УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.3

О.І. Василик[1], *к.ф.-м.н., доцент*
О.М. Гопкало[2], *аспірантка*
Ю.В. Козаченко[3], *д.ф-м.н, професор*
Л.М. Сахно[4], *д.ф-м.н, с.н.с*

## Деякі властивості та оцінки для $\varphi$-субгауссових випадкових процесів

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: olia_gopkalo@ukr.net
[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: ykoz@ukr.net
[4]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: lms@univ.kiev.ua

O.I. Vasylyk[1], *Ph.D., Associate Professor*
O.M. Hopkalo[2], *Ph.D. Student*
Yu.V. Kozachenko[3], *Dr., Professor*
L.M. Sakhno[4], *Dr., Senior Researcher*

## Some properties and estimates for $\varphi$-sub-Gaussian stochastic processes

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ovasylyk@univ.kiev.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: olia_gopkalo@ukr.net
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: ykoz@ukr.net
[4]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: lms@univ.kiev.ua

*У роботі досліджуються властивості випадкових процесів, що належать до просторів $\varphi$-субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Встановлено умови, за яких процеси, що визначені на $\mathbb{R}$, є обмеженими і неперервними з ймовірністю 1, виписано оцінки для розподілу супремуму таких процесів.*

*Ключові слова: $\varphi$-субгауссові процеси, неперервність, обмеженість, розподіл супремуму*

*In this paper, there are studied properties of stochastic processes belonging to the spaces of $\varphi$-sub-Gaussian random variables $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. For the processes defined on $\mathbb{R}$, we obtain conditions for boundedness and continuity with probability 1, estimates for the distribution of the supremum are also derived.*

*Key Words: $\varphi$-sub-Gaussian processes, continuity, boundedness, distribution of supremum*

## 1 Вступ

У цій роботі досліджуються властивості випадкових процесів, що належать до просторів $\varphi$-субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Такі процеси являють собою підклас процесів із просторів Орлича експоненціального типу. Детальне дослідженння випадкових процесів із просторів Орлича представлено у монографії [3]. За допомогою ентропійних методів в [3] встановлено загальні умови обмеженості та неперервності процесів Орлича, заданих на компактних множинах, знайдено оцінки розподілів супремумів таких процесів, а також значну увагу приділено специфікації цих умов для $\varphi$-субгауссових процесів.

Простори $\varphi$-субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ узагальнюють простори гауссових випадкових величин, тому вони широко застосовуються для моделювання реальних випадкових процесів у теорії черг, фінансовій математиці, фізиці. Детальну інформацію щодо основних понять і властивостей $\varphi$-субгауссових випадкових процесів можна знайти у джерелах [2, 3, 4, 6] та ін.

У даній роботі розглядається питання про встановлення умов обмеженості та непервності $\varphi$-субгауссових випадкових процесів $X(t)$, $t \in T$, для випадку, коли параметрична множина $T$ не є компактом, а саме, припускається, що $T = \mathbb{R}$.

Зауважимо, що для процесу $X(t)$, $t \in T$, заданого на компакті $T$, умови обмеженості і неперервності формулюються однаково, з використанням припущення про збіжність так званих ентропійних інтегралів, які визначаються через ентропійні характеристики множини $T$ відносно певної метрики, що породжується самим процесом $X$. Для некомпактних множин ситуація є іншою. Дослідження неперервності є більш простою задачею: якщо $T$ є $\sigma$-компактною множиною (тобто може бути представлена як зліченне об'єднання компактних підмножин), тоді із неперервності з ймовірністю 1 процесу $X$ на цих компактних підмножинах випливатиме неперервність з ймовірністю 1 на $T$ (див., наприклад, [1], Розділ 1.3). Але такі аргументи вже не можна застосувати для встановлення обмеженості процесу і потрібно вводити певні додаткові умови. Один із можливих підходів до розв'язання цієї задачі представлено у даній статті.

Робота складається зі вступу та 2 розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Розділ 3 містить основні результати роботи – теореми про умови обмеженості і неперервності з ймовірністю 1 $\varphi$-субгауссових випадкових процесів $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, наведено також деякі їх застосування.

