Sommabilité du développement de Taylor dans les espaces de Banach de fonctions holomorphes

Thèse

Pierre-Olivier Parisé

Doctorat en mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

Sommabilité du développement de Taylor dans les espaces de Banach de fonctions holomorphes

Thèse

Pierre-Olivier Parisé

Doctorat en mathématiques
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

Sommabilité du développement de Taylor dans les espaces de Banach de fonctions holomorphes

Thèse

Pierre-Olivier Parisé

Sous la direction de:

Thomas J. Ransford, directeur de recherche

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la sommabilité du développement de Taylor de fonctions appartenant à certains espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité.

Le premier chapitre sert d'introduction à la théorie de la sommabilité dans les espaces de Banach. Nous y présentons les principaux concepts tels que la définition d'une méthode de sommabilité, la définition d'inclusion de méthodes de sommabilité et le théorème de Silverman-Toeplitz.

La première partie comporte deux chapitres. Nous présentons les propriétés principales de certaines familles de méthodes de sommabilité. Plus précisément, nous présentons les principales méthodes de sommabilité étudiées dans cette thèse : les méthodes de Cesàro, les méthodes de Riesz arithmétiques et les méthodes de série de puissances dont les méthodes d'Abel généralisées, de Borel généralisées et la méthode logarithmique. Nous présentons aussi les relations entre chacune de ces méthodes lorsqu'elles sont restreintes aux suites de scalaires.

La deuxième partie comporte deux chapitres et porte sur la sommabilité dans les espaces de Dirichlet pondérés $\mathcal{D}_\omega$ où ω est une fonction non-négative et surharmonique. Nous exposons brièvement ces espaces de Hilbert au premier chapitre de cette deuxième partie. Ensuite, nous montrons que les moyennes de Cesàro d'ordre $\alpha > 1/2$ des sommes partielles de la série de Taylor convergent vers la fonction originale dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$. Lorsque $\alpha = 1/2$, on montre que ce n'est plus le cas et il existe une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ telle que les moyennes de Cesàro d'ordre $\alpha = 1/2$ des sommes partielles de sa série de Taylor ne sont pas bornées en norme. Ce résultat contraste grandement avec le résultat de M. Riesz pour l'espace $A(\mathbb{D})$ (l'algèbre du disque) et le résultat de Hardy pour l'espace H^1 (espace de Hardy). Les résultats de cette partie ont été publiés dans le journal *Complex Analysis and Operator Theory*.

La troisième partie a trois chapitres et traite des espaces de de Branges-Rovnyak. Après avoir présenté brièvement la théorie de ces espaces au premier chapitre de cette partie, nous démontrons qu'il existe un espace de de Branges-Rovnyak de fonctions holomorphes sur le disque unité et une fonction f de cet espace avec les propriétés suivantes : même si f peut être approximée par des polynômes dans la norme de l'espace, ni les sommes partielles, ni

les moyennes de Cesàro, d'Abel, de Borel et logarithmiques ne convergent vers f dans la norme de l'espace. L'instrument principal pour démontrer ce théorème est un résultat puissant, montré dans la première partie, qui permet d'étendre aux suites de vecteurs dans un espace de Banach une propriété d'une méthode de sommabilité vraie pour les suites de scalaires. Les résultats de cette partie ont été soumis au journal *Integral Equations and Operator Theory*.

Enfin, la dernière partie de cette thèse traite d'un cas exceptionnel d'espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité. En utilisant le concept de base de Markushevich et en adaptant une construction de Johnson, nous construisons un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité tel que les polynômes sont denses, mais les polynômes impairs ne sont pas denses dans l'espace des fonctions impaires. Comme conséquence de ce résultat, nous montrons qu'il existe une fonction f qui n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les sommes partielles de la série de Taylor de f. Ainsi, aucune méthode de sommabilité triangulaire appliquée aux sommes partielles ne permet d'approximer la fonction f dans la norme de l'espace. Les résultats de cette partie et quelques variantes de celui-ci ont été soumis au journal *Constructive Approximation*.

Abstract

In this thesis, we study summability questions on the Taylor expansion of functions belonging to certain Banach spaces of holomorphic functions on the unit disk.

The first chapter serves as an introduction to the theory of summability in Banach spaces. We present the main concepts such as the definition of a summability method, the definition of inclusion of summability methods and the Silverman-Toeplitz theorem in the Banach space setting.

The first part consists of two chapters and presents the main properties of certain families of summability methods. More precisely, we present the main summability methods studied in this thesis : Cesàro's methods, Riesz's discrete arithmetic methods and power series methods including generalized Abel, generalized Borel and logarithmic methods. We also present the relations between each of these methods when they are restricted to sequences of scalars.

The second part has two chapters and deals with summability in weighted Dirichlet spaces $\mathcal{D}_\omega$ where ω is a non-negative superharmonic function. We briefly introduce these Hilbert spaces in the first chapter of this second part. Then we show that the Cesàro means of order $\alpha > 1/2$ of the partial sums of the Taylor series converge to the original function in the norm of $\mathcal{D}_\omega$. When $\alpha = 1/2$, we show that this is no longer the case and there exists a function $f \in \mathcal{D}_\omega$ such that the Cesàro means of order $\alpha = 1/2$ of the partial sums of its Taylor series are unbounded in norm. This result contrasts sharply with M. Riesz's classical result on the convergence of Cesàro means of order $\alpha > 0$ in the space $A(\mathbb{D})$ (the disk algebra) and Hardy's classical result on the convergence of the Cesàro means of order $\alpha > 0$ in the space H^1 (the Hardy space). The results of this part have been published in the journal *Complex Analysis and Operator Theory*.

The third part consists of three chapters and treats the de Branges-Rovnyak spaces. After having briefly presented the theory of de Branges-Rovnyak spaces in the first chapter of this part, we prove that there exists a de Branges-Rovnyak space of holomorphic functions on the unit disk and a function f belonging to this space with the following properties : even if f can be approximated by polynomials in the norm of the space, neither the partial sums, nor the Cesàro, Abel, Borel and logarithmic means converge to f in the norm of the space.

The main instrument to prove this theorem is a powerful result, established in the first part, which allows extending a property of a summability method valid over sequences of scalars to the sequences of vectors in a Banach space. The results of this part have been submitted to the journal *Integral Equations and Operator Theory*.

Finally, the last part of this thesis treats an exceptional case of Hilbert space of holomorphic functions on the unit disk. Using the concept of a Markushevich basis and by adapting a construction of Johnson, we construct a Hilbert space of holomorphic functions on the unit disk such that the polynomials are dense but the linear vector space spanned by the odd polynomials is not dense in the space of odd functions. As a consequence of this result, we show that there exists a function f which does not belong to the closure of the linear span of the partial sums of the Taylor series of f. Thus no triangular summability method applied to the partial sums can approximate the function f in the norm of the space. The results of this part and some variants of it have been submitted to the journal *Constructive Approximation*.

Table des matières

À Patrice Courchesne,
Repose en paix, mon ami.

Last time, I asked : 'What does **mathematics** mean to you ?', and some people answered : 'The manipulation of numbers, the manipulation of structures.' And if I had asked what **music** means to you, would you have answered : 'The manipulation of notes ?'

Serge Lang

Remerciements

L'épigraphe de la page précédente représente bien comment les gens, en général, perçoivent les mathématiques : comme une manipulation de nombres. Qui ne s'est pas déjà fait poser la question : « Hey, tu es mathématicien ! Ça fait combien 1234567×234 ? » C'est quand même très réducteur ! Dans ce court extrait, Lang cherchait à montrer que les mathématiques peuvent aussi faire vivre des émotions, comme celles ressenties lorsqu'on écoute une « belle » pièce de musique.

Cette dernière vision représente bien ma conception des mathématiques (et de la musique par ailleurs). Je suis capable de ressentir des frissons, de vivre un réel sentiment d'émerveillement au vu d'une « belle » preuve. Heureusement, ce sentiment n'est pas unique au sein de la communauté mathématique. J'ai pu le partager avec plusieurs personnes au courant de mes années au doctorat et je prends quelques lignes pour en remercier une partie.

Avant tout, je voudrais remercier mon directeur de recherche, Thomas Ransford. Sans sa confiance, son soutien, ses conseils judicieux, son professionnalisme et ses innombrables relectures de mes écrits, je ne serais pas le mathématicien que je suis devenu aujourd'hui. Alors merci pour toutes ces années d'apprentissage et de dévouement. J'ai appris auprès d'une personne formidable. J'en ressors avec beaucoup de nostalgie puisque j'aurais aimé t'avoir côtoyé bien avant mes études graduées.

Puis, je voudrais remercier le professeur Javad Mashreghi qui a collaboré avec Tom et moi. Je te remercie aussi pour les cours gradués sur les espaces de Hardy et sur l'analyse harmonique avancée que tu m'as enseignés. La matière de ces cours m'a grandement aidé dans la poursuite de mon projet de Doctorat. Merci à toi aussi pour ces années !

De même, je souhaite remercier tous les membres du Département de mathématiques et statistique de l'Université Laval qui ont, de proche ou de loin, facilité mon passage à l'Université Laval (UL). Un merci particulier va à Robert Guénette qui m'a offert d'enseigner son cours *Mathématiques de l'ingénieur III* à l'automne 2019 (et une deuxième fois à l'automne 2020). Un autre merci particulier va à Jérémie Rostand pour ton cours de *Mesure et intégration* : j'ai travaillé fort à faire tous les exercices, mais j'ai appris beaucoup ! Un autre merci particulier va aussi à Damir Kinzebulatov qui m'a donné la chance d'être membre du comité d'évaluation des projets de fin d'études de premier cycle. Un dernier merci va à Alexandre Girouard pour quelques discussions de couloirs sur divers sujets comme celui des innombrables obstacles du doctorat. Merci d'avoir partagé ton expérience. Cela m'a ouvert les yeux qu'un cheminement de mathématicien n'est pas une courbe C^1 où on peut toujours savoir dans quelle direction on va, mais s'apparente plutôt à une courbe continue qui n'est nulle part différentiable !

Ensuite, je voudrais remercier mes amis mathématiciens/mathématiciennes, Amélie Compagna, feu Patrice Courchesne, Maëva Osterman, Cédric Dion, Philippe-André Luneau, Antoine Poulin et Hugues Bellemare, pour avoir embelli mes années de doctorat de riches discussions. Un merci particulier va à Amélie Campagna. Tes relectures et relectures de mes textes m'ont été d'une aide inoubliable ! Des heures incommensurables passées à étudier ensemble la matière du cours *Théorie des distributions* de Tom, des heures de danse Swing au salon d'Edgar du centre-ville, et j'en passe ! Ma chère amie, tu resteras, pour toujours, gravée dans ma mémoire !

Je voudrais aussi remercier les organismes subventionnaires canadien et québécois, soit le CRSNG et le FRQNT, pour l'attribution de bourses d'études pour le doctorat. Par la même occasion, je voudrais remercier le soutien financier octroyé par le Département de mathématiques et statistique de l'UL.

Enfin, en m'éloignant de la communauté scientifique, je voudrais aussi remercier mes parents d'avoir été à mon écoute tout au long de ma vie. Je voudrais particulièrement remercier mon père, Armel Parisé, de m'avoir remis sur le droit chemin. Je n'en serais pas là si je n'avais pas accepté de prendre ta main lorsqu'elle m'a été proposée. Je voudrais remercier aussi ma mère, Anne Bergeron, qui m'a toujours encouragé et supporté dans mes décisions, même si parfois elles pouvaient être « dures » à digérer. Malgré cela, tu m'as toujours regardé fièrement.

Finalement, je voudrais prendre un petit espace pour remercier ma douce compagne de tous les jours, Sara Dewhurst. Tu doutes parfois de ton support moral, mais t'avoir à mes côtés chaque jour me motive à me lever et à faire ma journée. Tu es mon rayon de soleil ; ta présence embellit mes journées. La vie fait bien les choses et, heureusement, elle a placé une intersection entre nos chemins de vie. Je n'en demandais pas plus !

Pierre-Olivier Parisé
Ville de Québec

Introduction

Soit $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$, muni de la topologie de la converge uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ est un espace de Banach $X \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que l'inclusion canonique $i : X \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est continue. Plusieurs espaces de fonctions sont des espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité : nous pouvons penser aux espaces de Hardy, certaines familles d'espaces de Dirichlet à poids, les espaces de de Branges-Rovnyak sur le disque unité et les espaces de Bergman A^p.

D'après des résultats classiques d'analyse complexe, chaque fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ s'écrit d'une manière unique comme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1}$$

Les coefficients a_n sont appelés les *coefficients de Taylor* de la fonction f et la série (1) est appelée le *développement de Taylor* ou la *série de Taylor* de la fonction f.

Dans plusieurs espaces de Banach $X \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, les *sommes partielles*, notées $s_n(f)$ $(n \geq 0)$, de la série de Taylor d'une fonction $f \in X$ convergent vers f dans la norme de l'espace. Quelques exemples connus de tels espaces sont l'espace de Hardy H^2, l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ et l'espace de Bergman A^2. Ce fait est une conséquence directe de l'expression de leur norme :

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n \geq 0} (n+1)|a_n|^2 \quad (f \in \mathcal{D})$$
$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \quad (f \in H^2)$$
$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1} \quad (f \in A^2).$$

Ce résultat est aussi valable pour les espaces de Hardy H^p où $1 < p < \infty$. Cette fois-ci, il s'agit d'un résultat plus délicat : c'est une conséquence du fait que la transformée de Hilbert de L^p dans H^p est bornée exactement pour ces valeurs de p (voir, par exemple, [30, p.108], [23, III.3] ou [52, §2]). Par ailleurs, d'après des résultats de Zhu [52], les sommes partielles convergent en norme vers f pour les espaces de Bergman pondérés A^p_α $(-1 < \alpha, 1 < p < \infty)$ et les espaces de Besov B_p $(1 < p < \infty)$.

Pour d'autres espaces de fonctions, les sommes partielles ne suffisent plus. Par exemple, l'algèbre du disque est l'espace $A(\mathbb{D}) \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ composé des fonctions holomorphes bornées sur $\mathbb{D}$, continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et muni de la norme du suprémum

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \quad (f \in A(\mathbb{D})).$$

En modifiant légèrement la construction de du Bois-Reymond (voir, par exemple, [53, théorème 1.14, VIII.1]), il existe une fonction $f \in A(\mathbb{D})$ telle que $\sup_{n\geq 0} \|s_n(f)\|_{A(\mathbb{D})} = \infty$. Heureusement, d'après un résultat de Fejér [32, théorème 3.1], les moyennes de Cesàro des sommes partielles $s_n(f)$, définies par

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_n(f) \quad (f \in A(\mathbb{D})),$$

convergent uniformément vers la fonction $f \in A(\mathbb{D})$. En fait, en raison d'un résultat attribué à M. Riesz [53, théorème 5.1, III.5], les moyennes de Cesàro d'ordre $\alpha > 0$ des sommes partielles $s_n(f)$, définies par

$$\sigma_n^\alpha(f) := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k(f) \quad (f \in A(\mathbb{D}),\, n \geq 0)$$

où les constantes A_n^α sont des coefficients binomiaux, convergent uniformément vers f. Un phénomène identique se manifeste aussi dans le cas de l'espace H^1. Dans ce contexte, le fait que les sommes partielles divergent dans la norme de H^1 provient du fait que la transformée de Hilbert de $L^1 \to H^1$ n'est pas bornée (voir [52]). La convergence des moyennes de Cesàro dans la norme de H^1 est une conséquence d'un résultat attribué à Lebesgue [53, théorème 3.9, III.3] et le cas des moyennes de Cesàro d'ordre $\alpha > 0$ est une conséquence d'un résultat attribué à Hardy [1] [25].

En résumé, les moyennes de Cesàro servent de remède au défaut de la sommabilité des sommes partielles du développement de Taylor dans les espaces $A(\mathbb{D})$ et H^1. D'après ce dernier résultat, on dit que la série de Taylor est C^α-sommable $(\alpha > 0)$ vers f ou encore que la suite $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est C^α-convergente vers f dans dans la norme de ces espaces.

Récemment, Mashreghi et Ransford [42] ont introduit le concept de *schéma linéaire d'approximations polynomiales* (SLAP). Il s'agit d'une suite d'opérateurs linéaires bornés $(T_n)_{n\geq 0}$ où chaque $T_n : X \to X$ satisfait deux propriétés : pour chaque $f \in X$, $T_n(f)$ est un polynôme et $T_n(f)$ converge vers f dans la norme de l'espace X. Les auteurs ont démontré qu'un espace $X \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ possède un SLAP si, et seulement si, l'espace X contient un sous-ensemble

1. Voir aussi l'article de Littlewood et Hardy [27] pour un traitement de la convergence des moyennes de Cesàro dans les espaces H^p où $0 < p < 1$.

de polynômes qui est dense dans l'espace X et possède la condition d'approximation bornée. Lorsque X est l'un des trois espaces classiques H^2, $\mathcal{D}$ et A^2, un exemple d'un SLAP est simplement $T_n(f) := s_n(f)$, c'est-à-dire l'opérateur qui assigne à chaque $f \in X$, la n-ième somme partielle de sa série de Taylor. Dans le cas où X est l'un des deux espaces $A(\mathbb{D})$ ou H^1, un exemple d'un SLAP est $T_n(f) := \sigma_n(f)$, c'est-à-dire l'opérateur qui assigne à chaque $f \in X$, la n-ième moyenne de Cesàro des sommes partielles de son développement de Taylor. Au vu de ces cas typiques, Mashreghi et Ransford ont alors proposé le problème général suivant : existe-t-il des nombres complexes $(\alpha_{n,k})_{k=0}^{n}$ tels que

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} s_k(f) \quad (f \in X)$$

soit un SLAP ? De tels SLAP s'appellent des *méthodes de sommabilité matricielles triangulaires*. Le problème revient donc à savoir s'il existe une méthode de sommabilité matricielle A telle que la série de Taylor est A-sommable vers f dans la norme de l'espace.

Dans cette thèse, nous étudions cette question d'un point de vue plus général en considérant une méthode de sommabilité A quelconque. L'objet principal à l'étude est donc la sommabilité du développement de Taylor de fonctions appartenant à des espaces de fonctions holomorphes $X \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Plus précisément, nous tentons de répondre à la question suivante :

Question Principale. *Étant donné $X \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ un espace de Banach, existe-t-il une méthode de sommabilité A telle que la série de Taylor est A-sommable dans l'espace X ?*

Plan de la thèse

Pour répondre à cette question et rendre plus clair son énoncé, dès le premier chapitre, nous introduisons la nomenclature en théorie de la sommabilité dans le contexte des espaces de Banach. En particulier, nous introduisons les définitions d'une méthode de sommabilité, d'inclusion entre méthodes de sommabilité et de régularité d'une méthode. Sans entrer dans les détails du chapitre 1, une méthode de sommabilité A définie sur un sous-espace $c_A(X) \subseteq X^{\mathbb{N}_0}$ ($X^{\mathbb{N}_0}$ est l'espace des suites) d'un espace de Banach X est une application linéaire A telle que $\lim_A (x_n)_{n\geq 0}$ existe où $\lim_A$ est un opérateur de limite. On dit alors que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est A-convergente. Une méthode de sommabilité A est incluse dans une autre méthode de sommabilité B si quand une suite est A-convergente vers un élément s (dans la norme d'un espace de Banach X), alors cette même suite est B-convergente vers le même élément s (toujours dans la norme de X). Nous montrons aussi une version du théorème de Silverman-Toeplitz dans le contexte des espaces de Banach.

Après cette brève introduction à la théorie de la sommabilité, nous présentons au chapitre 2 des méthodes de sommabilité bien connues. Ces méthodes sont les méthodes de Cesàro, les méthodes de Riesz arithmétiques discrètes et les méthodes de série de puissances (comportant les méthodes d'Abel généralisées, les méthodes de Borel généralisées et la méthode logarithmique). Nous y présentons plusieurs relations d'inclusion entre ces méthodes lorsqu'elles sont restreintes aux suites de nombres complexes (ce que nous appelons la *scalaire-inclusion*). Les résultats présentés dans ce chapitre suggèrent la question suivante : si une méthode A est scalaire-incluse dans une méthode B, est-ce que la méthode A est incluse dans la méthode B ? Nous répondons à cette question au chapitre 3 en considérant une suite d'opérateurs linéaires bornés $(S_n)_{n\geq 0}$ à laquelle on applique une méthode de sommabilité. Précisément, si X et Y sont des espaces de Banach et $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'opérateurs de X dans Y, nous montrons que, s'il existe un sous-espace $W \subseteq X$ dense dans X tel que $S_n(w)$ converge en norme pour tout $w \in W$, si une méthode A est scalaire-incluse dans B et si la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est A-convergente pour chaque $x \in X$, alors $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est B-convergente vers la même valeur pour chaque $x \in X$.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous étudions les espaces de Dirichlet à poids, notés $\mathcal{D}_\omega$, où $\omega : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ est une fonction appelée poids surharmonique. Un espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\omega$, où ω est surharmonique, est défini comme l'ensemble

$$\mathcal{D}_\omega := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \, : \, \mathcal{D}_\omega(f) < \infty\}$$

où $\mathcal{D}_\omega(f) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\omega(z)\, dA(z)$. Ces espaces, où ω est une fonction harmonique, ont été introduits par Richter [45] dans son étude des 2-isométries et ont été davantage étudiés par Richter et Sundberg [46]. Les versions pour les poids surharmoniques ont été introduites par Aleman dans sa thèse de doctorat [1]. Dans le chapitre 4, on introduit la théorie de ces derniers espaces. Mashreghi et Ransford [41] ont montré l'existence d'un phénomène dans les espaces $\mathcal{D}_\omega$ analogue à celui de Du Bois-Reymond et de Fejér pour les séries de Fourier. Ils ont montré qu'il existe un poids surharmonique ω et une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ tels que $\sup_{n\geq 0} \|s_n(f)\|_{\mathcal{D}_\omega} = \infty$. Cependant, ils ont aussi montré que les moyennes de Cesàro $\sigma_n(f)$ convergent toujours vers f dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$ quel que soit le choix du poids surharmonique ω et quel que soit la fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$. Dans le chapitre 5, nous améliorons leur résultat en montrant que, si $\alpha > 1/2$, alors, pour tout poids surharmonique, les moyennes de Cesàro $\sigma_n^\alpha(f)$ convergent vers f dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$ quel que soit $f \in \mathcal{D}_\omega$ et si $\alpha = 1/2$, alors il existe un poids surharmonique ω et une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ tels que $\sup_{n\geq 0} \|\sigma_n^{1/2}(f)\|_{\mathcal{D}_\omega} = \infty$. Pour démontrer notre résultat, nous utilisons le fait que les méthodes de Cesàro d'ordre $\alpha \in [0, 1]$ sont équivalentes (sont incluses et contiennent) à la méthode de Riesz arithmétique. De surcroît, nous appliquons la théorie des multiplicateurs d'Hadamard de l'espace $\mathcal{D}_\omega$. Cette dernière théorie a été développée dans [41]. Comme $\mathcal{D}_\omega$ sont des espaces de Hilbert, nous nous attendions à ce qu'ils se comportent au moins aussi bien que l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ ou l'espace de Hardy H^1. Cependant, ce n'est pas le cas et notre résultat montre qu'il existe des exemples simples d'espaces de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque qui se conduisent bien pire du point de vue de la sommabilité de leur série de Taylor.

Dans la troisième partie de la thèse, nous étudions les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$. Ces espaces de Hilbert sont paramétrés par une fonction b de la boule unité de H^∞ où H^∞ est l'espace des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ bornées. Ils ont été introduits par de Branges et Rovnyak dans l'annexe de leur article [13]. La motivation était de fournir un modèle mathématique à la théorie de la diffusion quantique. En 1994, Sarason [50] a présenté une nouvelle définition de ces espaces qui est équivalente à celle de de Branges et Rovnyak. Son nouveau point de vue s'est avéré très utile et a exhibé plusieurs connexions avec la théorie des opérateurs et l'analyse complexe [2]. Deux volumes [21; 22] traitant de ces espaces en détails sont maintenant disponibles. Nous présentons les éléments de base des espaces $\mathcal{H}(b)$ au chapitre 6.

Les propriétés de ces espaces dépendent fortement de la nature de la fonction b : selon que b soit un point extrême ou non-extrême de la boule unité de H^∞. Dans le cas où b est un point non-extrême, El-Fallah, Fricain, Kellay, Mashreghi et Ransford [15] ont démontré que les polynômes sont denses dans l'espace $\mathcal{H}(b)$. Ce fait était connu de Sarason [50, IV-2 et IV-3], mais leur méthode permet, contrairement à celle de Sarason, de construire explicitement les polynômes qui approximent une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Est-ce que ces polynômes peuvent être les sommes partielles $s_n(f)$ du développement de Taylor ? Les auteurs montrent dans leur article qu'il existe un espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ où b est non-extrême et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ tels que les sommes partielles et les moyennes de Cesàro divergent dans la norme de $\mathcal{H}(b)$. Leur résultat est en fait bien plus fort que cela. Ils ont démontré que les moyennes d'Abel, une méthode de sommabilité incluant la méthode de Cesàro, définie par

$$A_r(f) := (1-r) \sum_{n \geq 0} s_n(f) r^n \quad (0 \leq r < 1)$$

divergent en norme pour une certaine fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ où b est un point non-extrême. Au chapitre 7, nous améliorons leur résultat en montrant que les moyennes logarithmiques

$$L_r(f) := \frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n \geq 0} \frac{s_n(f)}{n+1} r^n \quad (0 \leq r < 1)$$

divergent en norme pour une certaine fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, où b est un point non-extrême. Il s'agit d'une amélioration puisque la méthode logarithmique contient plusieurs méthodes, dont la méthode d'Abel. Ce résultat provient d'une formule intégrale reliant les moyennes d'Abel et les moyennes logarithmiques. Par la suite, au chapitre 8, nous montrons de nombreuses conséquences de ce dernier résultat à d'autres méthodes de sommabilité telles que les méthodes d'Abel généralisées et les méthodes de Borel généralisées. Les résultats obtenus dans le chapitre 8 sont une conséquence du résultat d'inclusion du chapitre 3.

Enfin, la dernière partie de cette thèse traite d'un cas exceptionnel d'espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité. En utilisant le concept de base de Markushevich et en adaptant une construction de Johnson, nous construisons un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque unité où les polynômes sont denses, mais les polynômes impairs ne sont pas denses dans le sous-espace des fonctions impaires. Comme conséquence de

2. Voir [50, VI] pour une application au théorème de Carathéodory sur les dérivées angulaires.

ce résultat, nous montrons qu'il existe une fonction f qui n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les $s_n(f)$ de la série de Taylor de f. Ainsi, aucune méthode de sommabilité triangulaire appliquée aux sommes partielles ne permet d'approximer la fonction f dans la norme de l'espace. Plus encore, nous montrons qu'il existe aussi une fonction f qui n'appartient ni à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les dilatées, ni à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les moyennes logarithmiques de la fonction f.

Chapitre 1

Théorie de la sommabilité dans les espaces de Banach

L'objectif de ce chapitre est de présenter la nomenclature en théorie de la sommabilité et le théorème de Silverman-Toeplitz. Nous présentons aussi quelques exemples importants de méthodes de sommabilité dont la méthode d'Abel et la méthode de Cesàro.

Les lettres X et Y désignent des espaces de Banach complexes munis de normes notées par les symboles $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement. L'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est noté $\mathcal{B}(X,Y)$ et il est muni de la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{X\to Y}$. Ainsi, le dual d'un espace de Banach complexe X est $X^* := \mathcal{B}(X,\mathbb{C})$. La fonction identité $I_{X\to X} : X \to X$ est définie par $I_{X\to X}(x) = x$.

Le couple $(E,\mathcal{T}_E)$ désigne un espace topologique localement compact et Hausdorff. Nous allons aussi supposer que E n'est pas compact. Ceci nous permet d'affirmer que, si $K \subseteq E$ est un sous-ensemble compact, alors $E - K$ est toujours non-vide. Éventuellement, nous allons choisir $E = [0,R)$ $(0 < R \leq \infty)$ muni de la topologie engendrée par les intervalles (a,b) et $[0,b)$ de $[0,R)$ ou $E = \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ muni de la topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{N}_0} := \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ (l'ensemble puissance de $\mathbb{N}_0$).

L'espace des fonctions de E dans X est noté par X^E. On regarde l'espace X^E comme un espace vectoriel muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire :

— $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$ pour tout $t \in E$ et $f, g \in X^E$;

— $(\lambda f)(t) := \lambda f(t)$ pour tout $t \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $f \in X^E$.

Le zéro de X^E est la fonction $0 : E \to X$ où $0(t) := 0$ pour tout $t \in E$ et 0 est l'élément neutre de l'opération d'addition sur X.

1.1 Espaces de fonctions convergentes à l'infini

La définition suivante est inspirée du livre de Rudin [49, définition 3.16].

Définition 1.1. Une fonction $f \in X^E$ est *convergente à l'infini* ou *converge à l'infini* s'il existe un élément $x \in X$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact K, où $K = K(\varepsilon, x)$, tel que

$$\|f(r) - x\|_X < \varepsilon \quad (r \notin K).$$

On note ceci par $\lim_{r\to\infty} f(r) = x$. L'ensemble des fonctions $f \in X^E$ qui convergent à l'infini est noté $c(E, X)$.

Définition 1.2. Une fonction $f : E \to X$ est *faiblement convergente à l'infini* ou *converge faiblement à l'infini* s'il existe un élément $x \in X$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varphi \in X^*$, il existe un sous-ensemble compact $K \subseteq E$, où $K = K(\varepsilon, x, \varphi)$, tel que

$$|\varphi(f(r)) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (r \notin K).$$

On note ceci par $\lim^*_{r\to\infty} f(r) = x$. L'ensemble des fonctions $f \in X^E$ qui convergent faiblement à l'infini est noté $c_*(E, X)$.

