УДК 519.21

О.В. Іванов [1], *д.ф.-м.н., проф.*
Н.В. Каптур [2], *студ.*
І.М. Савич[3], *к.ф.-м.н.*

Про асимптотичний розподіл оцінки Коенкера-Бассетта параметра лінійної моделі регресії з сильно залежним шумом

[1,2,3] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 03056, Київ-56, просп. Перемоги, 37
e-mail: [1]alexntuu@gmail.com,
[2]vasylivna.nv@gmail.com
[3]sim_ka@i.ua

O.V. Ivanov [1], *Dr. Sci., Prof.*
N.V. Kaptur [2], *stud.*
I.M. Savych [3], *Ph.D.*

On asymptotic distribution of Koenker-Bassett estimator of the parameter of linear regression model with strongly dependent noise

[1,2,3]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsry Kyiv Polytechnic Institute", 03056, Kyiv, 37 Peremogy prospect
e-mail: [1]alexntuu@gmail.com,
[2]vasylivna.nv@gmail.com
[3]sim_ka@i.ua

У роботі вивчається асимптотична поведінка оцінок Коенкера - Бассетта параметрів лінійної моделі регресії з дискретним часом спостереження та випадковим шумом, який є нелінійним локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром. Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та часового ряду, що моделює випадковий шум, за яких оцінки Коенкера - Бассетта параметрів функції регресії є асимптотично нормальною.

Ключові слова: лінійна модель регресії, функція регресії, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду, оцінка Коенкера - Бассетта, асимптотична нормальність.

Asymptotic properties of Koenker - Bassett estimators of linear regression model parameters with discrete observation time and random noise being nonlinear local transformation of Gaussian stationary time series with singular spectrum are studied. The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and time series that simulates the random noise, under which the Koenker - Bassett estimators of regression model parameters are asymptotically normal. Linear regression model with discrete observation time and bounded open convex parametric set is the object of the studying. Asymptotic normality of unknown parameters Koenker - Bassett estimators are obtained. For getting these results complicated concepts of time series theory and time series statistics have been used, namely: local transformation of Gaussian stationary time series, stationary time series with singular spectral density, spectral measure of regression function, admissibility of singular spectral density of stationary time series in relation to this measure, expansions by Chebyshev - Hermite polynomials of the transformed Gaussian time series values and it's covariances, central limit theorem for weighted sums of the values of such a local transformation.

Key Words: linear regression model, regression function, local transformation of Gaussian stationary time series, Koenker - Bassett estimators, asymptotic normality.
Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Регресійний аналіз – це важлива частина математичної та прикладної статистики.

У роботі розглядається лінійна модель регресії з дискретним часом спостереження, яка є складною в тому розумінні, що випадковий шум є локальним нелінійним перетворенням стаціонарного гауссівського часового ряду з сингулярною спектральною щільністю (зокрема, ця щільність може відповідати сильно залежному часовому ряду). Вивчення часових рядів з несумовними коваріаційними функціями породжує складні ймовірнісні та статистичні задачі. Однак, дослідження останніх дисятиріч підтвердили, що статистичні дані наукових галузей, показують сильну залежність: див. моно-

© О.В. Іванов, Н.В. Каптур, І.М. Савич, 2019

графію Дж. Берана та ін. [1], яка містить огляд та бібліографію з тематики сильної залежності.

В теорії статистичного оцінювання вагоме місце займає оцінка квантильної регресії, або оцінка Коенкера-Бассетта (ОКБ) [2], яка означається з використанням непарної функції втрат та є оцінкою невідомого параметра квантиля спостережень. Теорія таких оцінок розвивалась у великій кількості робіт: див., наприклад, монографію Р. Коенкера [3] та дисертацію І.М. Савич [4].

У роботі досліджується модель квантильної регресії фіксованого рівня $\beta \in (0,1)$. Спостереження у такій моделі можна записати у вигляді суми квантильної функції регресії та ″похибок″ спостережень, про функцію розподілу яких $F(x), x \in \mathbb{R}$, відомо, що $F(0) = \beta$ (див., наприклад, статтю П.Ф. Тарасенка, А.В. Журавльова [5]. У роботі зроблено припущення про рівність нулю середнього значення похибок спостережень. Таке припущення, взагалі кажучи, спрощує ідею квантильної регресії, але ми отримуємо можливість вивчати стандартні моделі регресії з несиметричними похибками спостережень і отримувати робастні ОКБ параметрів регресії, використовуючи функцію втрат Коенкера-Бассетта (див., наприклад, І.В. Орловський [6]). Зауважимо також, що ОКБ узагальнює оцінку найменших модулів у тому розумінні, що оцінка найменших модулів є оцінкою невідомого параметра медіани різнорозподілених спостережень.

2 Опис моделі. Основні припущення і позначення

Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j,\theta) + \varepsilon_j,\ j \in \overline{1,N}, \qquad (1)$$

де $g(j,\theta) = \sum\limits_{i=1}^{q} \theta_i g_i(j),\ \ j \geqslant 1,\ \ \theta = (\theta_1, ..., \theta_q) \subset \Theta \subset \mathbb{R}^q$, Θ – відкрита опукла обмежена множина. Відносно похибок спостережень ε_j припустимо наступне.

A1. $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, локальне перетворення гауссівського стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, а саме: $\varepsilon_j = G(\xi_j),\ \ G(x),\ x \in \mathbb{R}$, – борелева функція така, що $E\varepsilon_0 = 0,\ \ E\varepsilon_0^2 < \infty$.

A2. Часовий ряд $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, визначено на ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $E\xi_0 = 0$, а його коваріаційну функцію задано виразом

$$B(j) = E\xi_j\xi_0 = \sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(j),\ j \in \mathbb{Z},\ r \geqslant 0, \qquad (2)$$

причому $A_l > 0,\ \sum\limits_{l=0}^{r} A_l = 1$,

$$B_{\alpha_l,\chi_l}(j) = \frac{\cos(\chi_l j)}{(1+j^2)^{\alpha_l/2}},$$

$\alpha_l \in (0,1),\ \ l = \overline{0,r},\ \ 0 \leqslant \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < \pi.$

Позначимо $F(x),\ x \in \mathbb{R}$, функцію розподілу випадкової величини ε_0.

A3. $F(0) = \beta,\ \beta \in (0,1)$.

Введемо функцію втрат

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} \beta x, & x \geqslant 0, \\ (\beta - 1)x, & x < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

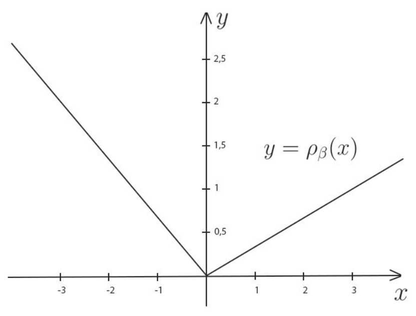

Рис. 1. Графік функції $y = \rho_{1/3}(x)$.

Означення 1. *Квантильною оцінкою, або ОКБ, параматра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженнями (1) називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(X_j, j = \overline{1,N}) \in \Theta^c$ такий, що*

$$Q_N(\hat{\theta}_N) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_N(\tau),\ Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta(X_j - g(j,\tau)),$$

Θ^c *– замикання множини* Θ.

За введених умов оцінка $\hat{\theta}_N$ існує [7].

Позначимо

$$d_N^2 = \ diag\ \left(d_{iN}^2\right)_{i=1}^{q},\ d_{iN}^2 = \sum_{j=1}^{N} g_i^2(j), \qquad (4)$$

та припустимо, що є вірними наступні нерівності.

B1(i) $0 < \underline{c_i} \leqslant \liminf\limits_{N\to\infty} N^{-1/2} d_{iN} \leqslant \limsup\limits_{N\to\infty} N^{-1/2} d_{iN} \leqslant \overline{c_i} < \infty,\ i = \overline{1,q}.$

Зробимо заміну змінних у функції регресії $u = N^{-1/2}d_N(\tau-\theta)$ та покладемо $h(j,u) = g(j, \theta + N^{1/2}d_N^{-1}u)$. Тоді множина Θ трансформується в множину $\overline{U}_N(\theta) = N^{-1/2}d_N(\Theta-\theta)$, а оцінка $\hat{\theta}_N$ – в оцінку $\overline{u}_N = N^{-1/2}d_N(\Theta-\theta)$.

Запишемо

$$Q_N^*(u) = Q_N(\theta + N^{1/2}d_N^{-1}u),\ u \in \overline{U}_N^c(\theta);$$

$$V(r) = \{u \in \mathbb{R}^q : ||u|| < r\},\ r > 0;$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^+ + \varepsilon_j^-,$$

$$\varepsilon_j^+ = \varepsilon_j\chi\{\varepsilon_j \geqslant 0\},\ \varepsilon_j^- = \varepsilon_j\chi\{\varepsilon_j < 0\};$$

$$I(N) = \Big(I_{ik}(N)\Big)_{i,k=1}^q,$$

$$I_{ik}(N) = N^{-1}\sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j).$$

Позначимо $\lambda_{min}(I(N))$ – найменше власне число матриці $I(N)$. **B1(ii).** Для достатньо великих $N (N > N_0)$

$$\lambda_{min}(I(N)) \geqslant \underline{\lambda} > 0. \tag{5}$$

Отримаємо з умов **B1(i)** та **B1(ii)** корисні для нас нерівності. Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ та $N > N_0$ справджується $N^{-\frac{1}{2}}d_{iN} \geqslant \underline{c_i} - \varepsilon$, звідки

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1} &\leqslant \frac{1}{\underline{c_i}-\varepsilon} \leqslant \max_{i\leqslant i\leqslant q}\Big(\frac{1}{\underline{c_i}-\varepsilon}\Big) \\ &= \frac{1}{\min \underline{c_i}-\varepsilon},\ i=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{6}$$