## 2 Необхідні відомості з теорії $\varphi$-субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ [3, 4].

**Означення 2.1.** Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орлича*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

**Означення 2.2.** Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орлича. Функція $\varphi^*$ така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга – Фенхеля функції $\varphi$.

*Приклад* 2.1. Якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 1$, то $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$, де $q$ таке число, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Якщо $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi^*(x) = (|x| + 1)\ln(|x| + 1) - |x|$.

***Умова Q.*** Для N-функції $\varphi$ виконується *умова Q*, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0.$$

Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [7] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — це стандартний імовірнісний простір.

**Означення 2.3.** Нехай $\varphi$ — $N$-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина $\xi$ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору $\varphi$-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

**Теорема 2.1.** [3] *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

*та для всіх* $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \qquad (2.1) \\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned}$$

*де* $C > 0$ *— деяка стала.*

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega) = \mathrm{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

**Означення 2.4.** Нехай $(T, \rho)$ — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики $\rho$) називається функція

$$H(\varepsilon) := \ln N_{(T,\rho)}(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

де $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини $T$, тобто, кількість елементів у найменшому $\varepsilon$-покритті цієї множини.

*Приклад* 2.2. Якщо $T = [a, b]$ та $\rho$ — це евклідова відстань, то для довільного значення $\varepsilon > 0$:

$$\ln\left(\max\left\{\frac{b-a}{2\varepsilon}, 1\right\}\right) \leq H_{(T,\rho)}(\varepsilon) \leq \ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon} + 1\right).$$

**Означення 2.5.** Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є $\varphi$-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

*Приклад* 2.3. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

## 3 Основні результати

Нехай $X = \{X(t); t \in T\}$ – випадковий процес з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та псевдометрика $\rho_X$, породжена випадковим процесом $X$ на $T$, має вигляд

$$\rho_X(t,s) = \tau_\varphi(X(t) - X(s)), t, s \in T.$$

Припустимо, що виконуються такі умови:
A1) $\varepsilon_0 = \sup_{t\in T} \tau_\varphi(X(t)) < \infty$;
A2) $(T, \rho_X)$ – сепарабельний простір та випадковий процес $X$ є сепарабельним на $(T, \rho_X)$.

**Теорема 3.1** ([3], Theorem 4.2, p. 105)**.** *Якщо*

$$I_\varphi(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{H(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H(\varepsilon))} d\varepsilon < \infty, \qquad (3.1)$$

*де* $\varphi^{(-1)}(x), x > 0$ *– функція, обернена до* $\varphi(x), x > 0$, *та* $H(\varepsilon)$ *– метрична ентропія простору* $(T, \rho_X)$, *то для довільного* $\theta \in (0,1)$ *і всіх* $u > \frac{2I_\varphi(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$ *справедлива така оцінка:*

$$\mathsf{P}\Big\{ \sup_{t\in T} |X(t)| \geq u \Big\} \leq 2A(u,\theta), \qquad (3.2)$$

*де*

$$A(u,\theta) = \exp\Big\{ -\varphi^*\Big( \frac{1}{\varepsilon_0}\Big[ u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_0} I_\varphi(\theta\varepsilon_0) \Big]\Big)\Big\},$$

$\varphi^*$ *– це переворення Юнга-Фенхеля функції* $\varphi$.

**Наслідок 3.1.** *Нехай* $T = [a,b]$. *Тоді у твердженні Теореми* 3.1 *умова* (3.1) *набуде вигляду*

$$\hat{I}_\varphi(\varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\ln(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1))} du < \infty.$$

*Доведення.* Твердження цього наслідку випливає з Теореми 3.1 та нерівності $N(u) \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1$, де $N(u)$ – метрична масивність простору $T = [a,b]$, $H(u) = \ln N(u)$. □

Нехай замість умови A2) виконується така умова:

