\cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}},$$

де μ наведено у твердженні цієї теореми.

Отже, умова (2.8) набуває вигляду:

$$2\mu\cdot exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\}N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}}\leq\nu.$$

Таким чином, теорема доведена. □

3 Визначення числових параметрів моделей і комп'ютерне моделювання узагальненого дробового броунівського руху

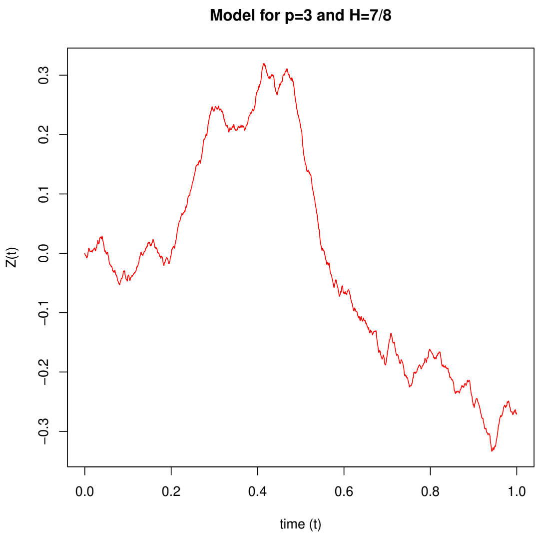
Нехай $\varphi(x)=\frac{|x|^p}{p}$, $|x|\geq 1$, $p>1$. На основі теореми 2.2 знайдемо числові параметри та побудуємо модель $\tilde{Z}$, визначену в (2.6), що наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (2.5), із заданими надійністю $1-\nu$ та точністю δ в просторі $C([0,1])$ для різних значень індекса Хюрста H. Умова (2.9) для знаходження N представлена у явному вигляді, тому її можна легко застосувати. Умова (2.10) досить складна, але вона розв'язується чисельними методами.

Алгоритми обчислення числових параметрів та побудови траєкторій відповідних моделей реалізовано у програмному середовищі R.

1. Побудуємо модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для $\varphi(x)=\frac{|x|^3}{3}$, $|x|\geq 1$ (тобто, $p=3$) та $H=\frac{7}{8}$ з надійністю $1-\nu=0.99$ та точністю $\delta=0.01$ в $C([0,1])$. У цьому випадку матимемо $c=0.02642778$. З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu=3.4717*10^{-10}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N\geq max\{45.1, 0.337\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N\geq 1361.837$.

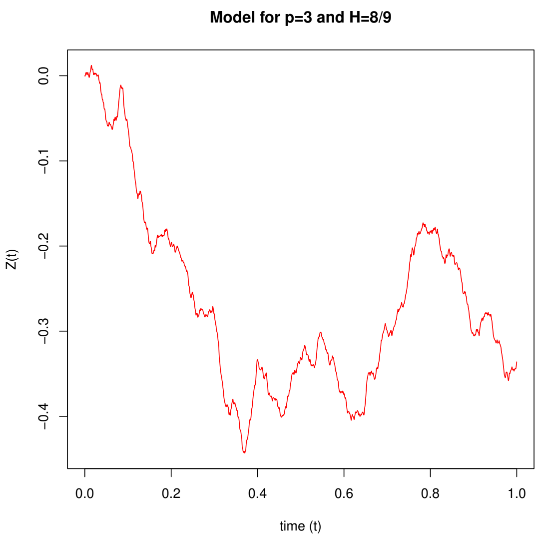
   Отже, достатньо взяти $N=1362$, щоб відповідна модель наближала такий узагальнений дробовий броунівський рух з надійністю 0.99 та точністю 0.01 в $C([0,1])$. На рисунку нижче зображено модель траєкторії строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху для $\varphi(x)=\frac{|x|^3}{3}$, $|x|\geq 1$ та $H=\frac{7}{8}$.



