

УДК 519.9

Киричок І.Ф.¹, д.ф.-м.н., пров. наук. співр.
Жук Я.О.², д.ф.-м.н., проф.
Чернюшок О.А.³, к.т.н., доц.
Тарасов А.П.², аспірант

Постановка задачі термомеханіки для гнучкої циліндричної оболонки з п'єзоактивними шарами при врахуванні зсувів

¹ Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ, вул. П. Нестерова, 3
² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4е,
e-mail: angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua
³ Національний університет харчових техно-
логій, вул. Володимирська, 68, 01601, Київ
Україна; e-mail: chernyshokolga@ukr.net.

I.F. Kirichok¹, Dr.Sci.
Y.A. Zhuk², Dr.Sci., Prof.
O.A. Chenyshok³, Phd., ass. Prof.
A.P. Tarasov², PhD. Student

Formulation of the problem of thermomechanics for a flexible cylindrical shell with piezoactive layers with taking into account to displacements

¹ S.P.Timoshenko Institute of Mechanics National
Academy of Sciences of Ukraine, 3, P. Nesterov str.,
Kyiv 03057
² Taras Shevchenko National University of Kyiv, 4e,
Glushkov ave., Kyiv 03680 e-mail:
angrybeaver315@gmail.com, y.zhuk@i.ua
³ National University of Food Technology 68
Volodymyrska St., 01601, Kyiv
e-mail: chernyshokolga@ukr.net.

Сформульовано постановку задачі про осесиметричні коливання і дисипативний розігрів гнучкої тришарової циліндричної кругової оболонки, середній шар якої є електрично пасивним, а зовнішні шари виготовлені з п'єзоелектричного матеріалу. При цьому для описання стаціонарних коливань оболонки використовується концепція комплексних модулів. Розглянуто випадки як ізотропного, так і трансверсально ізотропного в'язкопружного матеріалу середнього шару. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь відносно комплексних амплітуд і розроблено методичку числового розв'язування задачі.

Ключові слова: циліндрична оболонка, резонансні коливання, дисипативний розігрів, п'єзоелектричні сенсори.

The formulation of problem on the forced resonant vibration and dissipative heating of layered element of structure containing both piezoelectric and electrically passive layers is considered. The improved problem statement taking account of both shear strain and rotatory inertia as well as geometrical nonlinearity is developed. Particular statement of the problem of axisymmetric vibration and dissipative heating of three layer cylindrical shell is formulated. It is assumed that the core layer of the shell is composed of the electrically passive material while the outer layers are manufactured from the piezoceramics. Theory of coupled thermo-electro-viscoelasticity is used to derive the problem statement in the case of monoharmonic loading. Within this theory, the concept of complex-value modulae is applied to formulate the relations between main field characteristics.. It is also supposed that the piezo-active material characteristics do not depend on the temperature. Then the coupled problem is reduced to the problem of mechanics on the forced nonlinear vibrations and dissipative heating of the layered plate. Complete set of complex analogs of motion equations, geometric equations and constitutive relations was used to derive the resolving system of equations. Numerical method to attack this nonlinear system of ordinary differential equations supplemented with necessary boundary conditions is developed

Key words: cylindrical shell, resonated vibration, dissipative heating, piezoelectric sensors

Статтю представив акад.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Перестюк М.О.

1. Вступ

Для зниження рівня амплітуд коливань тонкостінних елементів конструкцій (балок, пластин і оболонок) широко використовують розподілені

актуатори і сенсори, які, як правило, виготовляють з п'єзоактивних матеріалів. Для активного гасіння вимушених коливань широко використовується спосіб нанесення на зовнішні поверхні

© І.Ф. Киричок, Я.О. Жук, О.А.Чернюшок,
А.П.Тарасов 2019

тонкостінного елемента п'єзоелектричних шарів, до електродів яких подається різниця електричних потенціалів відповідної амплітуди і фази, для нейтралізації дії механічного збудження. Через те, що у багатьох випадках тонкостінні елементи з п'єзоелектричними включеннями знаходяться під дією інтенсивних циклічних навантажень (які зумовлюють високий рівень механічних напружень, прогинів та дисипативного розігріву), необхідно враховувати ефекти фізичної і геометричної нелінійностей, а також їх вплив на термомеханічний стан конструкції. Побудова електромеханічних моделей динамічної поведінки тонкостінних шаруватих елементів із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів, що враховують фізичну і геометричну нелінійність містяться у працях [1,3,4].

