УДК 519.21

О.В. Іванов [1], *д.ф.-м.н., проф.*
Н.В. Каптур [2], *студ.*
І.М. Савич[3], *к.ф.-м.н.*

Консистентність оцінок Коенкера-Бассетта в лінійній моделі регресії

[1,2,3] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37
e-mail: [1]alexntuu@gmail.com,
[2]vasylivna.nv@gmail.com
[3]sim_ka@i.ua

O.V. Ivanov [1], *Dr. Sci., Prof.*
N.V. Kaptur [2], *stud.*
I.M. Savych [3], *Ph.D.*

Consistency of Konker-Bassett estimators in linear regression model

[1,2,3]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsry Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, 37 Peremogy prospect
e-mail: [1]alexntuu@gmail.com,
[2]vasylivna.nv@gmail.com
[3]sim_ka@i.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної моделі регресії з дискретним часом спостереження та випадковим шумом, який є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінки Коенкера - Бассетта параметрів функції регресії є консистентними.

Ключові слова: лінійна модель регресії, функція регресії, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка Коенкера - Бассетта, консистентність.

Asymptotic properties of Koenker - Bassett estimators of linear regression model parameters with discrete observation time and random noise being nonlinear local transformation of Gaussian stationary time series with singular spectrum are studied. The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise, under which the Koenker - Bassett estimators of regression model parameters are consistent. Linear regression model with discrete observation time and bounded open convex parametric set is the object of the studying. For the first time in linear regression model with described stationary time series as noise having singular spectrum, the weak consistency of unknown parameters Koenker - Bassett estimators are obtained. For getting these results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, expansions by Chebyshev - Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values.

Key Words: linear regression model, regression function, local transformation of Gaussian stationary time series, Koenker - Bassett estimators, consistency.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Задача оцінювання невідомих параметрів сигналу у моделях спостережень «сигнал плюс шум» є важливою проблемою статистики випадкових процесів. У роботі розглядається лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому розумінні, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням стаціонарного гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною щільністю (зокрема, ця щільність може відповідати сильно залежному часовому ряду). Вивчення часових рядів з несумовними коваріаційними функціями породжує складні ймовірнісні та статистичні задачі.

В сучасній теорії статистичного оцінювання чільне місце займають оцінки квантильної регресії, або оцінки Коенкера-Бассета [1], що визначаються за допомогою несиметричної функції втрат та є оцінками невідомого параметра — квантиля спостережень.

Асимптотичні властивості оцінок

Коенкера-Бассетта у випадку нелінійних моделей регресії з неперервним часом та шумом, що є локальним перетворенням гауссівського стаціонарного сильно залежного випадкового процесу, досліжувалися раніше. Зокрема, у статті І.М. Савич [2] доведено слабку консистентність, а у роботах О.В. Іванова, І.М. Савич [3, 4] задачу про знаходження асимптотичного розподілу нормованих оцінок Коенкера-Бассетта зведено до простішої задачі знаходження асимптотичного розподілу одного інтегралу від породженого випадковим шумом індикаторного процесу, зваженого градієнтом функції регресії та отримано асимптотичний розподіл нормованих оцінок.

2 Постановка задачі

Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j,\theta) + \varepsilon_j,\ j \in \overline{1,N}, \tag{1}$$

де $g(j,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{q} \theta_i g_i(j),\ \ j \geqslant 1,\ \ \theta = (\theta_1, ..., \theta_q) \subset \Theta \subset \mathbb{R}^q,\ \ \Theta$ – відкрита опукла обмежена множина. Відносно похибок спостережень ε_j припустимо наступне.

A1. $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, а саме: $\varepsilon_j = G(\xi_j),\ \ G(x),\ x \in \mathbb{R}$, – борелева функція така, що $E\varepsilon_0 = 0,\ \ E\varepsilon_0^2 < \infty$.

A2. Часовий ряд $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, визначено на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P),\ \ E\xi_0 = 0$, а його коваріаційну функцію задано виразом

$$B(j) = E\xi_j\xi_0 = \sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(j),\ j \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 0, \tag{2}$$

причому $A_l > 0,\ \sum\limits_{l=0}^{r} A_l = 1$,

$B_{\alpha_l,\chi_l}(j) = \frac{\cos(\chi_l j)}{(1+j^2)^{\alpha_l/2}}\ ,\ \ \alpha_l \in (0,1),\ \ \ l = \overline{0,r}$, $0 \leqslant \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < \pi$.

