УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.8

А. Я. Оленко[1], *к.ф.-м.н.*

Від субгауссовості до стохастичної апроксимації і моделювання.

[1]Факультет інженерних і математичних наук, Ла Троб Університет, Мельбурн, 3086, Австралія
e-mail: a.olenko@latrobe.edu.au

A. Ya. Olenko[1], *PhD*

From subgaussianity to stochastic approximation and modelling.

[1]School of Engineering and Mathematical Sciences, La Trobe University, Melbourne 3086, Australia
e-mail: a.olenko@latrobe.edu.au

Сучасна теорія субгауссових випадкових величин і процесів була створена незалежними зусиллями кількох наукових шкіл у Франції, США і Україні. Професор Ю.В.Козаченка був засновником і лідером цього наукового напрямку всесвітньовідомої Української ймовірнісної школи. Ця замітка містить короткий нарис внеску Ю.В.Козаченка в теорію субгауссових випадкових величин і процесів. Введено клас φ-субгауссових випадкових величин і продемонстровано його основну властивість. Показано застосування цих результатів до стохастичної апроксимації та моделювання. Зокрема, продемонстровано як ці результати використовуються для наближення з заданою точністю і надійністю траєкторій φ-субгауссових випадкових процесів. Обговорено приклади застосувань до двох важливих алгоритмів у теорії передачі сигналів: інтерполяції Котельникова-Шеннона і вейвелет-розкладів. Також включені деякі особисті спогади автора про Ю.В.Козаченка.

Ключові слова: Ю.В.Козаченко, субгауссовий, стохастична апроксимація, стохастичне моделювання.

The modern theory of subgaussian random variables and processes was created by independent efforts of several research schools from France, USA and Ukraine. Professor Yu.Kozachenko was a founder and leading figure of this research direction of the Ukrainian probability school. An outline of Professor Yu.Kozachenko's contribution to the theory of sub-Gaussian random variables and processes is presented. The class of φ-subgaussian random variables is introduced and its key property is discussed. Then it is demonstrated how these results can be used in stochastic approximation and modeling. In particular, applications to approximation of trajectories of φ-subgaussian random processes with given accuracy and reliability are discussed. Two important clases of algorithms from the signal processing theory, the Shannon sampling method and wavelet decompositions, are used as examples. Some personal memories of the author about Yu. Kozachenko are included at the end of the paper.

Key Words: Yu.Kozachenko, subgaussian, stochastic approximation, stochastic modelling.

Статтю представив д.ф.-м.н. Моклячук М.П.

На спогад про Юрія Васильовича Козаченка (1940-2020)

Професор Юрій Васильович Козаченко - яскравий представник видатної української імовірнісної школи. У 1968 році він захистив кандидатську дисертацію "Про рівномірну збіжність стохастичних інтегралів, рядів і властивості неперервних випадкових полів". Керівником був Михайло Йосипович Ядренко - один із засновників цієї імовірнісної школи. Після захисту дисертації Юрій Васильович весь час працював на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У 1985 році він захистив докторську дисертацію. За більш ніж 50 річний період своєї активної наукової діяльності він створив свою власну наукову школу, понад 40 його учнів захистили кандидатські й близько 10 докторські дисертації. Професор Козаченко отримав низку фундаментальних результатів у різних областях теорії випадкових процесів і полів, математичної статистики, стохастичного вейвелет аналізу, стохастичного моделювання і їх застосувань. Його науковий доробок включає понад 10 монографій і 300 статей у провідних фахових вітчизняних і міжнародних журналах.

Однією з центральних тем у науковому доробку Юрія Васильовича був розвиток теорії субгауссових випадкових величин і процесів. Узагальнення теорії гауссових розподілів і стохастичних процесів є однією з важливих проблем теорії ймовірностей, роль якої зростає з розвитком сучасної науки про дані. Гауссові моделі дуже привабливі з математичної точки зору, оскільки часто допускають достатньо прості зображення чи результати в явній формі, але в більшості випадків реальні данні неможливо адекватно описати за допомогою таких моделей. Початок субгауссових досліджень був покладений у роботі Кахана [6], яка запропонувала узагальнення, що позбуваються гауссових припущень, але мають властивості подібні до гауссових. Ця робота ініціювала початок досліджень у цьому напрямку кількох визначних ймовірнісних груп, які незалежно отримали ряд фундаментальних результатів. Наприклад, у Франції яскравими представниками цього напрямку є Фернік, Талагран і Леду [5, 14, 15, 16], у США Дадлі [4, 3]. Професори Козаченко і Булдигін створили українську школу. Підходи зазначених вище шкіл відрізняються і представники кожної школи визнали внесок інших груп. Початок розробки цієї тематики в Україні було покладено роботою [8] професора Козаченко.

