

УДК 539.3

Опанасович В. К.<sup>1</sup>, д. ф.-м. н., проф.,  
Слободян М. С.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., доц.,  
Білаш О. В.<sup>2</sup>, к. е. н.

### Чистий згин полоси (балки) з довільно орієнтованою наскрізною тріщиною

<sup>1</sup> Львівський національний університет імені  
Івана Франка, 79000, м. Львів, вул.  
Університетська, 1,  
e-mail: slobkolia@gmail.com

<sup>2</sup> Національна академія сухопутних військ  
імені гетьмана Петра Сагайдачного, 79012,  
м. Львів, вул. Героїв Майдану, 32,  
e-mail oksana.bilash@gmail.com

V. K. Opanasovych<sup>1</sup>, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
M. S. Slobodyan<sup>1</sup>, Ph.D.,  
O. V. Bilash<sup>2</sup>, Ph.D.

### Pure bending of strip (beam) with the arbitrarily oriented cross-cutting crack

<sup>1</sup> Ivan Franko National University of L'viv, 79000,  
L'viv, Universytetska str., 1,  
e-mail: slobkolia@gmail.com

<sup>2</sup> Hetman Petro Sahaidachnyi National Army  
Academy, 79012, L'viv, Heroes of Maidan street, 32,  
e-mail: oksana.bilash@gmail.com

В роботі досліджена задача про чистий згин полоси (балки) з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої вільні від зовнішнього навантаження. Під дією згинального моменту, залежно де вона розміщена, її береги можуть не контактувати або гладко контактувати по всій її довжині чи по частині. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексні потенціали, розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження, знайдено їх аналітичний розв'язок, на основі якого отримано явний вираз для комплексних потенціалів. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень, виходячи з енергетичного критерію руйнування, знайдено граничне значення згинального моменту, коли тріщина почне поширюватися. Для випадку, коли береги тріщини частково контактуватимуть, визначено довжину області контакту її берегів. Проведено числовий аналіз критичного моменту руйнування полоси (балки) при різних параметрах задачі, які пов'язані з механічним станом тріщини та побудовано відповідні графічні залежності.

Ключові слова: тріщина, полоса (балка), комплексні потенціали, згинальний момент, коефіцієнти інтенсивності напружень.

The problem of pure bending of strip (beam) with transverse rectilinear crack, edges of which are free from acuter load, is investigated in this paper. Under bending moment its edges may not contact or smoothly contact throughout its area length or part. Dependently on where it is located. Using methods of theory of functions of complex variable and complex potentials the problem at issue has been reduced to the problems of linear conjugation, their analytical solution is found. Explicit expressions on complex potentials is written. Based on the energy criterion of destruction stress intensity factors are determined. Limit value of moment when the crack begins to propagate is found. For the case when crack edges partially contact, area length of contact of her edges is determined. Numerical analysis of critical moment of failure of strip (beams) is performed under various parameters of the problem, which are related to the mechanical state of crack. The corresponding graphic dependencies are constructed.

Key Words: crack, strip (beam), complex potentials, bending moment, stress intensity factors.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

#### 1. Вступ

Балочні елементи конструкцій широко використовуються в інженерній практиці, вони можуть містити тріщини, які є сильними

концентраторами напружень і значно знижують їх міцність і надійність роботи.

Дослідження чистого згину полоси (балки) з тріщиною, перпендикулярною до осі балки, вперше було проведено у працях Панасюка В.В. і

Лозового Л.Б. [1]. Були розглянуті випадки, коли тріщина перпендикулярно розміщена до осі балки, її береги частково контактують, або вона знаходиться в зоні розтягуючих напружень, її береги не контактують. В даній роботі досліджено напружено-деформований стан полоси (балки) за її чистого згину з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої можуть гладко контактувати по всій її довжині, або по частині, чи взагалі не контактувати залежно, де розміщена тріщина.

## 2. Формулювання задачі

Дослідимо напружено-деформований стан смуги (балки) завтовшки  $2b$  і заввишки  $2h$ , яка перебуває в умовах чистого згину під дією моментів  $M$ . В смугі наявна наскрізна тріщина завдовжки  $2l$ , береги якої вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів  $M$ , вони можуть не контактувати (випадок а)) чи гладко контактувати по всій її довжині (випадок в)) або по частині (випадок б)) залежно від того, де розміщена тріщина у балці (див. рис.1).

