УДК 519.21. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.2

Пашко А.О.[1], д.ф.-м.н., проф.
Синявська О.О.[2], к.ф.-м.н., доцент

Бактерівські оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail:aap2011@@ukr.net,
[2]Ужгородський національний університет, 88000, м. Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: olja_synjavska@ukr.net

A. O. Pashko[1], Dr. Sci., Prof.,
O. O. Synyavska[2], PhD., Asist. Prof.,

Baxter estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: aap2011@@ukr.net,
[2]Uzhgorod National University,
88000Uzhorod, Narodna Square, 3
e-mail: olja_synjavska@ukr.net

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху та побудовані довірчі інтервали отриманих оцінок.

В багатьох прикладних задачах, що пов'язані з обробкою даних, необхідно оцінювати параметр Хюрста. Серед таких задач - задача обробки і аналізу сигналів, коли сигнал можна розглядати як накладення корисного сигналу і фонового шуму. Фоновий шум є, як правило, комбінацією стохастичної і фрактальної складових. Числовими показниками зазначених властивостей є, відповідно, показник Хюрста, індекс стійкості, коефіцієнти взаємозв'язку інкрементів, які узагальнюють автокореляційну функцію. Очевидно, що оцінка індексу Хюрста є пріоритетним завданням при аналізі самоподібних процесів.

В даний час існує безліч методів оцінки параметра Хюрста, але всі вони орієнтовані на окремі випадки процесів, коли властивість самоподібності поєднується або з тривалою залежністю (дробовий броунівський рух), або з важкими хвостами.

При оцінці параметра Хюрста найбільш часто використовуються RS-аналіз, дисперсно-часовий аналіз і аналіз відхилень. Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони засновані на використанні статистичних властивостей вибірок другого порядку (дисперсії, середньоквадратичного відхилення, коефіцієнтів кореляції).

Ключові слова: індекс Хюрста, дробовий броунівський рух,консистентна оцінка.

In the paper consistent estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion are obtained and confidence intervals of the obtained estimates are constructed.

In many applications related to data processing, it is necessary to estimate the Hurst parameter. Among such tasks is the task of signal processing and analysis, when the signal can be considered as the imposition of a useful signal and background noise. Background noise is usually a combination of stochastic and fractal components.

Numerical indicators of these properties are, respectively, the Hurst index, the stability index, the coefficients of the relationship of increments, which generalize the autocorrelation function. Obviously, the estimation of the Hurst index is a priority in the analysis of self-similar processes.

Currently, there are many methods for estimating the Hurst parameter, but they are all focused on individual cases of processes where the property of self-similarity is combined with either long-term dependence (fractional Brownian motion), or with heavy tails.

RS-analysis, disperse-time analysis and deviation analysis are most often used in estimating the Hurst parameter. A common feature of these methods is that they are all based on the use of statistical properties of second-order samples (variance, standard deviation, correlation coefficients).

Key Words: Hurst index, fractional Brownian motion, consistent estimate.

Стаття представлена Розорою І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Вступ

У граничних теоремах для випадкових процесів можна виділити окремо теореми бакстерівського типу. Бакстерівськими сумами називають послідовності сум нелінійних функцій від приростів випадкових процесів. За певних умов послідовності бакстерівських сум збігаються у тому чи іншому сенсі до невипадкової сталої. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються теоремами Леві-Бакстера або теоремами бакстерівського типу.

Робота присвячена застосуванню методу бакстерівських сум для оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху.

Статистичному оцінюванню у моделях з дробовим броунівським рухом присвячена багато робіт. В роботі [1] наведено огляд літератури і аналіз задач з використанням бакстерівського підходу.

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста.

Оцінки параметра Хюрста використовуються в багатьох прикладних задачах [2, 3].

Консистентні оцінки параметра Хюрста.

