УДК 519.9

Турчин І.М.[1,2], д.ф.-м.н., доц.
Василько Г.В.[1], аспір.
Іваськевич О.Я.[1], нач. відділу

Нестаціонарна змішана задача теплопровідності для півбезмежного порожнистого циліндра

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1
[2]Університет Казимира Великого, 85064, м. Бидгощ, вул. Хоткевіча, 30, Польща
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

I.M. Turchyn[1,2], Dr. Sci., Assoc. Prof.
G.V. Vasylko[1], PhD Student
O.Ya. Ivaskevych[1], Head of Department

The mixed unsteady heat conduction problem for a half-infinite hollow cylinder

[1]Ivan Franko National University of L'viv, 79000, L'viv, Universytetska str., 1,
[2]Kazimierz Wielki University, 85064, Bydgoszcz, Khotkiewicha str., 30, Poland
e-mail: ihorturchyn@gmail.com

Отримано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для півбезмежного порожнистого циліндра. Задача розглядається за змішаних умов нагрівання: на частині зовнішньої та внутрішньої граничних поверхонь циліндра та на його торці задано розподіл температури, а на іншій частині його граничної поверхні теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок одержано із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною. Змішані умови на обох поверхнях задовольняються шляхом зведення задачі до послідовності парних інтегральних рівнянь, розв'язок яких будується методом рядів Неймана. Обґрунтовується збіжність методу та числових процедур його реалізації.

Ключові слова: нестаціонарна теплопровідність, змішані крайові умови, поліноми Лагерра, парні інтегральні рівняння.

Analysis of temperature fields is important for many engineering applications. The account of actual operating conditions of these structures frequently leads to mixed heating condition. The authors of this paper developed a new effective method of solutions derivation for mixed boundary-value unsteady heat conduction problems. This paper considers the cylinder with at the part of surface of which the temperature distribution is known. Outside this area the heat transfer by Newton's law is performed.

To the heat conductivity problem it is applied the Laguerre integral transformation in time variables and integral Fourier transformation in spatial variable. As a result the triangular sequence of ordinary differential equations is obtained. The general solution of these sequences is obtained in the form of algebraic convolution. Taking into account the mixed boundary conditions leads to dual integral equations. For solution of this problem it is proposed the method of Neumann's series. By this method the problem is reduced to the infinite system of algebraic equations, for which the convergence of reduction procedure is proved. Finally, the unknown temperature is submitted as a series of Laguerre polynomials. The coefficient of these series is Fourier integrals.

Key Words: unsteady heat conduction problem; mixed boundary conditions; Laguerre polynomials; dual integral equations.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

При розв'язуванні нестаціонарних задач теплопровідності зі змішаними крайовими умовами з використанням методу інтегрального перетворення Лапласа [1] дослідників чекають значні труднощі, пов'язані із розглядом так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [2], які містять як незалежну змінну параметр перетворення за Лапласом. Оскільки точний розв'язок таких систем віднайти вкрай важко, то доводиться застосовувати різні числові чи асимптотичні методи, що може вплинути на точність та достовірність результатів. Поряд із традиційними підходами до розв'язування такиих задач останнім часом одержав розвиток метод поліномів Лагерра [3,4], який використовується в цій праці.

2. Постановка задачі та її розв'язання

Розглянемо півбезмежний порожнистий циліндр з радіусами внутрішньої поверхні R_1 та зовнішньої - R_2. З моменту часу $t=0$ циліндр миттєво занурюється на глибину L в середовище, що має сталу температуру T^*. Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами біля границі циліндра будемо вважати, що в результаті цього занурення на торцевій поверхні циліндра, а також на частині внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра вважається заданим часовий розподіл температури $T_c(t)=T^*(1-\exp(-t_0t))$, де t_0 – величина розмірності $[1/\sec]$, яка визначає час стабілізації температури на поверхнях циліндра. Зовні ділянки $0\le z\le L$ на поверхнях циліндра відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Зважаючи на це, задачу теплопровідності сформулюємо наступним чином:

$$\partial^2_{\rho\rho}T+\rho^{-1}\partial_\rho T+\partial^2_{\gamma\gamma}T=\partial_\tau T\,; \tag{1}$$

$$T(\rho,\gamma,0)=0\,; \tag{2}$$

$$T(\rho,0,\tau)=T_c(\tau)\,; \tag{3}$$

$$T(\rho_2,\gamma,\tau)=T_c(\tau),\ 0\le\gamma\le 1\,; \tag{4}$$

$$\partial_\rho T(\rho_2,\gamma,\tau)+\mathrm{Bi}\,T(\rho_2,\gamma,\tau)=0,\ \gamma>1\,; \tag{5}$$

$$T(\rho_1,\gamma,\tau)=T_c(\tau),\ 0\le\gamma\le 1\,; \tag{6}$$

$$\partial_\rho T(\rho_1,\gamma,\tau)-\mathrm{Bi}\,T(\rho_1,\gamma,\tau)=0,\ \gamma>1\,; \tag{7}$$