Pour un compact $K \subseteq E$, on définit l'espace $\ell^\infty_K(E, X)$ par

$$\ell^\infty_K(E, X) := \Big\{ f \in X^E \,:\, \sup_{r\notin K} \|f(r)\|_X < \infty \Big\}.$$

Définition 1.3. L'espace des fonctions $f \in X^E$ *éventuellement bornées* [1] est l'ensemble

$$\ell^\infty(E, X) = \bigcup_{K\subset E} \ell^\infty_K(E, X)$$

où l'union est sur la famille des sous-ensembles compacts de E.

Deux cas particuliers d'espace topologique $(E, \mathcal{T}_E)$ sont considérés dans cette thèse. Ces espaces mènent à la définition de méthodes de sommabilité suite-fonction et de méthodes de sommabilité matricielles.

Exemple 1.4. Soit $E = \mathbb{N}_0$ muni de la topologie $\mathcal{T}_E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. Dans ce cas, $c(E, X)$, $c_*(E, X)$ et $\ell^\infty(E, X)$ sont respectivement l'espace des suites convergentes dans X, l'espace des suites faiblement convergentes dans X et l'espace des suites bornées. On adopte la notation $c(X)$ pour $c(X, E)$, $c_*(X)$ pour $c_*(E, X)$ et $\ell^\infty(X)$ pour $\ell^\infty(E, X)$. Dans ce contexte, on note plutôt $\lim_{n\to\infty} x_n$ où $x_n := x(n)$ et $x \in X^{\mathbb{N}_0}$.

1. La notation utilisée pour l'espace des fonctions éventuellement bornées se confond malheureusement avec la notation de l'espace des fonctions essentiellement bornées sur $\mathbb{N}_0$, où $\mathbb{N}_0$ est vu comme l'espace mesuré $(E, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \#)$ et # est la mesure de dénombrement. Pour ce dernier espace, nous réservons plutôt la notation $L^\infty(\#)$.

Exemple 1.5. Soit $E = [0, R)$ ($0 < R \leq \infty$) muni de la topologie engendrée par les intervalles de la forme (a, b) et $[0, b)$ de $[0, R)$ (topologie induite de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$). Dans ce cas de figure, $X^{[0,R)}$ est l'ensemble des fonctions $f : [0, R) \to X$. De plus, une fonction $f \in X^{[0,R)}$ est éventuellement bornée s'il existe un nombre R_0 et un nombre $M > 0$ tels que $0 \leq R_0 < R$ et

$$\|f(r)\|_X \leq M \quad (R_0 < r < R).$$

Une fonction est convergente à l'infini s'il existe $x \in X$ tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un nombre R_0 tel que $0 < R_0 < R$ et

$$\|f(r) - x\|_X < \varepsilon \quad (R_0 < r < R).$$

Pour cet exemple, on note plutôt $\lim_{r \to R^-} f(r)$ dans le cas où $R < \infty$ et $\lim_{r \to \infty} f(r)$ lorsque $R = \infty$.

1.2 Nomenclature en théorie de la sommabilité

L'objectif de cette section est d'introduire la définition des méthodes de sommabilité que nous traitons dans cette thèse. La caractéristique principale des méthodes traitées est qu'elles produisent une fonction de X^E à partir d'une suite. La nomenclature « sommabiliste » introduite dans cette section provient de l'ouvrage de Boos [3, chapitre 2] et du livre de Hardy [26, chapitre 1].

Définition 1.6. Une *méthode de sommabilité* est un triplet $(A, c_A(X), \lim_A)$ composé

1. d'une application $A : D_A \to X^E$ où $D_A \subseteq X^{\mathbb{N}_0}$ est un sous-espace vectoriel appelé le *domaine* de A.
2. du *domaine de sommabilité* $c_A(X) := A^{-1}(c(E, X))$ de l'application[2] A, c'est-à-dire

$$c_A(X) = \left\{ (x_n)_{n \geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \ : \ (x_n)_{n \geq 0} \in D_A \text{ et } \lim_{r \to \infty} A(x_n)_{n \geq 0}(r) \text{ existe} \right\};$$

3. de l'*application de sommabilité* $\lim_A := \lim \circ A\big|_{c_A(X)} : c_A(X) \to X$ où $\lim : c(E, X) \to X$ est l'opérateur de limite défini dans la section précédente.

Comme le domaine de l'application A est un sous-espace vectoriel, nous remarquons que A est linéaire. Ainsi, l'application de sommabilité $\lim_A$ induite par A est aussi une application linéaire. Certains auteurs préfèrent travailler avec l'application $\lim_A$ directement plutôt que l'application A. Ils appellent d'ailleurs cette application un *opérateur de limite* (voir, par exemple, [35] ou [31]). Cependant, comme le domaine de sommabilité $c_A(X)$ est en général plus difficile à déterminer que le domaine D_A, nous préférons travailler avec la définition 1.6.

2. Par $A^{-1}(S)$, on entend par là l'image réciproque de l'ensemble S par l'application A.

L'opérateur linéaire lim peut être remplacé par une autre notion de limite. Entre autres, on peut remplacer l'opérateur lim par l'*opérateur de limite faible*, noté $\lim^* : c_*(X, E) \to X$ et défini comme $\lim^* f := \lim^*_{r\to\infty} f(r)$ où pour toute $f \in c_*(E, X)$ (voir, par exemple, [35, §2] où on définit une méthode de sommabilité via l'opérateur de limite faible). Dans ce cas, nous définissons l'ensemble $c_{*,A}(X)$ comme

$$c_{*,A}(X) := \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \in D_A \ : \ \lim^* A(x_n)_{n\geq 0} \text{ existe } \Big\}$$

et nous posons $\lim^*_A := \lim^* \circ A\big|_{c_{*,A}(X)}$.

Nous présentons maintenant quelques exemples de méthodes de sommabilité en nous basant sur la définition 1.6.

Exemple 1.7. Soit $E := \mathbb{N}_0$ et $\mathcal{T}_E := \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. On définit l'application $I : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{\mathbb{N}_0}$ par

$$I(x_n)_{n\geq 0} := (x_n)_{n\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}).$$

Nous avons $D_I = X^{\mathbb{N}_0}$ et

$$c_I(X) = \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n \ \text{ existe}\Big\}.$$

Autrement exprimé, nous avons $c_I(X) = c(X)$, l'ensemble des suites convergentes. Une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in c_I(X)$ est alors simplement appelée une *suite convergente*. L'expression de l'application de sommabilité $\lim_I$ est

$$\lim_I (x_n)_{n\geq 0} = \lim (x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} x_n \quad (\forall (x_n)_{n\geq 0} \in c(X)).$$

Le triplet $(I, c_I(X), \lim_I)$ est appelé la *méthode de convergence traditionnelle* ou *méthode de convergence forte* pour l'espace X. C'est simplement la notion de convergence conventionnelle d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ selon la norme $\|\cdot\|_X$ de l'espace X.

Exemple 1.8. Soit $E = \mathbb{N}_0$ et $\mathcal{T}_E = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. On définit l'application $C^0 : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{\mathbb{N}_0}$ par

$$C^0(x_n)_{n\geq 0} := \Big(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \Big)_{n\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}).$$

Chaque élément de la suite $C^0(x_n)_{n\geq 0}$ est appelé *la n-ième somme partielle* ou *la moyenne de Cesàro d'ordre 0*. Aussi, chaque élément de la suite $C^0(x_n)_{n\geq 0}$ est noté s_n pour chaque $n \geq 0$. Nous avons $D_{C^0} = X^{\mathbb{N}_0}$ et

$$c_{C^0}(X) = \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \ : \ \lim \circ C^0(x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} s_n \ \text{ existe } \Big\}.$$

La méthode $(C^0, c_{C^0}(X), \lim_{C^0})$ est appelée la *méthode de sommation des séries* ou la *méthode des sommes partielles*. Ce nom lui va très bien puisque le domaine de sommabilité de cette méthode est exactement l'ensemble $cs(X)$ où

$$cs(X) := \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \ : \ \sum_{n\geq 0} x_n \text{ converge dans } X \Big\}.$$

Exemple 1.9. Soit $E = \mathbb{N}_0$ et $\mathcal{T}_E := \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$. On définit l'application $C : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{\mathbb{N}_0}$ par

$$C(x_n)_{n\geq 0} := \Big(\frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}\Big)_{n\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}).$$

Chaque élément de la suite $C(x_n)_{n\geq 0}$ est appelé *la moyenne de Cesàro d'ordre 1* et est noté σ_n. Nous avons $D_C = X^{\mathbb{N}_0}$ et

$$c_C(X) = \Big\{(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \; : \; \lim \circ C(x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \; \text{ existe } \Big\}.$$

Le triplet $(C, c_C(X), \lim_C)$ est appelé la *méthode de Cesàro d'ordre 1* ou simplement *la méthode de Cesàro*.

Exemple 1.10. Soit $E := [0,1)$. Pour une suite $x := (x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$, on définit l'application $A^0_x : [0,1) \to X$ par

$$A^0_x(r) := \sum_{n=0}^{\infty} (1-r)r^n x_n \quad (0 \leq r < 1)$$

si la série converge dans X. L'expression de $A^0_x(r)$ est appelée la *moyenne d'Abel d'ordre 0* ou simplement *la moyenne d'Abel* de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. On définit maintenant l'application $A^0 : D_{A^0} \subseteq X^{\mathbb{N}_0} \to X^{[0,1)}$ par $A^0(x_n)_{n\geq 0} := A^0_x$ pour $x := (x_n)_{n\geq 0} \in D_{A^0}$. En général, nous avons $D_{A^0} \subsetneq X^{\mathbb{N}_0}$ et le domaine de sommabilité devient

$$c_{A^0}(X) = \Big\{(x_n)_{n\geq 0} \in D_{A^0} \; : \; \lim \circ A^0(x_n)_{n\geq 0} = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (1-r)r^n x_n \; \text{ existe } \Big\}.$$

Le triplet $(A^0, c_{A^0}(X), \lim_{A^0})$ est appelé la *méthode d'Abel d'ordre 0* ou simplement la *méthode d'Abel*.

Une autre manière d'écrire la méthode d'Abel est de considérer les projections $A^0_r : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ $(0 \leq r < 1)$ définies par

$$A^0_r(x_n)_{n\geq 0} := \sum_{n\geq 0} (1-r)r^n x_n \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in D_{A^0_r})$$

où $D_{A^0_r}$ est le domaine de l'application A^0_r défini par

$$D_{A^0_r} := \Big\{(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \; : \; \sum_{n\geq 0} (1-r)r^n x_n \text{ converge dans } X\Big\}.$$

Puis, l'application $A^0 : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{[0,1)}$ est définie par l'expression suivante

$$A^0(x_n)_{n\geq 0}(r) := A^0_r(x_n)_{n\geq 0} \quad \Big((x_n)_{n\geq 0} \in \bigcap_{0\leq r<1} D_{A^0_r}, \, 0 \leq r < 1\Big).$$

Il s'agit de deux points de vue légitimes. Le premier présente clairement que l'image d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par l'application A^0 est une fonction de $[0,1)$ dans X. Le deuxième divulgue des opérateurs de projection. Comme nous allons le voir dans les prochaines parties de cette thèse, le deuxième point de vue est très utile dans l'étude de la sommabilité du développement de Taylor dans certains espaces de Banach de fonctions holomorphes.

Définition 1.11. Soit $\mathcal{A} := (A, c_A(X), \lim_A)$ une méthode de sommabilité.

1. Une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$ est *convergente par la méthode* $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}$*-convergente*) si $(x_n)_{n\geq 0} \in D_A$ et $(x_n)_{n\geq 0} \in c_A(X)$.
2. Une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ associée à une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$ est dite *sommable par la méthode* $\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{A}$*-sommable*) si la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ est $\mathcal{A}$-convergente.

En toute généralité, il est difficile de déterminer le domaine de sommabilité d'une méthode $(A, c_A(X), \lim_A)$. Par exemple, lorsque $X = \mathbb{C}$, c'est très récent qu'une caractérisation complète du domaine de sommabilité pour la méthode de Cesàro a été trouvée. Ce résultat se trouve dans l'article de Leonetti [34].

Un exemple de question plus simple est de savoir, parmi les espaces de suites tels que $c(X)$ et $\ell^\infty(X)$, lesquels sont inclus dans le domaine D_A d'une méthode $(A, c_A(X), \lim_A)$? Pour étudier une telle question, on introduit la définition suivante.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{A} := (A, c_A(X), \lim_A)$ une méthode de sommabilité. Soit $M \subseteq X^{\mathbb{N}_0}$ un sous-espace vectoriel et $N \subseteq X^E$ un deuxième sous-espace vectoriel. La méthode $\mathcal{A}$ est appelée (M, N)*-conservatrice* si $M \subseteq D_A$ et $A(M) \subseteq N$. On appelle (M, N) la classe des méthodes $\mathcal{A}$ qui sont (M, N)-conservatrices.

Dans certaines situations, on utilise seulement le nom de l'application d'une méthode de sommabilité $\mathcal{A} = (A, c_A(X), \lim_A)$ afin de s'y référer. Selon cette convention, le domaine D_A, le domaine de sommabilité $c_A(X)$ et l'opérateur de limite $\lim_A$ associés à une méthode de sommabilité sont sous-entendus. De plus, on utilise la notation $A \in (M, N)$ pour indiquer que la métode $\mathcal{A}$ est (M, N)-conservatrice.

Nous nous concentrons sur trois classes de méthodes :

— $\mathcal{A}$ est *bornée* ou $\ell^\infty(X)$-conservatrice si $A \in (\ell^\infty(X), \ell^\infty(E, X))$.

— $\mathcal{A}$ est *conservatrice* ou $c(X)$-conservatrice si $A \in (c(X), c(E, X))$.

— $\mathcal{A}$ est *conservatrice pour les séries convergentes* ou simplement $cs(X)$-conservatrice si $A \in (cs(X), c(E, X))$-conservatrice.

Comme $cs(X) \subseteq c(X)$, nous avons l'inclusion suivante

$$(cs(X), c(E, X)) \subseteq (c(X), c(E, X)).$$

La méthode de Cesàro $(C, c_C(X), \lim_C)$ présentée à l'exemple 1.9 est conservatrice et bornée. Aussi, lorsque $(x_n)_{n\geq 0} \in cs(X) \subseteq c(X)$, nous avons $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Par conséquent, la méthode de Cesàro est aussi $cs(X)$-conservatrice.

La méthode de convergence traditionnelle et la méthode d'Abel, présentées à l'exemple 1.7 et à l'exemple 1.10 respectivement, appartiennent aussi à la classe des méthodes conservatrices.

La méthode de sommation traditionnelle $(C^0, c_{C^0}(X), \lim_{C^0})$ présentée à l'exemple 1.8 n'est pas bornée. En effet, si $x_n = x$ où $\|x\|_X = 1$, alors $s_n = nx$ et cette suite n'est pas bornée dans X. Hormis ce fait, elle est $cs(X)$-conservatrice et conserve même la valeur de la série. Pour certains types de méthodes de sommabilité, nous verrons plus loin comment réexprimer une méthode $cs(X)$-conservatrice pour qu'elle prenne la forme d'une méthode $c(X)$-conservatrice.

D'après le lemme de Cesàro [3], nous avons

$$c(X) \subseteq c_C(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} x_n \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in c(X)).$$

De même, d'après le théorème d'Abel, nous avons

$$c(X) \subseteq c_{A^0}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 1^-} A_r^0(x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} x_n \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in c(X))$$

où $(A^0, c_{A^0}(X), \lim_{A^0})$ est la méthode d'Abel. On dit que les méthodes de Cesàro et d'Abel sont régulières. Donc, on introduit deux notions associées à la régularité.

Définition 1.13. Soit $(A, c_A(X), \lim_A)$ une méthode de sommabilité.

1. La méthode A est *régulière* si elle est $c(X)$-conservatrice et si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_A (x_n)_{n\geq 0}$$

   quelle que soit $(x_n)_{n\geq 0} \in c(X)$.

2. La méthode A est *régulière pour les séries* ou C^0-régulière si elle est $cs(X)$-conservatrice et $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_A (x_n)_{n\geq 0}$ quel que soit $(x_n)_{n\geq 0} \in cs(X)$.

La notion de régularité d'une méthode de sommabilité s'exprime aussi de la manière suivante : le domaine de sommabilité de la méthode de convergence forte est inclus dans le domaine de sommabilité de $(A, c_A(X), \lim_A)$ et les restrictions des applications lim et $\lim_A$ à l'espace $c(X)$ sont égales. Dans ce cas, on dit aussi que la méthode de convergence forte est incluse dans la méthode de Cesàro. Nous généralisons cette notion d'inclusion et introduisons le vocabulaire suivant. Ce dernier permet d'avoir des assises afin de comparer deux méthodes de sommabilité.

Définition 1.14. Soit $\mathcal{A} := (A, c_A(X), \lim_A)$ et $\mathcal{B} := (B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité et $M \subseteq X^{\mathbb{N}_0}$ un sous-espace vectoriel.

3. Ce résultat est en fait postérieur à Cesàro et était connu de Cauchy. Il apparaît aux pp. 48-50 de son *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique*.

1. Les méthodes A et B sont *M-compatibles* si $M \cap c_A(X) \cap c_B(X) \neq \emptyset$ et

$$\lim_A (x_n)_{n\geq 0} = \lim_B (x_n)_{n\geq 0}, \quad (x_n)_{n\geq 0} \in M \cap c_A(X) \cap c_B(X).$$

   Lorsque $c_A(X) \cup c_B(X) \subseteq M$, on dit simplement que A et B sont compatibles. On dit aussi que les méthodes A et B sont *consistantes*.
2. La méthode A est *M-incluse* dans la méthode B si $M \cap c_A(X) \neq \emptyset$, si $M \cap c_A(X) \subseteq c_B(X)$ et si A et B sont M-consistentes. On note ceci par $A \subseteq_M B$. Lorsque $c_A(X) \subseteq M$, on dit simplement que A est incluse dans B et on écrit $A \subseteq B$.
3. Les méthodes A et B sont *M-équivalentes* si $A \subseteq_M B$, $B \subseteq_M A$. Dans ce cas, on écrit $A \sim_M B$. Lorsque $c_A(X) \cup c_B(X) \subseteq M$, on écrit seulement $A \sim B$ et on dit que la méthode A est équivalente à la méthode B.

Par exemple, pour $X = \mathbb{C}$, la méthode de Cesàro est incluse dans la méthode d'Abel (voir le [3, théorème 3.6.12]). Il serait possible de refaire la preuve présentée dans le livre de Boos pour un espace de Banach en général, mais nous verrons à la première partie de cette thèse que dans un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité, les techniques de l'analyse fonctionnelle nous permettent de généraliser ce résultat sous quelques hypothèses supplémentaires.

Dans cette thèse, nous allons nous concentrer sur deux types de méthodes de sommabilité : les méthodes matricielles et les méthodes suite-fonction.

Définition 1.15. Soit $(E, \mathcal{T}_E)$ un espace topologique et soit une méthode de sommabilité $\mathcal{A} := (A, c_A(X), \lim_A)$.

1. La méthode $\mathcal{A}$ est appelée *méthode de sommabilité suite-fonction* si $E = [0, R)$ pour $R \in (0, \infty]$ et l'application A est définie par une suite de fonctions $(a_n)_{n\geq 0}$ avec $a_n : [0, R) \to \mathbb{C}$ telle que $A(x_n)_{n\geq 0} \in X^{[0,R)}$ est donnée par l'expression

$$A(x_n)_{n\geq 0}(r) = \sum_{n\geq 0} a_n(r) x_n \quad (0 \leq r < \infty,\ (x_n)_{n\geq 0} \in D_A).$$

2. La méthode $\mathcal{A}$ est appelée *méthode de sommabilité matricielle* si $E = \mathbb{N}_0$ et si l'application A est définie par une matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ de scalaires telle que

$$A(x_n)_{n\geq 0} := \Big(\sum_{n\geq 0} a_{m,n} x_n \Big)_{m\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in D_A).$$

Pour une méthode de sommabilité suite-fonction $(A, c_A(X), \lim_A)$, le domaine de l'application A est donc le sous-espace vectoriel

$$D_A = \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \,:\, \sum_{n\geq 0} a_n(r) x_n \text{ converge dans } X,\ \forall r \in [0, R) \Big\}.$$

Pour $r \in [0, R)$ fixé, on définit un opérateur linéaire de projection $A_r : D_{A_r} \subseteq X^{\mathbb{N}_0} \to X$ par

$$A_r(x_n)_{n\geq 0} := \sum_{n\geq 0} a_n(r)x_n \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in D_{A_r}),$$

où

$$D_{A_r} = \Big\{(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \,:\, \sum_{n\geq 0} a_n(r)x_n \text{ converge dans } X\Big\}.$$

Par conséquent, nous avons la relation fondamentale suivante entre D_A et D_{A_r} :

$$D_A = \bigcap_{r\in[0,R)} D_{A_r}.$$

La méthode d'Abel de l'exemple 1.10 est une méthode de sommabilité suite-fonction déterminée par la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ où $a_n(r) = (1-r)r^n$ ($0 \leq r < 1$, $n \geq 0$).

Similairement, pour une méthode matricielle A associé à la matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ de scalaires, on définit un opérateur de projection $A_m : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ par

$$A_m(x_n)_{n\geq 0} := \sum_{n\geq 0} a_{m,n}x_n$$

si la série converge dans X. On note par D_{A_m} le domaine de cette application, c'est-à-dire

$$D_{A_m} := \Big\{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}_0 \,:\, \sum_{n\geq 0} a_{m,n}x_n \text{ est convergente dans } X\Big\}.$$

Nous avons aussi que son domaine D_A s'exprime par

$$D_A := \bigcap_{m\geq 0} D_{A_m}$$

La méthode de Cesàro de l'exemple 1.9 est une méthode de sommabilité matricielle déterminée par la matrice de scalaires $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ où

$$a_{m,n} := \begin{cases} \frac{1}{m+1} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Toute méthode matricielle peut être vue comme une méthode suite-fonction. L'exemple suivant le démontre.

Exemple 1.16. Soit $E = [0, \infty)$. Considérons la méthode matricielle A déterminée par la matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ de scalaires. Définissons les fonctions $b_n : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ comme $b_n(r) = a_{m,n}$ lorsque $r \in [m, m+1)$ ($m, n \geq 0$). Alors la méthode B déterminée par la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ est une méthode suite-fonction. Inversement, si on définit la méthode suite-fonction par la suite de fonction $(a_n)_{n\geq 0}$ où chaque fonction a_n est constante sur chaque intervalle $[m, m+1)$ ($m \geq 0$), alors la méthode A définie par la matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ où $a_{m,n} := a_n(m)$ ($m, n \geq 0$) est une méthode matricielle.

La méthode de Cesàro fait partie d'une sous-catégorie de méthodes de sommabilité matricielles.

Définition 1.17. Une méthode de sommabilité A est une *méthode de sommabilité matricielle triangulaire* si la matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ déterminant l'application A est une matrice triangulaire inférieure, c'est-à-dire $a_{m,n} = 0$ lorsque $n > m$ pour chaque $m \geq 0$.

1.3 Le théorème de Silverman-Toeplitz

Dans le cas où $X = \mathbb{C}$, le célèbre théorème de Silverman-Toeplitz fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode de sommabilité matricielle soit régulière.

Théorème 1.18 (Silverman, 1913 ; Toeplitz, 1911)**.** *Soit $X = \mathbb{C}$ et A une méthode matricielle déterminée par la matrice de scalaires $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$. La méthode A est régulière si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\sup_{m\geq 0} \sum_{n\geq 0} |a_{m,n}| < \infty$;
2. *pour chaque entier $n \geq 0$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 0$ où la convergence est dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$;*
3. $\lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq 0} a_{m,n} = 1$ *où la convergence est dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.*

Il y a une autre version du théorème de Silverman-Toeplitz qui procure aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une méthode suite-fonction soit régulière. Ces conditions sont présentées ci-dessous (par ex. voir [26, théorème 5]) :

— $\sum_{n\geq 0} |a_n(r)|$ converge pour tout $r \in [0, \infty)$.

— Il existe un nombre $R_0 \in [0, \infty)$ tel que $\sup_{R_0\leq r<\infty} \sum_{n\geq 0} |a_n(r)| < \infty$.

— Pour chaque entier n, nous avons $\lim_{r\to\infty} a_n(r) = 0$.

— $\lim_{r\to\infty} \sum_{n\geq 0} a_n(r) = 1$.

Est-ce que ces conditions demeurent nécessaires et suffisantes dans le cas général des espaces de Banach ? La réponse est oui et la preuve est assez simple pour les méthodes suite-fonction.

Théorème 1.19. *Soit $R \in (0, \infty]$ et soit A une méthode suite-fonction déterminée par la suite de fonctions $(a_n)_{n\geq 0}$. La méthode est régulière si, et seulement si, les conditions suivantes sont respectées :*

1. $\sum_{n\geq 0} |a_n(r)|$ *converge pour tout $r \in [0, R)$;*
2. *il existe un nombre $R_0 \in (0, R)$ tel que*
$$\sup_{R_0\leq r<R} \sum_{n\geq 0} |a_n(r)| < \infty;$$
3. *pour chaque entier $n \geq 0$, $\lim_{r\to R^-} a_n(r) = 0$ où la convergence est selon $(\mathbb{C}, |\cdot|)$;*
4. $\lim_{r\to R^-} \sum_{n\geq 0} a_n(r) = 1$ *où la convergence est dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.*

Démonstration. Supposons que la méthode A soit régulière. En considérant un homéomorphisme de $[0, R)$ sur $[0, \infty)$ (par ex. $r \mapsto \log(R/(R-r))$), on peut supposer, sans perte de généralité, que $R = \infty$. On remarque que, pour tout $v \in X$ fixé, l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est isométriquement isomorphe à l'espace

$$M_v := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

par l'application $\lambda \mapsto \lambda v$ où $\|v\|_X = 1$. Comme la méthode A est régulière, elle est en particulier régulière sur M_v. Comme M_v est isomorphe à $\mathbb{C}$, la méthode A est régulière pour les suites de scalaires. Ainsi, d'après le théorème classique de Silverman-Toeplitz, on en déduit les quatre conditions du théorème.

Réciproquement, supposons que les quatre conditions du théorème soient respectées. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \in c(X)$. Nous allons montrer que la méthode satisfait les conditions suivantes : $(x_n)_{n\geq 0} \in c_A(X)$ et $\lim_A(x_n)_{n\geq 0}(x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} x_n$. Posons $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Tout d'abord, d'après la condition 1 et comme $c(X) \subseteq \ell^\infty(X)$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n(r)x^n$ converge dans X pour chaque $r \in [0, R)$. Ensuite, pour chaque entier $N \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n\geq 0} a_n(r)x_n - x \Big\|_X &\leq \Big\| \sum_{n\geq 0} a_n(r)(x_n - x) \Big\|_X + \Big\| \Big(\sum_{n\geq 0} a_n(r) - 1 \Big) x \Big\|_X \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} |a_n(r)| \|x_n - x\|_X + \sum_{n\geq N+1} |a_n(r)| \|x_n - x\|_X + \Big| \sum_{n\geq 0} a_n(r) - 1 \Big| \|x\|_X.
\end{aligned}$$

Posons

$$M := \max \Big\{ \sup_{n\geq 0} \|x_n\|_X, \|x\|_X, \sup_{R_0 \leq r < R} \sum_{n\geq 0} |a_n(r)|, 1 \Big\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier tel que $\|x_n - x\|_X < \varepsilon/M$ pour tout $n \geq N+1$. Par la troisième condition, pour chaque $n = 0, 1, \ldots, N$, prenons $R_{n+1} \in (0, R)$ tel que $|a_n(r)| < \varepsilon/M(N+1)$ lorsque $r \in (R_{n+1}, R)$. Par la quatrième condition, prenons R_{N+2} tel que

$$\Big| \sum_{n\geq 0} a_n(r) - 1 \Big| < \varepsilon/M \quad (R_{N+2} < r < R).$$

Posons $T := \max\{R_n : n = 0, 1, \ldots, N+2\}$. Avec ce choix de T, pour chaque $T < r < R$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n\geq 0} a_n(r)x_n - x \Big\|_X &< (\varepsilon/M) \sup_{n\geq 0} \|x_n - x\|_X + (\varepsilon/M) \sup_{R_0 \leq r < R} \sum_{n\geq N+1} |a_n(r)| + (\varepsilon/M)M \\
&\leq 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\lim_A(x_n)_{n\geq 0} = x$. $\square$

Comme chaque méthode matricielle est une méthode suite-fonction, on en déduit que les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz classique tiennent aussi pour les méthodes matricielles appliquées à des suites d'éléments d'un espace de Banach X.

Corollaire 1.20. *Soit X un espace de Banach et A une méthode matricielle déterminée par la matrice de scalaires $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$. La méthode A est régulière si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\sup_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0}|a_{m,n}| < \infty$ *;*
2. *pour chaque entier $n \geq 0$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = 0$ où la convergence est dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$;*
3. $\lim_{m\to\infty}\sum_{n\geq 0} a_{m,n} = 1$ *où la convergence est dans $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.*

Nous avons aussi remarqué que la méthode des sommes partielles n'est pas régulière. On peut le voir maintenant plus clairement en analysant la première condition du théorème de Silverman-Toeplitz. En effet, la matrice représentant l'application C^0 de la méthode des sommes partielles $(C^0, c_{C^0}(X), \lim_{C^0})$ est $(c^0_{m,n})_{m,n\geq 0}$ où

$$c^0_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

On a $\sum_{n=0}^{\infty} c^0_{m,n} = m+1$ qui n'est pas uniformément borné en m. Cependant, par définition, la méthode des sommes partielles est régulière pour les séries. Voici un autre exemple qui montre l'importance du choix d'écriture d'une méthode de sommabilité.