Зокрема, він запропонував і ґрунтовно дослідив наступне розширення класів гауссових і субгауссових випадкових величин:

Випадкова величина X називається φ-субгауссовою, якщо $E(X) = 0$ і існує скінченна стала $a > 0$ така, що

$$\mathbf{E} \exp(tX) \leqslant \exp(\varphi(at))$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$.

На перший погляд здається що це означення φ-субгаусссовості пов'язане з математичним сподіванням, але справжня суть його в тому, що воно характеризує поведінку хвостів розподілів, а саме,

Якщо $\varphi(\cdot)$ є N-функцією Орліча [7], то для φ-субгауссових випадкових величин X справджується наступна нерівність

$$\mathbf{P}(X \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\psi\left(\frac{x}{\tau_\varphi(X)}\right)\right), \quad x > 0,$$

де $\tau_\varphi(X)$ - норма X у відповідному просторі.

Цей результат показує що класи φ-субгауссових випадкових величин і процесів можуть значно відрізнятись від гауссових, але хвости їх розподілів асимптотично обмежені подібно до гауссових, що дає змогу отримати різноманітні нові узагальнення. Зокрема, властивості траєкторій таких процесів залежать від їх середньоквадратичної регулярності. Змінюючи функцію $\varphi(\cdot)$ можна отримати різноманітні нові класи випадкових величин. Звичайно ці класи не обмежуються гауссовими розподілами, але, наприклад, також включають випадкові величини з симетризованими розподілами Вейбула, розподілами з обмеженим носієм і багато інших.

Результатом більш ніж 30-річної плідної праці стало створення теорії стохастичних процесів в різних метричних просторах, зокрема, просторах Орліча. Ключові результати і підходи ввійшли в монографію [1], яка також містить детальний огляд результатів у цьому напрямку на момент публікації. Ця монографія стала одним з найбільш цитованих класичних джерел з теорії субгауссових процесів і їх метричних властивостей.

У наступні роки Юрій Васильович продовжував розвивати цей напрямок і отримав ряд нових результатів зі своїми учнями, але фокус досліджень змістився до застосувань, зокрема апроксимації випадкових процесів і їх моделювання. Основною темою стало застосування загальних результатів до оцінки близькості траєкторій стохастичних процесів $\mathbf{X}(t)$ і їх апроксимацій $\mathbf{X}_n(t)$. У багатьох застосуваннях, особливо в інженерних науках і економетриці, класична методологія оцінки близькості процесу і його апроксимації базується на середньоквадратичному відхиленні $\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\left(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_n(t)\right)^2$. Для гауссових процесів це відхилення досить просто обчислити що і обумовлює популярність цього підходу. Проте середньоквадратична метрика часто недостатня для адекватного оцінювання відхилень для реальних даних, особливо якщо потрібно використовувати поточкову чи рівномірну близькість. Класичними прикладами є відтворення зображень, де бажано мати невеликі відхилення в кожному пікселі екрана чи фотографії, або отримане радіоопромінення, яке складається з суми всіх відхилень від рекомендованого значення. Тому виникає потреба розглядати інші типи відстаней, наприклад,

$\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|$ чи $\int_0^T |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|^p\, dt$.

У циклі робіт професор Козаченко розробив методологію апроксимації й моделювання випадкових процесів з заданими точністю $\varepsilon > 0$ і надійністю $1-\delta$, $0<\delta<1$, тобто одержання результатів вигляду

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)|^p\, dt \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \delta \quad \text{і}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_n(t)| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \delta.$$

Наприклад, для апроксимації в $L_p([0,T])$ з точністю ε і надійністю $1-\delta$ потрібно накладати умови вигляду

$$\varepsilon > S_{n,p}\cdot\left(f\left(p\,(S_{n,p}/\varepsilon)^{1/p}\right)\right)^p,$$

$$\exp\left\{-\varphi^*\left((\varepsilon/S_{n,p})^{1/p}\right)\right\} \leqslant \delta/2,$$

де $\varphi^*(\cdot)$ і $f(\cdot)$ - перетворення Лежандра і щільність функції $\varphi(\cdot)$ відповідно, а $S_{n,p}$ - стала, яка залежить від класу процесів. Оскільки всі складові у таких формулах обчислюються явно, то, наприклад, це дає змогу розв'язувати важливу прикладну задачу - визначення необхідної кількості членів n у апроксимаційних формулах для досягнення заданих точності і надійності.