Тут $\rho=r/L$, $\gamma=z/L$ - безрозмірні змінні циліндричної системи координат, $\tau=a_Tt/L^2$, $\mathrm{Bi}=\kappa d/\lambda_T$, $\rho_1=R_1/L$, $\rho_2=R_2/L$, λ_T,a_T – відповідно, коефіцієнт теплопровідності та температуропровідності циліндра; κ - коефіцієнт тепловіддачі з його поверхонь.

До рівняння (1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною τ [4] та $\sin-$перетворення Фур'є за змінною γ [5]. В результаті, враховуючи нульові початкові умови (2) та умови на торці (3) одержимо трикутну послідовність звичайних диференційних рівнянь

$$\rho^{-1}d_\rho\left(\rho d_\rho\overline{T}_n\right)-\omega^2\overline{T}_n=\lambda\sum_{m=0}^{n-1}\overline{T}_m-\xi T_{cn}\,, \tag{8}$$

У цих послідовностях $\omega^2=\xi^2+\lambda$, $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)=$ $=\int\limits_0^\infty\exp(-\lambda\tau)\left[\int\limits_0^\infty T_n^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)\sin(\xi\gamma)d\gamma\right]L_n(\lambda\tau)d\tau$.

Аналогічно до результатів, одержаних в роботі [6], загальний розв'язок послідовностей (8) запишемо у вигляді

$$\overline{T}_n(\xi,\rho)=\sum_{j=0}^{n}\Big[A_{n-j}(\xi)G_j(\xi,\rho)+B_{n-j}(\xi)W_j(\xi,\rho)\Big]+ +Q_n \tag{9}$$

де

$$Q_n=\frac{\xi}{\omega^2}\left\{T_{cn}-\frac{\lambda}{\omega^2}\sum_{k=0}^{n-1}T_{ck}\left(\frac{\xi^2}{\omega^2}\right)^{n-1-k}\right\}, \tag{10}$$

$$G_j(\xi,\rho)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\rho^k\,\mathrm{I}_k(\omega\rho) \tag{11}$$

$$W_j(\xi,\rho)=\sum_{k=0}^{j}a_{j,k}\left(-\rho^k\right)\mathrm{K}_k(\omega\rho)\,. \tag{12}$$

Коефіцієнти $a_{j,k}$ одержуються із рекурентних співвідношень:

$$a_{j,k+1}=\frac{\lambda}{2\omega(k+1)}\sum_{m=k}^{j-1}a_{m,k} \tag{13}$$

при довільних $a^{(i)}_{j,0}$. В подальших розрахунках покладено $a_{0,0}=1$, $a^{(i)}_{j,0}=0, j\ge1$.

Невідомі $A_n(\xi),B_n(\xi)$ знайдемо з умов (4)-(7).

Після застосування інтегрального перетворення Лагерра ці умови набудуть вигляду

$$T_n(\rho_2,\gamma)=T_{cn},\ 0\le\gamma\le1\,; \tag{14}$$

$$\partial_\rho T_n(\rho_2,\gamma)+\mathrm{Bi}\,T_n(\rho_2,\gamma)=0,\ \gamma>1\,; \tag{15}$$

$$T_n(\rho_1,\gamma)=T_{cn},\ 0\le\gamma\le1\,; \tag{16}$$

$$\partial_\rho T_n(\rho_1,\gamma)-\mathrm{Bi}\,T_n(\rho_1,\gamma)=0,\ \gamma>1\,; \tag{17}$$

Безпосереднє застосування $\sin-$перетворення Фур'є до цих умов є неможливим, внаслідок їх різнорідності, тому поступимо традиційно для випадку змішаних умов - продовжимо умови (15) і (17) на всю піввісь, увівши при цьому в розгляд невідомі функції $g_{n1}(\gamma)$ і $g_{n2}(\gamma)$:

$$\rho=\rho_1:\quad \partial_\rho T_n-\mathrm{Bi}T_n=g_{n1}(\gamma)S_+(1-\gamma)$$

$$\rho=\rho_2:\quad \partial_\rho T_n+\mathrm{Bi}T_n=g_{n2}(\gamma)S_+(1-\gamma) \tag{18}$$