Exemple 1.21. Certains auteurs préfèrent définir la méthode de Cesàro comme la méthode matricielle déterminée par la matrice de scalaire $(c_{m,n})_{m,n\geq 0}$ où

$$c_{m,n} := \begin{cases} 1 - n/(m+1) & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Les moyennes de Cesàro d'une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$ prennent alors la forme

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{m}\Big(1 - \frac{n}{m+1}\Big)x_n.$$

Lorsqu'on travaille avec une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ qui représente les termes généraux d'une série $\sum_{n\geq 0} x_n$, l'avantage de cette forme est que les moyennes de Cesàro sont exprimées en fonction des termes généraux de la série $\sum_{n\geq 0} x_n$. On peut alors travailler directement sur ces termes et non à partir de la suite des sommes partielles. Cependant, sous cette forme, la méthode de Cesàro n'est pas régulière puisque les coefficients ont la propriété suivante :

$$\lim_{m\to\infty}\Big(1 - \frac{n}{m+1}\Big) = 1,$$

ce qui n'est pas zéro... Est-il possible d'établir un analogue du théorème de Silverman-Toeplitz pour ce type de méthode ?

Un phénomène similaire se produit pour la méthode d'Abel.

Exemple 1.22. Encore une fois, certains auteurs préfèrent définir la méthode d'Abel comme la méthode suite-fonction déterminée par la suite de fonction $(a_n)_{n\geq 0}$ où

$$a_n(r) := r^n \quad (0 \leq r < 1).$$

Les moyennes d'Abel d'une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$ prennent alors la forme

$$A_r^0(x_n)_{n\geq 0} = \sum_{n\geq 0} r^n x_n$$

si la série converge dans X. Or, encore une fois, sous cette forme la méthode d'Abel ne respecte pas les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz (pour les méthodes suite-fonction) et n'est donc pas régulière. Est-il possible d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour caractériser la régularité pour les séries dans le cas de méthode suite-fonction ?

Pour répondre aux deux questions que nous venons de poser, on présente une manière de passer de la forme des moyennes de Cesàro présentée dans l'exemple 1.9 à la forme présentée ci-dessus. En effet, en appliquant la méthode de Cesàro de l'exemple 1.9 à la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 0}$ d'une série associée à une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$, nous avons

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)x_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)x_k.$$

De la même façon, il existe un lien entre la méthode d'Abel présentée à l'exemple 1.10 et la forme présentée ci-dessus. En effet, en appliquant la méthode d'Abel de l'exemple 1.10 à la suite des sommes partielles d'une série associée à une suite $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$, nous avons (en effectuant les calculs formellement seulement)

$$\sum_{n\geq 0}(1-r)r^n s_n = s_0 + \sum_{n\geq 0} r^n(s_n - s_{n-1}) = \sum_{n\geq 0} r^n x_n$$

Ainsi, comme $\sum_{n\geq 0} x_n$ existe si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe, il est possible d'appliquer les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz à la méthode d'Abel et de Cesàro sous la forme de l'exemple 1.9 et de l'exemple 1.10 respectivement. Cette approche permet de déterminer les conditions afin de conserver la valeur de la série. En suivant cette stratégie, l'analogue du théorème de Silverman-Toeplitz pour les méthodes suite-fonction régulières pour les séries est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 1.23. *Soit X un espace de Banach et soit $R \in (0,\infty]$. Soit B une méthode de sommabilité suite-fonction donnée par la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$. La méthode B est C^0-régulière si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *pour chaque $r \in [0,R)$, $\sum_{n\geq 0} b_n(r)x_n$ converge dans X pour chaque $(x_n)_{n\geq 0} \in cs(X)$;*
2. *il existe un nombre $R_0 \in (0,r)$ tel que $\sup_{R_0\leq r<R}\sum_{n\geq 0}|b_n(r)-b_{n+1}(r)| < \infty$;*

3. *pour chaque* $n \geq 0$, $\lim_{r \to R^-} b_n(r) = 1$ *où la convergence est dans* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

On obtient aussi l'analogue du théorème de Silverman-Toeplitz pour les méthodes matricielles régulières pour les séries.

Théorème 1.24. *Soit* X *un espace de Banach. Soit* B *une méthode de sommabilité matricielle donnée par la matrice de scalaires* $(b_{m,n})_{m,n \geq 0}$*. La méthode* B *est* C^0*-régulière si, et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *pour chaque* $m \geq 0$, $\sum_{n \geq 0} b_{m,n} x_n$ *converge dans* X *pour chaque* $(x_n)_{n \geq 0} \in cs(X)$ *;*
2. $\sup_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} |b_{m,n} - b_{m,n+1}| < \infty$ *;*
3. *pour chaque* $n \geq 0$, $\lim_{m \to \infty} b_{m,n} = 1$ *où la convergence est dans* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

On note que les méthodes d'Abel et de Cesàro telles que présentées dans l'exemple 1.22 et dans l'exemple 1.21 respectivement respectent les conditions des deux derniers théorèmes ci-dessus.

Première partie

Inclusion scalaire et sommabilité dans les espaces de Banach

Chapitre 2

Exemples de méthodes matricielles et suite-fonction

Nous nous tournons maintenant vers la présentation d'exemples de méthodes de sommabilité matricielles ou suite-fonction, c'est-à-dire où l'application A d'une méthode de sommabilité $(A, c_A(X), \lim_A)$ est soit définie par une matrice de scalaires ou une suite de fonctions scalaires. Notre objectif est de présenter des résultats connus d'inclusion valides pour les suites de scalaires.

Pour ce faire, on introduit la définition suivante. Dans la prochaine définition, on identifie l'espace des nombres complexes avec l'espace $M_v := \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$ où $v \in X$ est un vecteur de norme un. Ainsi, l'espace $c_A(\mathbb{C})$ est l'espace $c_A(X) \cap M_v^{\mathbb{N}_0}$.

Définition 2.1. Soient $(A, c_A(X), \lim_A)$ et $(B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité.

1. Les méthodes A et B sont *scalaire-consistantes* si $c_A(\mathbb{C}) \cap c_B(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ et $\lim_A(x_n)_{n\geq 0} = \lim_B(x_n)_{n\geq 0}$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \in c_A(\mathbb{C}) \cap c_B(\mathbb{C})$.
2. La méthode A est *scalaire-incluse* dans la méthode B, noté $A \subseteq_{\mathbb{C}} B$, si $c_A(\mathbb{C}) \subseteq c_B(\mathbb{C})$ et A est scalaire-consistante avec la méthode B.
3. La méthode B est *scalaire-équivalente* à la méthode B si $A \subseteq_{\mathbb{C}} B$ et $B \subseteq_{\mathbb{C}} A$. On note ceci par $A \sim_{\mathbb{C}} B$.

Remarquons que cette dernière définition est simplement la définition 1.14 présentée au chapitre précédent avec $M := M_v^{\mathbb{N}_0} = M_v \times M_v \times \cdots$.

Nous nous concentrons à présenter les méthodes de Cesàro et de Riesz arithmétiques discrètes. Nous présentons aussi les méthodes définies à partir de séries de puissances comme les méthodes d'Abel généralisées, les méthodes de Borel généralisées et la méthode logarithmique.

2.1 Méthodes de Cesàro

Nous avons présenté à l'exemple 1.8 et à l'exemple 1.9 la méthode des sommes partielles ($\alpha = 0$) et la méthode de Cesàro ($\alpha = 1$) respectivement. Ces deux exemples font partie de la famille des méthodes de Cesàro d'ordre α qui est maintenant présentée un peu plus dans les détails.

Définition 2.2. Soit $\alpha > 0$ et $(x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}$. La méthode de Cesàro $(C^\alpha, c_{C^\alpha}(X), \lim_{C^\alpha})$ est la méthode de sommabilité dont l'application $C^\alpha : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{\mathbb{N}_0}$ est donnée par

$$C^\alpha(x_n)_{n\geq 0} = \Big(\frac{1}{\binom{n+\alpha}{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{\alpha-1} x_k\Big)_{n\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}).$$

Les coefficients binomiaux apparaissant dans la définition sont définis par

$$\binom{m+\beta}{\beta} := \frac{\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\beta+1)}$$

où $\Gamma : \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\ldots\} \to \mathbb{C}$ est la fonction Gamma satisfaisant l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et égalant $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ lorsque $\mathrm{Re}(z) > 0$. Dans ce qui suit, on notera les coefficients binomiaux d'ordre m et β par A_m^β. Par conséquent, chaque membre de la suite $C^\alpha(x_n)_{n\geq 0}$ s'écrit comme

$$C_n^\alpha(x_n)_{n\geq 0} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} x_k \quad (n \geq 0).$$

La méthode de Cesàro d'ordre $\alpha > 0$ est une méthode matricielle dont la matrice de scalaires $(c_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est

$$c_{n,k} = \begin{cases} A_{n-k}^{\alpha-1}/A_n^\alpha & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Au chapitre précédent, nous avons montré que la méthode de Cesàro s'écrit aussi comme

$$C_n(s_n)_{n\geq 0} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) x_k$$

où $(s_n)_{n\geq 0}$ est la suite des sommes partielles d'une série $\sum_{n\geq 0} x_k$. On peut utiliser la même approche pour montrer que les moyennes de Cesàro se réexpriment comme

$$C_n^\alpha(s_n)_{n\geq 0} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha x_k. \tag{2.1}$$

Il suffit d'appliquer la méthode de Cesàro à la suite des sommes partielles $(s_n)_{n\geq 0}$ associée à une série $\sum_{n\geq 0} x_n$ et à utiliser le lemme 2.3 ci-dessous. Bref, sous cette dernière forme, la méthode de Cesàro est appliquée à une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dont chaque élément représente le terme général d'une série $\sum_{n\geq 0} x_n$.

De plus, dans la forme (2.1), il est possible d'étendre la définition de la méthode de Cesàro à des valeurs de $\alpha > -1$. Lorsque la valeur de α tend vers -1, nous obtenons la notion de convergence traditionnelle, c'est-à-dire

$$\lim_{C^{-1}}(x_n)_{n\geq 0} = \lim(x_n)_{n\geq 0}, \quad \Big((x_n)_{n\geq 0} \in c(X)\Big).$$

Lorsque la valeur de α est égale à 0, on obtient la méthode des sommes partielles et l'application de sommabilité devient la somme d'une série, c'est-à-dire

$$\lim_{C^0}(x_n)_{n\geq 0} = \sum_{n\geq 0} x_n, \quad \Big((x_n)_{n\geq 0} \in cs(X)\Big).$$

On peut interpréter la méthode de Cesàro lorsque $-1 < \alpha < 0$ comme une notion intermédiaire entre la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. C'est d'ailleurs la forme (2.1) de la méthode de Cesàro qui est utilisée dans l'étude des espaces de Dirichlet à poids surharmoniques.

Dans cette section, nous distinguons les deux formes de la méthode de Cesàro. On référence la première forme (de la définition 2.2) par C^α et la deuxième forme donnée par (2.1) de la méthode par $\tilde{C}^\alpha$.

La méthode de Cesàro d'ordre $\alpha > 0$ est régulière et la méthode de Cesàro $\tilde{C}^\alpha$ est régulière pour les séries. En effet, elle respecte toutes les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz et de la version de celui-ci pour les méthodes régulières pour les séries. Pour vérifier cela, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit $\alpha, \beta > 0$. Alors l'identité suivante est vérifiée*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha}{\alpha}\binom{k+\beta}{\beta} = \binom{n+\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+1} \quad (n \geq 0).$$

Démonstration. Cette preuve est basée sur le développement en série de Taylor des fonctions $(1-z)^{-1-\alpha}$ et $(1-z)^{-1-\beta}$ lorsque $|z| < 1$. Nous avons

$$(1-z)^{-1-\alpha} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} z^n \quad (|z| < 1).$$

Par conséquent, en effectuant le produit des séries de $(1-z)^{-1-\alpha}$ et $(1-z)^{-1-\beta}$, on obtient

$$(1-z)^{-2-\alpha-\beta} = (1-z)^{-1-\alpha}(1-z)^{-1-\beta} = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha}{\alpha}\binom{k+\beta}{\beta}\Big) z^n.$$

En écrivant la série pour la fonction $(1-z)^{-2-\beta-\alpha}$, on obtient

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n+\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+1} z^n = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha}{\alpha}\binom{k+\beta}{\beta}\Big) z^n.$$

Ceci fournit le résultat. $\square$

Théorème 2.4. *La méthode de Cesàro C^α d'ordre $\alpha > 0$ est régulière. La méthode de Cesàro $\tilde{C}^\alpha$ d'ordre $\alpha > -1$ est régulière pour les séries.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz. D'après le lemme 2.3, avec $\alpha - 1$ à la place de α et $\beta = 0$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = \frac{A_n^\alpha}{A_n^\alpha} = 1.$$

De plus, nous avons

$$\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} = \frac{\Gamma(n-k+\alpha)/\Gamma(n-k+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} = \alpha \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+\alpha)(n-1+\alpha)\cdots(n-k+\alpha)}$$

et cette dernière expression converge vers 0 lorsque n tend vers l'infinie. Ces deux derniers faits permettent d'affirmer que les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz sont vérifiées et donc la méthode de Cesàro est régulière. Le deuxième point du théorème se montre de la même façon. □

Théorème 2.5. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $0 < \alpha < \beta$, alors la méthode de Cesàro C^α est scalaire-incluse dans la méthode de Cesàro C^β.*
2. *Si $-1 < \alpha < \beta$, alors la méthode de Cesàro $\tilde{C}^\alpha$ est scalaire-incluse dans la méthode de Cesàro $\tilde{C}^\beta$.*

Démonstration. Voir la preuve du théorème 3.1.10 de [3] et la preuve du théorème 43 de [26]. □

2.2 Méthodes arithmétiques discrètes de Riesz

Nous nous penchons désormais sur les méthodes arithmétiques discrètes de Riesz. Cette familles de méthodes est en fait le cas discret des méthodes typiques de Riesz. Les méthodes typiques de Riesz sont de type suite-fonction et elles ont été introduites par Riesz afin d'étudier les séries de Dirichlet. Hardy a aussi travaillé sur ce type de méthodes. Ensemble, Hardy et Riesz ont publié un livre intitulé *The general theory of Dirichlet's series* [28] [1] où ils présentent des résultats de sommabilité de telles séries selon la méthode typique de Riesz. Pour plus de détails sur ces types de méthodes, le lecteur est invité à consulter le livre [2] de Chandrasekharan et Minakshisundaram [10].

On se contente de définir la méthode de Riesz arithmétique discrète puisqu'elle entretient un lien étroit avec les méthodes de Cesàro $\tilde{C}^\alpha$ d'ordre α entre -1 et 2.

1. Cet ouvrage est maintenant épuisé.
2. Non épuisé !

Définition 2.6. Soit $\alpha > -1$. La *méthode de Riesz arithmétique discrète* est la méthode de sommabilité $(R^\alpha, c_{R^\alpha}(X), \lim_{R^\alpha})$ dont l'application $R^\alpha : X^{\mathbb{N}_0} \to X^{\mathbb{N}_0}$ est définie par

$$R^\alpha(x_n)_{n\geq 0} := \Big(\sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)^\alpha x_k\Big)_{n\geq 0} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0}).$$

La méthode R^α est une méthode matricielle donnée par la matrice de scalaires $(r_{n,k})_{n,k\geq 0}$ où

$$r_{n,k} := \begin{cases} \left(1-\frac{k}{n+1}\right)^\alpha & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}.$$

La méthode de Riesz arithmétique discrète respecte les conditions du théorème 1.24. Ainsi, on a le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Pour chaque $\alpha > -1$, la méthode R^α est régulière pour les séries.*

Cette méthode et son lien avec la méthode de Cesàro ont été investigués par Riesz [47] pour les valeurs $-1 < \alpha \leq 1$. Kuttner [33] a étendu les résultats de l'article de Riesz pour les valeurs de $1 < \alpha \leq 2$. Les résultats de ces deux mathématiciens sont combinés dans le théorème suivant.

Théorème 2.8 (Kuttner [33] ; Riesz [47])**.** *Pour chaque $\alpha \in (-1, 2]$, nous avons $R^\alpha \sim_{\mathbb{C}} \tilde{C}^\alpha$.*

2.3 Méthodes définies par des séries entières

Dans cette section, nous dirigeons maintenant notre attention sur les méthodes de sommabilité définies à partir des coefficients d'une série entière. La présentation de la définition générale de ces méthodes suit essentiellement la §3.6 du livre de Boos [3]. Hardy discute aussi de ces méthodes à la §4.12 de son ouvrage [26]. Nous présentons aussi un résultat de Borwein [5] sur l'inclusion entre des méthodes de sommabilité définies par des séries entières. Il s'agit du théorème 2.14 énoncé dans cette section.

La lettre p désigne une fonction définie par une série entière et on pose

$$p(r) := \sum_{n\geq 0} p_n r^n \quad (r \in [0, R_p))$$

où $p_n \geq 0$, $p_0 > 0$ et le rayon de convergence est $R_p > 0$. Comme $p_n \geq 0$ $(n \geq 0)$, nous avons toujours que $p(r) > 0$ quel que soit $r \in [0, R_p)$. On définit maintenant une méthode suite-fonction obtenue d'une série entière.

Définition 2.9. Soit p donnée par une série entière dont le rayon de convergence est $R_p > 0$. La méthode de sommabilité de série entière associée à p est la méthode $(P, c_P(X), \lim_P)$ où l'application P est donnée via les applications $P_r : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ définies par

$$P_r(x_n)_{n\geq 0} := \frac{1}{p(r)} \sum_{n\geq 0} p_n x_n r^n \quad (0 \leq r < R_p,\ (x_n)_{n\geq 0} \in D_{P_r}).$$

Comparativement aux méthodes des sections précédentes, il faut s'assurer que la série définissant $P_r(x_n)_{n\geq 0}$ soit convergente dans X. De plus, la méthode $(P, c_p(X), \lim_P)$ est une méthode suite-fonction obtenue de la suite de fonctions $(a_n)_{n\geq 0}$. Les fonctions $a_n : [0, R_p) \to \mathbb{C}$ sont définies par

$$a_n(r) := \frac{p_n r^n}{p(r)} \quad (0 \leq r < R_p,\ n \geq 0).$$

Exemple 2.10. Soit $p_n = 1$ pour chaque $n \geq 0$. Alors, nous obtenons $p(r) = (1-r)^{-1}$ qu'on note par $a^0(r)$. La méthode $(A^0, c_{A^0}(X), \lim_{A^0})$ obtenue à partir de a^0 est la méthode d'Abel et l'expression de chaque A^0_r est

$$A^0_r(x_n)_{n\geq 0} := (1-r) \sum_{n\geq 0} x_n r^n \quad (0 \leq r < 1,\ (x_n)_{n\geq 0} \in D_{A^0_r}).$$

Lorsque le rayon de convergence R_p n'est pas l'infini, la méthode de sommabilité associée à p est appelée *méthode de type Abel*.

Exemple 2.11. Soit $p_n := \frac{1}{n!}$ pour chaque $n \geq 0$. Alors, nous obtenons $p(r) = e^r$ qu'on note par $b(r)$. La méthode $(B, c_B(X), \lim_B)$ obtenue à partir de b est la méthode de Borel et l'expression de chaque B_r est

$$B_r(x_n)_{n\geq 0} = e^{-r} \sum_{n\geq 0} \frac{r^n x_n}{n!} \quad (0 \leq r < \infty,\ (x_n)_{n\geq 0} \in D_{B_r}).$$

Lorsque $R_p = \infty$, on nomme la méthode de sommabilité associée à la série entière p une *méthode de type Borel*. Qui plus est, dans ce type de méthode, nous préférons employer le paramètre ω en lieu et place du paramètre r.

Le prochain théorème permet de caractériser les méthodes régulières de type Abel. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème de Silverman-Toeplitz.

Théorème 2.12. *Soit $(P, c_P(X), \lim_P)$ une méthode de sommabilité de série entière de type Abel. La méthode P est régulière si, et seulement si, $p(r) \to \infty$ lorsque $r \to R_p^-$.*

Démonstration. Par la définition d'une méthode de sommabilité de série entière, deux conditions du théorème de Silverman-Toeplitz sont automatiquement vérifiées, soient les conditions suivantes :

— $\sup_{r\geq R_0} \frac{1}{p(r)} \sum_{n\geq 0} p_n r^n < \infty$ pour un certain $R_0 \in [0, R_p)$;

— $\lim_{r \to R_p^-} \frac{1}{p(r)} \sum_{n \geq 0} p_n r^n = 1$.

Ainsi, la seule condition jouant un rôle est la suivante :

— pour chaque entier $n \geq 0$, $\frac{p_n r^n}{p(r)} \to 0$ lorsque $r \to R_p^-$.

Supposons que la méthode P soit régulière. Dans ce cas, d'après le théorème de Silverman-Toeplitz, elle satisfait la condition ci-dessus. D'après cette condition et comme chaque $p_n \geq 0$ et $r^n > 0$ ($r > 0$), on obtient $\lim_{r \to R_p^-} p(r) = \infty$.

Supposons maintenant que $\lim_{r \to R_p^-} p(r) = \infty$. Si $n \geq 0$ est fixé, notre hypothèse implique que $\lim_{r \to R_p^-} p_n r^n / p(r) = 0$. Ainsi, la condition manquante du théorème de Silverman-Toeplitz est satisfaite. $\square$

Pour le cas des méthodes de type Borel, la régularité est plutôt caractérisée par le théorème suivant.

Théorème 2.13. *Soit $(P, c_P(X), \lim_P)$ une méthode de sommabilité de série entière de type Borel. La méthode P est régulière si, et seulement si, $p(\omega)$ n'est pas un polynôme.*

Démonstration. Supposons que la méthode P soit régulière. Dans ce cas, elle satisfait les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz indiquée dans la preuve du théorème précédent. En particulier, nous avons $p_n \omega^n / p(\omega) \to 0$ lorsque $\omega \to \infty$. Supposons, si possible, que p soit un polynôme de degré N, disons $p(\omega) = p_0 + p_1 \omega + \cdots + p_N \omega^N$. Ainsi, $p_N \neq 0$ et

$$\lim_{r \to \infty} \frac{p_N \omega^N}{p(\omega)} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{\frac{p_0}{p_N \omega^N} + \frac{p_1}{p_N \omega^{N-1}} + \cdots + 1} = 1,$$

ce qui est une contradiction avec la condition $\lim_{\omega \to \infty} p_N \omega^N / p(\omega) = 0$. Ainsi, $p(\omega)$ ne peut pas être un polynôme.

Supposons que p n'est pas un polynôme. La seule condition à vérifier est $\lim_{\omega \to \infty} \frac{p_n \omega^n}{p(\omega)} = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Soit $n \geq 0$ un entier. Si $p_n = 0$, la condition est automatiquement remplie. Supposons que $p_n \neq 0$. Comme p n'est pas un polynôme, il existe un entier $N > n$ tel que $p_N \neq 0$. Comme $p_k \geq 0$ et $\omega \in [0, \infty)$, nous avons que $p(\omega) \geq p_N \omega^N$, ce qui fournit

$$0 \leq \lim_{\omega \to \infty} \frac{p_n \omega^n}{p(\omega)} \leq \lim_{\omega \to \infty} \frac{p_n \omega^n}{p_N \omega^N} = \frac{p_n}{p_N} \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-(N-n)} = 0.$$

Par conséquent, la méthode est régulière puisqu'elle satisfait les conditions du théorème de Silverman-Toeplitz. $\square$

Un résultat de Borwein permet de comparer deux méthodes de série entière. Ce résultat est le suivant.

Théorème 2.14 (Borwein, [5, théorème A]). *Soient $(P, c_P(X), \lim_P)$ et $(Q, c_Q(X), \lim_Q)$ deux méthodes de sommabilité de séries entières associées respectivement aux séries entières p et q de même rayon de convergence. Supposons qu'il existe un entier N, une mesure borélienne finie signée μ sur $[0,1]$ et un nombre $\delta \in (0,1]$ tel que, pour tout entier $n \geq N$,*

1. $p_n = q_n \int_0^1 t^n \, d\mu(t)$;
2. $\int_0^1 t^n \, d\mu(t) \geq \delta \int_0^1 t^n \, |d\mu(t)|$.

Alors, la méthode Q est scalaire-incluse dans P.

Ce dernier théorème est utilisé dans la troisième partie de cette thèse.

Nous nous concentrons sur des exemples particuliers de méthodes définies par des séries entières. Celles-ci sont aussi étudiées dans la troisième partie de cette thèse sur les espaces de de Branges-Rovnyak.

2.3.1 Les méthodes d'Abel généralisées

Définition 2.15. Soit $\alpha > -1$. La méthode d'Abel généralisée $(A^\alpha, c_{A^\alpha}(X), \lim_{A^\alpha})$ est la méthode de sommabilité définie par la série entière $a^\alpha(r) := (1-r)^{-1-\alpha}$ $(0 \leq r < 1)$.

Comme le développement en série entière de la fonction $(1-r)^{-1-\alpha}$ est

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} r^n$$

l'expression de l'application $A_r^\alpha : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ est

$$A_r^\alpha (x_n)_{n\geq 0} = (1-r)^{1+\alpha} \sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} r^n x_n \quad ((x_n)_{n \geq 0} \in D_{A_r^\alpha}).$$

Comme $a^\alpha(r) \to \infty$ lorsque $r \to 1^-$ $(\alpha > -1)$, la méthode d'Abel généralisée A^α est régulière. Borwein a montré la relation suivante entre les méthodes d'Abel généralisées lorsqu'elles sont appliquées à des suites de nombres complexes. Il a fourni une première preuve dans son article [4] et il en a ensuite donné une autre à la §5 de son article [5] en utilisant le théorème 2.14.

Théorème 2.16 (Borwein, [5, §5]). *Soient $-1 < \beta < \alpha$. Alors, la méthode A^β est scalaire-incluse dans la méthode A^α.*

Enfin, la méthode d'Abel contient toutes les méthodes de Cesàro. Ce résultat est le [3, théorème 3.6.11] dont la preuve est présentée à la page 163.

Théorème 2.17. *Pour tout $\alpha > 0$, la méthode de Cesàro C^α est scalaire-incluse dans la méthode d'Abel $(A, c_A(X), \lim_A)$.*

2.3.2 Les méthodes de Borel généralisées

La méthode de Borel généralisée est une importante méthode de sommabilité. Un livre de Shawyer et Watson [51] est consacré à l'étude de ces méthodes de sommabilité. Nous suivons essentiellement la présentation de ce livre pour introduire la méthode de Borel généralisée.

Le point de départ est la fonction de Mittag-Leffler. Il s'agit de la fonction E^{α} $(\alpha > 0)$ définie par

$$E^{(\alpha)}(\omega) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (0 \leq \omega < \infty).$$

Il est possible de démontrer que cette fonction se comporte comme la fonction exponentielle e^{ω}. Plus précisément, nous avons $E^{(\alpha)}(\omega) \sim e^{\omega}/\alpha$ lorsque $\omega \to \infty$. Lorsque $\alpha = 1$, la fonction de Mittag-Leffler est simplement la fonction exponentielle.

Borwein [6] a introduit un autre type de fonction afin de généraliser la méthode de Borel de l'exemple 2.11.

Définition 2.18. Soit $\alpha > 0$ et soit β un nombre réel et $N \geq 0$ un entier tels que $\alpha N + \beta > 1$. La méthode de Borel généralisée est la méthode de sommabilité $(B^{\alpha,\beta}, c_{B^{\alpha,\beta}}(X), \lim_{B^{\alpha,\beta}})$ dont l'application $B_{\omega}^{\alpha,\beta} : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ $(0 \leq \omega < \infty)$ est définie par

$$B_{\omega}^{\alpha,\beta}(x_n)_{n\geq 0} := \alpha e^{-\omega} \sum_{n \geq N} \frac{x_n \omega^{\alpha n + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad ((x_n)_{n\geq 0} \in D_{B_{\omega}^{\alpha,\beta}}).$$

La méthode $(B^{\alpha,\beta}, c_{B^{\alpha,\beta}}(X), \lim_{B^{\alpha,\beta}})$ est une méthode de série entière où la fonction p est

$$p(\omega) := \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\omega^{\alpha n + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (0 \leq \omega < \infty).$$

Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, on retrouve la fonction exponentielle et lorsque $\beta = 1$, on retrouve la fonction de Mittag-Leffler E^{α} évaluée en ω^{α}. Dans l'expression de $B_{\omega}^{\alpha,\beta}$, on remplace la fonction $p(\omega)$ par $\alpha e^{-\omega}$ puisque, asymptotiquement, nous avons (voir l'ouvrage [51, §5.2] ou l'article [6])

$$p(\omega) \sim \frac{e^{\omega}}{\alpha} \quad (\omega \to \infty).$$

La méthode $(B^{\alpha,\beta}, c_{B^{\alpha,\beta}}(X), \lim_{B^{\alpha,\beta}})$ est une méthode régulière puisque $p(\omega)$ n'est pas un polynôme. Pour plus de détails sur ces dernières estimations et les propriétés plus fines de la méthode de Borel généralisée, le lecteur est invité à consulter le [51, chapitre 5] ou l'article [6].

2.3.3 La méthode logarithmique

Le dernier exemple que nous examinons est la méthode logarithmique.

Définition 2.19. La méthode logarithmique est la méthode de sommabilité $(L, c_L(X), \lim_L)$ définie par la série entière $l(r) := \frac{1}{r} \log\left(\frac{1}{1-r}\right)$ de rayon de convergence $R_l = 1$.

La série entière de la fonction l est

$$l(r) = \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n+1} \quad (0 \leq r < 1).$$

Chaque application $L_r : X^{\mathbb{N}_0} \to X$ $(0 \leq r < 1)$ prend alors la forme

$$L_r(x_n)_{n \geq 0} := \frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n \geq 0} \frac{x_n r^n}{n+1} \quad ((x_n)_{n \geq 0} \in D_{L_r}).$$

Comme $l(r) \to \infty$, la méthode logarithmique est régulière.

La caractéristique importante de la méthode logarithmique est qu'elle contient beaucoup de méthodes de sommabilité. Entre autres, elle contient toutes les méthodes d'Abel généralisées et toutes les méthodes de Borel généralisées.

Théorème 2.20 (Borwein, [5])**.** *Pour tout $\alpha > -1$, la méthode d'Abel généralisée A^α est scalaire-incluse dans la méthode L.*

Sous une hypothèse supplémentaire, la méthode de Borel généralisée est scalaire-incluse dans la méthode logarithmique. Pour $M \subseteq X^{\mathbb{N}_0}$, une méthode de sommabilité A est M-scalaire-incluse dans une méthode de sommabilité B si $c_A(\mathbb{C}) \cap M \subset c_B(\mathbb{C})$ et A et B sont compatibles sur $c_A(\mathbb{C}) \cap M$.