У цій статті в рамках уточненої теорії оболонок С.П.Тимошенка проводиться постановка задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно закріпленої циліндричної оболонки з п'єзоелектричним сенсором.

2. Постановка задачі. Основні рівняння

Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжиною l , віднесена до ортогональної системи координат α, θ, z координатою $z = 0$ на середині внутрішнього шару радіуса R і товщини h_0 . Внутрішній шар виготовлено із пасивного трансверсально-ізотропного матеріалу, а зовнішні товщиною h_1 - із поляризованої по товщині в протилежних напрямках п'єзокераміки. Матеріали шарів вважаємо в'язкопружними, властивості яких залежать від температури. Поляризація верхнього ($z \geq h_0/2$) і нижнього ($z \leq h_0/2$) п'єзошарів характеризуються значеннями п'єзомодулів $+d_{31}$ і $-d_{31}$ відповідно. Поверхні, що контактують з пасивним шаром, покриті суцільними нескінченно тонкими електродами, на яких задано електричний потенціал $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Поверхні $z = \pm(h_0/2 + h_1)$ електродовані на ділянці $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$ ($\Delta_\alpha = \alpha_1 + \alpha_0$) та неелектродовані поза s^\pm , де виконуються такі електростатичні граничні умови:

$$\iint_{s^\pm} D_z^\pm dz = 0 (\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_1; \quad (1)$$

$$D_z^\pm = 0 (0 \leq \alpha < \alpha_0, \alpha_1 < \alpha \leq l)$$

де D_z^\pm нормальна складова електричної індукції в п'єзоелектричних шарах. Оболонка навантажена осесиметричним поверхневим тиском

$q_z = q_z(\alpha') \cos \omega t$, що змінюється за часом t з амплітудою q_z' і круговою частотою ω , яка близька до резонансної. В результаті гармонічного деформування на розімкнутих електродах сенсора s^\pm виникають електричні потенціали $\pm V_s$, амплітудні значення яких розраховуються або визначаються експериментально. Приймаємо, що торці оболонки вільні в тангенціальному і шарнірно закріплені в поперечному напрямках, а на її граничних поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури T_c .

При математичному моделюванні поставленої задачі приймаємо, що по всьому пакету шарів виконуються гіпотези С.П. Тимошенка для механічних величин. Відносно електричних змінних допускаємо, що складовими D_α, D_θ вектора електричної індукції в п'єзошарах можна знехтувати, а складові вектора електричної напруженості E_α, E_θ знаходяться із визначальних рівнянь $D_\alpha = 0, D_\theta = 0$. При цьому, із рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова $D_z = const$ в п'єзошарах не залежать від товщинної координати [1]. В'язкопружні властивості матеріалів описуються концепцією комплексних модулів [1,3], складові яких залежать від температури. Температуру дисипативного розігріву оболонки вважаємо постійною по товщині пакету шарів.

З використанням методології [1,4] та прийнятих припущень задача про вимушені коливання і вібророзігрів оболонки, що розглядається, відносно шуканих комплексних величин зводиться до розв'язку:

рівнянь гармонічних коливань (множник $e^{i\omega t}$ опускаємо)

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \rho \cdot \omega^2 u = 0,$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho \cdot \omega^2 + q_z = 0,$$

$$\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} - Q_\alpha + \rho \cdot \omega^2 \psi_\alpha = 0; \quad (2)$$

визначальних співвідношень для зусиль і моментів

$$N_\alpha = C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\theta,$$

$$N_\theta = C_{12} \varepsilon_\alpha + C_{11} \varepsilon_\theta,$$

$$Q_\alpha = k_s C_{44} \varepsilon_{\alpha z},$$

$$M_\alpha = D_{11} \kappa_\alpha + M_E,$$

$$M_\theta = D_{12} \kappa_\alpha + M_E; \quad (3)$$

залежностей між амплітудними значеннями де-
формацій і переміщень

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{du}{d\alpha}, \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \kappa_\alpha = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}, \\ \vartheta_\alpha &= -\frac{dw}{d\alpha}, \varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \vartheta_\alpha; \end{aligned} \quad (4)$$

виразів для електричної індукції в п'зошарах

$$\begin{aligned} \pm D_z &= -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \pm b_{31} (\varepsilon \mp \bar{h}_{13} \kappa_\alpha) \\ (z \leq -h_0/2, z \geq h_0/2) \end{aligned} \quad (5)$$