Якщо $\chi_0 = 0$, то часовий ряд $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, є сильно залежним. Позначимо $F(x),\ x \in \mathbb{R}$, функцію розподілу випадкової величини ε_0.

A3. $F(0) = \beta,\ \beta \in (0,1)$.

Введемо функцію втрат

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \geqslant 0, \\ (\beta-1)x, & x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

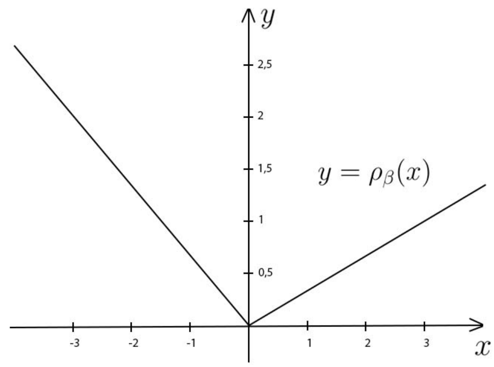

Рис. 1. Графік функції $y = \rho_{1/3}(x)$.

Означення 1. *Квантильною оцінкою, або оцінкою Коенкера-Бассетта, параматра* $\theta \in \Theta$, *отриманою за спостереженнями* (1), *називається будь-який випадковий вектор* $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1,N}) \in \Theta^c$ *такий, що*

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau\in\Theta^c} Q_N(\tau),$$
$$Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(X_j - g(j,\tau)),$$

Θ^c – *замикання множини* Θ.

За введених умов оцінка $\hat{\theta}_N$ існує [5].

У моделі квантильної регресії рівня β спостереження можна записати у вигляді суми квантильної функції регресії та «похибок» спостережень, про функцію розподілу F яких відомо, що $F(0) = \beta$. У роботі зроблено спрощуюче припущення про рівність нулю математичного сподівання похибок спостережень. Це звужує ідею квантильної регресії, але надає можливість розглядати звичайні моделі регресії з несиметричними похибками спостережень і отримувати робастні оцінки Коенкера-Бассетта параметрів регресії, використовуючи дану функцію втрат. Зауважимо також, що оцінки Коенкера-Бассетта узагальнює оцінку найменших модулів у тому розумінні, що оцінка найменших модулів є оцінкою невідомого параметра медіани різнорозподілених спостережень.

Позначимо

$$d_N^2 = \ diag\ \left(d_{iN}^2\right)_{i=1}^{q},\ d_{iN}^2 = \sum_{j=1}^{N} g_i^2(j), \tag{4}$$

та припустимо, що є вірними наступні нерівності.

B1(i) $0 < \underline{c_i} \leqslant \liminf\limits_{N\to\infty} N^{-1/2}d_{iN} \leqslant \limsup\limits_{N\to\infty} N^{-1/2}d_{iN} \leqslant \overline{c_i} < \infty,\ i=\overline{1,q}.$

Зробимо заміну змінних у функції регресії $u = N^{-1/2}d_N(\tau-\theta)$ та покладемо $h(j,u) = g(j,\theta+N^{1/2}d_N^{-1}u)$. Тоді множина Θ трансформується в множину $\overline{U}_N(\theta) = N^{-1/2}d_N(\Theta-\theta)$, а оцінка $\hat\theta_N$ – в оцінку $\overline{u}_N = N^{-1/2}d_N(\Theta-\theta)$.

Запишемо

$$Q_N^*(u) = Q_N(\theta+N^{1/2}d_N^{-1}u),\ u\in\overline{U}_N^c(\theta);$$
$$V(r) = \{u\in\mathbb{R}^q : ||u|| < r\},\ r>0;$$
$$\Phi_{kN}(u_1,u_2) = \sum_{j=1}^N |h(j,u_1)-h(j,u_2)|^k,\ k=1,2;$$
$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^+ + \varepsilon_j^-,\ \varepsilon_j^+ = \varepsilon_j\chi\{\varepsilon_j\leqslant 0\},\ \varepsilon_j^- = \varepsilon_j\chi\{\varepsilon_j<0\};$$
$$I(N) = \Big(I_{ik}(N)\Big)_{i,k=1}^q,\ I_{ik}(N) = N^{-1}\sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j).$$

Позначимо $\lambda_{min}(I(N))$ – найменше власне число матриці $I(N)$.