Théorème 2.21 (Borwein–Watson, [7], Proposition 3)**.** *Soit des nombres $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et un entier $N \geq 0$ tels que $\alpha N + \beta > 1$. Soit $M := D_{A^0}$ où D_{A^0} est le domaine de la méthode d'Abel. La méthode de Borel généralisée $B^{\alpha,\beta}$ est M-scalaire-incluse dans la méthode logarithmique.*

Chapitre 3

Sommabilité dans les espaces de Banach via l'inclusion scalaire

Un type de théorème qui permet d'étendre une propriété vraie sur un sous-espace de suites de scalaires à un sous-espace de suites d'éléments d'un espace de Banach a été démontré au chapitre précédent. Il s'agit du théorème de Silverman-Toeplitz pour les méthodes suite-fonction et les méthodes matricielles. En effet, la preuve du théorème de Silverman-Toeplitz pour les méthodes de sommabilité s'est faite en utilisant la régularité de la méthode sur les suites scalaires. Ceci motive l'introduction de la définition suivante.

Définition 3.1. Soit $(A, c_A(X), \lim_A)$ une méthode de sommabilité. La méthode A est *scalaire-régulière* si $c(\mathbb{C}) \subseteq c_A(\mathbb{C})$ et $\lim_A (x_n)_{n\geq 0} = \lim_{n\to\infty} x_n$ quelle que soit la suite $(x_n)_{n\geq 0} \in c(\mathbb{C})$.

Une autre manière de voir le principe de transfert du théorème de Silverman-Toeplitz est le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Une méthode suite-fonction est régulière si, et seulement si, elle est scalaire-régulière.*

L'objectif de ce chapitre est donc de voir si un tel principe de transfert s'applique à l'inclusion [1] de méthodes de sommabilité.

3.1 L'inclusion scalaire implique l'inclusion

Le prochain théorème répond partiellement à cette question lorsqu'on applique une méthode de sommabilité à une suite d'opérateurs linéaires bornés. On présente le théorème dans le cas particulier où $E = [0, R)$ où $0 < R \leq \infty$. Dans ce cas particulier, $\infty = R$.

1. Il est à remarquer que le théorème de Silverman-Toeplitz est un théorème d'inclusion de la méthode de convergence forte dans une méthode de sommabilité.

Dans la preuve, nous allons utiliser la caractérisation de $\lim_{r\to R^-} f(r) = x$ en terme des suites. Précisément, nous avons $\lim_{r\to R^-} f(r) = x$ si, et seulement si, pour toute suite $(r_n)_{n\geq 0}$ telle que $r_n \to R^-$ ($n \to \infty$), nous avons $\lim_{n\to\infty} f(r_n) = x$.

Théorème 3.3. *Soient $(A, c_A(X), \lim_A)$ et $(B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité régulières. Soit X et Y des espaces de Banach. Soit $S : X \to Y$ et $S_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ des opérateurs linéaires bornés. Supposons que*

1. *$S_n(x) \to S(x)$ pour tout $x \in W$ où W est un sous-ensemble dense de X ;*
2. *$(S_n(x))_{n\geq 0}$ est A-convergente vers $S(x)$ pour tout $x \in X$;*
3. *A est scalaire-incluse dans B.*

Alors, pour tout $x \in X$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est B-convergente vers $S(x)$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ les fonctions définissant les méthodes A et B.

Supposons que, pour tout $x \in X$, $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente selon la méthode A vers $S(x)$. Alors, pour tout $x \in X$ et tout $r \in [0, R)$, nous avons

$$\sum_{n\geq 0} a_n(r) S_n(x) \text{ converge dans } X \quad \text{ et } \quad S(x) = \lim_A (S_n(x))_{n\geq 0}.$$

Nous voulons démontrer que la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est aussi convergente selon la méthode B vers $S(x)$. Nous allons donc montrer que

i) la série $\sum_{n\geq 0} b_n(r) S_n(x)$ est convergente dans Y pour tout $x \in X$ et tout $r \in [0, R)$;

ii) $\lim_B (S_n(x))_{n\geq 0} = S(x)$ pour tout $x \in X$.

Nous commençons par i). Soit $r \in [0, R)$ et $x \in X$ fixés. La suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est A-convergente vers $S(x)$. Soit $\phi \in Y^*$. Par la linéarité et la continuité de ϕ, nous avons

$$\phi\Big(\sum_{n\geq 0} a_n(r) S_n(x)\Big) = \sum_{n\geq 0} a_n(r) \phi(S_n(x)).$$

Ainsi, la suite $(\phi(S_n(x)))_{n\geq 0}$ converge vers $\phi(S(x))$ selon la méthode A. Comme $A \subseteq_{\mathbb{C}} B$, nous avons que la suite $(\phi(S_n(x)))_{n\geq 0}$ est B-convergente vers $\phi(S(x))$. En particulier, la série $\sum_{n\geq 0} b_n(r)\phi(S_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{C}$ et donc bornée :

$$\sup_{N\geq 0} \Big| \sum_{n=0}^{N} b_n(r) \phi(S_n(x)) \Big| < \infty.$$

En utilisant la linéarité de ϕ, nous avons donc

$$\sup_{N\geq 0} \Big| \phi\Big(\sum_{n=0}^{N} b_n(r) S_n(x) \Big) \Big| < \infty.$$

Ceci étant vrai quelle que soit ϕ, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, on en déduit que

$$\sup_{N\geq 0}\Big\|\sum_{n=0}^{N} b_n(r)S_n(x)\Big\|_Y < \infty.$$

Ceci étant aussi vrai quel que soit $x \in X$, une deuxième application du théorème de Banach-Steinhaus permet de conclure que

$$M_1 := \sup_{N\geq 0}\Big\|\sum_{n=0}^{N} b_n(r)S_n\Big\|_{X\to Y} < \infty. \tag{3.1}$$

Soit $x \in X$ et $w \in W$ tels que $\|x-w\|_X < \varepsilon/M_1$. Par hypothèse, nous avons $S_n(w) \to S(w)$ lorsque $n \to \infty$. Comme B est une méthode régulière, il s'en suit que $(S_n(w))_{n\geq 0}$ converge vers $S(w)$ selon la méthode B. En particulier, la suite $(\sum_{n=0}^{N} b_n(r)S_n(w))_{N\geq 0}$ est de Cauchy dans Y et donc $\|\sum_{n=m_1}^{m_2} b_n(r)S_n(w)\|_Y < \varepsilon$ pour des entiers m_1, m_2 assez grands. Pour de tels entiers m_1 et m_2, il s'en suit que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=m_1}^{m_2} b_n(r)S_n(x)\Big\|_Y &\leq \Big\|\sum_{n=m_1}^{m_2} b_n(r)S_n(x-w)\Big\|_Y + \Big\|\sum_{n=m_1}^{m_2} b_n(r)S_n(w)\Big\|_Y\\ &\leq \Big\|\sum_{n=m_1}^{m_2} b_n(r)S_n\Big\|_{X\to Y}\|x-w\|_X + \varepsilon\\ &\leq 2M_1\varepsilon/M_1 + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} b_n(r)S_n(x)$ est de Cauchy. Ceci démontre que $\sum_{n\geq 0} b_n(r)S_n(x)$ est une série convergente dans l'espace X quel que soit $r \in [0, R)$. Ceci termine la démonstration du premier point.

Passons maintenant à la démonstration de ii). Définissons l'opérateur $S_r^B : X \to Y$ par l'expression

$$S_r^B(x) := \sum_{n\geq 0} b_n(r)S_n(x) \quad (x \in X).$$

D'après la preuve du point i), la série définissant $S_r^B(x)$ est convergente, ce qui assure que S_r^B est bien définie et est linéaire. De plus, d'après (3.1), il s'en suit que S_r^B est un opérateur linéaire borné de X dans Y. Comme nous l'avons vu dans la démonstration du point i), pour chaque $x \in X$ et $\phi \in Y^*$, la suite $(\phi(S_n(x)))_{n\geq 0}$ est convergente vers $\phi(S(x))$ selon la méthode B. En d'autres mots, nous avons

$$\phi(S_r^B(x)) \to \phi(S(x)) \quad (r \to R^-). \tag{3.2}$$

Nous voulons démontrer que $S_r^B(x) \to S(x)$ lorsque $r \to R^-$. Soit $(r_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $r_n \to R^-$ lorsque $n \to \infty$. D'après (3.2), nous avons que $\phi(S_{r_n}^B(x)) \to \phi(S(x))$ lorsque $n \to \infty$. On en déduit que

$$\sup_{n\geq 0}|\phi(S_{r_n}^B(x))| < \infty \quad (\phi \in Y^*,\ x \in X).$$

En appliquant une première fois le théorème de Hahn-Banach et de Banach-Steinhaus (voir [49, théorème 5.8]), on trouve que

$$\sup_{n\geq 0} \|S^B_{r_n}(x)\|_Y < \infty \quad (x \in X).$$

À appliquant une deuxième fois le théorème de Banach Steinhaus, on obtient que

$$M_2 := \sup_{n\geq 0} \|S^B_{r_n}\|_{X\to Y} < \infty.$$

Étant donné $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, on choisit $w \in W$ tel que

$$\|x - w\|_X < \varepsilon / \max\{M_2, \|S\|_{X\to Y}\}.$$

De plus, par la régularité de B, nous avons $S^B_{r_n}(w) \to S(w)$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, il existe un entier N tel que

$$\|S^B_{r_n}(w) - S(w)\|_Y < \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Pour $n \geq N$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|S^B_{r_n}(x) - S(x)\|_Y &\leq \|S^B_{r_n}(x - w)\|_Y + \|S^B_{r_n}(w) - S(w)\|_Y + \|S(w - x)\|_Y \\ &\leq M_2\|x - w\|_X + \varepsilon + \|S\|_{X\to Y}\|w - x\|_X \\ &\leq M_2\varepsilon/M_2 + \varepsilon + \|S\|_{X\to Y}\varepsilon/\|S\|_{X\to Y} = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, $S^B_{r_n}(x) \to S(x)$ lorsque $n \to \infty$. Comme la suite $(r_n)_{n\geq 0}$ est arbitraire, on conclut que $S^B_r(x) \to S(x)$ lorsque $r \in R^-$. Autrement dit, $(S_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $S(x)$ selon la méthode B. Ceci termine la démonstration du deuxième point et du théorème. □

La preuve s'adapte facilement pour les méthodes matricielles. Dans ce cas, nous n'avons pas besoin de passer par la caractérisation de la limite à l'infini en termes des suites. De plus, ce résultat s'étend à tout espace topologique localement compact, non-compact et métrisable dont le compactifié d'Alexandrov (la « one-point compactification ») est métrisable. Pour plus de détails sur les espaces dont le compactifié d'Alexandrov est métrisable, le lecteur peut consulter l'article [38].

Il faut remarquer que la régularité de la méthode A n'a pas été utilisée. Ainsi, il est possible d'enlever cette hypothèse du théorème. Aussi, l'espace topologique $(E, \mathcal{T}_E)$ ne joue pas un rôle particulier dans la preuve du résultat ci-dessus (seulement pour donner un sens de convergence à l'infini). Ainsi, les méthodes A et B peuvent avoir des paramètres qui appartiennent à deux espaces topologiques différents. De plus, la condition $S_n(w) \to S(w)$, pour tout w dans un ensemble dense dans X, semble essentielle afin de conclure que $(S_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $S(x)$ selon la méthode B. Serait-il possible de retirer cette hypothèse et obtenir la même conclusion sur la convergence de la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$? Ceci ne semble pas possible puisque cette hypothèse semble aussi être essentielle pour démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} b_n(r)S_n(x)$ ($x \in X$) converge dans X (on démontre que cette dernière série est de Cauchy dans X en utilisant cette hypothèse).

Cependant, si cette hypothèse est laissée de côté, il est seulement possible de démontrer que la suite $\sum_{n=0}^{N} b_n(r)S_n(x)$ est faiblement de Cauchy. En effet, comme la suite $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est convergente selon la méthode A vers $S(x)$, il s'en suit (comme nous l'avons vu dans la preuve ci-dessus) que la suite $(\phi(S_n(x)))_{n\geq 0}$ est convergente vers $\phi(S(x))$ selon la méthode B pour tout $x \in X$ et toute $\phi \in Y^*$. En particulier, la série $\sum_{n\geq 0} b_n(r)\phi(S_n(x))$ est convergente dans $\mathbb{C}$ pour chaque $r \in E$. Ainsi, la suite $(\sum_{n=0}^{N} b_n(r)\phi(S_n(x)))_{N\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ pour chaque $r \in E$. D'après la linéarité de ϕ, on en déduit seulement que la suite $(\phi(\sum_{n=0}^{N} b_n(r)S_n(x)))_{N\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Généralement, une suite qui est faiblement de Cauchy n'admet pas toujours de limite faible. L'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ est un exemple d'un tel espace (voir [12, exemple 4.5]). Donc, il ne semble pas possible de retirer l'hypothèse sur l'existence de l'ensemble dense W. Néanmoins, une conséquence du théorème d'Alaoglu [12, théorème 3.1, p. 130] assure que si X est réflexif, alors toutes les suites faiblement de Cauchy admettent une limite faible [12, corollaire 4.3, p. 132]. Si tel est le cas, l'espace X est *faiblement séquentiellement complet*. En ajoutant cette hypothèse assez forte sur X, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.4. *Soit X un espace de Banach. Soit $(A, c_A(X), \lim_A)$ et $(B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité suite-fonction. Supposons que*

1. *A est scalaire-incluse dans B ;*
2. *X soit réflexif.*

Alors, la méthode A est faiblement incluse dans B.

Dans l'énoncé du théorème précédent, une méthode A est *faiblement incluse* dans B si les conditions suivantes sont satisfaites :

— $c_{*,A}(X) \subseteq c_{*,B}(X)$;

— $\lim_A^*(x_n)_{n\geq 0} = \lim_B^*(x_n)_{n\geq 0}$ pour toute $(x_n)_{n\geq 0} \in c_{*,A}(X)$.

Pour les méthodes suite-fonction, l'ensemble $c_{*,A}(X)$ associé à une méthode A est défini comme

$$c_{*,A}(X) := \Big\{ (x_n)_{n\geq 0} \in X^{\mathbb{N}_0} \; : \; \sum_{n\geq 0} a_n(r)x_n \text{ est faiblement convergente dans } X \\ \text{et } \lim_{*,A}(x_n)_{n\geq 0} \text{ existe .} \Big\}$$

Il y a aussi une version du théorème 3.3 pour les méthodes régulières pour les séries.

Théorème 3.5. *Soient $(A, c_A(X), \lim_A)$ et $(B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité régulières pour les séries. Soit X et Y deux espaces de Banach. Soient $S : X \to Y$, $S_n : X \to Y$ $(n \geq 0)$ des opérateurs linéaires bornés. Supposons que*

1. $\sum_{k=0}^{n} S_k(x) \to S(x)$ *pour tout $x \in W$ où W est un sous-ensemble dense de X ;*
2. $(S_n(x))_{n \geq 0}$ *est A-sommable vers $S(x)$ pour tout $x \in X$;*
3. *A est scalaire-incluse dans B.*

Alors, pour tout $x \in X$, la suite $(S_n(x))_{n \geq 0}$ est B-sommable vers $S(x)$.

Démonstration. La démonstration est pratiquement la même que celle du théorème 3.3. La seule différence est qu'il faut utiliser la régularité pour les séries au lieu de la régularité pour les suites. □

3.2 Conséquences sur la sommabilité du développement de Taylor

Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe. Rappelons que l'espace $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions holomorphes définies sur le disque unité. Sa topologie est celle de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$.

Un *espace de Banach de fonctions holomorphes sur* $\mathbb{D}$ est un espace de Banach X qui est un sous-ensemble de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que l'application d'inclusion canonique $X \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est continue.

Chaque fonction $f(z)$ admet un développement de Taylor autour de $z = 0$ de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}).$$

On définit les *sommes partielles du développement de Taylor* par

$$s_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

La série de Taylor d'une fonction $f \in X$ est sommable par une méthode de sommabilité A si la suite $(s_n(f))_{n \geq 0} \in c_A(X)$. Lorsque l'ensemble des polynômes est dense et que la méthode de sommabilité est régulière, le théorème 3.3 a la conséquence suivante pour les espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité.

Corollaire 3.6. *Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. Soit $(A, c_A(X), \lim_A)$ et soit $(B, c_B(X), \lim_B)$ deux méthodes de sommabilité régulières. Supposons que*

1. *l'ensemble des polynômes soit inclus et dense dans X ;*
2. *A soit scalaire-incluse dans B.*

Si la série de Taylor de f est A-sommable vers f pour toute $f \in X$, alors la série de Taylor de f est B-sommable vers f pour toute $f \in X$.

Démonstration. Si on vérifie les hypothèses du théorème 3.3, nous allons obtenir la conclusion du corollaire. Le restant de la preuve consiste donc à vérifier que toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées.

Posons W le sous-espace des polynômes. Par hypothèse, l'ensemble des polynômes est dense dans X. Définissons l'opérateur $S_n : X \to X$ par l'expression $S_n(f) := s_n(f)$ pour $f \in X$ (l'opérateur qui assigne les sommes partielles du développement de Taylor d'une fonction $f \in X$) et $S(f) = f$ l'opérateur identité sur X.

Tout d'abord, montrons que chaque S_n est continu ($n \geq 0$). Pour $f \in X$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, nous avons

$$\|S_n(f)\|_X \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \|z^k\|_X.$$

L'application $D_k : \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ définie par $D_k(f) := f^{(k)}(0)$ est continue et linéaire sur $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Comme l'inclusion $X \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est continue, il s'en suite que la restriction $D_k\big|_X : X \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur X, quel que soit $k \geq 0$. Ainsi, il existe des constantes C_k ($k \geq 0$) telles que

$$|f^{(k)}(0)| \leq C_k \|f\|_X.$$

En utilisant ce dernier estimé, on obtient

$$\|S_n(f)\|_X \leq \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{n!} \|z^k\|_X\Big) \|f\|_X.$$

Puis, pour chaque polynôme p avec $N := \deg p$, nous avons

$$S_n(p) = s_n(p) = p \quad (n \geq N).$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} S_n(p) = p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Enfin, par hypothèse, la méthode A est scalaire-incluse dans B.

Supposons maintenant que la série de Taylor de toute fonction $f \in X$ est A-sommable vers f. Ceci indique que la suite $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est A-convergente vers f. Comme $S_n(f) = s_n(f)$, l'hypothèse de sommabilité pour la méthode A est vérifiée. Par le théorème 3.3, on peut donc conclure que $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est B-convergente vers f quelle que soit $f \in X$. □

Ce dernier résultat sera cité à de nombreuses reprises dans cette thèse. Il constitue une généralisation de l'argument utilisé au [39, théorème 6.1]. On peut remplacer à nouveau la régularité par la régularité pour les séries pour obtenir un résultat semblable pour les méthodes régulières pour les séries.

Deuxième partie

Résultats de sommabilité pour les espaces de Dirichlet pondérés

Chapitre 4

Espace de Dirichlet à poids surharmoniques

Nous nous tournons maintenant vers certains espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité : les espaces de Dirichlet à poids surharmoniques.

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{D}$ désigne le disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et sa fermeture est $\overline{\mathbb{D}}$. Sa frontière, le cercle unité, est notée $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$. L'expression $d\theta$ désigne simplement la mesure de Lebesgue de dimension un. L'espace $L^p(\mathbb{T})$ $(0 < p < \infty)$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telles que $|f|^p$ est intégrable. La mesure de Lebesgue en deux dimensions est notée $dA(z)$. L'espace $L^1(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{D}$ selon la mesure dA.

Soit $1 \leq p < \infty$ un nombre réel. L'*espace de Hardy* H^p est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\lim_{r\to 1^-} M_p(r; f) < \infty$ où

$$M_p(r; f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta.$$

L'application $\|\cdot\|_{H^p} : H^p \to [0, \infty)$ définie par $\|f\|_{H^p} := \lim_{r\to 1^-} M_p(r; f)$ est une norme sur H^p. D'ailleurs, pour $p \in [1, \infty)$, nous avons que si $f_n \to f$ dans H^p, alors $f_n \to f$ uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Par conséquent, les espaces H^p sont des espaces de Banach de fonctions holomorphes. Pour le cas $p = \infty$, l'espace de Hardy H^∞ est l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telles que $\sup_{0<r<1} M_\infty(r; f) < \infty$ où $M_\infty(r; f) := \sup_{\zeta\in\mathbb{T}} |f(r\zeta)|$. Dans ce cas, $(H^\infty, \|\cdot\|_{H^\infty})$ est l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\mathbb{D}$ et il constitue un espace de Banach.

Chaque fonction $f \in H^p$ possède des limites radiales presque partout, c'est-à-dire que $f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ existe pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. La fonction f^* est aussi notée f et nous avons que $f \in L^p(\mathbb{T})$. On peut trouver la preuve de ces faits par exemple dans le livre de Duren [14].

4.1 Poids surharmoniques

Avant d'introduire les poids surharmoniques, nous passons en revue quelques notions clés des fonctions surharmoniques.

Une fonction $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est *surharmonique* si u est semi-continue inférieurement et satisfait une inégalité de la moyenne locale. Plus précisément, une fonction $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est surharmonique si

— pour chaque $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{z \in \mathbb{D} : u(z) > t\}$ est ouvert dans $\mathbb{D}$;

— pour chaque $z \in \mathbb{D}$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$u(z) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta \quad (0 \leq r < \rho).$$

Une fonction $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est sous-harmonique si $-u$ est surharmonique.

D'après le [44, théorème 2.5.1] appliqué à la fonction $-u$, où u est superharmonique, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit $u : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ une fonction surharmonique telle que $u \neq \infty$ identiquement. Alors u est localement intégrable, c'est-à-dire que $\int_K |u|\, dA < \infty$ pour chaque sous-ensemble compact $K \subseteq \mathbb{D}$.*

Nous pouvons maintenant introduire ce qu'est un poids surharmonique.

Définition 4.2. Un *poids superharmonique* ω sur $\mathbb{D}$ est une fonction surharmonique telle que $\omega(\mathbb{D}) \subseteq [0, \infty)$.

Comme ω est une fonction surharmonique non-négative, la fonction $-\omega$ est une fonction sous-harmonique négative. La fonction harmonique $h \equiv 0$ est un majorant harmonique de $-\omega$. Ainsi, d'après le [44, théorème 4.5.4], il existe un plus petit majorant harmonique h ($h \leq 0$) et une mesure de Radon μ définie sur $\mathbb{D}$ telle que

$$-\omega(z) = h(z) - \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1 - \overline{\zeta} z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1 - |\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Ainsi, ω s'écrit

$$\omega(z) = -h(z) + \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1 - \overline{\zeta} z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1 - |\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

De plus, comme $-h$ est une fonction harmonique non-négative, il existe une mesure non-négative sur le cercle unité telle que $-h$ se représente comme l'intégrale de Poisson de cette mesure (voir, par exemple, [49, théorème 11.30]). Par conséquent, en réunissant le tout en une seule mesure, il existe une mesure μ définie sur $\overline{\mathbb{D}}$ non-négative telle que

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \log\left|\frac{1 - \overline{\zeta} z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1 - |\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{4.1}$$

En particulier, lorsque ω est une fonction harmonique, le support de la mesure μ associée est inclus dans $\mathbb{T}$.

Exemple 4.3. Soit $\mu := \delta_\zeta$ la mesure de Dirac, où $\zeta \in \mathbb{T}$. Pour $E \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ mesurable, cette mesure est définie comme

$$\delta_\zeta(E) := \begin{cases} 1 & z \in E \\ 0 & z \notin E \end{cases}.$$

L'expression du poids harmonique associé à la mesure μ est la fonction

$$\omega_\zeta(z) = \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

La fonction ω_ζ est appelée un *poids de Poisson*. Ce nom provient du fait que la fonction $P(z,\zeta) := \omega_\zeta(z)$ est le noyau de Poisson.

Exemple 4.4. Pour $\mu := \delta_\zeta$ la mesure de Dirac en un point $\zeta \in \mathbb{D}$, l'expression du poids harmonique associé à cette mesure est la fonction

$$\omega_\zeta(z) = \log\left|\frac{1-\overline{\zeta}z}{\zeta - z}\right|\frac{2}{1-|\zeta|^2} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Exemple 4.5. Pour $\mu := dA$ la mesure de Lebesgue de dimension 2 du disque unité, l'expression du poids harmonique associé à cette mesure est $\omega \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$.

Théorème 4.6. *Si ω est un poids superharmonique sur $\mathbb{D}$, alors $\omega \in L^1(\mathbb{D})$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.1, la fonction ω est localement intégrable sur $\mathbb{D}$. De plus, d'après le [44, théorème 2.6.8(a)], la fonction $r \mapsto (1/r^2)\int_{|z|\le r} w(z)\,dA(z)$ est une fonction décroissante de $\log r$ $(0 < r < 1)$. En fixant $0 < r_1 < 1$, nous avons

$$\frac{1}{r^2}\int_{|z|\le r} \omega(z)\,dA(z) \le \frac{1}{r_1^2}\int_{|z|\le r_1} \omega(z)\,dA(z) \quad (r_1 < r < 1).$$

En laissant $r \to 1^-$, d'après le théorème de convergence monotone (voir [49, théorème 1.26]), on obtient

$$\int_{\mathbb{D}} \omega(z)\,dA(z) \le \frac{1}{r_1^2}\int_{|z|\le r_1} \omega(z)\,dA(z).$$

Conséquemment, la fonction ω appartient à $L^1(\mathbb{D})$. $\square$

4.2 Espaces de Dirichlet à poids surharmoniques

Nous commençons par les espaces de Dirichlet pondérés par un poids $\omega : \mathbb{D} \to [0,\infty)$ où $\omega \in L^1(\mathbb{D})$. Nous suivons la présentation de la §1.6 de l'ouvrage [17].

Définition 4.7. Soit ω un poids sur $\mathbb{D}$ tel que $\omega \in L^1(\mathbb{D})$. L'*intégrale de Dirichlet pondérée* est définie par

$$\mathcal{D}_\omega(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \omega(z)\, dA(z) \quad (f \in \mathcal{D}_\omega).$$

L'*espace de Dirichlet pondéré* est l'ensemble

$$\mathcal{D}_\omega := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \, : \, \mathcal{D}_\omega(f) < \infty\}.$$

Muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire sur l'espace des fonctions, l'ensemble $\mathcal{D}_\omega$ est un espace vectoriel complexe.

Exemple 4.8. Soit $\omega \equiv 1$ sur $\mathbb{D}$. L'espace de Dirichlet pondéré obtenu est l'*espace de Dirichlet* noté $\mathcal{D}$. L'ouvrage [17] y est consacré presque entièrement !

Exemple 4.9. Soit ω un poids harmonique sur $\mathbb{D}$. D'après la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, nous avons

$$\pi r^2 \omega(0) = \int_{|z| \le r} \omega(z)\, dA(z) \quad (0 < r < 1).$$

Ceci implique que nous avons $\omega \in L^1(\mathbb{D})$. L'espace de Dirichlet pondéré obtenu est appelé un *espace de Dirichlet à poids harmonique*. Cette famille d'espaces a été introduite par Richter [45] pour l'étude des isométries 2-cycliques.

Théorème 4.10. *Soit $\omega : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ une fonction intégrable sur $\mathbb{D}$. Si $\liminf_{|z| \to 1} w(z)/(1 - |z|) > 0$, alors $\mathcal{D}_\omega \subseteq H^2$. Dans ce cas, l'espace $\mathcal{D}_\omega$ est un espace de Hilbert selon la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{D}_\omega}$ associée à ω.*

Démonstration. Voir la preuve du théorème 1.6.3 de la §1.6 de [17]. □

Nous nous intéressons plutôt à la généralisation des deux exemples précédents à des poids surharmoniques. Cette famille d'espaces de Dirichlet à poids surharmonique a été introduite par Aleman dans sa thèse [1].

Définition 4.11. Soit ω un poids surharmonique sur $\mathbb{D}$. L'*espace de Dirichlet à poids surharmonique* est l'ensemble $\mathcal{D}_\omega$ où ω est un poids surharmonique.

La définition de $\mathcal{D}_\omega$ a du sens puisque, d'après le théorème 4.6, un poids superharmonique appartient toujours à $L^1(\mathbb{D})$. Voici un exemple d'espace qui est important.

Exemple 4.12. Soit ω le poids surharmonique associé à la mesure de Dirac δ_ζ en un point $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. L'espace $\mathcal{D}_\omega$ est simplement noté $\mathcal{D}_\zeta$ et il est appelé un *espace de Dirichlet local*.

Comme à chaque poids surharmonique, il existe une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ telle que

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\overline{\zeta}z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1-|\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}),$$

l'intégrale de Dirichlet pondérée d'une fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ s'écrit aussi de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_\omega(f) = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log\left|\frac{1-\overline{\zeta}z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1-|\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) dA(z) + \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta) dA(z).$$

Théorème 4.13. *Soit $\omega : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ une fonction surharmonique telle que $\omega \neq 0$. Alors, nous avons $\mathcal{D}_\omega \subseteq H^2$.*

Démonstration. Soit μ la mesure borélienne positive finie telle que

$$\omega(z) = \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\overline{\zeta}z}{\zeta - z}\right| \frac{2}{1-|\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Comme $\omega \neq 0$, nous avons aussi que $\mu \neq 0$.