2. $H = \frac{8}{9}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$;
З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 8.969 * 10^{-10}$,
- з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{39.496, 0.344\}$,
- з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1110.654$.

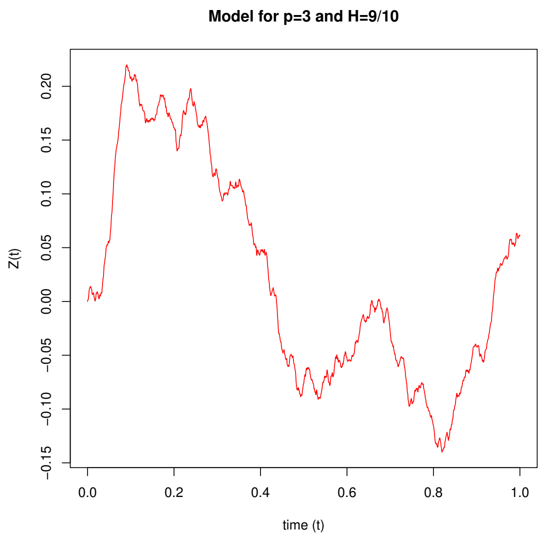
Отже, достатньо покласти $N = 1111$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



3. $H = \frac{9}{10}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.021007$.
З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 1.9722 * 10^{-9}$,
- з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{35.4, 0.3497\}$,
- з умови (2.10) випливає, що $N \geq 941.8686$.

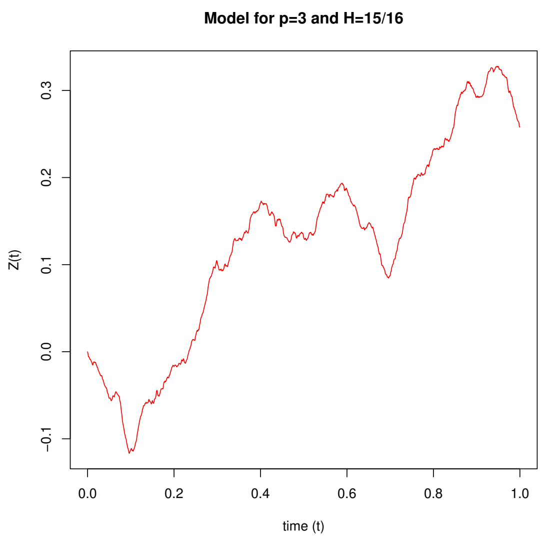
Отже, достатньо покласти $N = 942$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



4. $H = \frac{15}{16}$, $p = 3$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.012979$.
З теореми 2.2 випливає:

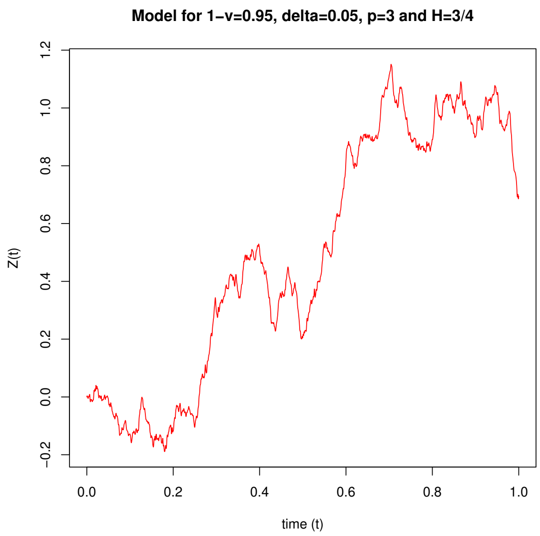
- $\mu = 4.006 * 10^{-8}$,
- з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{23.6, 0.368\}$,
- з умови (2.10) випливає, що $N \geq 522.2371$.

Отже, достатньо покласти $N = 523$.