усередненого за період коливань і по товщині
оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle \quad (6)$$

З дисипативною функцією

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= N'_\alpha \varepsilon'_\alpha - N'_\theta \varepsilon''_\alpha + N''_\theta \varepsilon'_\theta - N'_\theta \varepsilon''_\theta + \\ &+ M''_\alpha \kappa'_\alpha - M'_\alpha \kappa''_\alpha + Q'_\alpha \varepsilon'_\alpha - Q'_\alpha \varepsilon''_\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Механічні граничні умови такі:

$$N_\alpha = 0; w = 0; M_\alpha = 0 (\alpha = 0, l) \quad (8)$$

Граничні і початкові умови для рівнянь тепло-
провідності мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \pm \alpha_{0,l} (T - T_c), (\alpha = 0, l), \\ T &= T_0, (t = 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Обумовлена гармонічним деформуванням
оболонки амплітуда електричних потенціалів на
розімкнутих електродах сенсора на основі
розв'язку задачі (2) - (9) і першої граничної умо-
ви (1) обчислюється за формулою

$$\frac{V_s}{h_1} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{31} (\varepsilon + \ddot{h} \kappa_\alpha) d\alpha / \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} b_{33} d\alpha \quad (10)$$

У співвідношеннях (2) -(10) введені наступні по-
значення:

$$\begin{aligned} C_{1n} &= c_{1n} h_0 + (c_{1n}^E + \gamma_{33}) h_1; \\ C_{44} &= G_{\alpha z} h_0 + 2c_{44}^E h_1; \\ D_{1n} &= (c_{1n} h_0^3 + 2(c_{1n}^E + \gamma_{33}) \bar{h}_{13}) / 12; \\ c_{11} &= E / (1 - \nu^2); c_{12} = \nu c_{11}; \\ c_{11}^E &= 1 / [s_{11}^E (1 - \nu_E^2)]; c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_E &= -s_{12}^E / s_{11}^E; c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T); \\ b_{31} &= d_{31} / [s_{11}^E (1 - \nu_E)]; b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2); \end{aligned} \quad (11)$$

$$k_p^2 = 2d_{31}^2 / [\varepsilon_{33}^T s_{11}^E (1 - \nu_E)]; \gamma_{33} = b_{31}^2 / b_{33};$$

$$\rho_\bullet = 2\rho_1 h_1 + \rho_0 h_0;$$

$$\rho_{\bullet\bullet} = (2\rho_1 \bar{h}_{13} + \rho_\bullet h_0^3) / 12;$$

$$\bar{h}_{13} = 4h_1^3 + 6h_1 h_0^2 + 3h_1 h_0^2; \bar{h}_1 = (h_0 + h_1) / 2;$$

$$H = 2h_1 + h_0; \varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta;$$

$$s_{kk}^E = s'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^s), d_{ik} = d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d),$$

$$\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^e) - \text{залежні від температури ком-}$$

плексні податливості, п'езомодулі і діелектричні
проникливості п'езокераміки; $E = E' + iE''$,

$G_{\alpha z} = G'_{\alpha z} + iG''_{\alpha z}$, $\nu = const$ - модулі Юнга і попе-
речного зсуву та коефіцієнт Пуасона пасивного

матеріалу; k_s - коефіцієнт поперечного зсуву,
 $w = w' + iw''$, $u = u' + iu''$, $\psi_\alpha = \psi'_\alpha + i\psi''_\alpha$ - амплі-

туди прогинів, поздовжніх переміщень і кута
повороту нормального елемента; $N_\alpha, N_\theta, Q_\alpha$ і

M_α, M_θ - амплітуди зусиль і згинаючих момен-
тів; ρ_0, ρ_1 - питомі густини пасивного і

п'езоактивного матеріалів; λ, a - усереднені ко-
ефіцієнти тепло- і температуропровідності;

$\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$; $\alpha_\pm, \alpha_{0,l}$ - коефіцієнти теплооб-
міну на відповідних поверхнях і торцях оболон-

ки; T_0 - початкова температура оболонки.