Після застосування до (18) $\sin-$перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\rho\overline{T}_n-\mathrm{Bi}\overline{T}_n=\overline{g}_{n1}(\xi),\ \rho=\rho_1$$

$$\partial_\rho\overline{T}_n+\mathrm{Bi}\overline{T}_n=\overline{g}_{n2}(\xi),\ \rho=\rho_2\,. \tag{19}$$

Безпосередня підстановка розв'язків (9) в умови (14)-(15) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом n приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} b_{1,1}A_n + b_{1,2}B_n = c_{1,n} \\ b_{2,1}A_n + b_{2,2}B_n = c_{2,n} \end{cases} \qquad (20)$$

де $b_{1,1} = \omega \mathrm{I}_1(\omega\rho_2) + \mathrm{Bi}\,\mathrm{I}_0(\omega\rho_2)$,

$b_{1,2} = -\omega \mathrm{K}_1(\omega\rho_2) + \mathrm{Bi}\,\mathrm{K}_0(\omega\rho_2)$,

$b_{2,1} = \omega \mathrm{I}_1(\omega\rho_1) - \mathrm{Bi}\,\mathrm{I}_0(\omega\rho_1)$,

$b_{2,2} = -\omega \mathrm{K}_1(\omega\rho_1) - \mathrm{Bi}\,\mathrm{K}_0(\omega\rho_1)$,

$$c_{1,n} = \bar{g}_{n1}(\xi) + \mathrm{Bi}Q_n - \sum_{j=1}^{n}[A_{n-j}(\xi)\{G'_j(\xi,\rho_1) -$$

$$-\mathrm{Bi}\,G_j(\xi,\rho_1)\} +$$

$$+B_{n-j}(\xi)\left(W'_j(\xi,\rho_1) - \mathrm{Bi}W_j(\xi,\rho_1)\right)],$$

$$c_{2,n} = \bar{g}_{n2}(\xi) - \mathrm{Bi}Q_n - \sum_{j=1}^{n}[A_{n-j}(\xi)\{G'_j(\xi,\rho_2) +$$

$$\mathrm{Bi}\,G_j(\xi,\rho_2)\} + B_{n-j}(\xi)\{W'_j(\xi,\rho_2) +$$

$$\mathrm{Bi}W_j(\xi,\rho_2)\}]. \quad (21)$$

Рекурентний розв'язок систем (20) містить наразі невідомі функції $\bar{g}_{ni}(\xi), (i = 1,2)$, які визначимо із змішаних умов (14)-(17). Із урахуванням формули обернення для sin– перетворення Фур'є після перетворень ці умови зведено до двох послідовностей парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \xi^{-1}\bar{g}_{ni}(\xi)\left[1 + f_i(\xi)\right]\sin(\xi\gamma)d\xi =$$

$$-\frac{\pi}{2}T_{cn} + \int_0^\infty F_{ni}(\xi)\sin(\xi\gamma)d\xi,\ 0 \le \gamma \le 1 \qquad (22)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_{ni}(\xi)\sin(\xi\gamma)d\xi = 0, \gamma > 1, \qquad (23)$$

$n = 0,1,2,\ldots, i = 1,2$

де $\bar{g}_{ni}(\xi)$ - шукані функції, $f_i(\xi)$ та $F_{ni}(\xi)$ - відомі.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (22), (23) подамо шукані функції $\bar{g}_{ni}(\xi)$ у вигляді рядів Неймана [5]

$$\bar{g}_{ni}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{2k+1}a_{n,k}^{(i)}J_{2k+1}(\xi),\ i = 1,2\,. \qquad (24)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (23) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах $a_{n,k}^{(i)}$, а з рівняння (20) одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$a_{n,k}^{(i)} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}^{(i)} b_{m,k}^{(i)} = c_{n,k}^{(i)} \qquad (25)$$

де:

$$b_{m,k}^{(i)} = 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1}\int_0^\infty \frac{f_i(\xi)}{\xi} J_{2m+1}(\xi)J_{2k+1}(\xi)d\xi\,,$$

$$c_{n,k}^{(i)} = 2\sqrt{2k+1}\int_0^\infty \left[-\frac{\bar{T}_n^*(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{F_{ni}(\xi)}{\xi}\right] J_{2k+1}(\xi)d\xi\,;$$

Використовуючи властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty}\left(b_{m,k}^{(i)}\right)^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(c_{n,k}^{(i)}\right)^2 < \infty\,. \qquad (26)$$

Виконання умов (22) свідчить про квазірегулярність систем (21), забезпечує збіжність числової процедури їх редукції. Крім того, знайдені коефіцієнти $a_{n,k}^{(i)}$ задовольнятимуть умову $\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{n,k}^{(i)}\right)^2 < \infty,\ i = 1,2;\ n = 0,1,2,\ldots$

Знаходження невідомих $a_{n,k}^{(i)}$ з систем (25) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності.