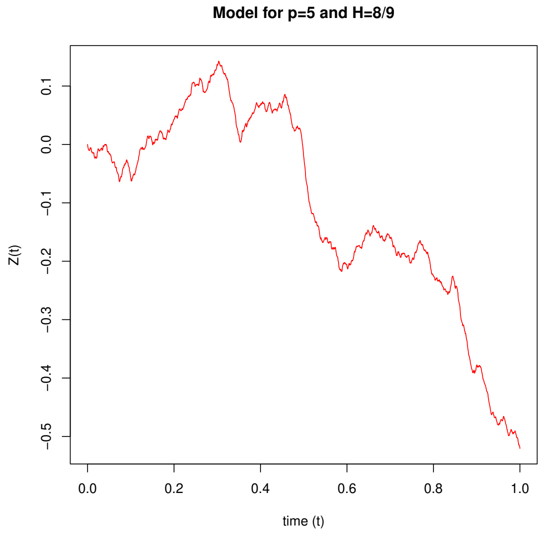
5. $H = \frac{3}{4}$, $p = 3$. Тепер візьмемо надійність $1 - \nu = 0.95$ та точність $\delta = 0.05$ (тоді отримаємо меншу необхідну кількість доданків у моделі). Тоді матимемо, що $c = 0.05373$.
   З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 2.844 * 10^{-6}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{18.25, 0.27\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1005.4$.

   Отже, шукане значення $N = 1006$ (для порівняння, у випадку $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$ $N = 9417$). Нижче зображено відповідну модель вибіркової траєкторії.



6. Нехай $\varphi(x) = \frac{|x|^5}{5}$, $|x| \geq 1$ (тобто, $p = 5$) та $H = \frac{8}{9}$, $1 - \nu = 0.99$, $\delta = 0.01$. Тоді матимемо $c = 0.02341$.
   З теореми 2.2 випливає:
   - $\mu = 1.329 * 10^{-6}$,
   - з умови (2.9) маємо, що $N \geq max\{39.5, 0.344\}$,
   - з умови (2.10) випливає, що $N \geq 1692.331$.

   Отже, шукане значення $N = 1693$. На рисунку нижче зображену відповідну модель траєкторії.



З рисунків бачимо, що чим більше значення індекса Хюрста H, тим гладшою є крива, при цьому і меншою є необхідна кількість доданків N у моделі. Також збільшення параметра p функції $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, за однакових значень точності, надійності та індекса Хюрста призводить до збільшення необхідної кількості доданків у моделі.

Висновки

У роботі доведено теорему, що містить умови, за яких модель виду (2.6) наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадку, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. Визначено параметри моделей та змодельовано траєкторії відповідних процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.

2. *Dzhaparidze K.O.* A series expansion of fractional Brownian motion / K.O. Dzhaparidze, J. H. van Zanten // Probability Theory and Related Fields, 130, 2002 – P.39–55.

3. *Giuliano Antonini R.* Space of φ-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano

Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.

4. *Kozachenko Yu.* Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk // Methodology and Computing in Applied Probability, Vol. 7 (3), 2005. – P. 379–400.

5. *Kozachenko Yu.* Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$ / Yu. Kozachenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes, Vol.12 (28), no.3-4, 2006. – P. 59–66.

6. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.

7. *Василик О.І.* φ-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.

8. *Козаченко Ю.В.* Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских / Ю.В. Козаченко, Е.И. Островский // Теория вероятн. и матем. статист. № 32, 1985. – С.42–53.

References

1. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.

2. DZHAPARIDZE K.O., ZANTEN J. H. (2002) A series expansion of fractional Brownian motion. Probability Theory and Related Fields 130, p.39–55.

3. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of φ-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.

4. KOZACHENKO YU., SOTTINEN T., VASYLYK O. (2005) Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 7 (3), p. 379–400.

5. KOZACHENKO YU., VASYLYK O. (2006) Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$. *Theory of Stochastic Processes*, Vol.12 (28), no.3-4 p. 59–66.

6. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.

7. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)

8. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKII E.I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.*, 32 , p. 42–53. (In Russian)

Received: 22.03.2021