Нехай $B=\{B_t,\ t\ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α – гауссовий випадковий процес з нульовим середнім значенням та кореляційною функцією

$$r(s,t)=\frac{1}{2}\left(|s|^{2\alpha}+|t|^{2\alpha}-|s-t|^{2\alpha}\right),\ s,t\ge 0 .$$

Припустимо, що параметр Хюрста α – невідомий, такий що $\alpha\in(0,\alpha^*]$, де $\alpha^*\in(0,1)$ – фіксоване. Також, припустимо, що випадковий процес $B=\{B_t,\ t\ge 0\}$ спостерігається в точках $\left\{\frac{k}{a_n},0\le k\le a_n\right\}$, де $a_n\in \mathrm{N}, n\ge 1$; $a_n\to\infty$, $n\to\infty$.

Припустимо, що для довільного $\beta>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{-\beta}$ – збіжний.

Нехай для натурального числа p, $\Delta B_{k,n}^{(p)}$ – приріст p-го порядку дробового броунівського руху B, $k=0,\ldots,a_n-1$. Так, зокрема,

$$\Delta B_{k,n}^{(1)}=B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}},$$

$$\Delta B_{k,n}^{(2)}=B_{\frac{k+2}{a_n}}-2B_{\frac{k+1}{a_n}}+B_{\frac{k}{a_n}},$$

$$\Delta B_{k,n}^{(3)}=B_{\frac{k+3}{a_n}}-3B_{\frac{k+2}{a_n}}+3B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}},$$

..................................,

$$\Delta B_{k,n}^{(p)}=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i C_p^i B_{\frac{k}{n}+\frac{p-i}{n}} .$$

Розглянемо послідовності бакстерівських сум для дробового броунівського руху B_H:

$$\widehat{S}_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2,\quad S_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\widehat{S}_n^{(p)},\quad n\ge 1. \tag{1}$$

Покладемо

$$V_p(k,\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j|k+(i-j)|^{2\alpha}, \tag{2}$$

$k\ge 0,\ p\ge 1$.

Зокрема,

$$V_1(0,\alpha)=1;\quad V_2(0,\alpha)=4-4^{\alpha}; \tag{3}$$

$$V_3(0,\alpha)=15+3^{2\alpha}-6\cdot 2^{2\alpha}. \tag{4}$$

Безпосередній підрахунок дозволяє отримати наступні формули для математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $\widehat{S}_n^p$, $p\ge 1$ [1]:

$$E\widehat{S}_n^{(p)}=V_p(0,\alpha); \tag{5}$$

$$\mathrm{Var}\widehat{S}_n^{(p)}=\frac{1}{n}\left(2V_p^2(0,\alpha)+4\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)V_p^2(k,\alpha)\right). \tag{6}$$

Теорема 1. Статистика

$$\widehat{\alpha}_n^{(1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n}\right), n\ge 1 \tag{7}$$

є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста α.

Доведення. Нехай $p=1$, тоді із рівностей (1) та (2) отримаємо, що

$$ES_n^{(1)}=E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(B_{\frac{k+1}{a_n}}-B_{\frac{k}{a_n}}\right)^2= \tag{8}$$

$$=\sum_{k=0}^{a_n-1}E\left(B^2_{\frac{k+1}{a_n}}-2B_{\frac{k+1}{a_n}}B_{\frac{k}{a_n}}+B^2_{\frac{k}{a_n}}\right)=$$

$$= \sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha} - \left(\left|\frac{k+1}{a_n}\right|^{2\alpha} + \left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha} - \left|\frac{1}{a_n}\right|^{2\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{k}{a_n}\right|^{2\alpha}\right) = a_n^{1-2\alpha}.$$

З останньої рівності випливає, що $E\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2\alpha-1} E S_n^{(1)} = 1$. Тобто, дійсно, $E\widehat{S}_n^{(1)} = V_1(0,H) = 1$.

Для знаходження оцінки дисперсії $\mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)}$ використаємо наступну лему.