З іншого боку, $N^{-\frac{1}{2}}d_{iN} \leqslant \overline{c_i} + \varepsilon$, звідки

$$\begin{aligned} N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1} &\geqslant \frac{1}{\overline{c_i}+\varepsilon} \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant q}\Big(\frac{1}{\overline{c_i}+\varepsilon}\Big) \\ &= \frac{1}{\max \overline{c_i}+\varepsilon},\ i=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{7}$$

Оцінимо величину

$$\begin{aligned} &N^{-1}\Phi_{2N}(u_1,u_2) = \\ &N^{-1}\sum_{j=1}^N\Big(\sum_{i=1}^q g_i(j)N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1}(u_1^i-u_2^i)\Big)^2 = \\ &N^{-1}\sum_{j=1}^N\Big(\sum_{i,k=1}^q g_i(j)g_k(j)\times \\ &N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1}(u_1^i-u_2^i)N^{\frac{1}{2}}d_{kN}^{-1}(u_1^k-u_2^k)\Big) = \\ &\sum_{i,k=1}^q\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^N g_i(j)g_k(j)\times \\ &N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1}(u_1^i-u_2^i)N^{\frac{1}{2}}d_{kN}^{-1}(u_1^k-u_2^k)\Big) \leqslant \\ &\sum_{i,k=1}^q N^{-\frac{1}{2}}d_{iN}N^{-\frac{1}{2}}d_{kN}\times \\ &N^{\frac{1}{2}}d_{iN}^{-1}N^{\frac{1}{2}}d_{kN}^{-1}|u_1^i-u_2^i|\,|u_1^k-u_2^k| = \\ &\Big(\sum_{i=1}^q|u_1^i-u_2^i|\Big)^2 \leqslant q||u_1-u_2||^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Припустимо, що для довільного $r > 0$ існує $\triangle(r) > 0$ таке, що для $N > N_0$

$$\inf_{u\in\overline{U}_N^c(\theta)\setminus V^c(r)} N^{-1}EQ_N^*(u) \geqslant E\varepsilon_0^+ + \triangle(r), \tag{9}$$

У роботі [4] доведено, що якщо виконуються умови **A1** – **A3**, **B1(i)** (в певній модифікації для неперервного нелінійного випадку) та умова розрізнення параметрів (9), то для довільного $r > 0$

$$P\Big\{||\overline{u}_N|| \geqslant r\Big\} = O(N^{-\alpha})\ \text{при}\ N \to \infty. \tag{10}$$

де $\alpha = \min\limits_{0\leqslant l\leqslant r}\alpha_l$, а α_l – константи з умови **A2**. Співвідношення (10) є деякою підсиленою властивістю слабкої консистентності оцінки Коенкера-Бассетта.

Далі розглянемо поняття припустимості спектральної щільності стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром, що грає важливу роль в доведенні асимптотичної нормальності оцінки ОКБ.

3 μ - припустимість спектральної щільності стаціонарного часового ряду з сингулярним спектром

Для зручності сприйняття розглянемо $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, – неперервний в середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією, яка є неперервним аналогом коваріаційної функції стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, умови **A2**, тобто

$$B(t) = E\xi(t)\xi(0) = \sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l,\chi_l}(t),\ t \in \mathbb{R},\ r \geqslant 0, \tag{11}$$

де $A_l > 0,\ l = \overline{0,r},\ \sum\limits_{l=0}^{r} A_l = 1$,

$$B_{\alpha_l,\chi_l}(t) = \frac{\cos(\chi_l t)}{(1+t^2)^{\alpha_l/2}},\ \alpha_l \in (0,1),\ l = \overline{0,r},$$
$$0 \leqslant \chi_0 < \chi_1 < ... < \chi_r < \pi. \tag{12}$$

Модель коваріаційної функції (11),(12) було вперше розглянуто в роботі [8], тому що спектральну щільність, відповідну даній коваріаційній функції, можна записати в явному вигляді, причому її сингулярності, як ми побачимо, можуть знаходитись не тільки в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Коваріаційна функція (11),(12) використовувалась також у пізніших роботах [4, 9, 10] та ін.

Спектральна щільність $\tilde{f}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$, процесу $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$, має вигляд

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} A_l \tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

де для $l = \overline{0,r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

$$\tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda) = \frac{c_1(\alpha_l)}{2}\Big(K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda+\chi_l|)|\lambda+\chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}} + K_{\frac{\alpha_l-1}{2}}(|\lambda-\chi_l|)|\lambda-\chi_l|^{\frac{\alpha_l-1}{2}}\Big), \tag{14}$$

$$c_1(\alpha) = \frac{2^{(1-\alpha)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\alpha}{2})},$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{\nu-1} exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big(s+\frac{1}{s}\Big)z\Big\}ds,$$

$z \geqslant 0,\ \nu \in \mathbb{R}$. Функція $K_\nu(z),\ z \geqslant 0$, називається модифікованою функцією Бесселя 2-го роду порядку ν, або функцією Макдональда. Зауважимо, що

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$$

і для $z \to 0$

$$K_\nu(z) \backsim \Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu},\ \nu > 0.$$

В околах точок $\lambda = \pm\chi_l,\ l = \overline{0,r}$,

$$\tilde{f}_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda) = \frac{c_2(\alpha_l)}{2}\Big[|\lambda+\chi_l|^{\alpha_l-1}(1-h_l(|\lambda+\chi_l|)) + |\lambda-\chi_l|^{\alpha_l-1}(1-h_l(|\lambda-\chi_l|))\Big], \tag{15}$$

причому $c_2(\lambda) = (2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2})^{-1}$,

$$h_l(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{\alpha_{l+1}}{2})}{\Gamma(\frac{3-\alpha_l}{2})}\Big|\frac{\lambda}{2}\Big|^{1-\alpha_l} + \frac{\Gamma(\frac{\alpha_{l+1}}{2})}{4\Gamma(\frac{3+\alpha_l}{2})}\Big|\frac{\lambda}{2}\Big|^2 + o(|\lambda|^2),$$

$\lambda \to 0,\ \ l = \overline{0,r}$,
див. Donoghue [11], с.293, та Anh et al. [8]. Таким чином, спектральна щільність (13) має $2r+2$ точки сингулярності, якщо $\chi_0 \neq 0$, та $2r+1$ точку сингулярності, якщо $\chi_0 = 0$. Процес $\xi(t),\ t \in \mathbb{R}$, є процесом з сильною залежністю, якщо $\chi_0 = 0$.

Коваріаційна функція $B(j),\ j \in \mathbb{Z}$, стаціонарного часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, умови **A2** має спектральне представлення

$$B(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} f(\lambda)d\lambda,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

тобто $B(j),\ \ j \in \mathbb{Z}$, – послідовність коефіцієнтів Фур'є спектральної щільності

$$f(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} A_l f_{\alpha_l,\chi_l}(\lambda),\ \lambda \in [-\pi,\pi]. \tag{17}$$

Зауважимо, що спектральна щільність (17) та спектральна щільність (13), що відповідає неперервному аналогу (11) коваріаційної функції $B(j),\ \ j \in \mathbb{Z}$, пов'язані між собою співвідношенням [12]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda+2\pi k),\ \lambda \in [-\pi,\pi]. \tag{18}$$

Оскільки функція Макдональда має властивість ([13], 8.451, 6)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}(1+O(\frac{1}{z})),\ z \to +\infty,\ \nu \geqslant 0, \tag{19}$$

то ряд (18) збігається, і фунція $f(\lambda)$ означена коректно. Більше того ми можемо сказати, що функція $f(\lambda)$ має, як і функція $\tilde{f}(\lambda)$, ті ж самі сингулярності в точках $\lambda = \pm\chi_l \in (-\pi,\pi),\ l = \overline{0,r}$.

Розглянемо функцію регресії лінійної моделі (1):

$$g(j,\theta)=\sum_{i=1}^{q}\theta_i g_i(j),\ j=\overline{1,N}.$$

Нехай $\mathcal{B}-\sigma$ – алгебра борелевих підмножин інтервалу $[-\pi,\pi]$. Введемо матричну міру $\mu_N(d\lambda)$ на $([-\pi,\pi],\mathcal{B})$ з матрицею щільності

$$\Big(\mu_N^{kl}(\lambda)\Big)_{k,l=1}^{q}=\Big(g_N^k(\lambda)\overline{g_N^l(\lambda)}\times \Big(\int_{-\pi}^{\pi}|g_N^k(\lambda)|^2d\lambda\int_{-\pi}^{\pi}|g_N^l(\lambda)|^2d\lambda\Big)^{-1/2}\Big)_{k,l=1}^{q}, \tag{20}$$

$$g_N^k(\lambda)=\sum_{j=1}^{N}e^{i\lambda j}g_k(j),\ \lambda\in[-\pi,\pi],\ k=\overline{1,q}.$$

Зауважимо, що $d_{kN}^2=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|g_N^k(\lambda)|^2d\lambda.$

B2. Послідовність мір $\mu_N(d\lambda)$ слабко збігається до додатно визначеної матричної міри $\mu(d\lambda)$:

$$\mu_N\Longrightarrow\mu,\ N\to\infty. \tag{21}$$

Умова **B2** означає, що елементи $\mu^{kl}(d\lambda)$ матриці $\mu(d\lambda)$ є комплексні заряди обмеженої варіації, матриці $\mu(B),\ B\in\mathcal{B}$, невід'ємно визначені, причому $\mu([-\pi,\pi])$ – додатно визначена матриця. Крім цього, для будь-якої неперервної та обмеженої функції $a(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}a(\lambda)\mu_N(d\lambda)\longrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}a(\lambda)\mu(d\lambda),\ N\to\infty. \tag{22}$$

Означення 2. *[13, 14] Міра $\mu(d\lambda)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(j,\theta)$.*

За умов $\lim\limits_{N\to\infty}d_N^2=\infty,\ \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}|g_i(j)|=o(d_N)$ при $N\to\infty,\ i=\overline{1,q}$, компоненти $\mu^{kl}(d\lambda)$ міри $\mu(d\lambda)$ можна визначити із співвідношень [14]

$$R^{kl}(h)=\lim_{N\to\infty}d_{kN}^{-1}d_{lN}^{-1}\sum_{j=1}^{N}g_k(j+h)g_l(j)= \int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda h}\mu^{kl}(d\lambda),\ k,l=\overline{1,q}, \tag{23}$$

які виконано при кожному $h\in\mathbb{Z}$.