Pour re^{it} où $0 \leq r < 1$ et $0 \leq t < 2\pi$, nous avons

$$\begin{aligned} \omega(re^{it})/(1-r) &\geq \frac{2}{1-r} \int_{\mathbb{D}} \log\left|\frac{1-\overline{\zeta}re^{it}}{\zeta - re^{it}}\right| d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1+r}{|\zeta - re^{it}|^2}\, d\mu(\zeta) \\ &\geq \frac{\log((1-r)/(1+r))}{1-r} \int_{\mathbb{D}} d\mu(\zeta) + \frac{1}{1+r} \int_{\mathbb{T}} d\mu(\zeta) \\ &\geq \min\left\{ \frac{\log(1-r)/(1+r)}{1-r}, \frac{1}{1+r} \right\} \mu(\overline{\mathbb{D}}) \end{aligned}$$

où la première inégalité provient du fait que $2/(1-|\zeta|^2) \geq 2$ ($\zeta \in \mathbb{D}$) et l'avant-dernière inégalité provient du fait que $|1-\overline{\zeta}re^{it}|/|\zeta - re^{it}| \geq (1-r)/(1+r)$ ($\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$). Par conséquent, en prenant $r \to 1^-$, nous obtenons

$$\liminf_{r \to 1^-} \omega(re^{it})/(1-r) \geq \liminf_{r \to 1^-} \frac{1}{1+r} \mu(\overline{\mathbb{D}}) = \mu(\overline{\mathbb{D}})/2 > 0.$$

D'après le théorème 4.10, nous déduisons que $\mathcal{D}_\omega \subseteq H^2$. □

Ce dernier théorème nous permet de définir un produit scalaire et, conséquemment, une norme sur $\mathcal{D}_\omega$. On définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_\omega} : \mathcal{D}_\omega \times \mathcal{D}_\omega \to \mathbb{C}$ par

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\omega} := \langle f, g \rangle_{H^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{g'(z)} \omega(z)\, dA(z) \quad (f, g \in \mathcal{D}_\omega).$$

Le couple $(\mathcal{D}_\omega, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_\omega})$ est alors un espace de Hilbert et le produit scalaire induit une norme sur l'espace $\mathcal{D}_\omega$ dont l'expression est

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\omega} := \|f\|^2_{H^2} + \mathcal{D}_\omega(f).$$

Nous remarquons que le cas $\omega = 0$ n'est pas couvert dans le résultat précédent. Il est logique, en vertu du théorème 4.13, de poser $\mathcal{D}_\omega := H^2$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_\omega} := \|\cdot\|_{H^2}$ dans le cas où $\omega \equiv 0$.

Nous avons en fait un peu plus que simplement une structure d'espace de Hilbert. Pour le prochain résultat, on introduit la définition d'espace de Hilbert à noyau reproduisant[1] qui sépare les points (voir, par exemple, [43, définition 1.1 et exercice 1.1]).

Définition 4.14. Soit E un ensemble non-vide et $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de fonctions $f : E \to \mathbb{C}$. L'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall z \in E$, la fonctionnelle linéaire d'évaluation en z est continue ;
2. $\forall z \in E$, il existe $f \in \mathcal{H}$ telle que $f(z) \neq 0$.

Une propriété importante des RKHS est que la convergence en norme implique la convergence ponctuelle. Ceci est une conséquence du fait que les fonctionnelles d'évaluation sont continues et donc ce sont des fonctionnelles linéaires bornées. Ainsi, si une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{H}$ converge vers f dans la norme de $\mathcal{H}$, alors nous obtenons l'extimée suivante

$$|f_n(z) - f(z)| \leq C_z \|f_n - f\|_{\mathcal{H}}$$

où C_z est la norme d'opérateur de la fonctionnelle d'évaluation en $z \in E$.

Théorème 4.15. *Pour $\omega \neq 0$, l'espace $\mathcal{D}_\omega$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant.*

Démonstration. D'après la définition 4.14, nous devons montrer les deux conditions suivantes sont respectées :

i) $\forall z \in \mathbb{D}$, la fonctionnelle linéaire d'évaluation en z est continue ;

ii) $\forall z \in \mathbb{D}$, il existe $f \in \mathcal{D}_\omega$ telle que $f(z) \neq 0$.

Pour le premier énoncé, fixons un point $z \in \mathbb{D}$. Soit $f \in \mathcal{D}_\omega$ telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dans ce cas, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|f(z)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{\sqrt{1-|z|^2}} \leq \frac{\|f\|_{\mathcal{D}_\omega}}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Donc, la fonctionnelle linéaire d'évaluation $f \mapsto f(z)$ est continue.

Pour le deuxième énoncé, fixons à nouveau un point $z \in \mathbb{D}$. Comme $f' = 0$ si f est une fonction constante, l'espace $\mathcal{D}_w$ contient les fonctions constantes. Par conséquent, la fonction $f(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ suffit. □

1. L'acronyme en anglais est RKHS pour *reproducing kernel Hilbert space*.

Corollaire 4.16. *Soit $\omega : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ un poids surharmonique. Si $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}_\omega$ est une suite qui converge vers f dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$, alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f uniformément sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\geq 0} \subset \mathcal{D}_\omega$ une suite qui converge vers f dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$. Il est suffisant de montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur chaque disque fermé $\overline{D(0,r)} \subset \mathbb{D}$ avec $r > 0$. Soit $\overline{D(0,r)}$ un disque fermé avec $r > 0$. D'après le résultat précédent, pour chaque $z \in \overline{D(0,r)}$, nous avons

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_{\mathcal{D}_\omega}}{\sqrt{1-|z|^2}} \leq \frac{\|f_n - f\|_{\mathcal{D}_\omega}}{1-r^2}.$$

Ainsi, $\sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |f_n(z) - f(z)| \leq C(r)\|f_n - f\|_{\mathcal{D}_\omega}$ où $C(r) := (1-r^2)^{-1/2}$. Ceci démontre que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $\overline{D(0,r)}$. □

D'après le résultat précédent, chaque fonctionnelle dévaluation est continue. Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément $k_z^{\mathcal{D}_\omega} \in \mathcal{D}_\omega$, appelé le *noyau reproduisant*, tel que

$$\left\langle f, k_z^{\mathcal{D}_\omega} \right\rangle_{\mathcal{D}_\omega} = f(z) \quad (f \in \mathcal{D}_\omega).$$

En général, il est difficile de donner une formule pour les noyaux reproduisants. Pour des cas particuliers, il est possible de le faire.

— Lorsque $\omega \equiv 1$, l'espace $\mathcal{D}_\omega$ est simplement l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$. Dans ce cas précis, il est possible de caractériser les noyaux reproduisants (voir le [17, théorème 1.2.3]) :

$$k_w^{\mathcal{D}}(z) = \frac{1}{z\overline{w}} \log\left(\frac{1}{1-z\overline{w}}\right) \quad (z \in \mathbb{D},\, w \in \mathbb{D}\backslash\{0\})$$

et $k_0^{\mathcal{D}} \equiv 1$.

— D'après les résultats des articles [11] et [16], l'espace $\mathcal{D}_\zeta$ ($\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$) est égal à un espace de de Branges-Rovnyak[2] $\mathcal{H}(b)$ (où $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$) avec égalité des normes. Il est bien connu qu'un espace de de Branges-Rovnyak est un espace de Hilbert à noyau reproduisant dont les noyaux sont donnés par

$$k_w^{\mathcal{H}(b)}(z) := \frac{1-\overline{b(w)}b(z)}{1-\overline{w}z}.$$

Ainsi, comme $\|g\|_{\mathcal{H}(b)} = \|g\|_{\mathcal{D}_\zeta}$ pour chaque $g \in \mathcal{D}_\zeta = \mathcal{H}(b)$, en utilisant l'identité de polarisation, nous obtenons l'identité suivante

$$\langle f, k_w^{\mathcal{H}(b)} \rangle_{\mathcal{H}(b)} = \langle f, k_w^{\mathcal{H}(b)} \rangle_{\mathcal{D}_\zeta} \quad (w \in \mathbb{D},\, f \in \mathcal{D}_\zeta).$$

2. La définition précise de ces espaces est présentée au prochain chapitre.

Nous en déduisons, par unicité du théorème de représentation de Riesz, que $k_w^{\mathcal{H}(b)} = k_w^{\mathcal{D}_\zeta}$.

Les espaces de Dirichlet locaux $\mathcal{D}_\zeta$ pour $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ jouent un rôle particulier dans la théorie des espaces de Dirichlet à poids surharmonique comme le démontre le résultat suivant.

Théorème 4.17. *Pour chaque fonction $\omega : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ surharmonique, nous avons*

$$\mathcal{D}_\omega(f) = \int_{\overline{\mathbb{D}}} \mathcal{D}_\zeta(f)\, d\mu(\zeta) \quad (f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})).$$

Démonstration. Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et soit ω la fonction surharmonique donnée par la relation (4.1). Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. L'expression de l'intégrale de Dirichlet de f en termes de la mesure μ est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\omega(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \Big(\int_{\mathbb{D}} \log\Big|\frac{1}{\zeta - z}\Big| \frac{2}{1-|\zeta|^2}\, d\mu(\zeta) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\mu(\zeta)\Big)\, dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}}\int_{\overline{\mathbb{D}}} |f'(z)|^2 h_z(\zeta)\, d\mu(\zeta) dA(z)\end{aligned}$$

où h_z est la fonction définie dans la preuve du théorème 4.13. Comme la fonction $(z, \zeta) \mapsto |f'(z)|^2 h_z(\zeta)$ est non-négative sur $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$, une application du théorème de Fubini (voir [49, théorème 8.8]) permet d'obtenir

$$\mathcal{D}_\omega(f) = \int_{\overline{\mathbb{D}}} \Big(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 h_z(\zeta)\, dA(z)\Big) d\mu(\zeta) = \int_{\overline{\mathbb{D}}} \mathcal{D}_\zeta(f)\, d\mu(\zeta). \qquad \square$$

Une autre formule pour les espaces de Dirichlet locaux est très utile. Ce résultat se retrouve au [1, chapitre IV, §1].

Théorème 4.18. *Soit $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors $f \in \mathcal{D}_\zeta$ si, et seulement si, il existe une fonction $g \in H^2$ et une constante $a \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = a + (z - \zeta)g(z)$. Dans ce cas, nous avons $\mathcal{D}_\zeta(f) = \|g\|_{H^2}^2$.*

Enfin, comme la fonction ω est intégrable sur $\mathbb{D}$, il s'en suit que l'ensemble des polynômes est inclus dans $\mathcal{D}_\omega$. Une question naturelle se pose : est-ce que l'ensemble des polynômes est dense dans l'espace $\mathcal{D}_\omega$? Ce fait a été démontré par Aleman [1] en utilisant un type de théorème d'espace errant (sic) [3], autrement dit, en utilisant de la haute technologie. Nous présentons toutefois une preuve plus élémentaire de ce résultat au prochain chapitre à l'aide de la théorie des multiplicateurs d'Hadamard.

3. En anglais, il s'agit d'un *Wandering subspace theorem*

Chapitre 5

Sommabilité du développement de Taylor par les méthodes de Cesàro

Comme l'ensemble des polynômes appartient à chaque espace de Dirichlet à poids super-harmonique, les sommes partielles $s_n(f)$ du développement de Taylor d'une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ appartient à $\mathcal{D}_\omega$ pour chaque $n \geq 0$. Une question naturelle se pose : pour une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$, est-ce que son développement de Taylor est sommable vers f dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$? Nous verrons dans ce chapitre que la réponse est non.

Est-il possible d'appliquer une méthode de sommabilité à la série de Taylor d'une fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ pour la rendre convergente vers f ? Mashreghi et Ransford ont donné une réponse positive à cette question en montrant que les moyennes de Cesàro de la série de Taylor convergent vers la fonction f. Par le fait même, leur preuve ne fait pas intervenir la densité des polynômes dans $\mathcal{D}_\omega$ et fournit une nouvelle preuve (constructive) de la densité de l'ensemble des polynômes dans $\mathcal{D}_\omega$ (ω un poids surharmonique).

Leur approche consiste à caractériser les séries formelles $h(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ qui sont des multiplicateurs d'Hadamard pour toute la famille des espaces de Dirichlet à poids surharmonique et à obtenir des estimés sur leur intégrale de Dirichlet pondérée.

Dans ce chapitre, l'objectif est de généraliser leur résultat à la sommabilité du développement de Taylor pour les méthodes de Cesàro d'ordre $\alpha > 0$. Pour ce faire, nous allons présenter la caractérisation des multiplicateurs d'Hadamard pour $\mathcal{D}_\omega$ obtenue par Mashreghi et Ransford. À l'aide de nouveaux estimés sur la norme de certains opérateurs linéaires bornés sur ℓ^2, nous allons démontrer les deux résultats suivants.

Théorème 5.1. *Si ω est un poids super-harmonique sur $\mathbb{D}$, si $f \in \mathcal{D}_\omega$ et si $\alpha > 1/2$, alors $\sigma_n^\alpha(f) \to f$ dans $\mathcal{D}_\omega$.*

Théorème 5.2. *Soit ω_1 le poids harmonique sur $\mathbb{D}$ défini par $\omega_1(z) := (1-|z|^2)/|1-z|^2$. Alors, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}_1$ telle que $\sigma_n^{1/2}(f) \not\to f$ dans $\mathcal{D}_1$.*

Dans les énoncés, $\sigma_n^\alpha(f)$ sont les moyennes de Cesàro de $s_n(f)$ définies par

$$\sigma_n^\alpha(f)(z) := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^\alpha a_k z^k \quad (z \in \mathbb{D})$$

où $A_{n-k}^\alpha = \binom{n-k+\alpha}{\alpha}$, un coefficient binomial.

5.1 Théorie des multiplicateurs d'Hadamard

Nous présentons brièvement cette théorie développée dans [41].

Définition 5.3. Soient $h(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ et $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ deux séries de puissances formelles. Le *produit d'Hadamard* de h et f, noté $h * f$, est la série de puissances formelles définie par l'expression

$$(h * f)(z) := \sum_{n\geq 0} c_n a_n z^n.$$

Voici quelques propriétés utiles du produit d'Hadamard :

— Si h ou f sont des polynômes, alors $h * f$ est aussi un polynôme.

— Si $h, f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, alors $h * f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Définition 5.4. Soit $\omega : \mathbb{D} \to [0, \infty)$ une fonction super-harmonique. Une série de puissances formelle $h(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est un *multiplicateur d'Hadamard* pour l'espace $\mathcal{D}_\omega$ si

$$h * f \in \mathcal{D}_\omega, \quad \forall f \in \mathcal{D}_\omega.$$

Tout polynôme est un multiplicateur d'Hadamard pour $\mathcal{D}_\omega$ puisque l'ensemble des polynômes est contenu dans $\mathcal{D}_\omega$ et $p * f$ est un polynôme pour toute fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$.

Pour un multiplicateur d'Hadamard h d'un espace $\mathcal{D}_\omega$, l'opérateur de multiplication $M_h : \mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega$ est défini par l'expression

$$M_h(f) := h * f \quad (f \in \mathcal{D}_\omega).$$

Une conséquence du théorème du graphe fermé est le résultat suivant.

Théorème 5.5. *Soit ω un poids surharmonique sur $\mathbb{D}$. Si h est un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$, alors l'opérateur M_h est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{D}_\omega$.*

Démonstration. Soit h un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$. L'opérateur M_h est clairement linéaire. Posons les fonctions $f(z) := \sum_{k\geq 0} a_k z^k$, $f_n(z) := \sum_{k\geq 0} a_{k,n} z^k$, $g(z) := \sum_{k\geq 0} b_k z^k$ et $h(z) := \sum_{n\geq 0} c_k z^k$. Ainsi, $h * f_n = \sum_{k\geq 0} c_k a_{n,k} z^k$ et $h * f = \sum_{k\geq 0} c_k a_k z^k$. Supposons que $f_n \to f$ et $M_h(f_n) \to g$ dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$. On souhaite montrer que $g = h * f$. Par unicité du développement de Taylor d'une fonction dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, il suffit de démontrer que les coefficients de Taylor de g coïncident avec ceux de $h * f$.

L'espace $\mathcal{D}_\omega$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant et d'après le corollaire 4.16, la convergence dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$ implique la convergence uniforme sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$. Par conséquent, $f_n \to f$ et $h * f_n \to g$ uniformément sur chaque sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$. D'après la formule de Cauchy pour les dérivées et $r \in (0, 1)$ fixé, nous avons

$$a_{n,k} - a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{r\mathbb{T}} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \, d\zeta \quad (k \geq 0)$$

où $r\mathbb{T} := \{re^{it} \, : \, t \in [0, 2\pi)\}$. Par la continuité uniforme sur le compact $r\mathbb{T}$, on a

$$a_{n,k} \to a_k \quad (n \to \infty) \quad (k \geq 0)$$

et donc $c_k a_{n,k} \to c_k a_k$ lorsque $n \to \infty$ $(k \geq 0)$. De même, on obtient $c_k a_{n,k} \to b_k$ lorsque $n \to \infty$ $(k \geq 0)$. Par conséquent, on obtient $b_k = c_k a_k$. $\square$

Le prochain résultat présente un lien entre les multiplicateurs d'Hadamard de l'espace de Hardy H^2 et les multiplicateurs d'Hadamard d'un espace de Dirichlet à poids surharmonique.

Théorème 5.6. *Soit ω un poids surharmonique sur $\mathbb{D}$ et soit $h(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ une série de puissances formelle.*

1. *h est un multiplicateur d'Hadamard de H^2 si, et seulement si, la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ est bornée. Dans ce cas, nous avons*

$$\|M_h\|_{H^2 \to H^2} = \sup_{n \geq 0} |c_n|.$$

2. *Si h est un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$, alors h est un multiplicateur d'Hadamard de H^2 et nous avons*

$$\sup_{n \geq 1} |c_n| \leq \|M_h\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer le premier point. Soit h un multiplicateur d'Hadamard de H^2. Posons $M_h : H^2 \to H^2$ par $M_h(f) := h * f$. D'après le théorème du graphe fermé, M_h est un opérateur linéaire borné sur H^2. En posant $f(z) = z^n$, nous obtenons

$$\|M_h(f)\|_{H^2} \leq \|M_h\|_{H^2 \to H^2} \|f\|_{H^2} = \|M_h\|_{H^2 \to H^2}.$$

De plus, $M_h(f)(z) = c_n z^n$. Par conséquent, en prenant le suprémum sur $n \geq 0$,

$$\sup_{n \geq 0} |c_n| \leq \|M_h\|_{H^2 \to H^2} < \infty.$$

Inversement, si $\sup_{n\geq 0}|c_n| < \infty$ et si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ appartient à H^2, alors

$$\|h * f\|_{H^2}^2 = \sum_{n\geq 0} |c_n|^2 |a_n|^2 \leq \sup_{n\geq 0} |c_n| \|f\|_{H^2}^2 < \infty.$$

Ceci implique que $h * f \in H^2$.

On se penche maintenant sur la démonstration du deuxième point. Soit h un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$. Ainsi, pour chaque $f \in \mathcal{D}_\omega$, nous avons $h * f \in \mathcal{D}_\omega$. De plus, l'opérateur linéaire de multiplication $M_h : \mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega$ est borné d'après le théorème 5.5. Posons $f(z) := z^n \in \mathcal{D}_\omega$. Ainsi,

$$\|M_h(f)\|_{\mathcal{D}_\omega} \leq \|M_h\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega} \|z^n\|_{\mathcal{D}_\omega}.$$

Comme $M_h(f)(z) = c_n z^n$, on obtient

$$\sup_{n\geq 0} |c_n| \leq \|M_h\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega}.$$

D'après le premier point du théorème, h est un multiplicateur d'Hadamard de H^2. Ceci termine la démonstration. $\square$

Lorsque $\mathcal{D}_\omega = \mathcal{D}$, il est possible de démontrer qu'une série formelle h est un multiplicateur d'Hamadard si, et seulement si, $\sup_{n\geq 0}|c_n| < \infty$. La preuve est exactement la même que celle présentée pour démontrer la caractérisation des multiplicateurs d'Hadamard de H^2.

Pour une suite de nombres complexes $c := (c_n)_{n\geq 0}$, on associe une matrice notée T_c de dimensions infinies dont l'expression est

$$T_c := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - c_1 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \cdots \\ 0 & c_2 & c_3 - c_2 & c_4 - c_3 & \cdots \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 - c_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

La matrice T_c peut agir comme un opérateur linéaire borné sur ℓ^2 (l'espace des suites de nombres complexes de carrés sommables), comme elle peut ne pas le faire. Dans le cas où $T_c \in \mathcal{B}(\ell^2, \ell^2)$, alors on note sa norme d'opérateur par $\|T_c\|_{\ell^2\to\ell^2}$. De plus, lorsque la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ est donnée par une série de puissances formelle $h(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, alors on écrit T_h plutôt que T_c.

Théorème 5.7 (Mashreghi–Ransford [41, théorème 1.1]). *Soit $h(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ une série de puissances formelles. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1. *La fonction h est un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ pour tout poids surharmonique ω.*
2. *La matrice T_h est un opérateur linéaire borné sur ℓ^2.*

Dans ce cas, nous avons l'estimation suivante

$$\mathcal{D}_\omega(h * f) \leq \|T_h\|^2_{\ell^2\to\ell^2}\mathcal{D}_\omega(f) \quad (f \in \mathcal{D}_\omega)$$

pour tout poids surharmonique ω. La constante $\|T_h\|^2_{\ell^2\to\ell^2}$ est optimale.

Démonstration. La preuve de ce théorème se retrouve à la [41, p. 52]. □

La constante $\|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2}$ est la meilleure possible dans le sens suivant : pour $\zeta = 1$, nous avons

$$\|T_h\|^2_{\ell^2\to\ell^2} = \sup\{\mathcal{D}_1(h * f) \,:\, f \in \mathcal{D}_1,\, f(0) = 0,\, \mathcal{D}_1(f) = 1\}. \tag{5.2}$$

Ceci est établi dans la démonstration du théorème 1.1 de [41, p. 52].

Corollaire 5.8. *Si $h = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ est un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ pour tout poids surharmonique ω, alors, pour tout poids surharmonique ω, on a*

$$\|M_h\|_{\mathcal{D}_\omega\to\mathcal{D}_\omega} \leq \max\Big\{|c_0|, \|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2}\Big\}.$$

En particulier, si ω est le poids harmonique obtenu avec la mesure $\mu = \delta_1$, alors

$$\|M_h\|_{\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1} = \max\Big\{|c_0|, \|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2}\Big\}.$$

Démonstration. Supposons que h soit un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ pour tous les poids super- harmoniques ω. D'après le théorème 5.6 et le théorème 5.7, on obtient l'estimé suivant

$$\|M_h\|_{\mathcal{D}_\omega\to\mathcal{D}_\omega} \leq \max\{\sup_{n\geq 0}|c_n|, \|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2}\}.$$

Il est clair que $\|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2} \geq \sup_{n\geq 1}|c_n|$ (il suffit d'appliquer T_h au vecteur de la base canonique de ℓ^2). Par conséquent, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

Pour l'égalité, celle-ci provient de l'optimalité de la constante $\|T_h\|_{\ell^2\to\ell^2}$ telle que présentée dans la relation (5.2). □

Afin d'appliquer le dernier théorème, il est utile d'avoir des estimés de la norme d'opérateur $\|T_c\|_{\ell^2\to\ell^2}$.

Théorème 5.9. *Soit $c := (c_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et T_c la matrice associée à la suite c définie par (5.1).*

1. *Nous avons la paire d'estimés suivante :*

$$\|T_c\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq \sup_{k\geq 1}|c_k| + 2\sup_{k\geq 2} k|c_k - c_{k-1}|,$$
$$\|T_c\|_{\ell^2\to\ell^2} \geq \sup_{k\geq 1}\left(|c_k|^2 + (k-1)|c_k - c_{k-1}|^2\right)^{1/2}.$$

2. *S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $c_k = 0$ pour tout $k > n$, alors*

$$\|T_c\|^2_{\ell^2 \to \ell^2} \leq (n+1) \sum_{k=1}^{n} |c_{k+1} - c_k|^2.$$

3. *Pour toute paire d'entiers m, n avec $1 \leq m \leq n$, nous avons*

$$\|T_c\|^2_{\ell^2 \to \ell^2} \geq m \sum_{k=m}^{n} |c_{k+1} - c_k|^2.$$

4. *Si $c_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, alors*

$$\|T_c\|_{\ell^2 \to \ell^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k(k+1)} |c_{k+2} - 2c_{k+1} + c_k|.$$

Démonstration. Les points 1, 2 et 4 proviennent du [41, théorème 1.2]. Nous allons démontrer le point 3. Nous remarquons que la norme de T_c est bornée inférieurement par la norme de n'importe quelle sous-matrice. En particulier, la norme de T_c est bornée inférieurement par celle de la sous-matrice de dimension $m \times (n - m + 1)$ suivante :

$$A := \begin{pmatrix} c_{m+1} - c_m & \cdots & c_{n+1} - c_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+1} - c_m & \cdots & c_{n+1} - c_n \end{pmatrix}.$$

Maintenant la matrice AA^* est une matrice $m \times m$ telles que toutes ses entrées sont les mêmes, précisément $\sum_{k=m}^{n} |c_{k+1} - c_k|^2$. Ainsi, il s'en suit que

$$\|T_c\|^2_{\ell^2 \to \ell^2} \geq \|A\|^2_{\ell^2 \to \ell^2} = \|AA^*\|_{\ell^2 \to \ell^2} = m \sum_{k=m}^{n} |c_{k+1} - c_k|^2. \qquad \square$$

5.2 Sommabilité par la méthode de Cesàro

Les résultats précédents permettent d'obtenir des estimations sur les moyennes de Cesàro suffisantes pour démontrer la densité de l'ensemble des polynômes dans $\mathcal{D}_\omega$. Ils déterminent aussi des estimations pour les sommes partielles $s_n(f)$ et les moyennes d'Abel des $s_n(f)$. Rappelons que, pour une fonction $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, les sommes partielles, les moyennes de Cesàro et les moyennes d'Abel sont définies par les expressions suivantes :

$$s_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad \sigma_n(f)(z) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) a_k z^k$$

et

$$A_r(f)(z) := (1-r) \sum_{k \geq 0} s_k(f)(z) r^k = \sum_{k \geq 0} a_k r^k z^k.$$

Théorème 5.10. *Si ω est un poids surharmonique sur $\mathbb{D}$, alors on a*

1. $\mathcal{D}_\omega(s_n(f)) \leq (n+1)\mathcal{D}_\omega(f)$ *pour toute* $f \in \mathcal{D}_\omega$*.*

2. $\mathcal{D}_\omega(\sigma_n(f)) \leq \frac{n}{n+1}\mathcal{D}_\omega(f)$ *pour toute* $f \in \mathcal{D}_\omega$*.*

3. $\mathcal{D}_\omega(A_r(f)) \leq r^2(2-r)\mathcal{D}_\omega(f)$ *pour toute* $f \in \mathcal{D}_\omega$*.*

De plus, pour les points 1 et 2, il existe un poids surharmonique tel que les constantes sont les meilleures possibles.

Démonstration. L'astuce est d'identifier chaque expression $s_n(f)$, $\sigma_n(f)$ et $A_r(f)$ comme un opérateur de multiplication d'Hadamard de la forme $h_n * f$ afin d'utiliser le théorème 5.7 et les estimés du théorème 5.9.

Pour le premier point, on remarque que $s_n(f) = h_n * f$ où $h_n(z) := \sum_{k=0}^n z^k$. Par conséquent, avec $c_k = 1$ pour $k \leq n$ et $c_k = 0$ pour $k > n$, d'après le théorème 5.9, on a $\|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2} \leq (n+1)$ et donc, par le théorème 5.7,

$$\mathcal{D}_\omega(s_n(f)) = \mathcal{D}_\omega(h_n * f) \leq \|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2}\mathcal{D}_\omega(f) \leq (n+1)\mathcal{D}_\omega(f) \quad (f \in \mathcal{D}_\omega).$$

Considérons $\omega(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ le poids harmonique obtenu avec la mesure $\mu = \delta_1$ et considérons la fonction

$$f(z) := nz^{n+1} - (n+1)z^n + 1 = (z-1)(nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \cdots - 1) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dans ce cas, nous avons

$$s_n(f)(z) = -(n+1)z^n + 1 = -n - (n+1)(z-1)(z^{n-1} + \cdots + z + 1) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Ainsi, d'après le théorème 4.18, nous avons

$$\mathcal{D}_1(f) = \|nz^n - z^{n-1} - \cdots - 1\|_{H^2}^2 = n(n+1)$$

et

$$\mathcal{D}_1(s_n(f)) = \|(n+1)(z^{n-1} + \cdots + z + 1)\|_{H^2}^2 = (n+1)^2 n = (n+1)\mathcal{D}_1(f).$$

Pour le deuxième point, on remarque que $\sigma_n(f) = h_n * f$ avec

$$h_n(z) := \sum_{k=0}^n (1 - k/(n+1))z^k.$$

Par conséquent, avec $c_k = 1 - k/(n+1)$ pour $k \leq n$ et $c_k = 0$ pour $k > n$, d'après le théorème 5.9, on a

$$\|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2}^2 \leq (n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\left|\frac{k-k-1}{n+1}\right|^2 + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Par conséquent, d'après le théorème 5.7, on obtient

$$\mathcal{D}_\omega(\sigma_n(f)) = \mathcal{D}_\omega(h_n * f) \leq \|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2}\mathcal{D}_\omega(f) \leq \frac{n}{n+1}\mathcal{D}_\omega(f) \quad (f \in \mathcal{D}_\omega).$$

À nouveau, considérons $\omega(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ le poids harmonique obtenu avec la mesure $\mu = \delta_1$ et considérons la fonction

$$f(z) := z^{n+1} - (n+1)z + n = (z-1)(z^n + z^{n-1} + \cdots + z - n) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Dans ce cas, nous avons

$$\sigma_n(f)(z) = n - nz = -n(z-1) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Ainsi, d'après le théorème 4.18, nous avons

$$\mathcal{D}_1(f) = \|z^n + z^{n-1} + \cdots + z - n\|^2_{H^2} = n(n+1)$$

et

$$\mathcal{D}_1(\sigma_n(f)) = n^2 = \frac{n}{n+1}\mathcal{D}_1(f).$$

Pour le troisième point, il s'agit du [41, corollaire 1.5]. □

Enfin, grâce aux estimés sur $\mathcal{D}_\omega(\sigma_n(f))$, Mashreghi et Ransford ont obtenu une preuve constructive que les polynômes sont denses dans $\mathcal{D}_\omega$.

Théorème 5.11. *Si ω est un poids surharmonique et si $f \in \mathcal{D}_\omega$, alors*

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{\mathcal{D}_\omega} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

En particulier, l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{D}_\omega$ pour tout poids surharmonique ω.