A3) Процес $X(t)$ є сепарабельним на $(\mathbb{R}, \rho_X)$; послідовність $\{B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}\}$ утворює розбиття простору $\mathbb{R}$ на підмножини $B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}, b_k > a_k, \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k = \mathbb{R}$; $H_k(u)$ – метрична ентропія множини $B_k$ відносно псевдометрики $\rho_X$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Теорема 3.2.** *Нехай для випадкового процесу* $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ *з простору* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *виконуються умови A1) та A3), а також нехай існують монотонно зростаючі неперервні функції* $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \leq h \leq \max_{t,s\in B_k} \rho_X(t,s)\}$, *такі, що* $\sigma_k(0) = 0$ *та на кожній множині* $B_k$

$$\sup_{\rho_X(t,s)\leq h,\, t,s\in B_k} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma_k(h). \qquad (3.3)$$

*Нехай виконується умова:*

$$\hat{I}_\varphi(\varepsilon_{0k}) = \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{\ln(\frac{b_k - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(\frac{b_k-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1))} du < \infty. \qquad (3.4)$$

*Тоді для всіх* $\theta \in (0,1)$ *та* $u > \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)} = \varepsilon^*$ *має місце така оцінка:*

$$\mathsf{P}\{ \sup_{t\in B_k} |X(t)| \geq u \} \leq 2A_k(u,\theta), \qquad (3.5)$$

*де*

$$A_k(u,\theta) = \exp\{ -\varphi^*( \frac{1}{\varepsilon_{0_k}}[u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_{0_k}} \hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})])\},$$

$\varphi^*$ *– перетворення Юнга-Фенхеля функції* $\varphi$.

*Якщо для деякого* $\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon^*$ *ряд* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\hat{\varepsilon},\theta)$ *збігається, то для всіх* $\varepsilon \geq \hat{\varepsilon}$ *ряд* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\varepsilon,\theta)$ *теж збігається і виконується нерівність:*

$$\mathsf{P}\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon \} \leq 2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\varepsilon,\theta)$$

*та*

$$\mathsf{P}\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} |X(t)| < \infty \} = 1.$$

*Доведення.* Розглянемо розбиття $\{B_k = [a_k, b_k]; k \in \mathbb{Z}\}$, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} B_k = \mathbb{R}$. Тоді

$$\mathsf{P}\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon \} = \mathsf{P}\{ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in B_k} |X(t)| \geq \varepsilon \} \leq$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathsf{P}\{ \sup_{t\in B_k} |X(t)| \geq \varepsilon \}.$$

З теореми 3.1 та наслідку 3.1 випливає, що коли $\varepsilon_{0k} < \infty, \hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k}) < \infty$, та $X(t)$ – сепарабельний процес, то умова (3.5) виконується для всіх $u > \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)}$. Таким чином, для всіх $\theta \in (0,1)$ та $u > \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})}{\theta(1-\theta)}$ матимемо

$$\mathsf{P}\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} |X(t)| \geq \varepsilon \} \leq 2A(\varepsilon,\theta),$$

де $A(\varepsilon,\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\varepsilon,\theta)$.
За теоремою 3.1, $I_\varphi(\varepsilon_{0k}) = \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{H_k(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H_k(\varepsilon))} d\varepsilon < \infty$. З означення метричної масивності отримуємо: $N_k(\varepsilon) \leq \frac{b_k - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, де функція $\sigma_k(h)$ визначена у (3.3).

З [3] відомо, що функція $\frac{H_k(\varepsilon)}{\varphi^{(-1)}(H_k(\varepsilon))}$ є монотонно зростаючою. Тоді

$I_\varphi(\varepsilon_{0k}) \leq$

$$\leq \hat{I}_\varphi(\varepsilon_{0k}) = \int_0^{\varepsilon_{0k}} \frac{\ln(\frac{b_k - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1)}{\varphi^{(-1)}(\ln(\frac{b_k - a_k}{2\sigma^{(-1)}(u)}) + 1)} du < \infty.$$

Покажемо, що $A(\varepsilon, \theta) \to 0$, $\varepsilon \to \infty$. Оскільки$A_k(\varepsilon,\theta) \leq A_k(\hat{\varepsilon},\theta)$ при $\hat{\varepsilon} \leq \varepsilon$, то з того, що $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\hat{\varepsilon},\theta) < \infty$, випливає, що $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\varepsilon,\theta) < \infty$.