Спектральна міра функції регресії грає важливу роль в отриманні властивості асимптотичної нормальності ОКБ.

Позначимо

$$J_N=\Big(J_{kl,N}\Big)_{k,l=1}^{N}= \Big(d_{kN}^{-1}d_{lN}^{-1}\sum_{j=1}^{N}g_k(j)g_l(j)\Big)_{k,l=1}^{q}. \tag{24}$$

Тоді з (20) при $a(\lambda)=1,\ \lambda\in[-\pi,\pi]$,

$$J_N=\int_{-\pi}^{\pi}\mu_N(d\lambda)\longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)=\mu([-\pi,\pi])=J,\ N\to\infty, \tag{25}$$

причому матриця J додатно визначена за означенням спектральної міри μ. Таким чином, і матриці $\varLambda_N=J_N^{-1}$ додатно визначені для $N>N_0$. Крім цього, $\lim\limits_{N\to\infty}\varLambda_N=\varLambda=J^{-1}$ також додатно визначена матриця.

З іншого боку, коли $a(\lambda)$ втрачає властивості неперервності та обмеженості, співвідношення (22) може в деяких випадках також виконуватись. Дамо відповідне означення для спектральної щільності стаціонарного часового ряду $a(\lambda)=f(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$.

Означення 3. *[14] Спектральна щільність f називається μ – припустимою, якщо вона інтегровна за мірою μ, тобто всі елементи матриці $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\mu(d\lambda)$ скінченні, та для $a=f$ виконується(22).*

Далі нас буде цікавити властивість μ – припустимості спектральної щільності $f(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$, яку задано формулою (18). Нехай для визначеності $\chi_0=0$, і ми розглядаємо множину індексів $I=\{\overline{-r,r}\}$. Покладемо $\lambda_{-l}=-\lambda_l,\ \lambda_l=\chi_l,\ l=\overline{1,r},\ \lambda_0=\chi_0=0$. Спираючись на формули (14), (15) та (18), можна стверджувати існування такого достатньо великого числа $c_0>0$, що для всіх $c\geqslant0$ знайдуться околи $V_l(c)$ точок $\lambda_l,\ l\in I$, для яких

$$\{\lambda\in[-\pi,\pi]:f(\lambda)>c\}\subset\bigcup_{l\in I}V_l(c), \tag{26}$$

причому $V_l(c)$ у (26) не перетинаються та міри Лебега $m(V_l(c))\to0$ при $c\to\infty,\ l\in I$.

B3. Для $N > N_0$

$$d_{kN}^{-1} \max_{\lambda \in V_l(c_0)} |g_N^k(\lambda)| \leqslant h_{lk} < \infty, \ l \in I, \ k = \overline{1, q}. \quad (27)$$

Наступне твердження є варіантом загальної теореми роботи [9] для дискретного часу спостережень та спектральної щільності (18) і доводиться аналогічно.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **A2**,**B2**,**B3** *та спектральна щільність f інтегровна за мірою μ. Тоді f є μ – припустимою функцією.*

У подальшому тексті роботи ми побачимо, що теорема 1 потрібна для доведення асимптотичної нормальності ОКБ.

Нехай деяка функція $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$. Тоді її можна розкласти в цьому гільбертовому просторі в ряд Фур'є

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(\Psi)}{n!} H_n(x),$$
$$C_n(\Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \ n \geqslant 0, \quad (28)$$

У формуванні центральної граничної теореми (див. нижче) будемо вважати, що $C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\varphi(x)dx = E\Psi(\varepsilon_0) = 0$.

Означення 4. *Функція $\Psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \ \varphi(x)dx)$ має ранг Ерміта m ($Hrank(\Psi) = m$), якщо або $C_m(\Psi) \neq 0$ та $m = 1$, або для деякго $m \geqslant 2$*

$$C_1(\Psi) = ... = C_{m-1}(\Psi) = 0, \ C_m(\Psi) \neq 0. \quad (29)$$

У сформульованій нижче центральній граничній теоремі для деякої випадкової векторної суми використано поняття ермітового рангу функції та присутні спектральні щільності, що відповідають стаціонарним часовим рядам із коваріаційними функціями $B^r(j), \ r \in \mathbb{N}$, де $B(j), \ j \in \mathbb{Z}$, – коваріаційна функція часового ряду $\xi_j, \ j \in \mathbb{Z}$, з умови **A2**.

Добре відомо, що коваріаційній функції $B^r(t), \ t \in \mathbb{R}, r \geqslant 2$, де $B(t)$ – коваріаційна функція (11), відповідає r - та згортка

$$\tilde{f}^{*r}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{r-1}} \tilde{f}(\lambda - \lambda_2 - ... - \lambda_r) \times$$
$$\prod_{i=2}^{r} \tilde{f}(\lambda_i) d\lambda_2 ... d\lambda_r, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

спектральної щільності (13)-(15), розглянутого вище стаціонарного випадкового процесу $\xi(t), \ t \in \mathbb{R}$. Тоді за формулою Е. Хеннана (18) коваріаційній функції $B^r(j), \ j \in \mathbb{Z}$, відповідає спектральна щільність

$$f^{(r)}(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{*r}(\lambda + 2\pi k), \ \lambda \in [-\pi, \pi], \ r \geqslant 2. \quad (31)$$

Будемо вважати за означенням, що $\tilde{f}^{*1}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$ та $f^{(1)}(\lambda) = f(\lambda)$, крім цього, сформулюємо для функції $\mathit{\Psi} \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ наступну альтернативу.

Або **(i)** $Hrank(\Psi) = 1, \ \alpha > \frac{1}{2}$,

або **(ii)** $Hrank(\Psi) = m, \ \alpha m > 1$, де

$$\alpha = \min_{0 \leqslant l \leqslant r} \alpha_l, \quad (32)$$

α_l – параметри коваріаційної функції (2) стаціонарного часового ряду $\xi_j, \ j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо, що для функції Ψ виконано умову **(i)**. У разі виконання умови **(ii)** подальші міркування аналогічні. Тоді коваріаційна функція $B(t), \ t \in \mathbb{Z}$, за формулами (11), (12) інтегровна з квадратом на $\mathbb{R}$ і згортка

$$\tilde{f}^{*2}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^2(t) dt, \ \lambda \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

є обмеженою та неперервною функцією. Більш того, для будь-якого $r \geqslant 2$

$$\tilde{f}^{*r}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B^r(t) dt \leqslant$$
$$\frac{B^{r-2}(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t) dt < \infty, \quad (34)$$

і всі згортки $\tilde{f}^{*r}$ неперервні та обмежені однією константою, якщо ми згадаємо, що за нашим припущенням $B(0) = 1$.

Зауважимо також, що з рівності

$$B^r(t) = \Big(\sum_{l=0}^{r} A_l B_{\alpha_l, \chi_l}(t) \Big)^r, \ r \geqslant 2, \quad (35)$$

після підведення правої частини в r-й степінь видно, що спекральна щільність $\tilde{f}^{*r}(\lambda)$ є лінійною комбінацією функцій Макдональда порядків $\nu > 1$. Але для таких функцій також справедлива асимптотична формула (19), і ряди (31) збігаються рівномірно за $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Для формулювання центральної граничної теореми, введемо ще одну умову, яка регулює зростання функцій $g_i(j),\ j\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,q}$, при зростанні об'єму вибірки N.

B4.

$$d_{iN}^{-1}\max_{1\leqslant j\leqslant N}|g_i(j)|\leqslant k^iN^{-1/2},\ i=\overline{1,q}. \qquad (36)$$

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженої векторної суми значень нелінійного перетворення гаусівської стаціонарної випадкової послідовності з сингулярним спектром, яку доведено в роботі [9].

Теорема 2. *Нехай виконано умови* **A1**,**A2**,**B2**,**B3** *та одну з наступних умов для функції* $\Psi\in\mathbf{L_2}(\mathbb{R},\varphi(x)dx)$:

(i) $Hrank(\Psi)=1$ *та спектральна щільність* f *часового ряду* $\xi_j,\ j\in\mathbb{Z}$, *є* μ *– припустимою;*

(ii) $Hrank(\Psi)=m$ *та* $m\alpha>1$, *де* α *задана формулою (32). Тоді випадковий вектор*

$$\zeta_N=d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Psi(\xi_j)\bigtriangledown g(j),$$
$$\bigtriangledown g(j)=\Big(g_1(j),...,g_q(j)\Big)^T \qquad (37)$$

асимптотично нормальний $N(0,\sigma)$ *при* $N\to\infty$, *де*

$$\sigma=2\pi\sum_{r=m}^{\infty}\frac{C_r^2(\Psi)}{r!}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(\lambda)\mu(d\lambda). \qquad (38)$$

Приклад 1. Розглянемо в моделі спостережень (1) функцію регресії

$$g(j,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\Big(A_i\sin\varphi_ij+B_i\cos\varphi_ij\Big),\ j\geqslant 1, \qquad (39)$$

де $\varphi_i,\ \ i=\overline{1,n}$, – відомі частоти гармонічних коливань, причому $0<\varphi_1<...<\varphi_n<\pi$. Вектор невідомих параметрів θ – це вектор невідомих амплітуд суми гармонічних коливань (39), а саме: $\theta=(A_1,B_1,A_2,B_2,...,A_n,B_n)$. Таким чином, в цьому прикладі $q=2n$, і ми маємо справу з вектором - градієнтом функції регресії

$$\bigtriangledown g(j)=$$
$$(\sin\varphi_1j,\cos\varphi_1j,\sin\varphi_2j,\cos\varphi_2j,...,\sin\varphi_nj,\cos\varphi_nj), \qquad (40)$$