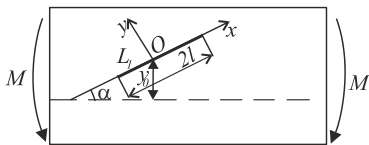


Рис. 1. Схема навантаження полоси (балки)

Виберемо декартову систему координат  $Oxy$  з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь  $Ox$  по ній. Лінію осі  $Ox$ , де береги тріщини контактують чи не контактують позначимо відповідно через  $L$  і  $L_1$ , а всю лінію – через  $\tilde{L}$ . Відстань центру тріщини від осі балки позначимо через  $y_0$ , при чому  $y_0 > 0$ , якщо точка  $O$  знаходиться вище осі балки, і  $y_0 < 0$  в протилежному випадку. Кут, що утворює тріщина з віссю балки, позначимо через  $\alpha$ . Координату точки, що розмежовує область контакту берегів тріщини з контактуючого її частиною, позначимо через  $\lambda$ .

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови відповідно для кожного випадку:

$$а) \sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \text{ на } L_1; \quad (1)$$

$$б) \sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \text{ на } L_1; \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \\ v^+ - v^- = 0 \text{ на } L; \quad (2)$$

$$в) \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \sigma_{xy}^{\pm} = 0, \quad v^+ - v^- = 0 \text{ на } L; \quad (3)$$

де  $\sigma_{yy}$  і  $\sigma_{xy}$  – компоненти тензора напружень; значками "+" і "-" позначено граничне значення відповідної величини при  $y \rightarrow \pm 0$ ;  $v$  – компонента вектора переміщення точки балки на вісь  $Oy$ .

## 3. Побудова розв'язку задачі

Введемо в розгляд комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  [2] та скористаємося залежностями

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

$$2\mu(u + iv)'_x = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

де  $\mu$  – модуль зсуву;  $\kappa$  – стала Мусхелішвілі;  $f' = \partial f / \partial x$ ;  $u$  – компоненти вектора переміщення точки балки на вісь  $Ox$ ;  $z = x + iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

В монографії [2] наведено вираз для комплексних потенціалів при чистому згині балки, коли вісь  $Ox$  направлена по осі балки. Використовуючи формули переходу від однієї системи координат до іншої [2], потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Omega(z)$  при великих  $|z|$  можна подати так

$$\Phi(z) = A_1 z + A_0 + O(1/z^2),$$

$$\Omega(z) = B_1 z + B_0 + O(1/z^2), \quad (6)$$

$$A_1 = iae^{i\alpha}, \quad A_0 = -ay_0, \quad B_1 = -iae^{-i\alpha}(2 - e^{-2i\alpha}),$$

$$B_0 = ay_0(2e^{-2i\alpha} - 1), \quad a = -M/4I, \quad I = (4/3)bh^3. \quad (7)$$

У всіх випадках, як видно з (1) – (3), має місце крайова умова

$$(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ - (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^- = 0, \quad x \in \tilde{L}. \quad (8)$$

Якщо врахувати (4), то з (8) отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку, матимемо

$$\Omega(z) = \Phi(z) - D(z), \quad (9)$$

$$D(z) = 2iae^{-i\alpha}(1 + i \sin 2\alpha)z - 2ay_0e^{-2i\alpha}. \quad (10)$$

Введемо функцію

$$F(z) = \Phi(z) - D(z)/2, \quad (11)$$

яку при великих  $|z|$ , врахувавши (6), (7), (10), можна подати у вигляді

$$F(z) = -2iae^{-i\alpha} \sin \alpha (z \sin \alpha + y_0) + O(1/z^2). \quad (12)$$

Перейдемо до дослідження конкретних випадків.

Почнемо спочатку з розгляду випадку б).

3 крайові умови:  $\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-$ ,  $x \in L_1$ ;

$(v^+ - v^-)'_x = 0$  на  $x \in L$ . Врахувавши (4), (5), (9), (11), отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку, одержимо

$$F(z) + \bar{F}(z) = \sqrt{z - \lambda}(b_1 z + b_0) / \sqrt{z - l}, \quad (13)$$

$$b_1 = -4a \sin^3 \alpha, \quad b_0 = -2a \sin^2 \alpha (2y_0 - (l - \lambda) \sin \alpha), \quad (14)$$

$$\lambda = -(4y_0/3 \sin \alpha) - l/3. \quad (15)$$

Як видно з (15), при умові  $y_0 = 0$ ,  $\lambda = -l/3$ , тобто довжина області контакту тріщини не залежить від кута нахилу тріщини до осі балки і є такою ж, як для випадку тріщини перпендикулярної до осі балки [1]. Якщо  $y_0 \neq 0$ , то при  $y_0 < 0,5l \sin \alpha$  береги тріщини контактуватимуть частково, а при  $y_0 > 0,5l \sin \alpha$  – не контактуватимуть, але при  $y_0 < -l \sin \alpha$  береги тріщини повністю контактуватимуть.