Démonstration. Il s'agit du théorème 1.6(i) de [41]. □

Cependant, il est bien connu qu'en général $s_n(f) \not\to f$ $(n \to \infty)$ dans la norme de $\mathcal{D}_\omega$ [1]. En effet, pour le poids harmonique $\omega(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ obtenu avec la mesure $\mu = \delta_1$, considérons l'opérateur $s_n : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_1$ induit par les sommes partielles $s_n(f)$, c'est-à-dire $f \mapsto s_n(f)$ pour $f \in \mathcal{D}_1$. Considérons la fonction $f(z) = z^n - z^{n+1} = -z^n(z-1)$. Ainsi, d'après le théorème 4.18, nous avons $\|f\|^2_{\mathcal{D}_1} = 3$ et

$$\frac{\|s_n(f)\|^2_{\mathcal{D}_1}}{\|f\|^2_{\mathcal{D}_1}} = \frac{\|z^n\|^2_{\mathcal{D}_1}}{3} = \frac{n+1}{3}.$$

Par conséquent, $\|s_n\|^2_{\mathcal{D}_1} \geq \frac{n+1}{3}$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}_1$ telle que $\sup_{n\geq 0}\|s_n(f)\|_{\mathcal{D}_1} = \infty$. En particulier, $s_n(f) \not\to f$ dans la norme de $\mathcal{D}_1$. Pouvons-nous déterminer une alternative entre la méthode de Cesàro d'ordre 1 et la méthode des sommes partielles ?

1. La démarche présentée provient de [17, Exercice 1, §7.3]

5.3 Sommabilité par les méthodes de Cesàro

La réponse à la précédente question est oui : il s'agit des théorèmes principaux de cette section. Pour une fonction $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on applique les méthodes de Cesàro C^α d'ordre $\alpha > 0$ à la suite des sommes partielles $s_n(f)$ et on pose

$$\sigma_n^\alpha(f)(z) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_n(f)(z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Les termes $\sigma_n^\alpha(f)$ sont appelés les *moyennes de Cesàro d'ordre* α de la série de Taylor de f. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la méthode de Cesàro appliquée à la suite des sommes partielles $s_n(f)$ se réécrit comme

$$\sigma_n^\alpha(f)(z) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} a_k z^k.$$

Pour démontrer le théorème 5.1 et le théorème 5.2, nous avons besoin d'un premier lemme.

Lemme 5.12. *Soit ω un poids surharmonique et $0 < \alpha < \beta$. Si la suite des sommes partielles $s_n(f)$ est C^α-convergente vers f pour toute $f \in \mathcal{D}_\omega$, alors elle est C^β-convergente vers f pour toute $f \in \mathcal{D}_\omega$.*

Démonstration. L'espace de Dirichlet à poids surharmonique $\mathcal{D}_\omega$ est un RKHS. En particulier, il est un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité. De plus, l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{D}_\omega$.

Enfin, d'après le théorème 2.4, les méthodes de Cesàro C^α et C^β sont régulières. D'après le théorème 2.5, la méthode C^α est scalaire-incluse dans la méthode de Cesàro C^β. Par conséquent, d'après le corollaire 3.6, nous obtenons le résultat. $\square$

D'après ce dernier lemme et d'après le théorème 5.11, il suffit de se concentrer sur les valeurs de $\alpha \in (0, 1)$ dans les démonstrations du théorème 5.1 et le théorème 5.2.

Pour ces indices α, d'après le théorème 2.8, la méthode de Riesz arithmétique discrète est scalaire-équivalente à la méthode de Cesàro. Comme les coefficients de la méthode arithmétique discrète de Riesz sont plus simples à traiter que ceux de la méthode de Cesàro, nous utilisons plutôt la méthode de Riesz. Ce changement de perspective est motivé par le lemme suivant. Pour $f \in \mathcal{D}_\omega$, on pose

$$\rho_n^\alpha(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^\alpha a_k z^k \quad (z \in \mathbb{D}).$$

On définit l'opérateur linéaire $\rho_n^\alpha : \mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega$ par $f \mapsto \rho_n^\alpha(f)$. Il s'agit d'un opérateur linéaire borné de rang fini.

Lemme 5.13. *Soit $\alpha \in (0,1)$ et soit ω un poids surharmonique sur $\mathbb{D}$. La série de Taylor de toute fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ est C^α-sommable vers f si, et seulement si, la série de Taylor de toute fonction $f \in \mathcal{D}_\omega$ est R^α-sommable vers f.*

Démonstration. Les polynômes sont denses dans $\mathcal{D}_\omega$ et $\mathcal{D}_\omega$ est un RKHS. Aussi, d'après le théorème 2.8, la méthode C^α est scalaire-équivalente à la méthode R^α. Donc, on peut appliquer le corollaire 3.6 pour la partie « si » et la partie « seulement si ». □

Nous sommes maintenant prêt à démontrer le théorème 5.1. Pour le bénéfice du lecteur, nous rappelons l'énoncé du théorème à démontrer.

> Si ω est un poids super-harmonique sur $\mathbb{D}$, si $f \in \mathcal{D}_\omega$ et si $\alpha > 1/2$, alors $\sigma_n^\alpha(f) \to f$ dans $\mathcal{D}_\omega$.

Preuve du théorème 5.1. D'après le lemme 5.12, on peut se restreindre aux valeurs de $\alpha \in (1/2, 1)$. Soit $\alpha \in (1/2, 1)$. D'après le lemme 5.13, il suffit de démontrer le résultat pour la méthode de Riesz arithmétique discrète. Comme l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{D}_\omega$ et $\rho_n^\alpha(p) \to p$ lorsque $n \to \infty$ pour tout polynôme p, le résultat suivra si on réussit à démontrer que la famille d'opérateurs linéaires bornés

$$\{\rho_n^\alpha : \mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega \,:\, n \geq 0\}$$

est uniformément bornée indépendamment de n.

Pour réaliser cette tâche, on identifie chaque ρ_n^α à un multiplicateur d'Hadamard de $\mathcal{D}_\omega$ de la façon suivante :

$$\rho_n^\alpha(f)(z) = (h_n * f)(z)$$

où $h_n(z) := \sum_{k=0}^n (1 - k/(n+1))^\alpha z^k$. Bien entendu, nous avons que

$$\|\rho_n^\alpha\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega} = \|M_{h_n}\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega}.$$

Comme le premier coefficient de h_n est 1, d'après le corollaire 5.8, nous avons

$$\|M_{h_n}\|_{\mathcal{D}_\omega \to \mathcal{D}_\omega} \leq \max\{1, \|T_{h_n}\|_{\ell^2 \to \ell^2}\}.$$

Nous allons maintenant estimer $\|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2}$ à l'aide de l'énoncé 2 du théorème 5.9. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2} &\leq (n+1)\sum_{k=1}^{n}\Big|\Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^{\alpha}-\Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)^{\alpha}\Big|^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)^{2\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\Big((n+1-k)^{\alpha}-(n-k)^{\alpha}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{(n+1)^{2\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{n-k}^{n+1-k}\alpha t^{\alpha-1}\,dt\Big)^2 \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^{2\alpha-1}}\sum_{k=1}^{n}\int_{n-k}^{n+1-k}\alpha^2 t^{2\alpha-2}\,dt \\
&= \frac{1}{(n+1)^{2\alpha-1}}\int_{0}^{n}\alpha^2 t^{2\alpha-2}\,dt \\
&\leq \frac{\alpha^2}{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\alpha^2/(2\alpha-1)\geq 1$ lorsque $\alpha>1/2$, nous obtenons

$$\|M_{h_n}\|_{\mathcal{D}_\omega\to\mathcal{D}_\omega}\leq\frac{\alpha}{\sqrt{2\alpha-1}}.$$

Donc, la famille d'opérateurs M_{h_n} est uniformément bornée. $\square$

Avant de passer à la preuve du théorème 5.2, on rappelle son énoncé :

> Soit ω_1 le poids harmonique sur $\mathbb{D}$ défini par $\omega_1(z):=(1-|z|^2)/|1-z|^2$. Alors, il existe une fonction $f\in\mathcal{D}_1$ telle que $\sigma_n^{1/2}(f)\not\to f$ dans $\mathcal{D}_1$.

Preuve du théorème 5.2. Soit ω le poids harmonique obtenu en posant $\mu=\delta_1$. D'après le lemme 5.13, il suffit de trouver une fonction $f\in\mathcal{D}_1$ telle que $\rho_n^{1/2}(f)\not\to f$. Pour déterminer l'existence de cette fonction f, on montre que la famille des opérateurs linéaires bornés satisfait

$$\sup_{n\geq 0}\{\|\rho_n^{1/2}(f)\|_{\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1}\,:\,n\geq 0\}=\infty. \tag{5.3}$$

Si cela est vérifié, alors, par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une fonction $f\in\mathcal{D}_1$ telle que

$$\sup_{n\geq 0}\|\rho_n^{1/2}\|_{\mathcal{D}_1}=\infty$$

et en particulier $\rho_n^{1/2}(f)\not\to f$ lorsque $n\to\infty$.

Montrons que (5.3) est vérifiée. À nouveau, pour réaliser cette tâche, on identifie $\rho_n^{1/2}$ à un multiplicateur d'Hadamard M_{h_n} où $h_n(z):=\sum_{k=0}^{n}(1-k/(n+1))^{1/2}z^k$. Comme le premier coefficient de h_n est 1 et d'après le corollaire 5.8, nous avons

$$\|M_{h_n}\|_{\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1}=\max\{1,\|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2}\}.$$

On estime maintenant la valeur de $\|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2}$ à l'aide de l'énoncé 3 du théorème 5.9. Nous avons, pour chaque entier $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned}
\|T_{h_n}\|_{\ell^2\to\ell^2} &\geq m \sum_{k=m}^{n} \Big| \Big(1-\frac{k+1}{n+1}\Big)^{1/2} - \Big(1-\frac{k}{n+1}\Big)^{1/2} \Big|^2 \\
&= \frac{m}{n+1} \sum_{k=m}^{n} \Big((n+1-k)^{1/2} - (n-k)^{1/2} \Big)^2 \\
&= \frac{m}{n+1} \sum_{k=m}^{n} \Big(\frac{1}{(n+1-k)^{1/2} + (n-k)^{1/2}} \Big)^2 \\
&\geq \frac{m}{4(n+1)} \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{n+1-k} \\
&\geq \frac{m}{4(n+1)} \log(n+2-m).
\end{aligned}$$

En particulier, pour $m = \lceil (n+1)/2 \rceil$ la partie entière supérieure[2] de $(n+1)/2$, on obtient

$$\|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2} \geq \frac{1}{8} \log\Big(\frac{n+1}{2}\Big).$$

Par conséquent, on obtient $\|M_{h_n}\|^2_{\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1} \geq \frac{1}{8}\log((n+1)/2)$ qui tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Ceci termine la démonstration. $\square$

Le résultat du théorème 5.2 est toujours valide lorsque $\alpha \in (0, 1/2)$ puisque la méthode arithmétique discrète de Riesz d'ordre α est incluse dans la méthode discrète arithmétique de Riesz d'ordre $1/2$. Il est toutefois possible d'estimer la norme de l'opérateur ρ_n^α pour $\alpha \in (0, 1/2)$ directement. On rappelle que, d'après l'optimalité décrite en remarque du théorème 5.7, nous avons

$$\|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2} = \sup\{\mathcal{D}_1(h_n * f) : f \in \mathcal{D}_1,\, f(0) = 0,\, \mathcal{D}(f) = 1\}.$$

Posons $f(z) := z^{n+1} - z^n$ pour $n \geq 1$ et considérons la même fonction h_n utilisée dans la preuve du théorème précédent telle que

$$M_{h_n}(f) = h_n * f = \rho_n^\alpha(f).$$

On vérifie que $f(0) = 0$ et

$$f(z) = (z-1)z^n$$

D'après le théorème 4.18, la valeur de $\mathcal{D}_1(f)$ est 1. Puis, nous avons $\rho_n^\alpha(f)(z) = -z^n/(n+1)^\alpha$ et on vérifie aussi que

$$\rho_n^\alpha(f)(z) = -(z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1)/(n+1)^\alpha - 1/(n+1)^\alpha.$$

2. Appelée « ceil function » en anglais désignant fonction plafond.

Une application du théorème 4.18 fournit

$$\mathcal{D}_1(M_{h_n}(f)) = \frac{n}{(n+1)^{2\alpha}}.$$

Ainsi, on obtient

$$\|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2} \geq \frac{n}{(n+1)^{2\alpha}}.$$

D'après le corollaire 5.8, nous avons

$$\|M_{h_n}\|^2_{\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_1} = \max\{1, \|T_{h_n}\|^2_{\ell^2\to\ell^2}\} \geq \frac{n}{(n+1)^{2\alpha}} \to \infty \quad (n\to\infty)$$

puisque $\alpha < 1/2$. Donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}_1$ telle que $\sup_{n\geq 0} \|\rho_n^\alpha(f)\|_{\mathcal{D}_1} = \infty$.

Troisième partie

Résultats de sommabilité pour les espaces de de Branges–Rovnyak

Chapitre 6

Espaces de de Branges–Rovnyak

Dans ce chapitre, nous présentons les espaces de de Branges-Rovnyak et les outils principaux qui sont utilisés dans les deux prochains chapitres. Nous nous concentrons sur le cas non-extrême puisque l'ensemble des polynômes et l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ sont contenus dans l'espace.

Si $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire borné, son adjoint est noté T^*. On note que $T^* : Y^* \to X^*$. Si X est un espace de Hilbert et W est un sous-espace vectoriel fermé de X, alors on désigne par P_W la projection orthogonale de X sur W.

On note $L^\infty(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions essentiellement bornées (selon la mesure de Lebesgue) sur $\mathbb{T}$. La norme sur $L^\infty(\mathbb{T})$ est le suprémum essentiel sur $\mathbb{T}$ et est notée par $\|\cdot\|_\infty$.

Le noyau reproduisant de H^2 est noté k_z et son expression est $k_z(w) := 1/(1-\bar{z}w)$ $(w \in \mathbb{D})$. Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est *extérieure* s'il existe une fonction mesurable $\varphi : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ telle que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$ et

$$f(z) = \lambda \exp\Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log \varphi(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}\Big) \quad (z \in \mathbb{D})$$

où $|\lambda| = 1$. Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est *intérieure* si $f \in H^\infty$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et $|f| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$.

6.1 Opérateurs de Toeplitz

Nous commençons par introduire quelques notions reliées aux opérateurs de Toeplitz (le même mathématicien qui figure dans le théorème de Silverman-Toeplitz). Nous rapportons quelques résultats importants de l'article de Brown et Halmos [9] sur ces opérateurs.

L'opérateur $P_+ : L^2(\mathbb{T}) \to H^2$ est la projection de Riesz, c'est-à-dire la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2.

Définition 6.1. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'*opérateur de Toeplitz* de symbole φ est l'opérateur linéaire $T_\varphi : H^2 \to H^2$ définie par

$$T_\varphi(f) := P_+(\varphi f) \quad (f \in H^2).$$

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz est borné. En effet, pour $f \in H^2$, nous avons que

$$\|T_\varphi(f)\|_{H^2} = \|P_+(\varphi f)\|_{H^2} \leq \|P_+\|_{L^2(\mathbb{T})\to H^2}\|\varphi f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H^2}$$

et donc $\|T_\varphi\|_{H^2\to H^2} \leq \|\varphi\|_\infty$. En fait, d'après un théorème de Brown-Halmos, nous avons une égalité.

Théorème 6.2. *Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, alors $\|T_\varphi\|_{H^2\to H^2} = \|\varphi\|_\infty$.*

Démonstration. Il s'agit d'une remarque à la suite du [9, théorème 5]. □

Voici quelques propriétés algébriques des opérateurs de Toeplitz.

Théorème 6.3. *Soit $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

1. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.
2. *Si $\varphi \in H^\infty$ ou $\psi \in H^\infty$, alors $T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi}$.*

Démonstration. Les preuves de ces propriétés sont simples à établir. □

Pour certains types de fonctions φ, on obtient certaines classes d'opérateurs de Toeplitz. Le résultat suivant présente quelques-unes des possibilités. On dit qu'une fonction φ appartenant à $L^\infty(\mathbb{T})$ est *analytique* si $\hat{\varphi}(-n) = 0$ pour tout $n > 0$.

Théorème 6.4. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.*

1. *T_φ est une isométrie si, et seulement si, φ est analytique et $|\varphi| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$.*
2. *T_φ est unitaire si, et seulement si, $\varphi = \lambda$ p.p. sur $\mathbb{T}$ où $|\lambda| = 1$.*
3. *T_φ est une contraction si, et seulement si, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.*

Enfin, la fonction k_z est un vecteur propre de l'opérateur $T_{\overline{\varphi}}$.

Théorème 6.5. *Soit $z \in \mathcal{D}$ et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_{\overline{\varphi}} k_z = \overline{\varphi(z)} k_z$.*

Démonstration. Pour chaque $f \in H^2$, nous avons

$$\left\langle f, T_{\overline{\varphi}} k_z \right\rangle_2 = \langle f, P_+(\overline{\varphi} k_z)\rangle_2 = \langle f, \overline{\varphi} k_z\rangle_2 = \varphi(z) f(z) = \left\langle f, \overline{\varphi(z)} k_z \right\rangle_2.$$

□

6.2 Images d'opérateurs et espaces de Hilbert

Soient $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ et $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ deux espaces de Hilbert. L'image d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ est notée $\operatorname{Ran} T$ et son noyau $\ker T$. Nous notons aussi l'image de T par $\mathcal{M}(T)$ lorsque celle-ci est munie de la structure d'espace de Hilbert que nous définissons maintenant. Nous introduisons un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(T)}$ sur $\mathcal{M}(T)$ par la formule suivante :

$$\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{M}(T)} := \left\langle P_{(\ker T)^\perp} x, P_{(\ker T)^\perp} y \right\rangle_{\mathcal{H}_1} \quad \text{pour } x, y \in \mathcal{H}_1.$$

Il faut remarquer que si $x \perp \ker T$ ou $y \perp \ker T$, alors nous avons

$$\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{M}(T)} = \left\langle P_{(\ker T)^\perp} x, P_{(\ker T)^\perp} y \right\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$$

et la définition de ce nouveau produit scalaire a du sens aussi dans ce contexte.

La prochaine proposition fait intervenir les notions suivantes. On dit qu'un sous-espace de Hilbert $(\mathcal{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est *inclusivement borné* à l'intérieur de $\mathcal{H}$ si l'injection $i : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ est bornée. Si c'est le cas, on note $\mathcal{M} \Subset \mathcal{H}$. Si l'injection $i : \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ est une contraction, alors on dit que $\mathcal{M}$ est *inclusivement « contractible »* dans $\mathcal{H}$ et on note $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{H}$. Enfin, si $\|i(x)\|_{\mathcal{H}} = \|x\|_{\mathcal{M}}$, alors $\mathcal{M}$ est *isométriquement inclus* dans $\mathcal{H}$. S'il s'avère que $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ et $\mathcal{M}$ est isométrique à $\mathcal{H}$, alors on note cela par $\mathcal{M} \doteq \mathcal{H}$.

Théorème 6.6. *Soit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ et $R : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}$ deux opérateurs linéaires bornés.*

1. *$(\mathcal{M}(T), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}(T)})$ est un espace de Hilbert, $\mathcal{M}(T) \Subset \mathcal{H}$ et T^* est une isomérie de $\mathcal{M}(T)$ dans $\mathcal{H}_1$.*
2. *$\mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(B)$ si et seulement si $AA^* \leq BB^*$.*
3. *$\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}(B)$ si et seulement si $AA^* = BB^*$. En particulier, $\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}((AA^*)^{1/2})$.*
4. *$\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ si et seulement si A est une isométrie partielle de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$. Dans ce cas, nous avons que $\mathcal{M}(A) \doteq \mathcal{M}(AA^*)$.*

Démonstration. Les preuves de chaque point se trouvent au [50, chapitre I] et se retrouvent de manière très détaillée dans le [22, chapitre 16]. Le deuxième point est appelé le critère de Douglas. □

Lorsque l'opérateur linéaire borné T est une contraction, c'est-à-dire $\|T\|_{\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}} \leq 1$, on peut définir l'espace complémentaire à $\mathcal{M}(T)$. On introduit la notation suivante : $D_T := (I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{1/2}$ pour une contraction $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$.

Définition 6.7. Supposons que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ est une contraction. L'*espace complémentaire* de $\mathcal{M}(T)$ est l'espace $\mathcal{H}(T) := \mathcal{M}(D_T)$.

Muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(T)}$, l'espace $(\mathcal{H}(T), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(T)})$ est un espace de Hilbert.

Il faut remarquer que $\mathcal{H}(T) \subseteq \mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{H}(T^*)$ est défini de manière similaire à $\mathcal{H}(T)$ en interchangeant les rôles de T et T^*. Dans ce cas, nous avons plutôt que $\mathcal{H}(T^*) \subseteq \mathcal{H}_1$. La prochaine proposition donne deux relations importantes entre $\mathcal{H}(T)$ et $\mathcal{H}(T^*)$.

Théorème 6.8. *Soit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ une contraction.*

1. *Si $x \in \mathcal{H}$, alors $x \in \mathcal{H}(T)$ si et seulement si $T^*x \in \mathcal{H}(T^*)$. Dans ce cas, nous avons que*

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}(T)} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} + \langle T^*x, T^*y \rangle_{\mathcal{H}(T^*)} \quad (x, y \in \mathcal{H}(T)).$$

2. $\mathcal{M}(T) \cap \mathcal{H}(T) = T\mathcal{H}(T^*)$.
3. *Si T est une isométrie partielle de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}(T)$ est le complément orthogonal de $\mathcal{M}(T)$ dans $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Le premier point est démontré à la [50, §I-8]. Le deuxième point est démontré à la [50, §II-9]. Le dernier point est aussi démontré à la §II-9 de l'*op. cit.*. Des preuves très détaillées sont présentées dans l'ouvrage [22] : voir le théorème 16.18, le lemme 16.20 et le théorème 16.21 respectivement. □

6.3 Définitions et propriétés de base

La boule unité de H^∞ est notée B_{H^∞}, c'est-à-dire

$$B_{H^\infty} := \{b \in H^\infty \,:\, \|b\|_{H^\infty} \le 1\}.$$

Pour [1] $b \in B_{H^\infty}$, l'opérateur de Toeplitz T_b est une contraction de H^2 dans H^2. L'opérateur $D_{T_b} = (I - T_b T_{\overline{b}})^{1/2}$ est bien défini. L'espace de de Branges-Rovnyak est défini comme l'espace complémentaire de T_b.

Définition 6.9. Soit $b \in B_{H^\infty}$. L'*espace de de Branges-Rovnyak* associé à b est l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(b) := \mathcal{H}(D_{T_b})$.

L'espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(D_{T_b})}$ introduit à la section précédente et que l'on note pour le restant de cette thèse par $\langle f, g \rangle_b$. D'une manière plus explicite, en notant par $\mathcal{W}_b := (\ker D_{T_b})^\perp$ et en posant $f = D_{T_b} f_1$ et $g = D_{T_b} g_1$ avec $f_1, g_1 \in H^2$, nous avons

$$\langle f, g \rangle_b = \langle P_{\mathcal{W}_b} f_1, P_{\mathcal{W}_b} g_1 \rangle_b .$$

1. Ici, la fonction b est aussi appelée contraction par certains auteurs.

Il est bien d'observer que $f \in \ker D_{T_b}$ si et seulement si $f \in \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$. En effet, si $f \in \ker D_{T_b}$, alors $(I - T_b T_{\overline{b}})f = 0$. Réciproquement, si $f \in \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$, alors

$$\|D_{T_b} f\|_2^2 = \langle D_{T_b} f, D_{T_b} f \rangle_2 = \big\langle (I - T_b T_{\overline{b}}) f, f \big\rangle_2 = 0.$$

Par ailleurs, l'espace de Hilbert associé à T_b est l'espace $\mathcal{M}(b) := \mathcal{M}(T_b)$ muni du produit scalaire défini comme à la section précédente. Pour éviter un cas trivial, nous allons supposer à partir de maintenant que b est une fonction non-constante sur $\mathbb{D}$.

D'après le théorème 6.6, nous avons que $\mathcal{M}(b) \Subset H^2$ et $\mathcal{H}(b) \Subset H^2$. Une propriété importante de l'espace de de Branges-Rovnyak est qu'il s'agit d'un RKHS et les noyaux reproduisants peuvent être identifiés exactement.

Théorème 6.10. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$. Alors l'espace $\mathcal{H}(b)$ est un RKHS.*

Démonstration. Tout d'abord, nous montrons que si $b \in B_{H^\infty}$ est non-constante et $z \in \mathbb{D}$, alors $k_z \notin \ker D_{T_b}$. Supposons, si possible, que $k_z \in \ker D_{T_b} = \ker(I - T_b T_{\overline{b}})$. Comme $T_{\overline{b}} k_z = \overline{b(z)} k_z$, nous trouvons que

$$0 = (I - T_b T_{\overline{b}}) k_z = (1 - \overline{b(z)} b) k_z,$$

ce qui implique que $\overline{b(z)} b = 1$. Ainsi, on en déduit que $\overline{b(z)} \neq 0$ et donc que $b = \frac{1}{\overline{b(z)}}$ sur $\mathbb{D}$, une fonction constante. Or, d'après notre hypothèse, b est non-constante, ce qui est une contradiction.

Pour démontrer que $\mathcal{H}(b)$ est un RKHS, selon la définition 4.14, il faut montrer que

i) $\forall z \in \mathbb{D}$, les fonctionnelles d'évaluations en $z \in \mathbb{D}$ sont continues.

ii) $\forall z \in \mathbb{D}$, il existe $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que $f(z) \neq 0$.

Pour i), il s'agit d'une conséquence immédiate du fait que $\mathcal{H}(b) \Subset H^2$ et que k_w ($w \in \mathbb{D}$) est le noyau reproduisant de H^2.

Pour ii), supposons, si possible, qu'il existe $z \in \mathbb{D}$ tel que $f(z) = 0$ pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$. En particulier, ceci est vrai pour la fonction

$$f := (I - T_b T_{\overline{b}}) k_z = D_{T_b}(D_{T_b} k_z)$$

qui appartient à $\mathcal{H}(b)$ puisque c'est l'image de la fonction $D_{T_b} k_z$. De plus, comme $k_z \notin \ker D_{T_b}$, nous avons que $f \neq 0$. En évaluant cette dernière opération et en utilisant le fait que $T_{\overline{b}} k_z = \overline{b(z)} k_z$ à nouveau, on trouve que $f = (1 - \overline{b(z)} b) k_z$. Par conséquent, on trouve

$$0 = f(z) = \frac{1 - |b(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

ce qui fournit $|b(z)| = 1$. D'après le principe du maximum, la fonction b est constante sur $\mathbb{D}$. Ceci est contraire à notre hypothèse que b est non-constante sur $\mathbb{D}$. On doit donc conclure qu'il existe $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que $f(z) \neq 0$. $\square$

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $k_z^b \in \mathcal{H}(b)$ telle que $f(z) = \langle f, k_z^b \rangle_b$ pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$. Supposons que $f \in \mathcal{H}(b)$ et $f = D_{T_b} f_1$ avec $f_1 \in H^2$. Ainsi, nous pouvons calculer

$$\left\langle f, k_z^b \right\rangle_b = f(z) = \langle f, k_z \rangle_2 = \langle f_1, D_{T_b} k_z \rangle_2 = \langle f, (I - T_b T_{\overline{b}}) k_z \rangle_b .$$

Par conséquent, par unicité, nous obtenons que

$$k_z^b = (I - T_b T_{\overline{b}}) k_z = (1 - \overline{b(z)} b) k_z \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Enfin, par la propriété du noyau reproduisant k_z^b, nous avons que

$$\|k_z^b\|_b^2 = \left\langle k_z^b, k_z^b \right\rangle_b = \frac{1 - |b(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Le prochain théorème est une conséquence du théorème 6.6 et du théorème 6.8. Il permet de faire un lien entre $\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\overline{b})$.

Théorème 6.11. *Soit $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$.*

1. *$\mathcal{M}(b) \hookrightarrow \mathcal{M}(\overline{b})$ et $\mathcal{H}(\overline{b}) \hookrightarrow \mathcal{H}(b)$.*
2. *Soit $f \in H^2$. Alors, $f \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\overline{b}} f \in \mathcal{H}(\overline{b})$. Dans ce cas, quelles que soient $f, g \in \mathcal{H}(b)$, nous avons que*

$$\langle f, g \rangle_b = \langle f, g \rangle_2 + \langle T_{\overline{b}} f, T_{\overline{b}} g \rangle_{\overline{b}} .$$

3. *$\mathcal{M}(b) \cap \mathcal{H}(b) = T_b \mathcal{H}(\overline{b})$.*

Démonstration. Les deux derniers points du théorème proviennent du théorème 6.8. Pour le premier point, il suffit de remarquer que si $f \in H^2$, alors

$$\langle T_b T_{\overline{b}} f, f \rangle_2 = \langle T_{\overline{b}} f, T_{\overline{b}} f \rangle_2 = \|P_+(\overline{b} f)\|_2^2 \leq \|\overline{b} f\|_2^2 = \langle T_{\overline{b}} T_b f, f \rangle_2$$

et d'appliquer le théorème 6.6. □

En particulier, ce dernier résultat fournit l'expression suivante pour la norme d'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$:

$$\|f\|_b = \|f\|_{H^2}^2 + \|T_{\overline{b}} f\|_{\overline{b}}^2. \tag{6.1}$$

Nous disons qu'un espace de Hilbert de fonctions holomorphes $\mathcal{H}$ est *invariant* par un opérateur A si $A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$. Un *multiplicateur* pour l'espace $\mathcal{H}$ est une fonction $\varphi \in H^\infty$ telle que $\mathcal{H}$ est invariant par T_φ. Une application du théorème du graphe fermé montre que l'opérateur linéaire $M_\varphi := T_\varphi|_{\mathcal{H}(b)}$ est borné si φ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 6.12. *Soient $b \in H^\infty$ telle que $\|b\|_\infty \leq 1$ et $\varphi \in H^\infty$.*

1. *$\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\overline{b})$ sont invariants par l'opérateur $T_{\overline{\varphi}}$. De plus, nous avons que*

$$\|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(b)\to\mathcal{H}(b)} \leq \|\varphi\|_\infty \quad \textit{et} \quad \|T_{\overline{\varphi}}\|_{\mathcal{H}(\overline{b})\to\mathcal{H}(\overline{b})} \leq \|\varphi\|_\infty.$$

2. *Tout multiplicateur de $\mathcal{H}(b)$ est un multiplicateur de $\mathcal{H}(\overline{b})$.*

Démonstration. Le preuve du premier point provient de [50, II-7]. Pour le deuxième point, la preuve se trouve au paragraphe II-10 de l'*op. cit.*. □

Un cas particulier du premier point du théorème 6.12 est lorsque $\varphi = \chi_1$ où $\chi_1(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ puisque $T_{\chi_1} = S$, l'opérateur linéaire de décalage à droite sur H^2. Ainsi, nous obtenons que $\mathcal{H}(b)$ et $\mathcal{H}(\overline{b})$ sont invariants par l'opérateur $S^* = T_{\overline{\chi_1}}$. La restriction de S^* à l'espace $\mathcal{H}(b)$ est notée X.