Лема 1. [1] Нехай $B = \{B_t,\ t \ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $\alpha \in (0,\alpha^*]$. Тоді при $\alpha^* \in (0,1)$ справедлива наступна нерівність:

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha^*]} \mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)} \le \frac{D_1}{a_n},$$

де

$$D_1 = \begin{cases} 2\left(3 + 2\zeta\left(4 - 4\alpha^*\right)\right), \alpha^* \in \left(0, \dfrac{3}{4}\right), \\ 2\left(3 + 2\left(1 + \ln a_n\right)\right), \alpha^* = \dfrac{3}{4}, \\ 2\left(3 + 2\dfrac{a_n^{4\alpha^*-3}}{4\alpha^*-3}\right), \alpha^* \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right), \end{cases} \quad (9)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

З припущення про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\gamma}$ для будь-якого $\gamma > 0$ випливає, що для довільних $\alpha < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}\,\widehat{S}_n^{(1)} < +\infty$, а тому із [4] випливає збіжність $\widehat{S}_n^{(1)} - E\widehat{S}_n^{(1)} \to 0, n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Звідси отримаємо:

$$\widehat{S}_n^{(1)} = a_n^{2\alpha-1} S_n^{(1)} \to 1,\ n \to \infty,$$

$$(2\alpha - 1) + \frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n} \to 0, n \to \infty,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(1)}}{\ln a_n}\right) \to \alpha$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$.

Отже, статистика (7) є сильно консистентною оцінкою параметра α. □

Аналогічно, можна показати, що статистики $\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right)$, $p \ge 2$ є сильно консистентними оцінками параметра Хюрста α.

Лема 2. Нехай $B = \{B_t,\ t \ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α. Тоді виконується нерівність:

$$\sup_{\alpha\in(0,1)} D\widehat{S}_n^{(p)} \le \frac{D_p}{a_n},$$

де

$$D_p = 2\left(K_p + \frac{1}{2}L_p + \frac{1}{2}M_p^2 \zeta(4p-4)\right),$$

$$V_p(m,\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p} (-1)^{i+j+1} C_p^i C_p^j |m + (i-j)|^{2\alpha},\ k \ge 0,$$

$$K_p = \sup_{\alpha\in(0,1)} V_p^2(0,\alpha),$$

$$L_p = \sup_{\alpha\in(0,1)} V_p^2(1,\alpha),$$

$$M_p = $$
$$= \sup_{\alpha\in(0,1)} \left|2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))\right|,$$

$p \ge 2$,

$\zeta(\cdot)$ – дзета-функція Рімана. (9)

Доведення. Знайдемо дисперсію випадкової величини $\widehat{S}_n^{(p)}$, *p = 2; 3,*

$$\mathrm{D}\,S_n^{(p)} =$$
$$= E\left(\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 - \left(E\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 = \quad (10)$$
$$= 2\sum_{k=0}^{a_n-1}\left(E\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2\right)^2 + 4\sum_{\substack{k,l=0\\k>l}}^{a_n-1}\left(E\Delta B_{k,n}^{(p)}\Delta B_{l,n}^{(p)}\right)^2.$$

Тоді, обчислюючи математичне сподівання добутку приростів *p*–го порядку дробового броунівського руху з нульовим середнім значенням та кореляційною функцією $r(s,t)$:

$$E\Delta B_{k,n}^{(p)}\Delta B_{l,n}^{(p)} = \frac{1}{2}a_n^{-2\alpha} \times$$
$$\times \sum_{i,j=0}^{p} (-1)^{i+j+1} C_p^i C_p^j |(k-l) + (i-j)|^{2\alpha}, \quad (11)$$
$$0 \le k, l \le a_n - 1,$$

$$\text{де } C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}, p \ge 2. \quad (12)$$

Позначимо

$$V_p(k-l,\alpha)= =\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{p}(-1)^{i+j+1}C_p^iC_p^j|k-l+(i-j)|^{2\alpha}, \quad (13)$$
$k,l\ge 0$.

При $k = l$ маємо $E\left(\Delta B_{k,n}^{(p)}\right)^2=a_n^{-2\alpha}V_p(0,\alpha)$.