B1(ii). Для достатньо великих $N (N>N_0)$

$$\lambda_{min}(I(N)) \geqslant \underline{\lambda} > 0. \tag{5}$$

Отримаємо з умов **B1(i)** та **B1(ii)** корисні для нас нерівності. Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon>0$ та $N>N_0$ справджується $N^{-\frac12}d_{iN} \geqslant \underline{c_i}-\varepsilon$, звідки

$$\begin{gathered} N^{\frac12}d_{iN}^{-1} \leqslant \frac{1}{\underline{c_i}-\varepsilon} \leqslant \\ \max_{i\leqslant i\leqslant q}\Big(\frac{1}{\underline{c_i}-\varepsilon}\Big) = \frac{1}{\min\underline{c_i}-\varepsilon},\ i=\overline{1,q}. \end{gathered} \tag{6}$$

З іншого боку, $N^{-\frac12}d_{iN} \leqslant \overline{c_i}+\varepsilon$, звідки

$$\begin{gathered} N^{\frac12}d_{iN}^{-1} \geqslant \frac{1}{\overline{c_i}+\varepsilon} \geqslant \\ \min_{1\leqslant i\leqslant q}\Big(\frac{1}{\overline{c_i}+\varepsilon}\Big) = \frac{1}{\max\overline{c_i}+\varepsilon},\ i=\overline{1,q}. \end{gathered} \tag{7}$$

Оцінимо величину

$$\begin{gathered} N^{-1}\Phi_{2N}(u_1,u_2) = \\ \sum_{j=1}^N\Big(\sum_{i=1}^q g_i(j)N^{\frac12}d_{iN}^{-1}(u_1^i-u_2^i)\Big)^2 \leqslant \\ \Big(\sum_{i=1}^q |u_1^i-u_2^i|\Big)^2 \leqslant q||u_1-u_2||^2, \end{gathered} \tag{8}$$

Тоді

$$\sup_{u\in V^c(r)} N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) \leqslant qr^2. \tag{9}$$

Крім цього,

$$\begin{gathered} \sup_{||u_1-u_2||\leqslant\delta} N^{-1}\Phi_{1N}(u_1,u_2) \leqslant \\ \sup_{||u_1-u_2||<\delta}\Big(N^{-1}\Phi_{2N}(u_1,u_2)\Big)^{1/2} \leqslant q^{1/2}\delta. \end{gathered} \tag{10}$$

Маємо також за (5) для $N>N_0$

$$\begin{gathered} N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) = \\ \sum_{i,k=1}^q\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j)(N^{1/2}d_{iN}^{-1}u_i)\times \\ \times(N^{1/2}d_{kN}^{-1}u_k)\Big) \geqslant \\ \geqslant \underline{\lambda}||N^{\frac12}d_N^{-1}u||^2 \geqslant \underline{\lambda}(\max\overline{c_i}+\varepsilon)^{-2}||u||^2. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким чином, для довільно малого $r>0$, для $N>N_0$ існує таке $\nu(r)>0$, що

$$\inf_{||u||>r} N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) \geqslant \nu(r). \tag{12}$$

У якості $\nu(r)$ можна, наприклад, взяти величину

$$\nu(r) = \underline{\lambda}(2\ \max\overline{c_i})^{-2}\ r^2. \tag{13}$$

Сформулюємо властивоті функції втрат ρ_β, деякі з яких будуть використані в подальшому тексті [2].

I. $\rho_\beta(ax) = a\rho_\beta(x),\ a\geqslant 0;$

II. $\rho_\beta(x)+\rho_\beta(-x) = |x|;$

III. $\underline{\beta}|x| \leqslant \rho_\beta(x) \leqslant \overline{\beta}|x|,$
де $\underline{\beta} = \beta\bigwedge(1-\beta),\ \overline{\beta} = \beta\bigvee(1-\beta);$

IV. $\rho_\beta(x+y) \leqslant \rho_\beta(x)+\rho_\beta(y);$

V. $|\rho_\beta(x)-\rho_\beta(y)| \leqslant \rho_\beta(x-y)\bigvee\rho_\beta(y-x) \leqslant \overline{\beta}|x-y|;$

VI. *Якщо* $E|\xi|<\infty,$ *то* $E\rho_\beta(\xi) = E\rho_{1-\beta}(-\xi);$

VII. *Якщо* $E\xi^2<\infty,$ *то* $D\rho_\beta(\xi) = D\rho_{1-\beta}(-\xi).$

Оскільки $E\rho_\beta(\xi) = \beta E\xi^+ + (\beta-1)E\xi^-$, то у впипадку, коли $E\xi = E\xi^+ + E\xi^- = 0$, маємо $E\rho_\beta(\xi) = E\xi^+$. Зокрема, $E\rho_\beta(\varepsilon_0) = E\varepsilon_0^+$.