$j\geqslant 1$. Знайдемо спектральну міру μ умови **B2**, що відповідає функції регресії (39), або, іншими словами, вектор-функції (40). Використовуючи співвідношення (23), можна стверджувати, що міра μ є блочно діагональною (див., наприклад, [11]) з блоками

$$\begin{bmatrix}\delta_k & i\rho_k\\ -i\rho_k & \delta_k\end{bmatrix},\ k=\overline{1,n}, \qquad (41)$$

де міра $\delta_k=\delta_k(d\lambda)$ та заряд $\rho_k=\rho_k(d\lambda)$ зосереджені в точках $\pm\varphi$, причому $\delta_k\{\pm\varphi\}=\frac{1}{2}$, $\rho\{\pm\varphi\}=\pm\frac{1}{2}$, $k=\overline{1,n}$. З (41) випливає, що

$$\mu([-\pi,\pi])=\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)=\mathbb{I}_{2n}. \qquad (42)$$

Крім цього, за формулами (24), (25) та того факту, що з огляду на (40), $I_N\xrightarrow[N\to\infty]{}\mathbb{I}_{2n}$, де $\mathbb{I}_{2n}$ – одинична матриця $2n$ -го порядку,

$$J_N=\Big(N^{\frac12}d_{kN}^{-1}N^{\frac12}d_{lN}^{-1}I_{kl}(N)\Big)_{k,l=1}^{N}=$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\mu_N(d\lambda)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)=J=\mathbb{I}_{2n}. \qquad (43)$$

Для виконання умови **B3** (див. формулу (27)), як показано, наприклад, у роботі [9] достатньо, щоб множини точок $S_f=\{\chi_l,l=\overline{0,r}\}$ та $S_g=\{\varphi_k,k=\overline{1,n}\}$ не перетинались:

$$S_f\bigcap S_g=\emptyset. \qquad (44)$$

Якщо це так, то ми можемо застосувати теорему 1 і стверджувати, що спектральна щільність $f(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$, часового ряду $\xi_j,\ j\in\mathbb{Z}$, є μ – припустимою.

Зауважимо також, що для функції регресії (39) виконання нерівностей (36) умови **B4** є очевидним.

Якщо, крім умов **B2**–**B4** на функцію регресії (39), виконано решта умов теореми 2, то є вірною теорема 2. Запишемо для нашого прикладу коваріаційну матрицю (38) граничного нормального розподілу теореми 2. Враховуючи парність функції $f^{(r)}(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]$, та (41), знаходимо, що σ є блочно діагональною матрицею з блоками

$$\sigma_k=2\pi\sum_{r=m}^{\infty}\frac{C_r^2(\Psi)}{r!}f^{(r)}(\varphi_k)\mathbb{I}_2,\ k=\overline{1,n}, \qquad (45)$$

$\mathbb{I}_2$ – одинична матриця 2-го порядку, причому блоки, як ми бачимо, самі є діагональними матрицями 2-го порядку.

4 Асимптотична нормальність оцінки Коенкера–Бассетта

Доведемо теорему редукції, яка дозволяє звести розв'язання задачі про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта до застосування центральної граничної теореми 2 попереднього пункту з функцією Ψ, яка певним чином пов'язана з функцією G з умови **A1**.

Після цього ми отримуємо результат про асимптотичну нормальність оцінки Коенкера–Бассетта як достатньо простий наслідок теореми 2 та теореми редукції.

Введемо потрібну нам умову.

A4. Випадкова величина ε_0 має щільність $p(x) = F'(x)$, для якої є вірними нерівності

$$|p(x) - p(0)| \leqslant H|x|,\ x \in \mathbb{R},\ p(0) > 0, \qquad (46)$$

де $H < \infty$ деяка константа.

Нехай l – довільний напрям у $\mathbb{R}^q$ та $\tau \in \Theta^c$. Знайдемо однобічну похідну за напрямом l функціонала оцінки Коенкера–Бассетта

$$Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \rho_\beta\Big(x_j - g(j,\tau)\Big).$$

Користуючись співвідношеням

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \lim_{\lambda\to 0+} \frac{Q_N(\tau+\lambda l) - Q_N(\tau)}{\lambda},$$

можна отримати дещо спрощену відповідь (див. позначення (37)):

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} \Big\langle \bigtriangledown g(j), l\Big\rangle \Big(\chi\{X_j < g(j,\tau)\} - \beta\Big) \qquad (47)$$

м.н.,

де $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{q} x_i y_i$ – скалярний добуток двох векторів із $\mathbb{R}^q$.

Зауважимо, що в точці мінімуму $\hat\theta_N$ функціонала $Q_N(\tau)$ для будь-якого напряму в l виконується нерівність

$$\frac{\partial}{\partial l} Q_N(\hat\theta_N) \geqslant 0, \qquad (48)$$

що випливає з означення оцінки Коенкера–Бассетта як точки мінімуму функціоналу $Q_N(\tau)$. Нерівність (48) буде використана у доведенні асимптотичної нормальності нашої оцінки.

Нехай $l^1, ...l^q$ додатні напрямки координатних вісей в $\mathbb{R}^q$. Введемо випадкові вектори $Q_N^{\pm}(\tau) = \Big(Q_{iN}^{\pm}(\tau)\Big)_{i=1}^{q}$,

$$Q_{iN}^{\pm}(\tau) = d_{iN}^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial(\pm l^i)}\Big) Q_N(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j)\Big(\chi\{X_j < g(j,\tau)\} - \beta\Big). \qquad (49)$$

Варто зауважити, що $Q_N^{+}(\tau) = -Q_N^{-}(\tau)$ м.н. для кожного τ, але, взагалі кажучи, $Q_N^{+}(\hat\theta_N) \neq -Q_N^{-}(\hat\theta_N)$. Зауважимо також, що вектори

$$Q_N^{\pm}(\theta) = \pm d_N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \bigtriangledown g(j)(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta),$$

насправді, не залежать від θ, але ми будемо користуватись введеними позначеннями. Розглянемо також математичні сподівання введених векторів $EQ_N^{\pm}(\tau)$ з координатами

$$EQ_{iN}^{\pm}(\tau) = \pm d_{iN}^{-1} \sum_{j=1}^{N} g_i(j)\Big[F(g(j,\tau) - g(j,\theta)) - \beta\Big], \qquad (50)$$

$i = \overline{1,q}$,
причому $EQ_N^{\pm}(\theta) = 0$ за умовою **A3**.

Теорема 3. *Нехай виконано умови* **A1**-**A4**, **B2**-**B4** *та оцінка* $\hat\theta_N$ *є консистентною в сенсі* (10). *Нехай також функція*

$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\}, x \in \mathbb{R},$$

задовольняє умові **(i)** *теореми* 2. *Тоді асимптотичний при* $N \to \infty$ *розподіл вектора* $d_N(\hat\theta_N - \theta)$ *збігається з асимптотичним розподілом вектора* $-p^{-1}(0)\Lambda_N Q_N^{+}(\theta)$, *якщо останній існує.*

Доведення теореми 3 спирається на доведення декількох лем. В доведенні першої з них застосовано складний спосіб поділу параметричної множини на фрагменти, який винайдено П. Хьюбером [15, 16].

Позначимо

$$Q_N^{*\pm}(u) = Q_N^{\pm}(\theta + N^{1/2} d_N^{-1} u),$$

$$Z_N^{\pm}(\theta,u) = \frac{||Q_N^{*\pm}(u) - Q_N^{*\pm}(0) - EQ_N^{*\pm}(u)||}{1 + ||EQ_N^{*\pm}(u)||}. \qquad (51)$$

Лема 1. *За умов теореми 3 для будь-яких $\varepsilon > 0$ та достатньо малих $r > 0$*

$$P\Big\{\sup_{u\in V^c(r)\bigcap \tilde{U}^c_N(\theta)} Z^{\pm}_N(\theta,u) > \varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (52)$$

◀ Будемо доводити лему для Z^+_N. Для спрощення доведення (51) візьмемо $r = 1$, а у якості множини під позначкою супремуму в (52) розглянемо куб

$$C_0 = \{u \in \mathbb{R}^q : ||u||_0 = |\max_{1\leqslant i\leqslant q} |u_i| \leqslant 1\},$$

який містить замкнену кулю $V^c(1)$.

Покриємо куб C_0 кубами $C_{(1)}, ..., C_{(n_0)}$, де $n_0 = \mathrm{O}(\ln N)$, наступним чином. Зафіксуємо число $p \in (0,1)$ і розглянемо концентричну сім'ю множин

$$C^{(l)} = \{u : ||u||_0 \in [(1-p)^{l+1}, (1-p)^l]\}, l = \overline{0, l_0 - 1},$$

$$C^{(l_0)} = \{u : ||u||_0 \leqslant (1-p)^{l_0}\}.$$

Покриємо кожну множину $C^{(l)}$ однаковими кубами зі стороною $a_l = (1-p)^l - (1-p)^{l+1} = p(1-p)^l$ та пронумеруємо ці куби. Вони і утворюють потрібне покриття

$$C_{(1)}, ..., C_{(n_0-1)}, C_{(n_0)} := C^{(l_0)}.$$

Визначимо $l_0 = l_0(N)$ з умови

$$(1-p)^{\tilde{l}_0} = N^{-\gamma}, l_0 = [\tilde{l}_0], \gamma \in (\frac{1}{2}, 1) - \textit{деяке число.}$$

Зазначимо, що $||\cdot||_0$ – відстань від $C_{(s)}$ до 0 є $r(s) = (1-p)N^{-\gamma l/\tilde{l}_0}$, та діаметр $C_{(s)}$ дорівнює $a(s) = pN^{-\gamma l/\tilde{l}_0} = a_l$ для деякого $l = l(s)$, $s = \overline{1, n_0 - 1}$, тобто коли куб $C_{(s)}$ є елементом покриття множини $C^{(l)}$. Більше того, кількість кубів $C_{(s)}$ покриття кожної множини $C^{(l)}$ можна зробити незалежною від l і N. Тоді з того, що $l_0 = \mathrm{O}(\ln N)$, випливає, що $n_0 = \mathrm{O}(\ln N)$ також. Таким чином

$$P\Big\{\sup_{u\in C_0} Z^+_N(\theta,u) > \varepsilon\Big\} \leqslant \sum_{s=1}^{n_0} P\Big\{\sup_{u\in C_{(s)}} Z^+_N(\theta,u) > \varepsilon\Big\}. \quad (53)$$