Тепер покажемо, що для всіх $\delta$ при достатньо великих значеннях $\varepsilon$ виконується: $A(\varepsilon,\theta) < \delta$. Нехай $M \in \mathbb{N}$. Тоді

$$A(\varepsilon,\theta) = \sum_{|k|=0}^{M} A_k(\varepsilon,\theta) + \sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\varepsilon,\theta) \leq$$

$$\leq \sum_{|k|=0}^{M} A_k(\varepsilon,\theta) + \sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon},\theta).$$

Виберемо таке значення $M$, що $\sum_{|k|=M+1}^{\infty} A_k(\hat{\varepsilon},\theta) \leq \frac{\delta}{2}$, та $C$ таке, що при $\varepsilon > C$, $|k| \leq M : A_k(\varepsilon,\theta) < \frac{\delta}{2(M+1)}$. Тоді

$$A(\varepsilon,\theta) \leq \sum_{|k|=0}^{M} \frac{\delta}{2(M+1)} + \frac{\delta}{2} \leq \delta.$$

Отже, $A(\varepsilon,\theta) \to 0$, при $\varepsilon \to \infty$.

□

**Теорема 3.3.** *Нехай $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ – випадковий процес з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Припустимо, що $X$ – неперервний на довільному відрізку $[a,b], a < b$ з ймовірністю 1, а також $X$ є обмеженим випадковим процесом на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1, тобто $\mathsf{P}\{\sup_{t\in\mathbb{R}} |X(t)| < \infty\} = 1$. Тоді $X(t)$ є неперервним процесом на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1.*

*Зауваження* 3.1. За умов теореми 3.2, процес $X$ є неперервним на $\mathbb{R}$ з ймовірністю 1.

*Зауваження* 3.2. Аналогічно до теореми 3.2, результат про обмеженість і неперервність випадкового процесу $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ можна встановити, формулюючи умови з використанням іншого ентропійного інтегралу замість (3.4). А саме, можна розглядати інтеграл $I_r(\varepsilon) := \int\limits_0^{\varepsilon} r(N(v))\,dv$, де $r(x)$, $x \geq 1$ – невід'ємна монотонно зростаюча функція така, що $r(e^x), x \geq 0$, є опуклою функцією. При цьому, замість теореми 3.1, застосовується інший результат з [3] (Theorem 4.4, p. 107).

*Приклад* 3.1. Нехай в умовах теореми 3.2 $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < p \leq 2$ і $\sigma_k(h) = c_k h^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тоді маємо (при $q$: $1/q + 1/p = 1$)

$$A_k(u,\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{q}(\frac{1}{\varepsilon_{0_k}}[u(1-\theta) - \frac{2}{\varepsilon_{0_k}}\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k})])^q\right\},$$

де $\hat{I}_\varphi(\theta\varepsilon_{0k}) \leq \left(\frac{c_k^{\frac{1}{\alpha}}(b_k-a_k)}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}} \frac{(\theta\varepsilon_{0k})^{\frac{1}{\alpha p}-\frac{1}{\alpha}+1}}{\frac{1}{\alpha p}-\frac{1}{\alpha}+1}$ (і припускаємо, що $\frac{1}{\alpha p} - \frac{1}{\alpha} + 1 > 0$).

Отримані результати можна застосувати при дослідженні розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} u_t(t;x) = a^2 u_{xx}(t;x),\, t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0;x) = f(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.6}$$

де функція $f$ неперервна та обмежена на $\mathbb{R}$.