Наступна умова є умовою контрасту, тобто умовою розрізняння параметрів.

C1. Для довільного $r>0$ існує $\triangle(r)>0$ таке, що для $N>N_0$

$$\inf_{u\in\overline{U}_N^c(\theta)\setminus V^c(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) \geqslant E\varepsilon_0^+ + \triangle(r), \tag{14}$$

3 Основний результат

Нехай $\alpha = \min\limits_{0 \leqslant l \leqslant r} \alpha_l$, де α_l – константи з умови **A2**.

Теорема 1. *За умов* **A1** – **A3**, **B1(i)** *та* **C1** *для довільного* $r > 0$

$$P\Big\{||\overline{u}_N|| \geqslant r\Big\} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty. \qquad (15)$$

Доведення. Позначимо

$$\delta(u) = Q_N^*(u) - EQ_N^*(u).$$

Тоді $\delta_N(0) = Q_N^*(0) - EQ_N^*(0) = Q_N(\theta) - EQ_N(\theta) = \sum\limits_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j) - NE\varepsilon_0^+$. Переписуючи означення ОКБ для нормованої оцінки $\overline{u}_N$, отримуємо

$$Q_N^*(\overline{u}_N) = \min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta)} Q_N^*(u),$$

$$Q_N^*(u) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta\Big(X_j - h(j,u)\Big),$$

$$Q_N^*(\overline{u}_N) \leqslant Q_N^*(0) = \delta_N(0) + NE\varepsilon_0^+ \text{ м. н.}$$

З використанням умови **C1** для $\gamma \in (0,1)$ маємо

$$\begin{aligned}
&P\Big\{\{||\overline{u}_N|| \geqslant r\Big\} = \\
&P\Big\{||\overline{u}_N|| \geqslant r\} \bigcap \{Q_N^*(\overline{u}_N) \leqslant \delta_N(0) + NE\varepsilon_0^+\}\Big\} \leqslant \\
&P\Big\{\min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}Q_N^*(u) \leqslant N^{-1}\delta_N(0) + E\varepsilon_0^+\Big\} \leqslant \\
&P\Big\{\min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}Q_N^*(u) \leqslant N^{-1}\delta_N(0) + \\
&+ \min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) - \triangle(r)\Big\} \leqslant \\
&P\Big\{N^{-1}\delta_N(0) \geqslant (1-\gamma)\triangle(r)\Big\} \\
&+ P\Big\{\min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}Q_N^*(u) - \\
&- \min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) \leqslant -\gamma\triangle(r)\Big\} \\
&= P_1 + P_2.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
P_2 &\leqslant P\Big\{\min_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}\delta_N(u) \leqslant -\gamma\triangle(r)\Big\} \leqslant \\
&\leqslant P\Big\{\max_{u \in \overline{U}_N^c(\theta) \setminus V(r)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geqslant \gamma\triangle(r)\Big\}.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Завдяки умові **B1(i)** та обмеженості Θ, всі множини $\overline{U}_N^c(\theta)$ при $N > N_0$ потрапляють в деяку кулю $V(r_0)$ для деякого $r_0 > r$, тобто нерівність (17) можна продовжити наступним чином:

$$\begin{aligned}
P_2 &\leqslant P\Big\{\max_{u \in V^c(r_0) \setminus V^c(r)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geqslant \gamma\triangle(r)\Big\} \leqslant \\
&\leqslant P\Big\{\max_{u \in V^c(r_0)} N^{-1}|\delta_N(u)| \geqslant \gamma\triangle(r)\Big\}.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Оцінимо спочатку ймовірність P_1. За нерівністю Чебишова

$$P_1 \leqslant \frac{N^{-2}E\delta_N^2(0)}{(1-\gamma)^2 \triangle^2(r)},$$

$$\begin{aligned}
N^{-2}E\delta_N^2(0) &= N^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(\varepsilon_j) - NE\varepsilon_0^+\Big)^2 = \\
&= N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N} E\rho_\beta(\varepsilon_j)\rho_\beta(\varepsilon_k) - (NE\varepsilon_0^+)^2.
\end{aligned} \qquad (19)$$

За властивістю III функції втрат ρ_β

$$E\rho_\beta^2(\varepsilon_0) \leqslant \overline{\beta}^2 E\varepsilon_0^2 = \varkappa_1 < \infty.$$