Покладемо $k-l=m, 1\le m\le a_n-1$. Тоді із формул (10)–(13) випливає:

$$\mathrm{D}\,S_n^{(p)} = =2\left(a_n\left(a_n^{-2\alpha}V_p(0,\alpha)\right)^2+2\frac{a_n^{-4\alpha}}{4}\sum_{\substack{k,l=0\\k>l}}^{a_n-1}V_p^2(k-l,\alpha)\right)=$$
$$=2\left(a_n^{1-4\alpha}V_p^2(0,\alpha)+\frac{a_n^{-4\alpha}}{2}\sum_{m=1}^{a_n-1}(a_n-m)V_p^2(m,\alpha)\right)\le$$
$$\le 2a_n^{1-4\alpha}\times$$
$$\times\left(V_p^2(0,\alpha)+\frac{1}{2}V_p^2(1,\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{m=2}^{a_n-1}V_p^2(m,\alpha)\right). \quad (14)$$

Зауважимо, що при p = 2 та p = 3 із співвідношень (3)–(4) отримаємо, що:

$$V_2(m,\alpha)=6m^{2\alpha}-4|m+1|^{2\alpha}+|m+2|^{2\alpha}-$$
$$-4|m-1|^{2\alpha}+|m-2|^{2\alpha},$$
$$V_3(m,\alpha)=20m^{2\alpha}-15|m+1|^{2\alpha}+6|m+2|^{2\alpha}-$$
$$-|m+3|^{2\alpha}-15|m-1|^{2\alpha}+$$
$$+6|m-2|^{2\alpha}-|m-3|^{2\alpha},$$
$m\ge 1$.

Оскільки, функція $V_p(m,\alpha)$ є приростом $2p$–го порядку функції $f(x)=x^{2\alpha}, x\ge 1$, $\alpha\in(0,1)$ на відрізку $[m-p,m+p]$, то з формули для приросту n-го порядку функції $f(x)$ [5] одержимо, що

$$\Delta^{(n)}f(x)=f^{(n)}(\theta_m)\cdot\Delta x^n=2\alpha(2\alpha-1)\theta_l^{2\alpha-2},$$
де $\theta_m\in(m-p,m+p)$,

$f(x)$ така, що має n-1 неперервних похідних $f'(x), f''(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ на відрізку $[m-p,m+p]$ і скінченну n–ту похідну $f^{(n)}(x)$на інтервалі $(m-p,m+p)$,

$\Delta^{(n)}f(x)$ – приріст n–го порядку $f(x)$, $\theta_m\in(m-p,m+p)$;

одержимо для $n = 2p$; p = 2; 3, що:

$$V_p(m,\alpha)=f^{(2p)}(\theta_m)\cdot 1^{2p}=$$
$$=2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))\theta_m^{2\alpha-2p}.$$

Для $m-1<\theta_m, m\ge 2$ маємо:

$$V_p^2(m,\alpha)\le\frac{M_p^2}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}},$$
де
$$M_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}|2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(2\alpha-(2p-1))|,$$
$$p\ge 2. \quad (15)$$

При $\alpha\in(0,1)$ маємо:

$$\sum_{m=2}^{a_n-1}\frac{1}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}}=\zeta(4p-4\alpha)\le\zeta(4p-4),$$
де $\zeta(\cdot)$ – дзета - функція Рімана.

З останньої нерівності та нерівності (14) випливає, що:

$$DS_n^{(p)}\le$$
$$\le 2a_n^{1-4\alpha}\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\sum_{m=2}^{a_n-1}\frac{1}{(m-1)^{2(2p-2\alpha)}}\right)\le$$
$$\le 2a_n^{1-4\alpha}\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\zeta(4p-4)\right), \quad (16)$$
де
$$K_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}V_p^2(0,\alpha),\ L_p=\sup_{\alpha\in(0,1)}V_p^2(1,\alpha).$$

Покладемо

$$D_p=2\left(K_p+\frac{1}{2}L_p+\frac{1}{2}M_p^2\zeta(4p-4)\right),$$
$$p\ge 2. \quad (18)$$

Тоді з нерівності (16) та формул (17)–(18) отримаємо $\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}DS_n^{(p)}\le a_n^{1-4\alpha}D_p$,

а для випадкової величини $S_n^{(p)}=a_n^{2\alpha-1}\widehat{S}_n^{(p)}$, $p\ge 2$ маємо $\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}D\widehat{S}_n^{(p)}\le\frac{D_p}{a_n}$, де D_p, $p\ge 2$ визначено в (18). Лему доведено. □