Як відомо, при числовому розрахунку обернення sin -перетворення Фур'є для малих γ виникають труднощі обчислювального характеру, пов'язані із нерегулярною збіжністю відповідних інтегралів.

Для усунення цієї проблеми проведено їх регуляризацію, а розв'язок остаточно подається у вигляді:

$$T(\rho,\gamma,\tau) = T^*(\tau)S_+(1-\gamma) +$$

$$+\lambda\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(\lambda\tau)\int_0^\infty\{T_n(\xi,\rho) - .$$

$$-T_n^*\frac{1-\cos\xi}{\xi}\}\sin(\xi\gamma)d\xi \qquad (27)$$

Як свідчать проведені числові експерименти, таке подання значно покращує практичну збіжність інтегралів, особливо на границях циліндра $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$ та при малих значеннях γ.

3. Висновки

Розглянуто нестаціонарну задачу теплопровідності для півбезмежного циліндра, на торцевій поверхні якого та на частинах зовнішньої та внутрішньої поверхонь задана температура, а на решті частин поверхонь – теплообмін за законом Ньютона. Розв'язок задачі будується із використанням інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та перетворення Фур'є за просторовою змінною.

Остаточно розв'язок має вигляд рядів за поліномами Лагерра із коефіцієнтами у вигляді інтегралів Фур'є.

Список використаних джерел

1. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. *Sneddon I.* Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory / I. Sneddon - North-Holl. Publ. Comp., Amsterdam, 1966. - 282 p.
3. *Galazyuk V.A.* Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions / V.A. Galazyuk, I.M. Turchin // Int. Appl. Mech. – 1998. – V.34, No 9. – P. 886-893.
4. *Turchin I.M.* Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate / I.M. Turchin // Journ. of Eng. Physics and Thermoph.- 2012. - Vol. 85, Iss. 6. - P. 1453-1462.
5. *Sneddon I.* Fourie transforms / I. Sneddon - McCraw-Hill Book Company, New York, 1951. – 542 p.
6. *Turchin I.M.* Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions / I.M. Turchin, Yu. O. Kolodiy, I. Timar // Journ. of Eng. Physics and Thermoph. - 2015. - Vol.88, Iss. 5. - P. 1135-1144.
7. *Turchyn I.M.* Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating / I.M. Turchin, Yu. O. Kolodiy // Journal of Math. Sci. – 2017. – **223,** No. 2. – P. 145–158.
8. *Колодій Ю.О.* Змішана нестаціонарна задача теплопровідності для півбезмежного циліндра з покриттям / Ю.О. Колодій, І.М. Турчин, В.В. Хома // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки - 2017, №3. – С. 91-94.

References

1. KOLYANO, Yu. M. (1992) *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela.* Kiev: Naukova Dumka.
2. SNEDDON, I. (1966) *Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishers Company.
3. GALAZYUK, V. A. & TURCHIN, I. M. (1998) Quasistatic thermal stress state of a layer with mixed heating conditions. *Int. Appl. Mech.*. 34 (9). pp. 886-893.
4. TURCHIN, I.M. (2012) Nonstationary end heating of a multilayer semiinfinite plate. *Journ. of Eng. Physics and Thermoph.* 85 (6). pp. 1453-1462.
5. SNEDDON, I. (1951) *Fourie transforms.* New York: McCraw-Hill Book Company.
6. TURCHIN, I.M., KOLODIY, Yu.O & TIMAR, I. (2015) Nonstationary axisymmetric temperature field in a two-layer slab under mixed heating conditions. *Journ. of Eng. Physics and Thermoph.* 88 (5). pp/1135-1144.
7. TURCHYN, I.M. & KOLODIY, Yu.O. (2017) Quasistatic plane problem of thermoelasticity for the half space with coating under mixed conditions of heating. *Journal of Math. Sci.* 233 (2). pp. 145-158.
8. KOLODIY, Yu.O., TURCHYN, I.M. & KHOMA, V.V. (2017) Zminena nestatsionarna problema teplovidnosti dlya pivbezmezhnogo tsylindra z pokryttyam/ *Visnyk KNU im. T. Shevchenka Ser.: Phys. & Math.* N 3 pp. 91-94.

Надійшла до редколегії 01.06.2019