Тоді в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$, де $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ - стандартна гауссівська щільність, є вірним розклад

$$\rho_\beta(G(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{m!} H_m(x),$$

$$c_m = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho_\beta(G(x))H_m(x)\varphi(x)dx, \ m \geqslant 0,$$

за поліномами Чебишова – Ерміта

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2/2} \frac{d^m}{dx^m}\, e^{-x^2/2}, \ m \geqslant 0,$$

причому $EH_m(\xi_j)H_n(\xi_k) = \delta_m^n m! B^m(j-k)$, δ_m^n – символ Кронекера, тобто $\delta_m^n = 1$ при $m = n$ та $\delta_m^n = 0$, якщо $m \neq n$. З цього випливає, що

$$E\rho_\beta(\varepsilon_j)\rho_\beta(\varepsilon_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^2}{m!} B^m(j-k), \qquad (20)$$

зокрема,

$$E\rho_\beta^2(\varepsilon_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m^2}{m!} \leqslant \varkappa_1.$$

Зауважимо, що $E\rho_\beta(\varepsilon_0) = \varepsilon_0^+ = c_0$, та з (19), (20) маємо

$$N^{-2}E\delta_N^2(0) = N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!}B^m(j-k) - (E\varepsilon_0^+)^2\Big) = N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2}{m!}B^m(j-k)\Big) \leqslant \varkappa_1 N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}|B(j-k)|.$$

Оцінимо останню подвійну суму:

$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}|B(j-k)| = N^{-2}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}(N-|s|)|B(s)| = N^{-1}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}(1-\frac{|s|}{N})|B(s)| \leqslant 2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)|.$$

З іншого боку, при $s \neq 0$ за нашими умовами

$$|B(s)| \leqslant \sum_{l=0}^{r}A_l(1+s)^{-\alpha_l/2} \leqslant (1+s^2)^{-\alpha/2} \leqslant s^{-\alpha}.$$

Таким чином,

$$2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)| = 2N^{-1} + 2N^{-1}\sum_{s=1}^{N}|B(s)| \leqslant 2N^{-1} + 2N^{-1}\sum_{s=1}^{N}s^{-\alpha} \leqslant 2N^{-1} + 2N^{-1}\int\limits_0^N s^{-\alpha}ds = 2N^{-1} + 2(1-\alpha)^{-1}N^{-\alpha}.$$

Отже, при $N \to \infty$

$$P_1 \leqslant \frac{2\varkappa_1}{(1-\gamma)^2\triangle^2(r)}\Big(N^{-1} + (1-\alpha)^{-1}N^{-\alpha}\Big) = O(N^{-\alpha}). \qquad (21)$$

Оцінимо тепер імовірність P_2, користуючись нерівністю (18). Нехай $F^{(1)},...,F^{(L)} \subset V^c(r_0)$ – замкнені множини, діаметри яких не перевищують значення $\delta > 0$, яке ми оберемо нижче, причому

$$\bigcup_{i=1}^{L}F^{(i)} = V^c(r_0). \qquad (22)$$

Зафіксуємо точки $u_i \in F^{(i)},\ i = \overline{1,L}$. Тоді

$$P_2 \leqslant P\Big\{\sup_{u\in\bigcup_{i=1}^{L}F^{(i)}} N^{-1}|\delta_N(u)| \geqslant \gamma\triangle(r)\Big\} \leqslant \sum_{i=1}^{L}P\Big\{\sup_{u',u''\in F^{(i)}} N^{-1}|\delta_N(u') - \delta_N(u'')| + N^{-1}|\delta_N(u_i)| \geqslant \gamma\triangle(r)\Big\}. \qquad (23)$$

За властивістю V функції втрат ρ_β отримуємо

$$|\delta_N(u') - \delta_N(u'')| \leqslant |Q_N^*(u') - Q_N^*(u'')| + E|Q_N^*(u') - Q_N^*(u'')| \leqslant \sum_{j=1}^{N}|\rho_\beta(X_j - h(j,u')) - \rho_\beta(X_j - h(j,u''))| + E\sum_{j=1}^{N}|\rho_\beta(X_j - h(j,u')) - \rho_\beta(X_j - h(j,u''))| \leqslant 2\overline{\beta}\Phi_{1N}(u',u''). \qquad (24)$$

З нерівності (10) випливає, що для $u',u'' \in F^{(i)}$

$$2\overline{\beta}\Phi_{1N}(u',u'') \leqslant 2\overline{\beta}q^{\frac{1}{2}}\delta. \qquad (25)$$

Таким чином, з (22) - (25) знаходимо, що

$$P_2 \leqslant \sum_{i=1}^{L}P\Big\{N^{-1}|\delta_N(u_i)| \geqslant \gamma\triangle(r) - 2\overline{\beta}q^{\frac{1}{2}}\delta\Big\}. \qquad (26)$$

Оберемо величину $\delta > 0$ таким чином, щоб виконувалась наступна нерівність $\gamma\triangle(r) - 2\overline{\beta}q^{\frac{1}{2}}\delta := \varepsilon(r,\delta) > 0$ (зменшення δ призведе лише до зростання числа L), і оцінимо кожний доданок суми (26) окремо.