Оцінимо кожний доданок правої частини нерівності (53) окремо. Розглянемо відображення $u \longrightarrow EQ^{*+}_N(u)$. Кожний елемент матриці похідних $D_N(u)$ цього відображення має вигляд (див. (50))

$$D^{il}_N(u) = \frac{\partial}{\partial u_l} EQ^{*+}_{iN}(u) = N^{1/2} d^{-1}_{iN} d^{-1}_{lN} \sum_{j=1}^N g_i(j) g_l(j) p\Big(h(j,u) - h(j,0)\Big). \quad (54)$$

Зауважимо, що

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u,0) = N^{-1}\sum_{j=1}^N \Big(h(j,u) - h(j,0)\Big)^2 = N^{-1}\sum_{j=1}^N \Big(\sum_{i=1}^q g_i(j) N^{1/2} d^{-1}_{iN} u_i\Big)^2 \leqslant q||u|^2. \quad (55)$$

Тоді за умов **A4**, **B3** з використанням (55) отримуємо

$$|N^{-1/2}D^{il}_N(u) - p(0)J_{il,N}| = d^{-1}_{iN} d^{-1}_{lN} \times \Big|\sum_{j=1}^N g_i(j) g_l(j) \Big(p\Big(h(j,u) - h(j,0)\Big) - p(0)\Big)\Big| \leqslant HN^{1/2} d^{-1}_{iN} d^{-1}_{lN} \times \Big(\sum_{j=1}^N g^2_i(j) g^2_l(j)\Big)^{1/2} \Big(N^{-1}\Phi_{2N}(u,0)\Big)^{1/2} \leqslant HN^{1/2} d^{-1}_{iN} \max_{1\leqslant j\leqslant N} |g_i(j)| q^{1/2} ||u|| \leqslant q^{1/2}(k^i)^{1/2} H||u||. \quad (56)$$

За формулою Тейлора

$$N^{-1/2} EQ^{*+}_{iN}(u) = \sum_{l=1}^q N^{-1/2} D^{il}_N(u^{(i)}) u_l, \quad (57)$$

$||u^{(i)}|| \leqslant ||u||, i = \overline{1, q}$.

Розглянемо матрицю

$$H_N = \Big(N^{-1/2} D^{il}_N(u^{(i)})\Big)^q_{i,l=1}. \quad (58)$$

Тоді, як ми довели в (56)

$$H_N = p(0)J_N + M_N, \quad (59)$$

де M_N – матриця з елементами $M^{il}_N \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0, i, l = \overline{1, q}$, причому остання збіжність рівномірна за N. Маємо далі

$$H^T_N H_N = p^2(0) J^2_N + p(0)(M^T_N J_N + J_N M^T_N) + M^T_N M_N.$$

За властивістю власних чисел суми симетричних матриць ([17] , с.101-103)

$$|\lambda_{min}(H_N^T H_N) - p^2(0)\lambda_{min}(J_N^2)| \leqslant q\Big(p(0)\max_{1\leqslant i,l\leqslant q}|(M_N^T J_N + J_N M_N^T)_{il}| + \max_{1\leqslant i,l\leqslant q}|(M_N^T M_N)_{il}|\Big) = O(||u||),$$

Тобто за умови **B2** матриця $H_N^T H_N$ додатно визначена рівномірно за $N > N_0$ для достатньо малих u (не обмежуючи загальності, будемо вважати, що для $u \in C_0$), і для деякого $k_0 > 0$

$$||N^{-1/2}Q_N^{*+}(u)|| = \sqrt{< H_N^T H_N u, u >} \geqslant k_0||u||_0. \quad (60)$$

Нехай $s \neq n_0$ та $v \in C_{(s)}$ - довільна точка. Тоді з (51) та (60) випливає, що

$$\sup_{u\in C_{(s)}} Z_N^+(\theta,u) \leqslant \Big(\sup_{u\in C_{(s)}} M_{1N}^{(s)}(u,v) + \sup_{u\in C_{(s)}} M_{2N}^{(s)}(u,v) + L_N^{(s)}(\theta,v)\Big)\times (1 + k_0 N^{1/2} r(s))^{-1}, \quad (61)$$

де

$$M_{1N}^{(s)}(u,v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^N \bigtriangledown g(j)\times \Big(\chi\{X_j < h(j,u)\}\chi\{X_j < h(j,v)\}\Big)\Big|\Big|,$$
$$M_{2N}^{(s)}(u,v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^N \bigtriangledown g(j)\times \Big(F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big) - F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big)\Big)\Big|\Big|,$$
$$L_N^{(s)}(v) = \Big|\Big|d_N^{-1}\sum_{j=1}^N \bigtriangledown g(j)\times \Big[\Big(\chi\{X_j < h(j,v)\} - \beta\Big) - \Big(\chi\{\varepsilon_j < 0\} - \beta\Big) - \Big(F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big) - \beta\Big)\Big]\Big|\Big|. \quad (62)$$

Відповідно до умови **A4** та нерівності (8)

$$N^{-1}\Phi_{2N}(u,v) \leqslant q||u-v||^2, \quad (63)$$

маємо

$$N^{-1/2}M_{2N}^{(s)}(u,v) \leqslant N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N \Big|g_i(j)\Big|\times \Big|F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big) - F\Big(h(j,v)-h(j,0)\Big)\Big|\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant p_0\sqrt{q}N^{-1/2}\Phi_{2N}(u,v) \leqslant p_0 q a(s). \quad (64)$$

Для оцінювання $M_{1N}^{(s)}(u,v)$ скористаємося нерівністю

$$\begin{aligned} &\Big|\chi\{X_j < h(j,u)\} - \chi\{X_j < h(j,v)\}\Big| = \\ &= \Big|\chi_u(j) - \chi_v(j)\Big| \leqslant \\ &\chi\{\inf_{u\in C_{(s)}}(h(j,u)-h(j,0)) \leqslant \varepsilon_j \leqslant \\ &\leqslant \sup_{u\in C_{(s)}}(h(j,u)-h(j,0))\} := \chi_s(j). \end{aligned} \quad (65)$$

Тоді за умови **B4**

$$N^{-1/2}M_{1N}^{(s)}(u,v) \leqslant N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N g_i(j)\Big(\chi_u(j)-\chi_v(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^q d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^N \Big|g_i(j)\Big|\chi_s(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^q\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant N}\Big|g_i(j)\Big|d_{iN}^{-1}\Big)^2\Big)^{1/2}\sum_{j=1}^N \chi_s(j) \leqslant$$
$$\leqslant ||k||N^{-1}\sum_{j=1}^N \chi_s(j), ||k|| = \Big(\sum_{i=1}^q (k^i)^2\Big)^{1/2}. \quad (66)$$

Маємо далі

$$N^{-1}\sum_{j=1}^N E\chi_s(j) \leqslant p_0 N^{-1}\sum_{j=1}^N \sup_{u_1,u_2\in C_s}|h(j,u_1)-h(j,u_2)| \leqslant p_0||k||a(s). \quad (67)$$

Збираючи отримані оцінки, знаходимо

$$P_1 = P\Big\{\Big(\sup_{u\in C_{(s)}} M_{1N}^{(s)}(u,v) + \sup_{u\in C_{(s)}} M_{2N}^{(s)}(u,v)\Big)$$
$$\Big(1+k_0N^{1/2}r(s)\Big)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant P\Big\{\frac{||k||}{k_0}\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\chi_s(j) - N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\varepsilon}{2}r(s) - \Big(\frac{p_0q}{k_0} + \frac{p_0||k||^2}{k_0}a(s)\Big)\Big\}. \qquad (68)$$

Величина

$$\frac{\varepsilon}{2}r(s) - \Big(\frac{p_0q}{k_0} + \frac{p_0||k||^2}{k_0}\Big)a(s) =$$
$$\Big(\frac{\varepsilon}{2}(1-p) - \Big(\frac{p_0q}{k_0} + \frac{p_0||k||^2}{k_0}\Big)p\Big)N^{-\gamma l/\tilde{l}_0} > 0,$$

якщо обрати число p достатньо малим, і ми можемо оцінити ймовірність (68), скориставшись нерівністю Чебишова:

$$P_1 \leqslant \frac{||k||^2/k_0^2}{\Big(\frac{\varepsilon}{2}(1-p) - \Big(\frac{p_0q}{k_0} + \frac{p_0||k||^2}{k_0}p\Big)^2} \times$$
$$N^{-2+2\gamma l/\tilde{l}_0}\sum_{j,j'=1}^{N} cov(\chi_s(j),\chi_s(j')) \qquad (69)$$

Аналогічно [4] отримуємо

$$N^{-2}\sum_{j,j'=1}^{N} cov(\chi_s(j)\chi_s(j') \leqslant$$
$$N^{-2}\sum_{j,j'=1}^{N} E\chi_s(j)|B(j-j')| =$$
$$N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\Big(N^{-1}\sum_{j'=1}^{N}|B(j-j')|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=-N}^{N}|B(j')|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\Big(N^{-1}\sum_{j=1}^{N}E\chi_s(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}|B(j')|\Big).$$

Для першої суми останнього добутку використаємо оцінку (67), а для другої суми маємо

$$N^{-1}\sum_{j=0}^{N}|B(j)| \leqslant N^{-1} + N^{-1}\sum_{j=1}^{N}j^{-\alpha} = \qquad (70)$$
$$O(N^{-\alpha}) \text{ при } N\to\infty,$$

де α означено в (32). Разом із (69) це дає оцінку

$$P_1 = O(N^{\gamma l\tilde{l}_0^{-1}-\alpha}), \qquad (71)$$

причому права частина (71) збігається до нуля зі степеневою швидкістю при $\alpha > \gamma$.