З крайові умови  $\sigma_{xy}^+ = 0$ ,  $x \in \tilde{L}$ , отримаємо задачу лінійного спряження, розв'язавши яку та врахувавши (11) і (13), одержимо

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \left[ D(z) + R(z) + \sqrt{\frac{z - \lambda}{z - l}} (b_1 z + b_0) \right]. \quad (16)$$

$$R(z) = -iasin2\alpha \left[ \sin \alpha (2z^2 - l^2) + 2y_0 z \right] / \sqrt{z^2 - l^2}. \quad (17)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень знайдемо за формулами [3]

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = 2 \lim_{x \rightarrow \pm l \pm 0} \left[ \sqrt{2|x \pm l|} \Phi(x) \right]. \quad (18)$$

Підставляючи (16) у (18), отримаємо

$$K_1^\pm = \frac{M}{I} h^{3/2} \tilde{K}_1^\pm, \quad K_2^\pm = \frac{M}{I} h^{3/2} \tilde{K}_2^\pm, \quad (19)$$

$$\tilde{K}_1^\pm = \sin^3 \alpha \left[ \frac{2 \left( \frac{\tilde{y}_0}{\sin \alpha} + \tilde{l} \right)}{3} \right]^{3/2}, \quad \tilde{K}_1^- = 0, \quad \tilde{K}_2^\pm = -0,5 \sin 2\alpha \tilde{K}^\pm,$$

$$\tilde{K}^\pm = \sqrt{\tilde{l}} \left( \tilde{y}_0 \pm \frac{1}{2} \tilde{l} \sin \alpha \right), \quad \tilde{y}_0 = \frac{y_0}{h}, \quad \tilde{l} = \frac{l}{h}.$$

Критичне значення згинального моменту знайдемо на основі енергетичного критерію

руйнування, при якому балка зруйнується

$$M^{*\pm} = \frac{M}{b^2 h^{3/2} \sqrt{E\gamma^*}} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{K}_1^\pm)^2 + (\tilde{K}_2^\pm)^2}}. \quad (21)$$

де  $E$  – модуль Юнга,  $\gamma^*$  – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Розглянемо випадок а), коли береги тріщини не контактуватимуть. Функцію  $\Phi(z)$  визначимо за формулою

$$\Phi(z) = (\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0 / \sqrt{z^2 - l^2}) + D(z) / 2, \quad (22)$$

$$\alpha_2 = -2\tilde{a} \sin \alpha, \quad \alpha_1 = -2y_0 \tilde{a}, \quad \alpha_0 = \tilde{a} l^2 \sin \alpha,$$

$$\tilde{a} = a \sin \alpha (\sin \alpha + i \cos \alpha).$$

Як видно з (22), якщо  $\alpha = 0$ , тріщина паралельна до осі балки, то вона не впливає на її напружений стан.

Врахувавши (22), на основі (18) знайдемо коефіцієнти інтенсивності напружень, а з (21) знайдемо критичне значення моменту

$$M^{*\pm} = 8\sqrt{2} / (3\sqrt{\pi} \sin \alpha \tilde{K}^\pm). \quad (23)$$

Аналіз формули (23) показує, що руйнування почнеться з вершини найбільш віддаленої від осі балки.

Розглянемо випадок в). Функцію  $\Phi(z)$  визначимо за формулою

$$\Phi(z) = \left[ D(z) - 4a \sin^2 \alpha (z \sin \alpha + y_0) + R(z) \right] / 2, \quad (24)$$

а функцію  $R(z)$  – знайдемо за формулою (17).

Як видно з (17), при  $\alpha = \pi/2$  або  $\alpha = 0$   $R(z) = 0$ , а тому повністю контактуюча тріщина не впливає на напружений стан балки. У цьому випадку коефіцієнт інтенсивності  $\tilde{K}_1^\pm = 0$ , а вирази для  $\tilde{K}_2^\pm$  будуть такими ж самими, як для тріщини, береги якої частково контактують, тобто, мають місце залежності (19) і (20). При цьому критичний момент руйнування балки, визначимо за формулою

$$M^{*\pm} = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \sin 2\alpha |\tilde{K}^\pm|}. \quad (25)$$

На основі (25) і (20) можна зробити висновок, що руйнування почнеться з вершини найбільш віддаленої від осі балки, як і в попередньому випадку.

#### 4. Числовий аналіз та висновки

На рис. 2 та рис. 3 дається графічна залеж-

ність критичного моменту, коли береги тріщини не контактують (рис. 2 а)), а на рис. 2 б), коли вони повністю контактують, при чому рис. 3 відповідає випадку, коли береги тріщини частково контактують.