Маємо за нерівністю Чебишова

$$P\Big\{N^{-1}|\delta_N(u_i)| \geqslant \varepsilon(r,\delta)\Big\} \leqslant \varepsilon^{-2}(r,\delta)N^{-2}E\delta_N^2(u_i). \qquad (27)$$

Позначимо

$$\triangle h(j,u_i) = h(j,u_i) - h(j,0)$$

і запишемо

$$\delta_N(u_i) = Q_N^*(u_i) - EQ_N^*(u_i) = \sum_{j=1}^{N}\rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)) - E\sum_{j=1}^{N}\rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)),$$

$$E\delta_N^2(u_i) = \sum_{j,k=1}^{N} E\rho_\beta\Big(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)\Big)\times$$
$$\rho_\beta\Big(\varepsilon_k - \triangle h(k,u_i)\Big) - \Big(E\sum_{j=1}^{N}\rho_\beta(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i))\Big)^2.$$

Покладемо

$$\rho_\beta\Big(\varepsilon_j - \triangle h(j,u_i)\Big) = Z(\varepsilon_j, j) = Z(G(\xi_j), j). \tag{28}$$

Оскільки для будь-якого $j = \overline{1,N}$ за властивістю III функції ρ_β

$$EZ^2(\varepsilon_0, j) = E\rho_\beta^2\Big(\varepsilon_0 - \triangle h(j,u_i)\Big) \leqslant \overline{\beta}^2\Big(E\varepsilon_0^2 + (\triangle h(j,u_i))^2\Big) < \infty, \tag{29}$$

то функцію $Z(G(\cdot), j)$ можна розкласти в ряд у просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ за поліномами Чебишова – Ерміта:

$$Z(G(x), j) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m(j,u_i)}{m!}H_m(x),$$
$$c_0(j,u_i) = EZ(\varepsilon_0, j),$$
$$c_m(j,u_i) = \int_{\mathbb{R}}\rho_\beta\Big(G(x) - \triangle h(j,u_i)\Big)H_m(x)\varphi(x)dx,$$
$m \geqslant 1$.

Тоді користуючись попередніми міркуваннями, які дозволили отримати оцінку (21), та нерівністю (29), маємо при $N \to \infty$

$$N^{-2}E\delta_N^2(u_i) =$$
$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m(j,u_i)c_m(k,u_i)}{m!}B^m(j-k) -$$
$$c_0(j,u_i)c_0(k,u_i)\Big) =$$
$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(j,u_i)c_m(k,u_i)}{m!}B^m(j-k)\Big) \leqslant$$
$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,u_i)}{m!}|B(j-k)|\Big) \leqslant$$
$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}EZ^2(\varepsilon_0, j)|B(j-k)| \leqslant$$
$$N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\overline{\beta}^2\Big(E\varepsilon_0^2 + (\triangle h(j,u_i))^2\Big)|B(j-k)| =$$
$$O(N^{-\alpha}) + \overline{\beta}^2 N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2|B(j-k)|. \tag{30}$$

Оцінимо останню суму, скориставшись нерівністю (9):

$$\begin{aligned}
&N^{-2}\sum_{j,k=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2|B(j-k)| =\\
&N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Big(\triangle h(j,u_i)\Big)^2 N^{-1}\sum_{k=1}^{N}|B(j-k)| \leqslant\\
&N^{-1}\Phi_{2N}(u_i,0)N^{-1}\sum_{s=-(N-1)}^{N-1}|B(s)| \leqslant\\
&2qr_0^2N^{-1}\sum_{s=0}^{N}|B(s)| = O(N^{-\alpha})
\end{aligned} \tag{31}$$

при $N \to \infty$. З (26), (27), (30) та (31) отримуємо, що $P_2 = O(N^{-\alpha})$. □

Зауважимо, що за умови **B2(i)** справедливість для будь-якого $r > 0$ співвідошення (15) та співвідношення

$$P\{||\hat\theta_N - \theta|| \geqslant r\} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty \tag{32}$$

випливає одне з одного. Щоб впевнитись в цьому майже очевидному твердженні, скористаємось міркуваннями, які привели до нерівностей (6) та (7).