З леми 2 та рівності (13) для $p=2$ та $p=3$ отримаємо:

$$V_2(0,\alpha)=4-4^{\alpha};\ \ V_3(0,\alpha)=15+3^{2\alpha}-6\cdot 2^{2\alpha}.$$
та
$$V_2(1,\alpha)=7-4\cdot 2^{2\alpha}+3^{2\alpha};$$
$$V_3(1,\alpha)=26-16\cdot 2^{2\alpha}+6\cdot 3^{2\alpha}-4^{2\alpha}.$$

Теорема 2. Нехай $B=\{B_t,\ t\ge 0\}$ – дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α. Тоді $\widehat{S}_n^{(p)}\to V_p(0,\alpha), p\ge 1$ з ймовірністю одиниця при $n\to\infty$.

Доведення. Оскільки математичне сподівання випадкової величини $\widehat{S}_n^{(p)}, p\ge 1$:

$E\widehat{S}_n^{(p)} = V_p(0,\alpha)$, то з лем 1, 2 та збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\beta}, \beta > 0,$ випливає, що для довільного $\alpha \in (0,1)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{D}\widehat{S}_n^{(p)}$ збігається. Тому $\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)} \to 0$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$ [Ламперти, с. 24]. Враховуючи рівність $E\widehat{S}_n^{(p)} = V_p(0,\alpha)$, отримаємо твердження теореми. □

Довірчі інтервали

Теорема 3. Інтервал
$$\left(\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n), \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right) \cap (0,1),$$
де
$$\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right),$$
$$l_\varepsilon(n) \ge -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 - \sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}\right)}{\ln a_n}$$
за умови, що $\sqrt{\frac{2D_p}{\varepsilon}} < 1$,
$$r_\varepsilon(n) \ge \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}} + 1\right)}{\ln a_n},$$
$S_n^{(p)}$ визначено рівністю (1), D_p визначено при $p=1$ співвідношенням (9), а при $p \ge 2$ – співвідношенням (18), є довірчим інтервалом для параметра Хюрста α з рівнем довіри $1-\varepsilon \in (0,1)$.

Доведення. Нехай $(1-\varepsilon) \in (0,1)$ – заданий коефіцієнт довіри. Знайдемо відповідні додатні числа $r_\varepsilon(n)$ та $l_\varepsilon(n)$, такі, що
$$P\left\{\alpha > \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right\} \le \frac{\varepsilon}{2} \text{ та}$$
$$P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} \le \frac{\varepsilon}{2},$$
де $\widehat{\alpha}_n^{(p)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln S_n^{(p)}}{\ln a_n}\right)$,

$S_n^{(p)}$ визначено рівністю (1).

Тоді матимемо нерівність
$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n) < \alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right\} \ge 1-\varepsilon, \quad (19)$$
яка означає, що інтервал $\left(\widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n), \widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n)\right) \cap (0,1)$ є інтервалом надійності для параметра Хюрста α з коефіцієнтом довіри $1-\varepsilon$. Тоді з вигляду статистики $\widehat{\alpha}_n^{(p)}$ та рівності (1), маємо:
$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n) < \alpha\right\} =$$
$$= P\left\{S_n^{(p)} - ES_n^{(p)} > a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} \le$$
$$\le P\left\{\left|S_n^{(p)} - ES_n^{(p)}\right| > a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} =$$
$$= P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \ge 1$ вираз $a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1 > 0$ при $r_\varepsilon(n) > 0$. Тоді з нерівності Чебишова та оцінки для дисперсії $D\widehat{S}_n^{(p)}, p \ge 1$ випливає, що
$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right\} \le$$
$$\le \frac{D\widehat{S}_n^{(p)}}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} \le \frac{D_p / a_n}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2}.$$

Далі, для α визначимо $r_\varepsilon(n)$ так, щоб
$$P\left\{\widehat{\alpha}_n^{(p)} + r_\varepsilon(n) < \alpha\right\} \le \frac{D_p / a_n}{\left(a_n^{2r_\varepsilon(n)} - 1\right)^2} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розв’яжемо останню нерівність відносно $r_\varepsilon(n)$.