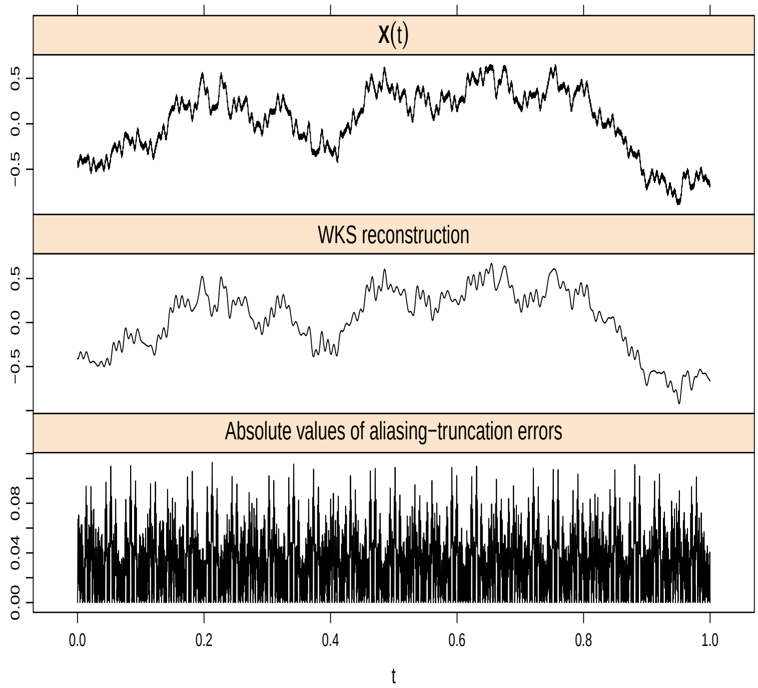

Рис. 1: Траєкторія процесу, її апроксимація і відповідна абсолютна помилка.

Такі результати були отримані для широких класів процесів (включаючи нестаціонарні процеси, випадкові поля, фрактальні процеси, і т.п.) і різних апроксимаційних схем. Наприклад, для класичної схеми Котельникова-Шеннона [9, 10], яка використовується у передачі радіосигналів і зображень з 50-х років минулого сторіччя,

$$\mathbf{X}_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin\left(\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)\right)}{\omega\left(t-\frac{k\pi}{\omega}\right)}\,\mathbf{X}\left(\frac{k\pi}{\omega}\right).$$

де ω містить інформацію про діпазон дозволених частот. Рисунок 1 демострує реалізацію випадкового процесу $X(t)$, його апроксимацію $X_n(t)$ методом Котельникова-Шеннона та відповідні абсолютні значення помилки апроксимації $|X(t)-X_n(t)|$.

Інший приклад - вейвелет наближення стохастичних сигналів [11]

$$\mathbf{X}_{n,\mathbf{k}_n}(t) = \sum_{|k|\leqslant k_0'} \xi_{0k}\phi_{0k}(t) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\leqslant k_j} \eta_{jk}\psi_{jk}(t)\,,$$

де $\mathbf{k}_n := (k_0', k_0, ..., k_{n-1})$,

$$\xi_{0k} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{X}(t)\overline{\phi_{0k}(t)}\, dt, \quad \eta_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{X}(t)\overline{\psi_{jk}(t)}\, dt\,,$$

а ϕ і ψ позначають базиси f та m вейвелетів.

Результати з моделювання й апроксимації випадкових процесів увійшли у нові монографії професора Козаченка з його учнями, наприклад, [2, 12, 13].

Підсумовуючи попереднє, можемо стверджувати що професором Козаченком була створена потужна завершена теорія випадкових процесів у різних метричних просторах з методологією моделювання й апроксимації важливих для практичних застосувань класів функціональних даних.

Ці, та інші результати досліджень Юрія Васильовича були відзначені багатьма нагородами, зокрема Державною премією України в галузі науки і техніки (2003) і премією НАН України імені М. М. Крилова (2012).

На завершення деякі особисті спогади про Юрія Васильовича. Автор цієї замітки був знайомий з ним з 1986 року, з того часу як Юрій Васильович читав йому курс математичної статистики. Ми працювали багато років на одній кафедрі, були разом у редколегій журналу Теорія Ймовірностей і Математична Статистика. Отримали з ним кілька сумісних грантів і Юрій Васильович кілька разів приїздив до Мельбурна. Як математик, Юрій Васильович, завжди вражав мене знанням дуже тонких результатів. Було не один раз, коли ми писали сумісні статті чи мені присилали на рецензію роботи його учнів, що в доведенні знаходилось важке місце чи неточність. І тут Юрій Васильович як з якоїсь магічної скрині виймав карколомну нерівність, яка виправляла все доведення.

Був ученим, який дійсно ставив математику понад усі особисті проблеми. Згадався один з його приїздів до Мельбурна. Одного дня ми домовились зустрітись в університеті щоб обговорити сумісну статтю. Їдучи з готелю в університет Юрій Васильович потрапив у серйозну аварію. Якби зустрічна машина вдарила машину в якій знаходився Юрій Васильович на пів метра лівіше, то можливо все закінчилось би для нього і водія дуже погано. Ситуація була стресова, на місце аварії приїхала поляція, у водія машини був нервовий зрив. Коли нарешті Юрій Васильович приїхав в університет, на мої схвильовані запитання про те як він себе почуває відповідь була: "Все добре, а от що я Вам хочу сказати про Теорему 2 ...".