Нехай справедливе (15). Тоді маємо для довільного $r > 0$

$$\begin{aligned}
&P\{||\hat\theta_N - \theta|| \geqslant r\} =\\
&P\{||N^{-1/2}d_N^{-1}\Big(N^{-1/2}d_N(\hat\theta_N - \theta)\Big)|| \geqslant r\} \leqslant\\
&P\{||N^{-1/2}d_N(\hat\theta_N - \theta)|| \geqslant r(\min\underline{c}_i - \varepsilon)\} =\\
&O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty,
\end{aligned}$$

якщо обрати ε достатньо малим, тобто (32) виконується.

Нехай, навпаки, має місце (32). Тоді для довільного $r > 0$

$$\begin{aligned}
&P\{||N^{-1/2}d_N(\hat\theta_N - \theta)|| \geqslant r\} \leqslant\\
&P\{||\hat\theta_N - \theta|| \geqslant r(\max\overline{c}_i + \varepsilon)^{-1}\} = O(N^{-\alpha})
\end{aligned}$$

при $N \to \infty$, тобто справедливе (15).

Сформулюємо достатні умови виконання умови контрасту **C1**.

C2.(i) $\sup\limits_{j\geqslant 1}\max\limits_{\tau_1,\tau_2\in\Theta^c}|g(j,\tau_1) - g(j,\tau_2)| = g_0 < \infty$;

(ii) випадкова величина ε_0 має щільність $p(x) = F^{'}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, причому
$\inf_{|x| \leqslant g_0} p(x) = p_0 > 0$.

У роботі [6, 7] доведено, що за умови **C2** для $g \in [0, g_0]$

$$E\rho_\beta(\varepsilon_0 \pm g) - E\rho_\beta(\varepsilon_0) \geqslant \frac{1}{2}p_0 g^2. \qquad (33)$$

З нерівності (33) випливає, що

$$N^{-1}EQ_N(\theta + N^{1/2}d_N^{-1}u) \geqslant$$
$$E\rho_\beta(\varepsilon_0) + \frac{1}{2}p_0 N^{-1}\Phi_{2N}(u, 0), \qquad (34)$$

або для будь-якого $r > 0$

$$\inf_{u \in U_N^c(\theta) \setminus V^c(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) \geqslant$$
$$E\varepsilon_0^+ + \frac{1}{2}p_0 \inf_{||u||>r} \Phi_{2N}(u, 0) \geqslant \qquad (35)$$
$$E\varepsilon_0^+ + \frac{1}{2}p_0\ \nu(r),$$

де $\nu(r)$ виникає в нерівності (12) і задано виразом (13). Нагадаємо, що (12) отримано за припущенням **B1(ii)**. Таким чином, ми можемо сформулювати наступний наслідок доведеної теореми, який зручніше застосовувати.

Наслідок 1. *За умов* **A1-A3**, **B1(i)**,**B1(ii)** *та* **C2** *для довільного* $r > 0$

$$P\{||\hat{\theta}_N - \theta|| \geqslant r\} = O(N^{-\alpha}) \text{ при } N \to \infty. \qquad (36)$$

Приклад 1. Розглянемо в моделі спостережень (1) функцію регресії

$$g(j, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \Big(A_i \sin\varphi_i j + B_i \cos\varphi_i j\Big),\ j \geqslant 1, \qquad (37)$$

де φ_i, $i = \overline{1, n}$, – відомі частоти гармонічних коливань, причому $0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n < \pi$. Вектор невідомих параметрів θ – це вектор невідомих амплітуд суми гармонічних коливань (37), а саме:

$$\theta = (A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n).$$

Таким чином, в цьому прикладі $q = 2n$, і ми маємо справу з вектором - градієнтом функції регресії

$$\bigtriangledown g(j) = (\sin\varphi_1 j, \cos\varphi_1 j, ..., \sin\varphi_n j, \cos\varphi_n j),\quad j \geqslant 1. \qquad (38)$$

Перевіримо виконання умов теореми 1 та наслідку 1 щодо функції регресії $g(j, \theta)$. Оскільки

$$N^{-1}d_{iN}^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2},\ i = \overline{1, 2n},$$