Позначимо

$$L_i(j) = g_i(j)\Big(\chi\{X_j < h(j,v)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big) =$$
$$g_i(j)\Big(\chi\{\varepsilon_j < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big), \qquad (72)$$

$i = \overline{1,q}$. Тоді в формулі (62)

$$L_N^{(s)}(v) = \Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)\Big)^2\Big)^{1/2},$$
$$P_2 = P\Big\{L_N^{(s)}(v)\Big(1+k_0N^{1/2}r(s)\Big)^{-1} > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{k_0^2\varepsilon^2r^2(s)N}E\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j) - EL_i(j)\Big)\Big)^2. \qquad (73)$$

Оцінимо $E\sum\limits_{j=1}^{N} d_{iN}^{-2}\Big(\sum\limits_{j=1}^{N}\Big(L_i(j)-EL_i(j)\Big)\Big)^2, i = \overline{1,q}$. Нехай $C_{(s)}$ належить покриттю множини $C^{(l)}$. Позначимо $M := \bigcup\limits_{k=l}^{l_0} C^k$. Тоді аналогічно (65)

$$|\chi\{\varepsilon_j < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}| \leqslant$$
$$\chi\Big\{\inf_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)) \leqslant \varepsilon_j \leqslant \sup_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0))\Big\} :=$$
$$\chi_M(j),$$

$$EL_i^2(j) \leqslant g_i^2(j)E\chi_M(j) =$$
$$g_i^2(j)\Big[F\Big(\sup_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)\Big) -$$
$$F\Big(\inf_{v\in M}(h(j,v) - h(j,0)\Big)\Big] \leqslant \qquad (74)$$
$$p_0g_i^2(j)\Big(\sup_{v\in M}h(j,v) - \inf_{v\in M}h(j,v)\Big) \leqslant$$
$$p_0g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1) - h(j,v_2)\Big|.$$

Розглянемо розвинення у просторі $L_2(\Omega)$

$$L_i(j) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m(j,v)}{m!}H_m(\xi_j),$$

$c_m(j,v) =$

$$g_i(j)\int_{\mathbb{R}}(\chi\{G(x) < h(j,v) - h(j,0)\} - \chi\{G(x) < 0\})\times$$
$$H_m(x)\varphi(x)dx, m \geqslant 0,\ EL_i(j) = c_0(j,v).$$

Оскільки

$$E(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j)-EL_i(j)\Big)^2=\sum_{j,j'=1}^{N}cov\Big(L_i(j),L_i(j')\Big),$$

$$cov\Big(L_i(j),L_i(j')\Big)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m(j,v)c_m(j',v)}{m!}\times B^m(j-j'),$$

З огляду на (73) отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,v)}{m!}=DL_i(j)\leqslant EL_i^2(j)\leqslant \leqslant p_0g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|,$$

$$\sum_{j,j'=1}^{N}cov\Big(L_i(j),L_i(j')\Big)\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j,j'=1}^{N}\frac{c_m^2(j,v)}{m!}\Big|B(j-j')\Big|^m\leqslant \leqslant\sum_{j,j'=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m^2(j,v)}{m!}\Big)\Big|B(j-j')\Big|\leqslant \leqslant p_0\sum_{j,j'=1}^{N}g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|\times \Big|B(j-j')\Big|\leqslant \leqslant 2p_0N\sum_{j=1}^{N}g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|\times \Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}\Big|B(j')\Big|\Big).$$

З іншого боку, за умови **B4**

$$E\sum_{j=1}^{N}g_i^2(j)\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|h(j,v_1)-h(j,v_2)\Big|\leqslant \leqslant\sum_{j=1}^{N}g_i^2(j)\sum_{i=1}^{q}\Big|g_i(j)\Big|N^{1/2}d_{iN}^{-1}\sup_{v_1,v_2\in M}\Big|\Big|v_1-v_2\Big|\Big|_0\leqslant \leqslant 2\Big(a(s)+r(s)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{q}k^i\Big)d_{iN}^2,$$

тобто для деякої константи $k_1<\infty$

$$E\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big(L_i(j)-EL_i(j)\Big)^2\Big)\leqslant k_1\Big(a(s)+r(s)\Big)N^{1-\alpha}. \tag{75}$$

Таким чином, з (73) та (75) випливає, що ймовірність

$$P_2\leqslant\frac{4k_1}{k_0^2\varepsilon^2}\frac{a(s)+r(s)}{r^2(s)}N^{-\alpha}= \frac{4k_1}{k_0^2\varepsilon^2(1-p)^2}N^{\gamma l\tilde{l}_0^{-1}-\alpha}. \tag{76}$$

прямує до нуля при $N\to\infty$ зі степеневою швидкістю, якщо $\alpha>\gamma$.

Отже, нерівності (61), (71) та (76) показують, що для $s=\overline{1,n_0-1}$ (нагадуємо, що $n_0=O(\ln N)$) та для деякого $l=l(s)<l_0$ при $N\to\infty$

$$P\Big\{\sup_{u\in C_{(s)}}z_N^+(\theta,u)>\varepsilon\Big\}=O\Big(N^{\gamma l\tilde{l}_0^{-1}-\alpha}\Big). \tag{77}$$

Залишилось розглянути впадок, коли $s=n_0$. З (51) випливає, що

$$P\Big\{\sup_{u\in C_{(n_0)}}z_N^+(\theta,u)>\varepsilon\Big\}\leqslant \leqslant P\Big\{\sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}\Big|\Big|Q_N^{*+}(u)-Q_N^{*+}(0)-EQ_N^{*+}(u)\Big|\Big|>\varepsilon\Big\}. \tag{78}$$

Запишемо вираз під знаком норми в формулі (51) як $\nu(u)-E\nu(u)$, де

$$\nu(u)=d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\bigtriangledown g(j)\Big(\chi\{X_j<h(j,u)\}-\chi\{\varepsilon_j<0\}\Big),$$

$$E\nu(u)=d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\bigtriangledown g(j)\Big(F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big)-\beta\Big).$$

Послідовно отримуємо (див. формулу (55))

$$||E\nu(u)||= \Big(\sum_{i=1}^{q}d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}g_i(j)\Big(F\Big(h(j,u)-h(j,0)\Big)-\beta\Big)^2\Big)^{1/2}\leqslant \leqslant p_0\Big(\sum_{i=1}^{q}d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\Big|g_i(j)\Big|\Big|h(j,u)-h(j,0)\Big|\Big)^2\Big)^{1/2}\leqslant \leqslant p_0q^{1/2}N^{1/2}\Big(N^{-1}\Phi_{2N}(u,0)\Big)^{1/2}\leqslant \leqslant p_0qN^{1/2}||u||\leqslant k_2N^{1/2-\gamma l_0\tilde{l}_0^{-1}}. \tag{79}$$

Якщо $\gamma>1/2$, то для достатньо великих N показник степеня в (79) від'ємний. Це означає, що залишилось оцінити ймовірність ($\varepsilon'<\varepsilon$)

$$P_3=P\Big\{\sup_{||u||_0<N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}}||\nu(u)||>\varepsilon'\Big\}.$$

Запишемо

$$||\nu(u)|| = \Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N} g_i(j)\times$$
$$\Big(\chi\{\varepsilon_j < h(j,u)-h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big)\Big)^2\Big)^{1/2}. \tag{80}$$

Як і раніше, знаходимо

$$\Big|\chi\{\varepsilon_j < h(j,u)-h(j,0)\} - \chi\{\varepsilon_j < 0\}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \chi\Big\{\inf_{||u||_0 < N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} (h(j,u)-h(j,0)) \leqslant \varepsilon_j \leqslant$$
$$\sup_{||u||_0 < N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} (h(j,u)-h(j,0))\Big\} := \chi_{n_0}(j).$$

Продовжуючи (80), отримуємо

$$||\nu(u)|| = \Big(\sum_{i=1}^{q} d_{iN}^{-2}\Big(\sum_{j=1}^{N} |g_i(j)|\chi_{n_0}(j)\Big)^2\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{q}\Big(N^{1/2} d_{iN}^{-1}\max_{1\leqslant j\leqslant N}|g_i(j)|\Big)^2\Big)^{1/2}$$
$$\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j) \leqslant ||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j).$$

Це означає, що

$$P_3 = P\Big\{||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\chi_{n_0}(j) > \varepsilon'\Big\}. \tag{81}$$

Аналогічно до оцінки (67) знаходимо

$$N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N} E\chi_{n_0}(j) \leqslant$$
$$p_0||k||N^{1/2}a(n_0) = k_3 N^{1/2-\gamma l_0/\tilde{l}_0}. \tag{82}$$

Тоді ми можемо записати для $\varepsilon'' < \varepsilon'$

$$P_3 =$$
$$P\Big\{||k||N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\Big(\chi_{n_0}(j) - E\chi_{n_0}(j)\Big) > \varepsilon''\Big\} \leqslant$$
$$\leqslant (\varepsilon'')^{-2}||k||N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j')\Big).$$

Оскільки існує розвинення в просторі $L_2(\Omega)$

$$\chi_{n_0}(j) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m(j)}{m!}H_m(\xi_j),$$

$$\tilde{c}_m(j) = \int_{\mathbb{R}} \chi\Big\{\inf_{||u||_0 < N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} (h(j,u)-h(j,0)) \leqslant$$
$$G(x) \leqslant \sup_{||u||_0 < N^{-\gamma l_0/\tilde{l}_0}} (h(j,u)-h(j,0))\Big\}\times$$
$$H_m(x)\varphi(x)dx,\ m \geqslant 0,$$
$$E\chi_{n_0}(j) = \tilde{c}_0(j),$$

то

$$cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j')\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m(j)\tilde{c}_m(j')}{m!}B^m(j-j'),$$

$$N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j')\Big) \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j,j'=1}^{N}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!}|B(j-j')|^m \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!}|B(j-j')|\Big), \tag{83}$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tilde{c}_m^2(j)}{m!} = D\chi_{n_0}(j) \leqslant E\chi_{n_0}(j).$$