Рис. 2: Ю.В.Козаченко з автором у Мельбурні

Одна з основних особистих рис Юрія Васильовича, яка мабуть і приваблювала до нього так багато учнів, була його відношення до інших. До кожного він говорив як до рівного, ніколи не показував своєї вищості в званнях, освіті чи положенні. Це створювало таку атмосферу простоти й доступності в спілкуванні, до якої тягнулись студенти, аспіранти, колеги. Його учнів можна знайти в університетах кожного регіону України. Здавалось що на кафедрі він ніколи не буває сам, весь час коло нього були його аспіранти й колишні учні. Для кожного у нього була задача і план статті. Він ще встигав їздити в Ужгород, Чернівці,... читати там курси й готувати кадри для місцевих університетів.

Юрій Васильович був вчителем у найвищому розумінні цього слова. Ще одна історія, яку я часто згадую, трапилась в мої університетські роки. Один з моїх однокурстників мав складати іспит Юрію Васильовичу, але так захопився математичною логікою й основами математики, що майже не готувався до екзамену. Звичайно, Юрій Васильович це моментально з'ясував, але замість того щоб "вліпити"двійку, почав розпитувати чим цей студент займається. Зрозумівши що той не просто прогулює його предмет, а серйозно працює над іншими математичними проблемами, поставив відмінно.

Неформальне ставлення Юрія Васильовича до людей, вміння дивився в суть і відкинути другорядне, часто було більш дієвим і повчальним ніж слідування загальним нормам. Мабуть тому всі ми, його колишні студенти, аспіранти й колеги з вдячністю згадуємо не лише його наукові поради, але і його уроки справжньої людяності.

Список використаних джерел

1. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. – Providence R.I.: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.
2. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* ϕ -субгаусссові випадкові процеси / О. І. Василик, Ю. В. Козаченко, Р. Є. Ямненко. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 231 с.
3. *Dudley R. M.* Universal Donsker classes and metric entropy / R. M. Dudley // Annals of Probability. – 1987. – Vol. 15. – P. 1306-1326.
4. *Dudley R. M.* Uniform central limit theorems / R. M. Dudley. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 436 p.
5. *Fernique X.* Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes / X. Fernique. In Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour IV-1974. Springer, 1975. – pp. 1–96.
6. *Kahane J.P.* Properties locales des fonctions a series de Fouries aleatories / J.P. Kahane // Studia Math. – 1960. – Vol. 19, no. 1. – P. 1–25.
7. *M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii.* Convex Functions and Orlicz Spaces / M.A. Krasnosel'skii, Ya.B. Rutickii. – Gröningen: Noordhof, 1961. – 249 p.
8. *Kozachenko Yu. V.* Sufficient conditions of continuity with probability one of sub-Gaussian random processes / Yu. V. Kozachenko // Dopovidi Akad. Nauk Ukr.SSR, Ser. A. – 1968. – No. 2. P. 113–115.
9. *Kozachenko Yu., Olenko A.* Whittaker-Kotel'nikov-Shannon approximation of φ-sub-Gaussian random processes / Yu. Kozachenko, A. Olenko // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 443(2). – P. 926–946.
10. *Kozachenko Yu., Olenko A.* Aliasing-Truncation Errors in Sampling Approximations of Sub-Gaussian Signals / Yu. Kozachenko, A. Olenko // IEEE Transactions on Information Theory. – 2016. – Vol. 62, no. 10. – P. 5831-5838.
11. *Kozachenko Yu., Olenko A., Polosmak O.* On convergence of general wavelet decompositions of nonstationary stochastic processes/ Yu. Kozachenko, A. Olenko, O. Polosmak // Electron. J. Probab. – 2013. – Vol. 18, no. 69. – P. 1–21.
12. *Козаченко Ю. В., Пашко А. О.* Моделювання випадкових процесів / Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко. – Київ: ВПЦ Київський університет, 1999. – 223 с.
13. *Kozachenko Y., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability / Y.Kozachenko, O.Pogorilyak, I.Rozora, A.Tegza. – ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd Oxford, 2016. – 346 p.
14. *Ledoux M., Talagrand M.* Probability in Banach spaces. Isoperimetry and processes / M. Ledoux, M. Talagrand. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 482 p.
15. *Talagrand M.* The generic chaining. Upper and lower bounds of stochastic processes / M. Talagrand. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 593 p.
16. *Talagrand M.* Upper and lower bounds for stochastic processes. Modern methods and classical problems / M. Talagrand. – Heidelberg: Springer, 2014. – 626 p.

Надійшла до редколегії 10.10.2020