то умову **B1(i)** виконано. Неважко зрозуміти, що з огляду на (38), $I_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{I}_{2n}$, де $\mathbb{I}_{2n}$ – одинична матриця $2n$ -го порядку, і умову **B1(ii)** також виконано. Варто зауважити, що

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u, 0) =$$
$$\Big\langle I_N N^{1/2}d_N^{-1}u, N^{1/2}d_N^{-1}u\Big\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} ||u||^2$$

рівномірно за $u \in V^c(r_0)$, де куля $V^c(r_0)$ містить всі множини $\overline{U}_N^c(\theta)$ (див. вище). Крім цього,

$$|g(j, \tau_1) - g(j, \tau_2)| \leqslant \sqrt{2n}||\tau_1 - \tau_2|| \leqslant \sqrt{2n}\ diam\ \Theta,$$

і умову **C2(i)** виконано з $g_0 = \sqrt{2n}\ diam\ \Theta$. Таким чином, за умови **C2(ii)** є вірною умова **C2**.

4 Висновок

У роботі отримано посилену властивість слабкої консистентності оцінок Коенкера-Бассетта в лінійній моделі регресії з нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним часовим рядом з сингулярним спектром в якості випадкового шуму, а саме: в формулах (15), (36) оцінено швидкість, з якою ймовірності в лівих частинах цих співвідношень прямують до нуля. Припускається, що параметрична множина, що містить невідоме істинне значення параметра, є обмеженою відкритою опуклою множиною евклідового простору.

Сформульовано наслідок до теореми про консистентність цих оцінок, де вказано умови для перевірки складної умови контрасту. Наведено приклад гармонічної функції регресії, для якої справджуються всі умови.

Отримані результати дозволяють використовувати оцінки Коенкера-Бассетта в моделях регресії з несиметричними похибками спостережень. Природним напрямом продовження досліджень є доведення асимптотичної нормальності оцінок Коенкера-Бассетта.

Список використаних джерел

1. *Bassett G.* Regression quantile / G. Bassett, R. Koenker // Econometrica. – 1978. –Vol. 46. –P 33-50.

2. *Савич І.М.* Конзистентність квантильних оцінок у моделях регресії з сильно залежним шумом / І.М. Савич // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2010. – 82. – С. 128-136.

3. *Ivanov A.V.* Asymptotic Properties of Koenker–Bassett Estimator in Regression Model with Long-Range Dependence / A.V. Ivanov, I.N. Savich // Communications in Statistics: Theory and Methods. – 2011. – 40 (19-20). – P. 3555-3568.

4. *Іванов О.В.* Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера—Бассета параметра регресії з сильно залежним шумом / О.В. Іванов, І.М. Савич // Укр. мат. журнал. – 2011. – 63(8). – С. 1030-1052.

5. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates / J. Pfanzagl // Metrica, 14. – 1969. – P. 249-272.

6. *Ivanov A.V.* Asymptotic Theory of Nonlinear Regression / A.V. Ivanov // Kluwer Academic Press, Dordrecht. – 1997. – 327 p.

7. *Орловськсий І. В.* Конзистентність оцінок Коенкера-Бассетта в нелінійній моделі регресії / І.В. Орловський // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2004.– 3.– С. 144-150.

References

1. BASSETT, G., KOENKER, R. (1978) Regression quantile.*Econometrica.* – 46. –p. 33-50.

2. SAVICH, I.M. (2011) Consistency of quantile estimators in regression models with long-range dependent noise. *Theor. of Probability and Math. Statist.* – 82. – p. 129-138.

3. IVANOV, A.V., SAVICH, I.N. (2011) Asymptotic Properties of Koenker–Bassett Estimator in Regression Model with Long-Range Dependence. *Communications in Statistics: Theory and Methods.* – 40 (19-20). – p. 3555-3568.

4. IVANOV, A.V.,SAVICH, I.N. (2012) On the asymptotic distribution of the Koenker-Bassett estimator for a parameter of the nonlinear model of regression with strongly dependent noise. *Ukrainian Mathematical Journal.*– 63 (8).–p. 1187-1212.

5. PFANZAGL, J. (1969) On the measurability and consistency of minimum contrast estimates. *Metrica.* –14. – p. 249–272.

6. IVANOV, A.V.(1997) Asymptotic Theory of Nonlinear Regression. *Kluwer Academic Press, Dordrecht.* – 327 p.

7. ORLOVSKY, I. V. (2004) Consistensy of Koenker-Bassett estimator in nonlinear regression model. *Naukovi visti NTUU "KPI"*.–3. –p. 144-150.

Received: 7.03.2018