Тоді $r_\varepsilon(n) \ge \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}} + 1\right)}{\ln a_n}$.

Тепер розглянемо нерівність $P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо:
$$P\left\{\alpha < \widehat{\alpha}_n^{(p)} - l_\varepsilon(n)\right\} =$$
$$= P\left\{S_n^{(p)} - ES_n^{(p)} < a_n^{1-2\alpha} \cdot \left(a_n^{-2l_\varepsilon(n)} - 1\right)\right\} =$$
$$= P\left\{\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)} < a_n^{-2l_\varepsilon(n)} - 1\right\} \le$$
$$\le P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > 1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зауважимо, що для будь-якого $n \ge 1$ вираз $1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)} > 0$ при $l_\varepsilon(n) > 0$. З нерівності Чебишова та оцінки для дисперсії $D\widehat{S}_n^{(p)}, p \ge 1$ одержимо
$$P\left\{\left|\widehat{S}_n^{(p)} - E\widehat{S}_n^{(p)}\right| > 1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right\} \le$$
$$\le \frac{D\widehat{S}_n^{(p)}}{\left(1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right)^2} \le \frac{D_p / a_n}{\left(1 - a_n^{-2l_\varepsilon(n)}\right)^2} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розв'яжемо останню нерівність відносно $l_\varepsilon(n)$ за умови, що $1-\sqrt{\frac{2D_p}{\varepsilon a_n}}>0$.

Тоді $l_\varepsilon(n)\ge -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1-\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}\right)}{\ln a_n}$.

Нерівність $1-\sqrt{\frac{2D_p}{a_n\varepsilon}}>0$ виконується для достатньо великих n, оскільки $D_p/a_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорему доведено. □

Висновки

Отримані результати можна використовувати в багатьох прикладних задачах, що пов'язані з обробкою даних. Особливе місце займає задача обробки і аналізу сигналів, коли сигнал розглядається як комбінація корисного сигналу і шуму. А шум є комбінацією стохастичної і фрактальної складових. Числовими показниками зазначених властивостей є, відповідно, показник Хюрста, індекс стійкості, коефіцієнти взаємозв'язку складових, які узагальнюють автокореляційну функцію.

При оцінці параметра Хюрста найбільш часто використовуються RS-аналіз, дисперсно-часовий аналіз і аналіз відхилень. Ці методи не дозволяють отримати якісні оцінки – незміщені, консистентні, тощо.

В роботі отримані консистентні оцінки параметра Хюрста дробового броунівського руху та побудовані довірчі інтервали.

Список використаних джерел

1. *Козаченко Ю.В.* Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування / Ю.В. Козаченко, О.О. Курченко, О.О. Синявська О.О - Ужгород:Шарк, 2018.
2. *Kirichenko L.* Analysis of the properties of ordinary Levy motion based on the estimation of stability index / L. Kirichenko, V. Shergin // Int. J. "Information Content and Processing", Vol. 1, Number 2 – 2014, pp.170-181.
3. Shergin V.L. Estimation of the stability factor of alpha-stable laws using fractional moments method / V.L. Shergin // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 6 – 2013, pp.25-30.
4. Ламперти Дж. Случайные процессы / Дж. Ламперти. - К.: Вища школа, 1983. -227 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1968.

References

1. KOZACHENKO, Y.V., KURCHENKO, O.O., SYNYAVSKA, O.O. (2018) *Levy-Baxter theorems for random fields and their application.* Uzgorod: Shark.
2. KIRICHENKO, L. (2014) Analysis of the properties of ordinary Levy motion based on the estimation of stability index. *Information Content and Processing*, Vol. 1, Number, pp.170-181.
3. SHERGIN, V.L. (2013) Estimation of the stability factor of alpha-stable laws using fractional moments method. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 6, pp.25-30.
4. FIHTENGOLZ, G.M. (1968) *Fundamentals of Mathematical Analysis.* M.: Nauka.
5. LAMPERTY, D. (1983) *Random processes.* K.: Vyshcha shkola.

Надійшла до редколегії 23.10.2018