З огляду на (83) ми можемо записати

$$N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} cov\Big(\chi_{n_0}(j), \chi_{n_0}(j')\Big) \leqslant$$
$$N^{-1}\sum_{j,j'=1}^{N} E\chi_{n_0}(j)|B(j-j')| \leqslant$$
$$\leqslant N^{-1}\sum_{j=1}^{N} E\chi_{n_0}(j)\sum_{j'=-N}^{N}|B(j')| =$$
$$2\Big(\sum_{j=1}^{N} E\chi_{n_0}(j)\Big)\Big(N^{-1}\sum_{j'=0}^{N}|B(j')|\Big).$$

До першої суми застосуємо оцінку (82), а до другої – оцінку (70). Тоді остаточно

$$P_3 \leqslant kN^{1-\gamma l_0/\tilde{l}_0-\alpha}. \tag{84}$$

Ця величина збігається до нуля при $N \to \infty$ зі степеневою швидкістю, завдяки нерівності $\alpha + \gamma > 1$. ■

Лема 2. *За умов теореми* 3 *для будь-якого* $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|Q_N^{\pm}(\theta) + EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{85}$$

де

$$EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) = EQ_N^{\pm}(\tau)\Big|_{\tau=\hat{\theta}_N}. \tag{86}$$

◀ Для нормованої оцінки Коенкера – Бассетта (див. пункт 2) $\bar{u}_N = N^{-1/2} d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ та достатно малих $r > 0$

$$P\Big\{ z_N^{\pm}(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon \Big\} = P\Big\{ \frac{||Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N) - Q_N^{*\pm}(0) - EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)||}{1 + ||EQ_N^{*\pm}(\bar{u}_N)||} > \varepsilon \Big\} = P_1 + P_2,$$

де

$$P_1 = P\Big\{ z_N^{\pm}(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, ||\bar{u}_N|| \leqslant r \Big\} \leqslant \leqslant P\Big\{ \sup_{u \in V^c(r) \bigcap \tilde{U}_N^c(\theta)} z_N^{\pm}(\theta, u) > \varepsilon \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

за лемою 1 . З іншого боку,

$$P_2 = P\Big\{ z_N^{\pm}(\theta, \bar{u}_N) > \varepsilon, ||\bar{u}_N|| > r \Big\} \leqslant P\Big\{ ||\bar{u}_N|| > r \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

за умови теореми 3. Оскільки $Q_N^{*\pm}(\bar{u}_N) = Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)$, то ми довели, що

$$P\Big\{ \frac{||Q_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) - Q_N^{\pm}(\theta) - EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)||}{1 + ||EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N)||} > \varepsilon \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{87}$$

З (87) та нерівностей $Q_{iN}^{\pm}(\hat{\theta}_N) \geqslant 0$ (див. (48)), так само, як в [4], отримуємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \Big|\Big| Q_N^{\pm}(\theta) + EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > \Big(1 + \Big|\Big| EQ_N^{\pm}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big|\Big)\varepsilon \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{88}$$

Далі аналогічно [4] доводиться обмежеість за ймовірністю послідовності випадкових величин $||EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)||$ у тому розумінні, що для довільного малого $\varepsilon > 0$ та довільного великого $M > 0$

$$P\Big\{ \Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > M \Big\} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon), \tag{89}$$

де константу $C(\varepsilon) < \infty$ можна записати в явному вигляді, а $o_N(\varepsilon) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тоді з урахуванням (88) та (89) маємо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \Big|\Big| Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > \varepsilon \Big\} \leqslant P\Big\{ \Big|\Big| Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > \frac{1 + ||EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)||}{1 + M}\varepsilon, \Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| \leqslant M \Big\} + P\Big\{ \Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > M \Big\} \leqslant P\Big\{ \Big|\Big| Q_N^{+}(\theta) + EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big| > \Big(1 + \Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) \Big|\Big|\Big) \frac{\varepsilon}{1 + M} \Big\} + \frac{C(\varepsilon)}{M^2} + o_N(\varepsilon). \tag{90}$$

У мажоранті (90) 1-й та 3-й доданки прямують до нуля при $N \to \infty$, а 2-й доданок можна зробити як завгодно малим вибором числа M. ■

Лема 3. *За умов теореми* 3 *для будь-якого* $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{ \Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) - p(0) J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta) \Big|\Big| > \varepsilon \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{91}$$

◀ Якщо величина $\bar{u}_N = N^{-1/2} d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ є малою та консистентною в сенсі (10), то нерівності (60) та обмеженості за ймовірністю випадкового вектора $EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N)$ (див. попередню лему) випливає, що вектор $N^{1/2}\bar{u}_N = d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ також обмежений за ймовірністю в тому сенсі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують числа $M_0 = M_0(\varepsilon)$, $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такі, що для довільних $M > M_0$, $N > N_0$

$$P\{ N^{1/2} ||\bar{u}_N|| > M \} < \varepsilon. \tag{92}$$

Використовуючи позначення (54), (58), співвідношення (57), (86) отримуємо

$$N^{-1/2} EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) = N^{-1/2} EQ_N^{*+}(\bar{u}_N) = H_N \bar{u}_N,$$

$$EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) - p(0) J_N d_N(\hat{\theta} - \theta) = (H_N - p(0) J_N) N^{1/2} \bar{u}_N,$$

де матриця $H_N = \Big(N^{-1/2} D_N^{il}(u^{(i)}) \Big)_{i,l=1}^{q}$, $||u^{(i)}|| \leqslant ||\bar{u}_N||, i = \overline{1, q}$, означена, як і раніше, тільки детерміновані аргументи замінені на випадкові.

Співвідношення (56), (57), показують, що

$$\Big|\Big| EQ_N^{+}(\hat{\theta}_N) - p(0) J_N d_N(\hat{\theta}_N - \theta) \Big|\Big| \leqslant k_4 \Big|\Big| \bar{u}_N \Big|\Big| \cdot \Big|\Big| d_N(\hat{\theta}_N - \theta) \Big|\Big|. \tag{93}$$

Збіжність (91) випливає тепер із консистентності оцінки Коенкера – Бассетта, обмеженості за ймовірністю вектора $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ та (93) (див. [4]). ■

Тепер ми можемо довести теорему редукції 3 .

◀ Запишемо для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N Q_N^+(\theta) + d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| > \varepsilon\Big\} \leqslant$$
$$P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N\Big(Q_N^+(\theta) + EQ_N^+(\hat{\theta}_N)\Big)\Big|\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} +$$
$$P\Big\{\Big|\Big|p^{-1}(0)\Lambda_N EQ_N^+(\hat{\theta}_N) - d_N(\hat{\theta}_N - \theta)\Big|\Big| > \frac{\varepsilon}{2}\Big\} =$$
$$= P_1 + P_2.$$

З умов теореми та (85) випливає, що $P_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Так само, з умов теореми та (91) отримуємо, що $P_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Результат теореми 3 є наслідком відомого факту, доведення якого для випадкових величин міститься, наприклад, в [17], стор. 117-118. Цей факт є вірним для випадкових векторів також, і ми його наводимо нижче.

Нехай $\{(\xi_N, \eta_N), N \geqslant 1\}$ - послідовність пар випадкових векторів, для яких виконано наступні припущення:

1) $||\xi_N - \eta_N|| \xrightarrow[N\to\infty]{P} 0$;

2) $\eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{d} \eta$.

Тоді $\eta_N \xrightarrow[N\to\infty]{d} \eta$. Застосування цього твердження доводить теорему 3. ■

Теорема 4. *Нехай виконано умови теореми 3. Тоді нормована оцінка Коенкера – Бассетта* $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ *при* $N \to \infty$ *асимптотично нормальна* $N(0, K)$ *з коваріаційною матрицею*

$$K = \frac{2\pi}{p^2(0)}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)\Big)^{-1}$$
$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j^2(\Psi)}{j!}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(j)}(\lambda)\mu(d\lambda)\Big)\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)\Big)^{-1}. \tag{94}$$

◀ Оскільки ми знаходимось в умовах теореми 3, то розподіл $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \to \infty$ співпадає з асимптотичним розподілом вектора

$$\gamma_N = p^{-1}(0)\Lambda_N d_N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\Psi(\xi_j) \bigtriangledown g(j), \tag{95}$$
$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $E\gamma_N = 0$, а коваріаційна матриця вектора γ_N

$$E\gamma_N\gamma_N^T = p^{-2}(0)\Lambda_N(E\zeta_N\zeta_N^T)\Lambda_N,$$

де ζ_N - вектор, означений рівністю (37), то за теоремою 1

$$E\zeta_N\zeta_N^T \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j^2(\Psi)}{j!}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(r)}(\lambda)\mu(d\lambda). \tag{96}$$

Із тексту 2-го розділу також випливає, що

$$\Lambda_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \Big(\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda)\Big)^{-1}. \tag{97}$$

Ще одне посилання на теорему 1 повністю доводить теорему. ■

Приклад 2. Оскільки в прикладі 1 було показано, що функція регресії (39) задовольняє умови **B2** – **B4** (умову **B3** за припущенням (44), то ми можемо записати граничну коваріаційну матрицю К, задану формулою (94), граничного нормального розподілу нормованої ОКБ $d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. З (42) випливає, що $\int_{-\pi}^{\pi}\mu(d\lambda) = \mathbb{I}_{2n}$. Тоді, враховуючи (45), ми можемо стверджувати, що матриця К є блочно - діагональною матрицею з блоками

$$\mathrm{K}_i = \frac{2\pi}{p^2(0)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{C_j^2(\Psi)}{j!}f^{(j)}(\varphi_i)\mathbb{I}_2,\ i = \overline{1,n}. \tag{98}$$

В нашому прикладі $N^{1/2}d_N^{-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}\ \mathbb{I}_{2n}$. Крім цього, $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta) = (N^{1/2}d_N^{-1})d_N(\hat{\theta}_N - \theta)$. Це означає, що граничний нормальний розподіл вектора $N^{1/2}(\hat{\theta}_N - \theta)$ має коваріаційну матрицю $\tilde{\mathrm{K}}$ з блоками $\tilde{\mathrm{K}}_i = 2\mathrm{K}_i,\ i = \overline{1,n}$.