**Теорема 3.4** ([8], с. 181)**.** *Якщо $f$ – неперервна та обмежена функція на $\mathbb{R}$, то єдиний розв'язок задачі Коші* (3.6) *у класі неперервних та обмежених функцій задається формулою Пуассона:*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}\right\} dv,$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 3.5.** *Нехай $\xi = \{\xi(x); x \in \mathbb{R}\}$ – випадковий процес з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ такий, що $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\xi(x)| < \infty$, з ймовірністю 1 та $\xi(x)$ є вибірково неперервним з ймовірністю 1.*

*Тоді з ймовірністю 1 випадковий процес*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(v)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}\right\} dv,$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R},$$

*є обмеженим та неперервним розв'язком задачі Коші* (3.6) *з випадковою початковою умовою $u(0;x) = \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

*Доведення.* Твердження цієї теореми випливає з теореми 3.4. □

**Наслідок 3.2.** *Нехай для випадкового процесу $\xi = \{\xi(x); x \in \mathbb{R}\}$ з простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ виконуються умови теореми 3.2. Тоді з ймовірністю 1 випадковий процес*

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(v)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(v-x)^2}{4a^2 t}\right\} dv,$$
$$t > 0, x \in \mathbb{R},$$

*є обмеженим та неперервним розв'язком задачі Коші* (3.6) *з випадковою початковою умовою* $u(0;x) = \xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *і має місце оцінка* $\mathsf{P}\{\sup_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| > \varepsilon\} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\varepsilon)$, *де* $A_k(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *визначаються для процесу* $\xi$ *згідно з теоремою* 3.2.

## Висновки

У роботі встановлено умови, за яких $\varphi$-субгауссові випадкові процеси, що визначені на $\mathbb{R}$, є обмеженими і неперервними з ймовірністю 1, виписано оцінки для розподілу супремуму таких процесів.

## Список використаних джерел


1. *Adler R.J.*, Random Fields and Geometry / R.J. Adler, J.E. Taylor. – Springer Monographs in Mathematics, 2007. – 448 p.
2. *Василик О.І.* $\varphi$-Субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко. – К: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 231 с.
3. *Buldygin V. V.*, Metric Characterization of Random Variables and Random Processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
4. *Giuliano Antonini R.* Space of $\varphi$-sub-Gaussian random variables / R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina. // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5), 2003. – 27. – P.92–124.
5. *Гопкало О.М.* Умови обмеженості гауссового випадкового процесу з ймовірністю 1 на $\mathbb{R}^+$ та їх застосування // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Математика і інформатика. – 2018. – Вип. 2. – С. 61-69.
6. *Kozachenko Yu. V.* Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type / Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky // Theory of Probability and Mathematical Statistics, 1985. – No. 32. – P.42–53.
7. *Krasnosel'skii M. A.* Convex Functions and Orlicz Spaces. / M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii. – Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 1961. – 249p.
8. *Перестюк М.О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М.О. Перестюк, В.В. Маринець В.В. – К.:Либідь, 2014, – 363 с.


## References


1. ADLER, R.J., TAYLOR, J.E. (2007) *Random Fields and Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, 448 p.
2. VASYLYK, O. I., KOZACHENKO, YU. V., YAMNENKO, R. E. (2008) *$\varphi$-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p. (In Ukrainian)
3. BULDYGIN, V. V., KOZACHENKO, YU. V. (2000) *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p.
4. GIULIANO ANTONINI, R., KOZACHENKO, YU. V., NIKITINA, T. (2003) Space of $\varphi$-sub-Gaussian random variables. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5) 27, p.92–124.
5. *HOPKALO, O.M.* (2018) Conditions for boundedness of a Gaussian stochastic process with probability 1 on $\mathbb{R}^+$ and their application // Bulletin of Uzhgorod University. Series: Mathematics and Informatics. Iss.2, p. 61–69.
6. KOZACHENKO, YU. V., OSTROVSKY, E. I. (1985) Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type, *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* No. 32, p.42–53.
7. KRASNOSEL'SKII, M. A., RUTICKII, YA. B. (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p.
8. PERESTYUK, M., MARYNETS, V. (2014) *Theory of equations of mathematical physics.* (In Ukrainian). K.: Libid, 363 p.


Received: 20.01.2019