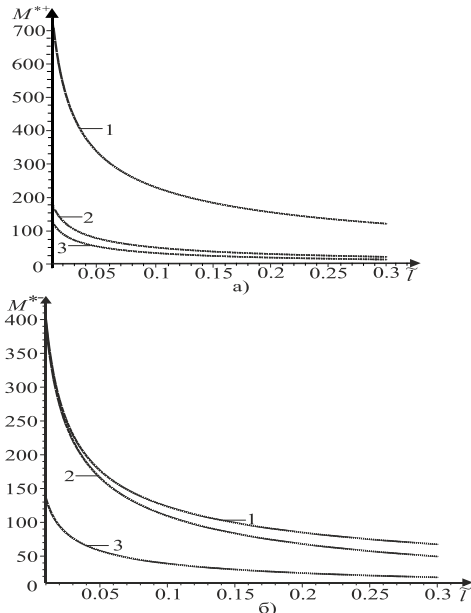


Рис. 2. Графічна залежність  $M^*$  від  $\tilde{l}$ .

На рис. 2 дається графічна залежність критичного моменту від  $\tilde{l}$  при різних значеннях  $\alpha$ , причому рис. 2 а) побудовано при  $\tilde{y}_0 = 0,16$ , а рис. 2 б) – при  $\tilde{y}_0 = -0,31$ . На цьому рисунку крива 1 побудована при  $\alpha = 10^\circ$ , крива 2 – при  $\alpha = 45^\circ$ , крива 3 – при  $\alpha = 90^\circ$ . На основі цього рисунка

#### Список використаних джерел

1. Панасюк В.В. Вибрані праці (1954-1970) / В.В. Панасюк, НАН України. Фіз.-мех. інст. ім. Г.В. Карпенка. – Львів, 2001. – 450 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов: справочное пособие : в 4 т. / общ. ред. В. В. Панасюк. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
4. Zehnder A.T. Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads / A.T. Zehnder, M.J. Viz // Applied Mechanics Reviews. – 2005. – Vol. 58. – P. 37 – 48.

можна зробити висновок, що при зростанні параметра  $\tilde{l}$  критичний момент руйнування балки зменшується, а при збільшенні величини  $\alpha$  він зростає, при фіксованому  $\tilde{l}$ .

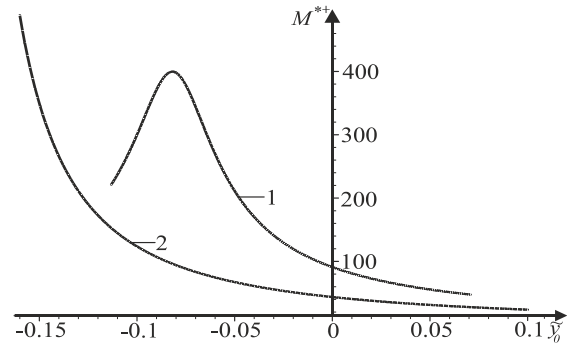


Рис. 3. Графічна залежність  $M^{**}$  від  $\tilde{y}_0$ .

На рис. 3 дається графічна залежність  $M^{**}$  від  $\tilde{y}_0$  при різних значеннях  $\alpha$  та  $\tilde{l}$ . Причому, крива 1 побудована при  $\alpha = 45^\circ$ , крива 2 – при  $\alpha = 90^\circ$ . Рис. 3 побудовано при  $\tilde{l} = 0,2$ . Як видно з цього рисунка при зростанні  $\tilde{l}$  критичний момент зменшується. При  $\alpha = 90^\circ$  критичний момент зменшується, якщо ж  $\alpha \neq 0$ , то критичний момент спочатку зростає з ростом  $\tilde{y}_0$ , а потім спадає.

#### References

1. PANASYUK, V. (2001) *Vybrani pratsi (1954-1970)*. Lviv: Material science.
2. MUSKHELISHVILI, N. (1966) *Nekotoryie osnovnyie zadachi matematicheskoi teorii uprugosti*. M.: Nauka.
3. SAVRUK, M. (1988) *Mehanika razrysheniya i prochnosti materialov : spravochnoe posobie : v 4 t. / obshch. red. V.V. Panasyuk. T. 2. Koyeffitsiyenty intensyvnosti napryagenyi v telax s treshchinami*. Kiev: Naukova dumka.
4. ZEHNDER, A. and M. VIZ (2005) Fracture mechanics of thin plates shells under combined membrane, bending and twisting loads. *Applied Mechanics Reviews*. 58. – p. 37 – 48.

Надійшла до редколегії 20.06.2019