Приклад 3. Нехай $\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}$, – функція розподілу стандартної випадкової величини $N(0,1)$, якою і є будь-яке значення часового ряду $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, зокрема, ε_0. Тоді за лемою Смірнова $\Phi(\varepsilon_0)$ є випадковим числом, тобто рівномірно розподіленою на відрізку $[0,1]$ випадковою величиною. Позначемо $F_{\chi_r^2}$ функцію розподілу хі-квадрат випадкової величини з r ступенями волі. Тоді часовий ряд $\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j)),\ j \in \mathbb{Z}$, має маргінальні χ_r^2 – розподіли. Центруємо $\tilde{\varepsilon}_j$:

$$\varepsilon_j = \tilde{\varepsilon}_j - E\tilde{\varepsilon}_j = F_{\chi_r^2}^{-1}(\Phi(\xi_j)) - r,\ j \in \mathbb{Z}, \tag{99}$$

тобто

$$G(x) = F^{-1}_{\chi^2_r}(\Phi(x)) - r,\ x \in \mathbb{R}. \tag{100}$$

Отримуємо $F(x) = P\{\varepsilon_0 < x\} = P\{\chi^2_r < x + r\}$, та

$$F(0) = F_{\chi^2_r}(r) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} \int\limits_0^r x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{F(\frac{r}{2})} \int\limits_0^{r/2} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-x} dx = \frac{\gamma(\frac{r}{2}, \frac{r}{2})}{\Gamma(\frac{r}{2})} = \beta, \tag{101}$$

де $\gamma(\alpha, x) = \int\limits_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ – неповна гамма-функція.

Якщо r – парне число, то за формулою 8.352 [18]

$$\beta = 1 - e^{-\frac{r}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{r^k}{2^k k!},\ r = 2l,\ l \geqslant 1. \tag{102}$$

Число β в (102) є ірраціональним, зокрема, воно не дорівнює $\frac{1}{2}$.

Щільність випадкової величини ε_0

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}} (x + r)^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x+r}{2}},\ x \geqslant -r, \tag{103}$$

неперервно диференційовна при при $r \geqslant 4$, а її похідна обмежена, і тому умову **A4** виконано при $r \geqslant 4$ з

$$p(0) = \frac{r^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{r/2}}. \tag{104}$$

В цьому прикладі

$$\chi\{G(x) < 0\} = \chi\{F^{-1}_{\chi^2_r}(\Phi(x)) < r\} =$$
$$\chi\{\Phi(x) < F_{\chi^2_r}(r)\} = \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$
$$\Psi(x) = \beta - \chi\{G(x) < 0\} = \beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\},$$

та 1-й коефіцієнт Фур'є розкладу функції $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, за поліномами Чебишова–Ерміта

$$C_1(\Psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}\Big) H_1(x)\varphi(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} x\varphi(x) dx \neq 0.$$

Таким чином, $Hrank(\Psi) = 1$. З іншого боку,

$$C_0(\Psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\beta - \chi\{\Phi(x) < \beta\}\Big)\varphi(x) dx =$$

$$= \beta - \int\limits_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\beta)} \varphi(x) dx = \beta - \Phi\Big(\Phi^{-1}(\beta)\Big) = 0.$$

Сенс прикладу 3 полягає в тому, що ми отримуємо можливість оцінювати параметри регресії у випадку несиметричних похибок спостережень, використовуючи оцінки Коенкера–Бассетта.

5 Висновки

У роботі доведено асимптотичну нормальність ОКБ в лінійній моделі регресії з нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним часовим рядом з сингулярним спектром в якості випадкового шуму.

Отримані результати дозволяють використовувати ОКБ в моделях регресії з несиметричними похибками спостережень.

Природним напрямом продовження досліджень є апроксимація з достатньою точністю громіздкої коваріаційної матриці граничного гауссівського розподілу ОКБ, щоб наблизити отримані результати до практичних застосувань. Крім цього, бажано знайти інші приклади несумовних коваріаційних функцій та сингулярних спектральних щільностей стаціонарних часових рядів для збільшення кількості математичних моделей спостережень, аналогічних вивченій у роботі.

Список використаних джерел

1. *Beran J.* Long-memory Processes. Probabilistic Properties and Statistical Methods / J. Beran, Y. Fenf, S. Ghosh, R. Kulik. // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2013. – 884 p.

2. *Bassett G.* Regression quantile / G. Bassett, R. Koenker // Econometrica. – 1978. –Vol. 46. –P. 33-50.

3. *Koenker R.* Quantile Regression / R. Koenker // Cambridge University Press. – 2005. – 349 p.

4. *Савич І. М.* Асимптотичні властивості оцінок Коенкера-Бассетта параметра нелінійної регресії з сильно залежним випадковим шумом / І. М. Савич // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського", КНУ ім. Тараса Шевченка. – Київ. – 2017. – 144 с.

5. *Тарасенко П. Ф.* Оценивание параметров нелинейной модели квантильной регрессии знаковым методом / П. Ф. Тарасенко, А. В. Журавлёв // Томский гос. ун-т, ОПИТНЦ.–2005. –с. 258-266. – Режим доступу: http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/54927/1/39.pdf

6. *Орловський І. В.* Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії / І. В. Орловський // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського". – Київ. – 2006. – 156 с.

7. *Pfanzagl J.* On the measurability and consistency of minimum contrast estimates / J. Pfanzagl // Metrica, 14. – 1969. – P. 249-272.

8. *Anh V. V.* Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence / V. V. Anh, V. P. Knopova, N. N. Leonenko // Australian and NZ J. of Statistics. –2004. – 46. –P. 275–296.

9. *Ivanov A.V.* Limit theorems for weighted non-linear transformations of gaussian processes with singular spectra / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I.N. Savich // Ann. Probab.–2013. – Vol.41, № 2. – P. 1088-1114.

10. *Жураковський Б. М.* Виявлення прихованих періодичностей в моделях регресії з локально перетвореним гаусівським стаціонарним шумом / Б. М. Жураковський // Дис. канд. фіз.-мат. наук. Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського".– Київ. – 2016. – 146 с.

11. *Donoghue W. J.* Distribution and Fourier Transforms / W. J. Donoghue // Academic Press, New York. – 1969. – 327 p.

12. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды / Э. Хеннан // М.: Мир. – 1974. – 576 с.

13. *Grenander U.* On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // Ann. Math. Statist. –1954. – Vol. 25, 2. –P. 252-272.

14. *Ибрагимов И.А.* Гауссовские случайные процессы / И.А. Ибрагимов, Ю.А. Розанов // М.: Наука. – 1970. – 384 с.

15. *Хьюбер П.* Робастность в статистике / П. Хьюбер // М.: Мир. – Москва. – 1984. – 304 с.

16. *Huber P.J.* The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions / P.J. Huber // Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. Berkeley: Unif. Clif. Press. –1967. – Vol.1. –P. 221-233.

17. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения / С. Р. Рао // М.: Наука. – 1968. – 548 с.

18. *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик // М.: ГИФМЛ. – Издание 4-е. – 1963. – 1100 с.

References

1. BERAN, J. (2013) Long-memory Processes. Probabilistic Properties and Statistical Methods.*Springer-Verlag Berlin Heidelberg.* – 884 p.

2. BASSETT, G. (1978) Regression quantile. *Econometrica.*–Vol. 46. –P. 33-50.

3. KOENKER, R (2005) Quantile Regression. *Cambridge University Press.* – 349 p.

4. SAVYCH, I.N. (2017) Asymptotic properties of Koenker-Bassett estimator of parametrs of nonlinear regression with strongly dependent random noise. *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.* – 144 p.

5. TARASENKO, P. F., ZHURAVLEV, A.V. (2005) Estimation of the parameters of the nonlinear quantile regression model by the sign method. *Tomsk state University, OPITNTS.*–P. 258-266. – Access mode: http://elib.bsu.by/bitstream/123456789/54927/1/39.pdf

6. ORLOVSKY, I.V. (2006) *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.*– 156 p.

7. PFANZAGL, J. (1969) On the measurability and consistency of minimum contrast estimates*Metrica.* – 14. – P. 249-272.

8. ANH, V.V., KNOPOVA, V.P., LEONENKO, N.N. (2004) Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence. *Australian and NZ J. of Statistics.* – 46. – P. 275–296.

9. IVANOV, A.V., LEONENKO, N.N., RUIZ-MEDINA, M.D., SAVICH, I.N. (2013) Limit theorems for weighted non-linear transformations of gaussian processes with singular spectra. *Ann. Probab.* – Vol.41, № 2. –P. 1088-1114.

10. ZHURAKOVSKY, B.M. (2016) The appearance of hidden periodicities in regression model with local transformation of gaussian stationary noise *Diss. of Cand. Phys.-Math. Sciences, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv.* – 146 p.

11. DONOGHUE, W.J. (1969) Distribution and Fourier Transforms.*Academic Press, New York.* – 327 p.

12. HENNAN, E. (1974) Multidimensional time series. *M.: Mir.* – 576 p.

13. GRENANDER, U. (1954) On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Statist.* – Vol. 25, 2. –P. 252-272.

14. IBRAGIMOV, I.A., ROZANOV, U.A. (1970) Gaussian random processes *M.: Nauka.* – 384 p.

15. HUBER, P. J. (1984) Robustness in statistics. *M.: Mir* – 304 c.

16. HUBER, P. J. (1967) The behaviour of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions. *Proc. 5-th Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability. Berkeley: Unif. Clif. Press.* – Vol.1. –P. 221-233.

17. RAO, S.R. (1968) Linear statistical methods and their applications. *M.: Nauka.* – 548 p.

18. GRADSHTEIN, I.S., RYZHYK, I.M. (1963) Tables of integrals, sums, series and products. *M .: GIFML.* – 1100 p.

Received: 19.02.2019