Jusqu'à présent, nous avons vu que les fonctions k_w^b appartiennent à l'espace $\mathcal{H}(b)$. Il est possible d'obtenir d'autres exemples explicites de fonctions appartenant à $\mathcal{H}(b)$. Nous nous en tiendrons à l'exemple suivant.

Exemple 6.13. Lorsque $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$, alors $S^*b \in \mathcal{H}(b)$. En effet, $S^*b \in \mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\overline{b}}S^*b \in \mathcal{H}(\overline{b})$ d'après le théorème 6.11. Comme $\mathcal{H}(\overline{b})$ est invariant par S^* et $S^*k_0 = 0$, nous avons que

$$T_{\overline{b}}S^*b = -S^*(I - T_{\overline{b}}T_b)k_0 = -S^*k_0^{\overline{b}} \in \mathcal{H}(\overline{b}).$$

6.4 Espaces de de Branges–Rovnyak : cas non-extrêmes

Soit $b \in H^\infty$ et $\|b\|_\infty \leq 1$. On peut montrer (voir [14, théorème 7.9]) que b est un *point extrême* de la boule unité de H^∞ si et seulement si

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - |b(e^{i\theta})|^2)\,\frac{d\theta}{2\pi} = -\infty.$$

Lorsque b est un point *non-extrême* de la boule unité de H^∞, alors $\log(1-|b|^2) \in L^1(\mathbb{T})$. On écrit simplement aussi que b est non-extrême. Si c'est le cas, il existe donc une fonction $a \in H^1$ telle que a est extérieure, $a(0) > 0$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$. En effet, il suffit de prendre la fonction

$$a(z) := \exp\Big(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log(1 - |b(\zeta)|^2)^{1/2}\,\frac{d\theta}{2\pi}\Big) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

On dit que (b, a) forme un *couple pythagoricien* ou simplement un *couple*. Il est important de noter que la fonction $\phi := \frac{b}{a}$ appartient à la classe de Smirnov $N^+ \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Dans le restant de la thèse, les lettres b, a et ϕ sont réservées exclusivement à noter un point non-extrême, la fonction extérieure telle que (b, a) est un couple et la fonction b/a appartenant à N^+.

La relation entre a et b s'avère très utile puisque $\mathcal{M}(\overline{a})$ est plus simple à traiter que $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 6.14. *Soit $b \in H^\infty$ un point non-extrême de la boule unité de H^∞ et (b, a) un couple pythagoricien. On a alors*

1. $\mathcal{M}(\bar{a}) \doteq \mathcal{H}(\bar{b})$.
2. *Une fonction $f \in H^2$ appartient à $\mathcal{H}(b)$ si et seulement si $T_{\bar{b}}f \in \mathcal{M}(\bar{a})$. Dans ce cas, il existe une unique fonction $f^+ \in H^2$ telle que $T_{\bar{a}}f^+ = T_{\bar{b}}f$ et*

$$\|f\|_b^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \|f^+\|_{H^2}^2. \tag{6.2}$$

Démonstration. Les preuves de ces deux propositions se trouvent dans [50, §IV-1]. Le lecteur peut aussi consulter le théorème 23.2 et la remarque qui suit le théorème 23.3 du volume [22]. □

Une propriété importante de l'espace de de Branges-Rovnyak dans le cas non-extrême est qu'il contient l'ensemble des polynômes et cet ensemble est dense dans $\mathcal{H}(b)$. En fait, la caractéristique non-extrême détermine complètement si l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{H}(b)$.

Théorème 6.15. *Soit $b \in B_{H^\infty}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *b est un point non-extrême de B_{H^∞} ;*
2. *$\mathcal{H}(b)$ contient toutes les fonctions holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$;*
3. *$\mathcal{H}(b)$ contient l'ensemble des polynômes ;*
4. *l'ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Il s'agit essentiellement du [15, théorème 2.2]. □

Les auteurs de [11] ont obtenu un formule de $\|f\|_b^2$ en termes des coefficients de Taylor d'une fonction f holomorphe sur un voisinage de $\mathbb{D}$.

Théorème 6.16. *Soit b un point non-extrême de B_{H^∞}, soit (b, a) le couple pythagoricien et soit $\phi := b/a$ telle que $\phi(z) = \sum_{j\geq 0} c_n z^n$. Si f est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, alors la série $\sum_{j\geq 0} a_{j+n}\bar{c}_j$ converge absolument pour chaque $n \geq 0$ et*

$$\|f\|_b^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 + \sum_{n\geq 0} \left| \sum_{j\geq 0} a_{j+n}\bar{c}_j \right|^2 \tag{6.3}$$

Démonstration. Voir le [11, théorème 4.1]. □

Pour terminer cette section, nous mentionnons que la preuve de la densité des polynômes présentée au [50, §IV-3] n'est pas constructive. Ceci signifie qu'au lieu de construire une suite de polynôme $(p_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers la fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, elle montre plutôt que le complément orthogonal de l'espace des polynômes est trivial. Une preuve constructive est fournie dans l'article de El-Fallah, Fricain, Kellay, Mashreghi et Ransford. Leur résultat précis est le suivant :

Théorème 6.17. *Soit $b \in B_{H^\infty}$ un point non-extrême, soit (b, a) le couple pythagoricien et soit h_n la fonction extérieure qui satisfait $h_n(0) > 0$ et $|h_n| = \min\{1, n|a|\}$ p.p. sur $\mathbb{T}$, explicitement :*

$$h_n(z) := \exp\Big(\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log(\min\{1, n|a(e^{i\theta})|\}) \frac{d\theta}{2\pi} \Big) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour $f \in \mathcal{H}(b)$, soit $(p_n)_{n \geq 0}$ une suite de polynômes telle que $\|f - p_n\|_{H^2} < \frac{1}{n^2}$. Alors $T_{\overline{h}_n} p_n$ est un polynôme pour chaque entier $n \geq 0$ et

$$\lim_{n \to \infty} \|T_{\overline{h}_n} p_n - f\|_b = 0.$$

Démonstration. Voir le [15, théorème 5.1]. □

Chapitre 7

Moyennes logarithmiques

Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Considérons une méthode P de série entières déterminée par $p(r) = \sum_{n\geq 0} p_n r^n$ et de rayon de convergence $R \geq 1$. On applique cette métohde à la suite $(s_n(f))_{n\geq 0}$ et on pose

$$P_r(f)(z) := \frac{1}{p(r)} \sum_{n\geq 0} p_n r^n s_n(f)(z) \quad (z \in \mathbb{D}, 0 \leq r < R).$$

L'expression de $P_r(f)(z)$ est bien définie en chaque $z \in \mathbb{D}$ en raison de la proposition suivante.

Proposition 7.1. *Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Pour chaque $r \in [0, R)$, nous avons $P_r(f) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ avec $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Nous allons montrer que la suite de fonctions $f_n(z) := \frac{1}{p(r)} \sum_{k=0}^{n} p_n r^n s_n(f)(z)$ converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$ vers $P_r(f)$. Deux cas sont à considérer :

i) $1 \leq R < \infty$;

ii) $R = \infty$.

Pour le premier cas, supposons que $1 \leq R < \infty$. En renormalisant par la transformation $r \mapsto r/R$, on peut supposer que $R = 1$ et faire la démonstration dans ce cas. Alors, supposons que $R = 1$. Soit $K \subsetneq \mathbb{D}$ un sous-ensemble compact et considérons un disque $D(0, r_0) \subsetneq \mathbb{D}$ qui contient K. Alors, pour tout $z \in D(0, r_0)$, le fait que $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$, permet d'obtenir l'inégalité suivante

$$|s_n(f)(z)| \leq CM^n \quad (M > 1, z \in D(0, r_0))$$

où C est une constante positive finie qui dépend de f, de r_0 et de M. En choisissant M de sorte que $Mr < 1$, nous obtenons

$$\Big|P_r(f)(z) - \frac{1}{p(r)} \sum_{k=0}^{n} p_k r^k s_k(f)(z)\Big| = \Big|\frac{1}{p(r)} \sum_{k\geq n+1} p_n r^n s_n(f)(z)\Big| \leq \frac{C}{p(r)} \sum_{k\geq n+1} p_n (rM)^k.$$

Comme $rM < 1$, la série de p converge et donc, lorsque $n \to \infty$, nous obtenons que

$$\frac{1}{p(r)} \sum_{k=0}^{n} p_n r^n s_n(f)(z) \to P_r(f)(z) \quad (z \in K).$$

Ceci démontre le résultat pour le premier cas.

Penchons-nous désormais sur le deuxième cas et supposons que $R = \infty$. En utilisant les mêmes estimés que dans le premier cas avec $M := M_0$ fixé, on trouve

$$\left|P_r(f)(z) - \frac{1}{p(r)} \sum_{k=0}^{n} p_k r^k s_k(f)(z)\right| = \left|\frac{1}{p(r)} \sum_{k \geq n+1} p_n r^n s_n(f)(z)\right| \leq \frac{C}{p(r)} \sum_{k \geq n+1} p_n (rM_0)^k.$$

Comme la série de p évaluée en rM_0 converge, nous obtenons que

$$\frac{1}{p(r)} \sum_{k=0}^{n} p_n r^n s_n(f)(z) \to P_r(f)(z) \quad (z \in K).$$

Ceci conclut la démonstration. □

Rappelons que la méthode d'Abel est une méthode de série entière déterminée par $a(r) = \sum_{n \geq 0} r^n$ $(0 \leq r < 1)$ et la méthode logarithmique est une méthode de série entière déterminée par $l(r) = \sum_{n \geq 0} r^n/(n+1)$ avec $r \in [0,1)$. On applique ces méthodes à la suite des sommes partielles $(s_n(f))_{n \geq 0}$ du développement de Taylor d'une fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. On définit ainsi les fonctions

$$A_r(f)(z) := (1-r) \sum_{n \geq 0} r^n s_n(f)(z) \quad (0 \leq r < 1, z \in \mathbb{D})$$

et

$$L_r(f)(z) := \frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n+1} s_n(f)(z) \quad (0 \leq r < 1, z \in \mathbb{D}).$$

D'après la proposition 7.1, les séries de ces fonctions convergent uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$ et définissent donc des fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D}$.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux moyennes logarithmiques des sommes partielles $s_n(f)$. Nous allons montrer que, si b est non-extrême, alors $L_r(f) \in \mathcal{H}(b)$ pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$. Le résultat principal à montrer est le suivant.

Théorème 7.2. *Il existe $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telles que*

$$\lim_{r \to 1^-} \|L_r(f)\|_b = \infty.$$

Ce théorème est une conséquence d'une formule intégrale qui lie les moyennes d'Abel et les moyennes logarithmiques. Elle est présentée au lemme 7.8.

7.1 Estimés prélimaires

Avant de montrer la formule intégrale, nous commençons d'abord par énoncer quelques résultats préliminaires sur les sommes partielles $s_n(f)$ et les moyennes d'Abel $A_r(f)$.

La première estimation concerne les sommes partielles. Rappelons que $\phi = b/a \in N^+$ où (b, a) est un couple pythagoricien.

Proposition 7.3. *Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ et $b \in B_{H^\infty}$ un point non-extrême. Alors pour chaque $R > 1$, il existe une constante positive finie C, qui ne dépend que de R, ϕ et f, telle que*

$$\|s_n(f)\|_b \leq CR^n \quad (n \geq 0).$$

Démonstration. Soit $R > 1$ et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Soit (b, a) le couple pythagoricien et $\phi(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n$.

Nous avons

$$\|s_n(f)\|_b \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|z^k\|_b.$$

D'après le théorème 6.16, nous avons

$$\|z^k\|_b^2 = 1 + \sum_{j=0}^{k} |c_j|^2.$$

Comme $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, nous avons $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 1$. Par conséquent, il existe un entier $N \geq 0$ tel que $|c_n| \leq (\sqrt[4]{R})^n$ pour tout $n \geq N$. En choisissant $C_1 := \max\{\sup_{0\leq n<N} |c_n|, 1\}$, on obtient

$$|c_n| \leq C_1(\sqrt[4]{R})^n \quad (n \geq 0).$$

De la même façon, il existe une constante C_2 telle que

$$|a_n| \leq C_2(\sqrt[4]{R})^n \quad (n \geq 0).$$

Par conséquent, pour chaque $k \geq 0$, $\|z^k\|_b^2 \leq C_1^2(k+1)(\sqrt{R})^k$ et donc

$$\|s_n(f)\|_b \leq C_1C_2 \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1}(\sqrt{R})^k \leq C_1C_2(n+1)^{3/2}(\sqrt{R})^n.$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{3/2}/(\sqrt{R})^n = 0$, il existe une constante C_3 telle que $(n+1)^{3/2}(\sqrt{R})^n \leq C_3R^n$ pour tout $n \geq 0$. En posant $C = C_1C_2C_3$, on obtient le résultat. □

À l'exemple 1.22, on avait exprimé les moyennes d'Abel comme

$$A_r(s_n)_{n\geq 0} = \sum_{n\geq 0} r^n x_n$$

pourvu que les séries convergent dans l'espace. En prenant les vecteurs $x_n := a_n z^n$, on peut réécrire les moyennes d'Abel de la suite des sommes partielles $(s_n(f))_{n\geq 0}$ comme

$$A_r(f)(z) = \sum_{n\geq 0} a_n r^n z^n \quad (0 \leq r < 1, z \in \mathbb{D})$$

puisque chaque série converge ponctuellement quel que soit $z \in \mathbb{D}$ et quel que soit $0 \leq r < 1$. Cette dernière expression correspond exactement aux dilatées $f_r(z)$ d'une fonction f définies par $f_r(z) := f(rz)$. Nous utilisons désormais cette notation.

Un premier estimé concernant les dilatées d'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ provient du travail [15]. On pose la fonction $b_0(z) := \frac{\tau z}{1-\tau^2 z}$ $(z \in \mathbb{D})$ où $\tau := (\sqrt{5}-1)/2$. Nous pouvons montrer que b_0 est non-extrême et la fonction a_0 qui forme le couple (b_0, a_0) est

$$a_0(z) = \frac{\tau(1-z)}{1-\tau^2 z} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Théorème 7.4. *Soit $b := b_0 B^2$ où B est le produit de Blaschke dont les zéros sont $w_n := 1 - 8^{-n}$ $(n \geq 1)$. Posons*

$$f(z) := \sum_{n\geq 1} 4^{-n}/(1 - w_n z) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Alors b est un point non-extrême de B_{H^∞}, $f \in \mathcal{H}(b)$, $(f_r)^+(0) > 0$ $(0 \leq r < 1)$ et nous avons

$$\lim_{r\to 1^-} (f_r)^+(0) = \infty.$$

Démonstration. Voir le [15, théorème 3.1] où il est démontré que b est non-extrême, $f \in \mathcal{H}(b)$ et $\lim_{r\to 1^-}(f_r)^+(0) = \infty$. Le seul point qui n'apparaît pas dans l'énoncé original des auteurs est $(f_r)^+(0) > 0$. Cependant, ce point est implicite dans leur preuve du résultat. Par souci de complémenter le théorème, nous allons montrer que $(f_r)^+(0) > 0$ pour chaque $r \in [0,1)$.

Fixons $r \in [0,1)$. Remarquons que $k_{w_n}(rz) = 1/(1 - w_n rz) = k_{rw_n}(z)$. Nous avons

$$f_r(z) = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} k_{w_n}(rz) = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} k_{rw_n}(z).$$

Par conséquent, $f_r = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} k_{rw_n}$ ponctuellement. De plus, nous estimons

$$\sum_{n\geq 1} 16^{-n} \|k_{rw_n}\|_{H^2}^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{16^{-n}}{1 - r^2(1-8^{-n})^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{2 - 8^{-n}} \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}.$$

Ainsi, la série qui définit f_r est convergente dans H^2. Pour le choix de b, nous trouvons que $a = a_0$ puisque la fonction B^2 n'affecte pas la relation $|b|^2 + |a|^2 = 1$ (p.p. sur $\mathbb{T}$) entre b et a.

Enfin, nous avons

$$\left(\overline{b(rw_n)/a(rw_n)}\right) T_{\overline{a}} k_{rw_n} = T_{\overline{b}} k_{rw_n}.$$

et donc

$$(k_{rw_n})^+ = (\overline{b(rw_n)}/\overline{a(rw_n)})k_{rw_n} = \overline{\phi(rw_n)}k_{rw_n}$$

d'après le théorème 6.14. Par conséquent, on obtient

$$T_{\overline{b}}(f_r) = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} T_{\overline{b}} k_{rw_n} = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} \overline{\phi(rw_n)} k_{rw_n},$$

ce qui donne $(f_r)^+ = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} \overline{\phi(rw_n)} k_{rw_n}$. On obtient le résultat en remarquant que $\phi(rw_n)$ est un nombre réel positif et $k_{rw_n}(0) = 1$. □

Nous présentons maintenant une estimation de la valeur $\|f_r\|_b$. Notons que, par le théorème 6.15, $f_r \in \mathcal{H}(b)$ puisque f_r est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

Théorème 7.5. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction dans $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, soit $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême et soit $r \in [0,1)$. Alors il existe une constante $C(\phi, r)$ qui ne dépend que de ϕ et r telle que*

$$\|f_r\|_b^2 \leq C(\phi, r)\|f\|_{H^2}^2$$

où $\phi := \frac{b}{a}$ et (b, a) est le couple pythagoricien. De plus, la dépendance $r \mapsto C(\phi, r)$ peut être choisie de sorte qu'elle est croissante.

Démonstration. Lorsque $\|f\|_{H^2}^2 = \infty$, le résultat est évident. Supposons que $f \in H^2$.

Nous savons que f_r est une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, d'après le théorème 6.15, nous savons que $f_r \in \mathcal{H}(b)$ pour chaque $r \in [0,1)$.

Fixons $r \in [0,1)$. D'après la formule (6.3), nous avons

$$\begin{aligned}\|f_r\|_b^2 &= \sum_{n\geq 0} r^2 |a_n|^2 + \sum_{n\geq 0} \Big| \sum_{j\geq 0} r^{j+n} a_{j+n} \overline{c}_j \Big|^2 \\ &\leq \|f\|_{H^2}^2 + \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{j\geq 0} r^{j+n} |a_{j+n}||c_j| \Big)^2.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|f_r\|_b^2 &\leq \|f\|_{H^2}^2 + \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{j\geq 0} r^{j+n} |a_{j+n}|^2 \Big) \Big(\sum_{j\geq 0} r^{j+n} |c_j|^2 \Big) \\ &= \|f\|_{H^2}^2 + \sum_{n\geq 0} r^n \|(S^*)^n (f_{\sqrt{r}})\|_{H^2}^2 \Big(\sum_{j\geq 0} r^j |c_j|^2 \Big)\end{aligned}$$

où S^* est l'adjoint de l'opérateur de décalage à droite sur H^2 et $(S^*)^n$ est la n-composition de S^*. Comme $\|S^*\|_{H^2 \to H^2} \leq 1$, on obtient

$$\|f_r\|_b^2 \leq \|f\|_{H^2}^2 + \frac{\sum_{n\geq 0} r^j |c_j|^2}{1-r} \|f_{\sqrt{r}}\|_{H^2}^2,$$

où $\sum_{j\geq 0} r^j |c_j|^2 < \infty$ puisque $\phi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Finalement, comme $\|f_{\sqrt{r}}\|_{H^2}^2 \leq \|f\|_{H^2}^2$, nous obtenons que

$$\|f_r\|_b^2 \leq C(\phi, r)\|f\|_{H^2}^2.$$

où $C(\phi, r) = 1 + \sum_{j\geq 0} r^j |c_j|^2/(1-r)$.

D'après la définition de la constante $C(\phi, r)$, il est facile de voir que la fonction $r \mapsto C(\phi, r)$ est croissante sur $[0, 1)$. □

7.2 Formules intégrales

Le prochain lemme donne une expression intégrale des moyennes logarithmiques en termes des dilatées d'une fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Cette identité provient du fait que, pour chaque $z \in \mathbb{D}$ fixé, $t \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n t^n z^n$ est absolument et uniformément convergente sur $[0, r]$.

Lemme 7.6. *Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Alors, pour chaque $0 \leq r < 1$, nous avons*

$$L_r(f)(z) = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{f_t(z)}{1-t}\, dt \quad (z \in \mathbb{D}).$$

L'identité présentée dans le lemme est ponctuelle. Notre objectif est maintenant de vérifier qu'elle converge dans $\mathcal{H}(b)$ vers $L_r(f)$.

Le premier pas vers cette validation est le lemme suivant.

Lemme 7.7. *Soit $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême, soit $f \in \mathcal{H}(b)$ et $r \in (0, 1)$ fixé. L'application $F : [0, r] \to \mathcal{H}(b)$, définie par $F(t) := f_t$, est continue de $[0, r]$ dans $\mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. D'après la proposition 7.3, pour chaque $R > 1$, il existe une constante positive finie $C > 0$, qui ne dépend que de R et f (et de b), telle que

$$\|s_n(f)\|_b \leq CR^n.$$

En choisissant R tel que $Rr < 1$, on peut assurer que la série

$$(1-t)\sum_{n\geq 0} s_n(f) t^n \quad (0 \leq t \leq r)$$

converge dans $\mathcal{H}(b)$ vers une fonction $g^{(t)} \in \mathcal{H}(b)$ sur $[0, r]$. Les dilatées f_t s'expriment ponctuellement comme

$$f_t(z) = (1-t)\sum_{n\geq 0} s_n(f)(z) t^n \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Conséquemment, on doit avoir que $g^{(t)} = f_t$ puisque la convergence dans $\mathcal{H}(b)$ implique la convergence ponctuelle (d'après le théorème 6.10).

La continuité de F est obtenue par la continuité des applications $t \mapsto t^n(1-t)$ sur $[0,r]$ $(n \geq 0)$. $\square$

Nous pouvons maintenant vérifier que la formule intégrale du lemme 7.6 converge dans $\mathcal{H}(b)$ vers $L_r(f)$. Nous utilisons l'intégrale de Bochner comme définition de l'intégrale à valeurs vectorielles. La définition précise et les propriétés de cette intégrale se retrouvent au [29, chapitre 3, §3.7].

Lemme 7.8. *Soit b un point non-extrême et $f \in \mathcal{H}(b)$, disons $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Alors, pour chaque $r \in [0,1)$, nous avons $L_r(f) \in \mathcal{H}(b)$ et*

$$L_r(f) = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{f_t}{1-r}\, dt.$$

Démonstration. Fixons $r \in [0,1)$. D'après le lemme 7.7, la fonction $t \mapsto \frac{f_t}{1-t}$ est continue de $[0,r]$ dans $\mathcal{H}(b)$ et donc son intégrale de Bochner est bien définie (voir [29, théorème 3.7.4]).

D'après la proposition 7.3 à nouveau, pour chaque $R > 1$, il existe une constante positive C qui ne dépend que de R et f telle que $\|s_n(f)\|_b \leq CR^n$. Soit $R > 1$ un nombre choisi de sorte que $Rr < 1$.

Premièrement, nous calculons une borne supérieure pour la série définissant $L_r(f)$:

$$\frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \frac{\|s_n(f)\|_b}{n+1} r^n \leq C \frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \frac{(rR)^n}{n+1} = C \frac{\log \frac{1}{1-rR}}{R \log \frac{1}{1-r}}.$$

Par conséquent, la série $\frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(f)}{n+1} r^n$ converge absolument dans $\mathcal{H}(b)$ et elle définit une fonction $g^{(r)} \in \mathcal{H}(b)$. Comme la convergence dans $\mathcal{H}(b)$ implique la convergence ponctuelle (d'après le théorème 6.10), nous devons avoir

$$g^{(r)}(z) = \frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(f)(z)}{n+1} r^n \quad (z \in \mathbb{D}),$$

ce qui fournit $L_r(f) = g^{(r)} \in \mathcal{H}(b)$.

Deuxièmement, nous avons

$$\frac{r}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \frac{s_n(f)}{n+1} r^n = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \sum_{n\geq 0} \int_0^r s_n(f) t^n\, dt.$$

La série $\sum_{n\geq 0} s_n(f) t^n$ est absolument et uniformément convergente dans $\mathcal{H}(b)$ sur $[0,r]$. Ainsi, l'ordre de sommation et d'intégration peut être inversé sans problème et on obtient

$$L_r(f) = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \sum_{n\geq 0} s_n(f) t^n\, dt = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{f_t}{1-t}\, dt,$$

où la dernière égalité provient du fait que $f_t = (1-t)\sum_{n\geq 0} s_n(f) t^n$. $\square$

En utilisant ce dernier lemme et l'estimation du théorème 7.5, on obtient le corollaire suivant. On considère L_r comme un opérateur linéaire de $\mathcal{H}(b)$ dans $\mathcal{H}(b)$ défini par $f \mapsto L_r(f)$ ($f \in \mathcal{H}(b), 0 \leq r < 1$).

Corollaire 7.9. *Soit $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême. Alors, pour chaque $r \in [0,1)$, l'opérateur linéaire $L_r : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est un opérateur linéaire borné et*

$$\|L_r(f)\|_b \leq \sqrt{C(\phi, r)}\|f\|_b \quad (f \in \mathcal{H}(b))$$

où $C(\phi, r)$ est la constante du théorème 7.5.

Démonstration. Soit $r \in [0,1)$ fixé et $f \in \mathcal{H}(b)$. Soit a la fonction extérieure telle que (b,a) est le couple pythagoricien et posons $\phi := \frac{b}{a}$. Alors, d'après le théorème 7.5, nous avons

$$\frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{\|f_t\|_b}{1-t}\, dt \leq \frac{\|f\|_{H^2}}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{\sqrt{C(\phi, t)}}{1-t}\, dt,$$

et comme l'application $t \mapsto C(\phi, t)$ est croissante sur $[0, r]$, l'expression ci-haut est

$$\leq \frac{\sqrt{C(\phi, r)}\|f\|_{H^2}}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{1}{1-t}\, dt \leq \sqrt{C(\phi, r)}\|f\|_{H^2}.$$

D'après la formule intégrale du lemme 7.8 et comme $\|f\|_{H^2} \leq \|f\|_b$, nous obtenons l'inégalité de l'énoncé. □

Dans la preuve du précédent résultat, on remarque que nous avons en fait démontré un résultat plus fort que celui énoncé. En effet, nous avons plutôt démontré l'inégalité suivante :

$$\|L_r(f)\|_b \leq \sqrt{C(\phi, r)}\|f\|_{H^2}.$$

Ceci montre par le fait même que $L_r \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(b), H^2)$.

Nous pouvons maintenant exploiter la formule intégrale de $L_r(f)$ afin d'identifier $(L_r(f))^+$. Rappelons que la fonction f^+ est l'unique fonction de H^2 telle que $T_{\bar{b}} f = T_{\bar{a}} f^+$.

Lemme 7.10. *Pour chaque $f \in \mathcal{H}(b)$ et $r \in (0,1)$, nous avons*

$$(L_r(f))^+ = \frac{1}{\log \frac{1}{1-r}} \int_0^r \frac{(f_t)^+}{1-t}\, dt.$$

Démonstration. Définissons $F(t) := \frac{f_t}{1-t}$. C'est une fonction continue de $[0, r]$ dans $\mathcal{H}(b)$ d'après le lemme 7.7. Ce fait combiné à la formule (6.2) exprimant la norme de $\mathcal{H}(b)$ en termes de f et f^+ implique que l'application $t \mapsto \frac{(f_t)^+}{1-t}$ est continue de $[0, r]$ dans H^2. Cette fonction est donc Bochner-intégrable sur $[0, r]$.

Par conséquent, comme $T_{\overline{a}} : H^2 \to H^2$ et $T_{\overline{b}} : H^2 \to H^2$ sont des opérateurs linéaires bornés et en utilisant les propriétés de l'intégrale de Bochner (voir [29, théorème 3.7.12]), nous obtenons

$$\begin{aligned}
T_{\overline{a}}\left(\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\int_0^r \frac{(f_t)^+}{1-t}\,dt\right) &= \left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\int_0^r \frac{T_{\overline{a}}(f_t)^+}{1-t}\,dt \\
&= \left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\int_0^r \frac{T_{\overline{b}}f_t}{1-t}\,dt \\
&= T_{\overline{b}}\left(\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{-1}\int_0^r \frac{f_t}{1-t}\,dt\right) = T_{\overline{b}}(L_r(f)).
\end{aligned}$$

D'après la partie unicité de $(L_r(f))^+$ du théorème 6.14, nous obtenons la formule de l'énoncé.