Використовуючи концепцію комплексних
модулів для наведених вище рівнянь і шуканих
величин, розв'язок будемо у вигляді

$$\begin{aligned} w &= w + w' \cos \omega t - w'' \sin \omega t, \\ \psi_\alpha &= \psi_\alpha + \psi'_\alpha \cos \omega t - \psi''_\alpha \sin \omega t, \\ u &= u + u' \cos \omega t - u'' \sin \omega t + \\ &+ u' \cos 2\omega t - u'' \sin 2\omega t, \\ N_\alpha &= N_\alpha + N'_\alpha \cos \omega t - N''_\alpha \sin \omega t + \\ &+ N'_\alpha \cos 2\omega t - N''_\alpha \sin 2\omega t, \\ M_\alpha &= M_\alpha + M'_\alpha \cos \omega t - M''_\alpha \sin \omega t, \\ Q_\alpha^* &= Q_\alpha^* + Q'_\alpha \cos \omega t - Q''_\alpha \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12)$$

Підставляючи (12) в розв'язувальну систему
рівнянь, використовуючи комплексні податливо-
сті отримаємо систему диференціальних рівнянь
нормальної форми

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} &= -\rho_\bullet \omega^2 w; \\ \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} &= Q_x - \rho_\bullet \omega^2 \psi_\alpha; \\ \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} &= \frac{v_C}{R} N_\alpha + \frac{\tilde{C}_{11}}{R^2} w - q_z - \rho_\bullet \omega^2 w; \\ \frac{du}{d\alpha} &= J_C N_\alpha - \frac{v_C}{R} w; \\ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} &= J_D M_\alpha; \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\psi_\alpha + J_{SD} Q_\alpha;\end{aligned}\quad (13)$$

де $J_C = 1/C_{11}$, $J_D = 1/D_{11}$, $v_C = C_{12}/C_{11}$,
 $\tilde{C}_{11} = C(1 - \nu^2)$, $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

Систему рівнянь (13) з граничними умовами (8) розділяємо на дійсну і уявну частини і на кожному кроці за часом інтегруємо її з використанням типової програми розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь.

На першому кроці розв'язується лінійна задача при ізотермічних властивостях матеріалів. Потім обчислюємо дисипативну функцію (7) і розв'язуємо задачу теплопровідності (6), (9) методом кінцевих різниць з використанням явної схеми. Далі з урахуванням розподілу температури обчислюємо жорсткісні характеристики (11) і процес повторюємо на наступному кроці за часом. При реалізації такої методології використовуються безрозмірні просторова $x = \alpha/l$ і часова $\tau = at/l^2$ координати та параметри $\gamma_s = \alpha_{\pm,0,l} l/\lambda$ при $v_E = const$.

3. Висновки

Наведено постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при осесиметричному моногармонічному навантаженні та врахуванні деформації поперечного зсуву. Виведено фізичні, геометричні рівняння та рівняння руху. Отримано розв'язувальну систему рівнянь.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В. Г. Связные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И.Ф. Киричок – Киев: Наук. думка, 1986. – 222с.
2. Карнаухов В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко – Житомир: ЖГТУ, 2005 – 248с.
3. Киричок І.Ф. Радіальні коливання і вібророзігрів замкнутої сферичної оболонки з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу та їх демпфування п'єзоелектричним сенсором і актуатором / І. Ф. Киричок, Я. О. Жук, Т. В. Карнаухова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: Фізико – математичні науки. – 2016. – 1. – С.59-64.
4. Kirichok I.F. Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators / I. F. Kirichok // Int. Appl. Mech. – 2011. – 46, 8. – pp 890 – 901.

References

1. KARNAUHOV V., KIRICHOK I.(1986) *Svyazannye zadachy teoryy vyazkouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Nauk.dumka.
2. KARNAUHOV V., MYHAJLENKO V. (2005) *Nelynejnaya termomekhanika piezoelektrycheskyh neuprugyh tel pry monogarmonycheskom nagruzenii*. Zhytomyr: ZhGTU.
3. KIRICHOK, I. & ZHUK, Y. & KARNAUHOVA T. (2016) Radialni kolyvannya i vibrorozigriv zamknotoyi sferychnoyi obolonky z fizychno nelinijnogo v'язkopruzhnogo materialu ta yih dempfuvannya p'yezoelektrychnymy sensorom i aktuatom. *Visnyk Kyivs'kogo nacional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka. Seriya: Fyzyko-matematychni nauky*. 1. p.59–64.
4. KIRICHOK I. F. (2011) Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators. *Int. Appl. Mech.* – 46(8). pp. 890–901.

Надійшла до редколегії 01.06.19