□

7.3 Divergence des moyennes logarithmiques

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le théorème principal de ce chapitre. Rappelons l'énoncé que nous devons démontrer :

Il existe $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telles que

$$\lim_{r\to 1^-} \|L_r(f)\|_b = \infty.$$

Démonstration du théorème 7.2. Choisissons b et f comme dans l'énoncé du théorème 7.4. Soit $M > 0$ et choisissons $r_0 \in (0,1)$ tel que

$$(f_t)^+(0) \geq M \quad (r_0 \leq t < 1).$$

La convergence dans H^2 implique la convergence ponctuelle sur $\mathbb{D}$ (puisque H^2 est un RKHS). Par conséquent, d'après le lemme 7.10, l'égalité suivante tient :

$$(L_r(f))^+(0) = \frac{1}{\log\frac{1}{1-r}}\int_0^r \frac{(f_t)^+(0)}{1-t}\,dt.$$

Soit $r \in [0,1)$. En séparant l'intégrale en deux parties, de 0 à r_0 et de r_0 à r, nous avons

$$(L_r(f))^+(0) \geq \frac{\log\frac{1-r_0}{1-r}}{\log\frac{1}{1-r}}M + \frac{1}{\log\frac{1}{1-r}}\int_0^{r_0}\frac{(f_t)^+(0)}{1-t}\,dt.$$

En prenant la lim inf lorsque $r \to 1^-$, on obtient

$$\liminf_{r\to 1^-}(L_r(f))^+(0) \geq M.$$

Comme M est arbitraire, $\liminf_{r\to 1^-}(L_r(f))^+(0) = \infty$. D'après l'expression (6.2) de la norme de $L_r(f)$, on obtient

$$\|L_r(f)\|_b \geq |(L_r(f))^+(0)|$$

ce qui implique que $\liminf_{r\to 1^-}\|L_r(f)\|_b = \infty$. □

Chapitre 8

Conséquences sur les méthodes de séries de puissances

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux conséquences du résultat principal du précédent chapitre sur les méthodes d'Abel généralisées et sur les méthodes de Borel généralisées.

Soit $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ dont le développement de Taylor est $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On applique la méthode d'Abel généralisée d'ordre $\alpha > -1$ à la suite des sommes partielles $(s_n(f))_{n\geq 0}$ et on définit

$$A_r^\alpha(f)(z) := (1-r)^{1+\alpha} \sum_{n\geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} s_n(f)(z) \quad (z \in \mathbb{D}, 0 \leq r < 1).$$

D'après la proposition 7.1, $A_r^\alpha(f) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $r \in [0,1)$. Nous allons aussi montrer que, si b est non-extrême, alors $A_r^\alpha(f) \in \mathcal{H}(b)$ pour tout r et toute $f \in \mathcal{H}(b)$.

Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$ tels que $\alpha N + \beta > 1$. On applique aussi la méthode de Borel généralisée $B^{\alpha,\beta}$ à la suite des sommes partielles $(s_n(f))_{n\geq 0}$ et on définit

$$B_\omega^{\alpha,\beta}(f)(z) := \alpha e^{-\omega} \sum_{n\geq N} \frac{\omega^{\alpha n+\beta-1} s_n(f)(z)}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \quad (z \in \mathbb{D},\ 0 \leq \omega < \infty).$$

D'après la proposition 7.1, $B_\omega^{\alpha,\beta}(f) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ pour tout $\omega \in [0,\infty)$. Nous allons éventuellement montrer que $B_\omega^{\alpha,\beta}(f) \in \mathcal{H}(b)$ pour tout ω et toute $f \in \mathcal{H}(b)$.

L'objectif de ce chapitre est de démontrer les deux résultats suivants.

Théorème 8.1. *Il existe un point non-extrême $b \in H^\infty$ et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que, pour tout $\alpha > -1$,*

$$\lim_{r\to 1^-} \|A_r^\alpha(f) - f\|_b \neq 0.$$

Théorème 8.2. *Il existe un point non-extrême $b \in H^\infty$ et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{N}$ avec $\alpha N + \beta > 1$,*

$$\lim_{\omega \to \infty} \|B_\omega^{\alpha,\beta}(f) - f\|_b \neq 0.$$

8.1 Méthodes d'Abel généralisées

Nous montrons d'abord, avec une technique similaire à celle utilisée dans le cas de la méthode logarithmique, que $A_r^\alpha(f) \in \mathcal{H}(b)$ pour $r \in [0,1)$ et $f \in \mathcal{H}(b)$.

Proposition 8.3. *Soit $0 \leq r < 1$ et b non-extrême. Alors, pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, la série définissant $A_r^\alpha(f)$ est convergente dans $\mathcal{H}(b)$ et $A_r^\alpha(f) \in \mathcal{H}(b)$. De plus, l'application $A_r^\alpha : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ définie par $f \mapsto A_r^\alpha(f)$ est un opérateur linéaire borné.*

Démonstration. Soit $r \in [0,1)$ fixé et $f \in \mathcal{H}(b)$. D'après la proposition 7.3, pour chaque $R > 1$, il existe une constante C qui dépend de f et R (et aussi de b) telle que

$$\|s_n(f)\|_b \leq CR^n \quad (n \geq 0).$$

En choisissant $R > 1$ tel que $rR < 1$, on obtient l'estimé suivant

$$(1-r)^{1+\alpha} \sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} r^n \|s_n(f)\|_b \leq C(1-r)^{1+\alpha} \sum_{n \geq 0} \binom{n+\alpha}{\alpha} (rR)^n = C\Big(\frac{1-r}{1-R}\Big)^{1+\alpha} < \infty.$$

Ainsi, la série définissant $A_r^\alpha(f)$ converge dans $\mathcal{H}(b)$, disons vers $g^{(r)}$. Comme la convergence dans $\mathcal{H}(b)$ implique, en particulier, la convergence ponctuelle (d'après le théorème 6.10), on obtient que $A_r^\alpha(f) = g^{(r)} \in \mathcal{H}(b)$.

D'après l'équation (6.1) de la norme dans $\mathcal{H}(b)$, la convergence dans la norme de $\mathcal{H}(b)$ implique la convergence dans H^2. Ainsi, la série $A_r^\alpha(f)$ converge aussi dans H^2 et est égale à $A_r^\alpha(f)$. Cette remarque nous servira afin de démontrer que $A_r^\alpha : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est un opérateur linéaire borné.

L'application $A_r^\alpha : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ est clairement un opérateur linéaire. Nous allons utiliser le théorème du graphe fermé afin de démontrer qu'il s'agit d'un opérateur linéaire borné. Supposons que $f_n \to f$ et $A_r^\alpha(f_n) \to g$ dans la norme de $\mathcal{H}(b)$ lorsque $n \to \infty$. Alors, d'après la remarque ci-haut, $f_n \to f$ et $A_r^\alpha(f_n) \to g$ dans H^2. Posons $s_n : H^2 \to H^2$ comme l'opérateur linéaire qui assigne à chaque fonction $f \in H^2$, la n-ième somme partielle de sa série de Taylor. Évidemment, nous avons, d'après la définition de la norme de H^2, que $\|s_n\|_{H^2 \to H^2} \leq 1$. Par conséquent, nous obtenons

$$\|A_r^\alpha(f_n) - A_r^\alpha(f)\|_{H^2} \leq (1-r)^{1+\alpha} \sum_{k \geq 0} \binom{k+\alpha}{\alpha} \|s_k(f_n - f)\|_{H^2} r^k \leq \|f_n - f\|_{H^2}.$$

En laissant $n \to \infty$, on conclut que $A_r^\alpha(f_n) \to A_r^\alpha(f)$ dans la norme de H^2. Conséquemment, on obtient $A_r^\alpha(f) = g$, ce qui conclut la démonstration. □

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le premier résultat principal de cette section.

Démonstration du théorème 8.1. Soit b et f les fonctions dans le théorème 7.2. Supposons, si possible, que $A_r^\alpha(f) \to f$ lorsque $r \to 1^-$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$.

D'après le théorème 2.20, la méthode d'Abel généralisée est scalaire-incluse dans la méthode logarithmique. Ainsi, d'après le corollaire 3.6, pour chaque fonction $f \in \mathcal{H}(b)$, nous devons avoir que $L_r(f) \to f$ lorsque $r \to 1^-$. Or, ceci contredit le théorème 7.2. Par conséquent, il doit exister une fonction f telle que $A_r^\alpha(f) \not\to f$. $\square$

En fait, en utilisant un résultat plus fort que le corollaire 3.6, on peut montrer qu'il existe une fonction f pour laquelle il n'existe aucune fonction $g \in \mathcal{H}(b)$ telle que $A_r^\alpha(f) \to g$.

Si possible, supposons que, pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, $A_r^\alpha(f) \to g$ pour une certaine fonction $g \in \mathcal{H}(b)$. Dans ce cas, $A_r^\alpha(f) \to g$ faiblement dans $\mathcal{H}(b)$. Comme la méthode A^α est scalaire-incluse dans L, d'après le théorème 3.4, $L_r(f) \to g$ faiblement dans $\mathcal{H}(b)$. Ceci implique que $\sup_{r_0 \leq r < 1} \|L_r(f)\|_b < \infty$ quelle que soit $f \in \mathcal{H}(b)$. Or, ceci est impossible puisqu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que $\lim_{r \to 1^-} \|L_r(f)\|_b = \infty$ d'après le théorème 7.2.

Pour terminer cette section, nous montrons en fait que le théorème 8.1 se généralise à une famille plus grande de méthodes de sommabilité de séries entières. Ceci est une conséquence du théorème 2.14 de Borwein énoncé à la section 2.3.

Considérons une méthode de sommabilité de série entière obtenue de la fonction $p(r) = \sum_{n \geq 0} p_n r^n$ avec un rayon de convergence de $R_p = 1$. Nous supposons que, pour les coefficients $(p_n)_{n \geq 0}$, il existe un entier N, une mesure signée finie μ définie sur $[0,1]$ et un nombre $\delta \in (0,1]$ tel que, pour tout entier $n \geq N$,

(A) $\frac{1}{n+1} = p_n \int_0^1 t^n \, d\mu(t)$;

(B) $\frac{1}{n+1} = \delta p_n \int_0^1 t^n \, |d\mu(t)|$.

Un exemple explicite de telle suite qui satisfait ces conditions est $p_n = \binom{n+\alpha}{\alpha}$ $(\alpha > -1, n \geq 0)$ (voir la dernière section de [5] pour les détails).

Lorsque b est non-extrême, en utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 8.3, nous pouvons démontrer que $P_r(f) \in \mathcal{H}(b)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ et tout $r \in [0,1)$. En utilisant le théorème du graphe fermé, on peut montrer que l'opérateur linéaire $P_r : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$, défini par $f \mapsto P_r(f)$, est borné pour chaque $r \in [0,1)$. On obtient finalement le résultat suivant.

Théorème 8.4. *Soit p une série de puissances de rayon de convergence $R_p = 1$. Supposons que les coefficients $(p_n)_{n \geq 0}$ satisfont les conditions (A) et (B) ci-haut pour un entier $N \geq 0$, une mesure signée finie μ et un nombre $\delta \in (0,1]$. Alors, il existe $b \in B_{H^\infty}$ non-extrême et une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$ telle que $P_r(f) \not\to f$ dans $\mathcal{H}(b)$ lorsque $r \to 1^-$.*

Démonstration. La preuve utilise le même argument utilisé dans la preuve du théorème 8.1. □

8.2 Méthodes de Borel généralisées

On suppose dans cette section que $\alpha > 0$ et β est un nombre réel tel que $\alpha N + \beta > 0$.

Les méthodes et arguments de la section précédente s'adaptent aussi pour la méthode de Borel généralisée. Une première proposition se montre de la même façon que la proposition 8.3.

Proposition 8.5. *Soit $0 \leq \omega < \infty$ et b non-extrême. Alors, pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, la série définissant $B_\omega^{\alpha,\beta}(f)$ est convergente dans $\mathcal{H}(b)$ et $B_\omega^{\alpha,\beta}(f) \in \mathcal{H}(b)$. De plus, l'application $B_\omega^{\alpha,\beta} : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ définie par $f \mapsto B_\omega^{\alpha,\beta}(f)$ est un opérateur linéaire borné.*

Rappelons que, dans la preuve du théorème 3.3, le domaine des paramètres des méthodes de sommabilité $(A, c_A(X), \lim_A)$ et $(B, c_B(X), \lim_B)$ ne joue pas de rôle. Ainsi, il est possible d'appliquer le corollaire 3.6 à deux méthodes dont les domaines des paramètres sont différents (par exemple, $E_A = [0, \infty)$ et $E_B = [0, 1)$). Cependant, comme l'inclusion scalaire de la méthode de Borel généralisée est valide si les moyennes d'Abel convergent pour les suites scalaires, il faut s'assurer qu'il est possible d'utiliser le corollaire 3.6 pour procéder à la preuve du deuxième théorème principal de cette section. Comme le montre le lemme suivant, ceci n'est pas un problème lorsque X est l'espace de de Branges-Rovnyak !

Lemme 8.6. *Si $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est $B^{\alpha,\beta}$-convergente vers f pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, alors $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est L-sommable vers f pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$.*

Démonstration. Supposons que $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est $B^{\alpha,\beta}$-sommable vers f pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$. Notre objectif est de démontrer que $(s_n(f))_{n\geq 0}$ est L-sommable vers f. Ce que nous devons montrer est

i) que la série définissant $L_r(f)$ est convergente dans $\mathcal{H}(b)$ pour chaque $r \in [0, 1)$ et chaque $f \in \mathcal{H}(b)$;

ii) que $L_r(f) \to f$ lorsque $r \to 1^-$ pour chaque $f \in \mathcal{H}(b)$.

Le premier point a été démontré au lemme 7.8.

Concentrons-nous sur le deuxième point. D'après la proposition 8.3 avec $\alpha = 0$, pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$, $\sum_{n\geq 0}(1-r)r^n s_n(f)$ converge dans $\mathcal{H}(b)$ pour chaque $r \in [0, 1)$. Par conséquent, comme la convergence dans la norme implique la convergence faible, nous avons que la série $\sum_{n\geq 0}(1-r)r^n \langle s_n(f), g\rangle_b$ est convergence pour chaque $g \in \mathcal{H}(b)$. Autrement dit, la suite $(\langle s_n(f), g\rangle_b)_{n\geq 0}$ appartient au domaine de la méthode d'Abel. De plus, par hypothèse, nous avons aussi que

$$\alpha e^{-\omega}\sum_{n\geq 0}\frac{\omega^{\alpha n+\beta}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\,\langle s_n(f),g\rangle_b \to \langle f,g\rangle_b \quad (g\in\mathcal{H}(b)).$$

Autement dit, la suite $(\langle s_n(f),g\rangle_b)_{n\geq 0}$ appartient aussi au domaine de sommabilité $c_{B^{\alpha,\beta}}(\mathbb{C})$ de la méthode de Borel généralisée. D'après le théorème 2.21, la suite $(\langle s_n(f),g\rangle_b)_{n\geq 0}$ est L sommable pour chaque $g\in\mathcal{H}(b)$. Autrement dit, $L_r(f)$ converge faiblement vers f. Ceci implique qu'il existe un nombre r_0 tel que $\sup_{r_0\leq r<1}\|L_r(f)\|_b<\infty$ pour toute $f\in\mathcal{H}(b)$. Comme les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$, on peut utiliser le même argument qui a servi à démontrer la deuxième partie du théorème 3.3 pour démontrer que $L_r(f)\to f$ pour toute $f\in\mathcal{H}(b)$. Ceci termine la preuve du lemme. □

Nous pouvons désormais démontrer le théorème 8.2. Rappelons-en l'énoncé :

> Il existe un point non-extrême $b\in H^\infty$ et une fonction $f\in\mathcal{H}(b)$ telle que, pour tout $\alpha>0$ et $\beta\in\mathbb{N}$ avec $\alpha N+\beta>1$,
>
> $$\lim_{\omega\to\infty}\|B_\omega^{\alpha,\beta}(f)-f\|_b\neq 0.$$

Démonstration du théorème 8.2. Soit b et f les fonctions dans le théorème 7.2. Supposons, si possible, que $B_\omega^{\alpha,\beta}(f)\to f$ pour toute $f\in\mathcal{H}(b)$. D'après le lemme 8.6, ceci implique que $L_r(f)\to f$ pour toute $f\in\mathcal{H}(b)$. Ceci contredit le théorème 7.2. □

Quatrième partie

Construction exceptionnelle d'un espace de fonctions holomorphes sur le disque unité

Chapitre 9

Impossibilité d'approximer des fonctions impaires par des polynômes impaires

Rappelons qu'un espace de Banach de fonctions holomorphes est un espace de Banach $X \subseteq \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que l'inclusion $i : X \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ soit continue. L'espace $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est muni de sa topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compact de $\mathbb{D}$. Cette topologie est métrisable, par exemple,

$$d(f,g) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_{K_n,\infty}}{1+\|f-g\|_{K_n,\infty}} \quad (f,g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}))$$

où $K_n := \overline{D(0,1-1/n)}$ et $\|f\|_{K_n,\infty} = \sup_{z\in K_n} |f(z)|$. Muni de cette métrique, $(\mathrm{Hol}(\mathbb{D}), d)$ est un espace de Fréchet.

Dans ce chapitre, l'objectif est de montrer le théorème suivant.

Théorème 9.1. *Il existe un espace de Hilbert de fonctions holomorphes H sur le disque $\mathbb{D}$ tel que*

1. *H contient l'ensemble des polynômes ;*
2. *l'ensemble des polynômes est dense dans H ;*
3. *l'ensemble des polynômes impairs n'est pas dense dans l'ensemble des fonctions impaires de H.*

De plus, pour toutes les suites $(\omega_n)_{n\geq 0}$ de nombres positifs telles que $\sum_n 1/\omega_n < \infty$, l'espace H peut être construit de sorte que $\|z^n\|_H \leq 1 + \omega_n$ pour tout $n \geq 0$.

Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est *impaire* si $f(-z) = -f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Nous explorons, dans l'avant-dernière et la dernière section, des conséquences de ce dernier résultat. Des variantes pour d'autres types d'espaces se retrouvent dans l'article [40, §3].

Dans ce qui suit, $\delta_{\alpha,\beta}$ est le delta de Kronecker qui est défini sur un ensemble Γ et dont l'expression est

$$\delta_{\alpha,\beta} := \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

L'évaluation d'une fonctionnelle linéaire continue $\phi \in X^*$ est notée $\langle x, \phi \rangle$ ($x \in X$). Une base de Schauder pour un espace de Banach est une suite $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq X$ telle que chaque élément $x \in X$ s'écrit de façon unique comme $x = \sum_{n \geq 0} a_n x_n$.

Pour un ensemble $S := \{x_\alpha \,:\, \alpha \in \Gamma\}$ de vecteurs, l'*ensemble vectoriel engendré* par l'ensemble S est l'ensemble $\operatorname{span} S$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de S. Sa fermeture est notée $\overline{\operatorname{span}}\, S$.

On note par $(e_n)_{n \geq 0}$ la base canonique de l'espace ℓ^2 des suites de nombres complexes de carrés sommables. Ainsi, chaque élément e_n s'exprime comme $e_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0}$. Plus précisément $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base de Schauder qui est, de plus, orthonormée pour le produit scalaire de ℓ^2, c'est-à-dire $\|e_n\|_{\ell^2} = 1$ et

$$\langle e_n, e_m \rangle_{\ell^2} = \delta_{n,m}$$

où $\langle (a_n), (b_n) \rangle_{\ell^2} := \sum_{n \geq 0} a_n \overline{b}_n$. Rappelons que $(\ell^2)^*$ s'identifie isométriquement à ℓ^2 par le théorème de Riesz.

9.1 Base de Markushevich

Une notion essentielle à la preuve du théorème 9.1 est la notion de base de Markushevich. Nous présentons brièvement ce concept. Pour davantage de détails sur les bases de Markushevich, le lecteur peut consulter l'ouvrage [24]. L'ensemble du matériel présenté dans cette section provient du chapitre 1 de l'*op. cit.*.

Pour introduire le concept de base de Markushevich, nous devons présenter la définition de système biorthogonal.

Définition 9.2. Soit X un espace de Banach et Γ un ensemble non vide. Une famille de paires $\{(x_\gamma, x_\gamma^*) \,:\, \gamma \in \Gamma\} \subseteq X \times X^*$ est un *système biorthogonal* si

$$\langle x_\alpha, x_\beta^* \rangle = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Pour simplifier la notation et le texte, un système biorthogonal $\{(x_\gamma, x_\gamma^*) \,:\, \gamma \in \Gamma\}$ est noté $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma}$. Lorsque $\Gamma = \mathbb{N}_0$, le système est plutôt noté $\{x_n; x_n^*\}_{n \geq 0}$ ou $\{x_n; x_n^*\}_{n=0}^{\infty}$.

Exemple 9.3. Soit X un espace de Banach séparable muni d'une base de Schauder $(x_n)_{n \geq 0}$ tel que $\|x_n\|_X = 1$. Comme $(x_n)_{n \geq 0}$ est une base de Schauder, chaque élément $x \in X$ s'écrit de manière unique comme

$$x = \sum_{n \geq 0} a_k x_k$$

où les a_n sont des scalaires. Suivant ce fait, nous définissons x_n^*, pour $n \geq 0$, par

$$\Big\langle \sum_{n \geq 0} a_n x_n, x_n^* \Big\rangle := a_n.$$

Nous montrons que $x_n^* \in X^*$. Définissons l'application $|||\cdot|||_X : X \to [0, \infty)$ par $|||x|||_X := \sup_{n \geq 0} \| \sum_{k=0}^n a_k x_k \|_X$. Posons $P_n : X \to X$ par l'expression $P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x_k$ ($x \in X$ et $n \geq 0$). L'application $|||\cdot|||_X$ est une nouvelle norme sur X et la famille composée des projections P_n est uniformément bornée dans la norme d'opérateur $|||\cdot|||_{X \to X}$ induite par $|||\cdot|||_X$ (voir le [19, lemme 4.9(i)]). Une conséquence du théorème de l'application ouverte est que la norme $\|\cdot\|_X$ est équivalente à la norme $|||\cdot|||_X$ (voir le [19, lemme 4.9(ii)]). Par conséquent, les opérateurs linéaires P_n forment aussi une famille uniformément bornée dans la norme d'opérateur $\|\cdot\|_{X \to X}$ induite par $\|\cdot\|_X$ (voir le [19, théorème 4.10]). Soit $C := \sup_n \|P_n\|_{X \to X}$. Alors, nous avons, pour $x = \sum_{n \geq 0} a_n x_n$,

$$|\langle x, x_n^* \rangle| = |a_n| = \|a_n x_n\|_X = \|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|_X \leq 2C\|x\|_X.$$

Ceci montre que $x_n^* \in X^*$ et $\sup_n \|x_n^*\|_{X \to \mathbb{C}} \leq 2C$. Pour chaque paire d'entiers $m \geq 0$ et $n \geq 0$, on a $\langle x_n, x_m^* \rangle = \delta_{n,m}$ (par définition des fonctionnelles x_n^*). Par conséquent, $\{x_n; x_n^*\}_{n \geq 0}$ est un système biorthogonal pour $X \times X^*$.

Exemple 9.4. Soit $X = H^2$ l'espace de Hardy. Alors les monômes $(f_n)_{n \geq 0}$ (où $f_n(z) = z^n$) forment une base de Schauder de H^2. Les fonctionnelles f_n^* sont identifiées (par le théorème de Riesz) au monôme z^n. (En fait, nous avons même une base orthonormée).

Exemple 9.5. Soit $X = \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$. Même si X n'est pas un espace de Banach, on peut quand même parler de *base de Schauder* pour cet espace. En effet, pour $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, les sommes partielles $s_n(f)$ convergent uniformément sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$ lorsque $n \to \infty$. Comme les coefficients de Taylor sont uniques, les monômes $(f_n)_{n \geq 0}$ ($f_n(z) = z^n$) forment une base de Schauder pour X. Entre autres, $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est séparable (selon la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathbb{D}$).

L'exemple 9.3 montre aussi qu'à chaque base de Schauder $(x_n)_{n \geq 0}$, il est possible de trouver une suite $(x_n^*)_{n \geq 0} \subseteq X^*$ telle que $\{x_n; x_n^*\}_{n \geq 0}$ est un système biorthogonal. Une telle propriété a un nom.

Définition 9.6. Une famille $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq X$ est *minimale* s'il existe une famille $\{x_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\} \subseteq X^*$ telle que $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma}$ est un système biorthogonal.

De plus, dans l'exemple 9.3, on observe que $\overline{\text{span}}\{x_n : n \geq 0\} = X$. Cette propriété a aussi un nom. Nous en profitons aussi pour introduire la notion de système biorthogonal total.

Définition 9.7. Soit $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ un système biorthogonal.

1. Il est *fondamental* si $\overline{\text{span}}\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} = X$.
2. Il est *total* si $\overline{\text{span}}^{w^*}\{x_\gamma^* : \gamma \in \Gamma\} = X^*$.

La notation $\overline{\text{span}}^{w^*}$ signifie la fermeture selon la topologie faible-$*$ de X^*.

Définition 9.8. Un système biorthogonal $\{x_\gamma; x_\gamma^*\}_{\gamma\in\Gamma}$ est une *base de Markushevich* (ou simplement une M-base) si le système est fondamental et total.

Définition 9.9. Une M-base $\{x_n; x_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ est dite *forte* si $x \in \overline{\text{span}}\{\langle x, x_n^*\rangle x_n : n \geq 0\}$ quel que soit $x \in X$.

Nous terminons cette section en mentionnant que Markushevich a démontré que tout espace de Banach séparable admet une M-base (voir le [24, théorème 1.22]). Ceci contraste avec le fait qu'il existe des espaces de Banach qui ne possèdent pas de base de Schauder (ce fait a été démontré par Enflo [18]). Les M-bases fournissent donc une alternative aux bases de Schauder dans les espaces de Banach séparables.

9.2 Construction de l'espace de fonctions holomorphes

Nous procédons maintenant à la preuve du théorème principal de ce chapitre. Les idées de la preuve sont adaptées des méthodes employées par Johnson. Ces techniques ont permis de démontrer qu'un espace de Banach séparable peut avoir un système biorthogonal qui n'est pas une M-base forte (voir la preuve de la [24, proposition 1.34]).

Nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 9.10. *Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ la base canonique de ℓ^2. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels. Pour $n \geq 0$, on définit deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ comme ceci :*

$$\begin{cases} x_{2n} := e_{2n}, \\ x_{2n+1} := e_{2n+1} - a_n e_{2n} + b_n e_{2n-2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{2n} := e_{2n} + a_n e_{2n+1} - b_{n+1} e_{2n+3}, \\ y_{2n+1} := e_{2n+1} \end{cases}$$

où nous admettons que $e_{-2} := 0$. Alors $\{x_n; y_n\}_{n\geq 0}$ est une M-base de ℓ^2.

Démonstration. Pour démontrer que $\{x_n; y_n\}_{n\geq 0}$ est une M-base, il faut montrer que

i) le système $\{x_n; y_n\}_{n\geq 0}$ est un système biorthogonal ;

ii) les espaces vectoriels engendrés par $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont denses dans ℓ^2.

Nous commençons par démontrer l'orthogonalité, c'est-à-dire $\langle x_n, y_m \rangle_{\ell^2} = \delta_{n,m}$. Il y a quatre cas à vérifier : les indices n, m sont pair/pair, pair/impair, impaire/pair et impair/impair.

— Si $n = 2k$ et $m = 2j$ pour certains entiers k et j, alors

$$\langle x_{2k}, y_{2j} \rangle_{\ell^2} = \langle e_{2k}, e_{2j} + a_j e_{2j+1} - b_{j+1} e_{2j+3} \rangle_{\ell^2} = \delta_{2k,2j}.$$

— Si $n = 2k$ et $m = 2j+1$ pour certains entiers k et j, alors

$$\langle x_{2k}, y_{2j} \rangle_{\ell^2} = \langle e_{2k}, e_{2j+1} \rangle_{\ell^2} = \delta_{2k,2j+1} = 0.$$

— Si $n = 2k+1$ et $m = 2j$ pour certains entiers k et j, alors

$$\begin{aligned}\langle x_{2k+1} y_{2j} \rangle_{\ell^2} &= \langle e_{2k+1} - a_k e_{2k} + b_k e_{2k-2}, e_{2j} + a_j e_{2j+1} - b_{j+1} e_{2j+3} \rangle_{\ell^2} \\ &= a_j \delta_{2k+1,2j+1} - b_{j+1} \delta_{2k+1,2j+3} - a_k \delta_{2k,2j} + b_k \delta_{2k-2,2j} \\ &= a_k - b_{k-1+1} - a_k + b_k = 0\end{aligned}$$

— Si $n = 2k+1$ et $m = 2j+1$ pour certains entiers k et j, alors

$$\langle x_{2k+1}, y_{2j+1} \rangle_{\ell^2} = \langle e_{2k+1} - a_k e_{2k} + b_k e_{2k-2}, e_{2j+1} \rangle_{\ell^2} = \delta_{2k+1,2j+1}.$$

Montrons maintenant que $\operatorname{span}(x_n)_{n\geq 0}$ et $\operatorname{span}(y_n)_{n\geq 0}$ sont denses dans ℓ^2. Évidemment, nous avons $\operatorname{span}(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \operatorname{span}(e_n)_{n\geq 0}$. Pour l'inclusion inverse, on remarque que

$$x_{2n} = e_{2n} \quad \text{et} \quad e_{2n+1} = x_{2n+1} + a_n x_{2n} - b_n x_{2n-2}$$

où on pose $x_{-2} := 0$. Ainsi, $\operatorname{span}(e_n)_{n\geq 0} \subseteq \operatorname{span}(x_n)_{n\geq 0}$ et

$$\operatorname{span}(x_n)_{n\geq 0} = \operatorname{span}(e_n)_{n\geq 0}.$$

Comme $(e_n)_{n\geq 0}$ engendre un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^2, il en est de même pour $(x_n)_{n\geq 0}$. On procède de la même façon pour démontrer que $(y_n)_{n\geq 0}$ engendre un sous-espace dense dans ℓ^2. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 9.1. Rappelons-en l'énoncé :

> Il existe un espace de Hilbert de fonctions holomorphes H sur le disque $\mathbb{D}$ tel que
>
> 1. H contient l'ensemble des polynômes ;
> 2. l'ensemble des polynômes est dense dans H ;
> 3. les polynômes impairs ne sont pas denses dans l'ensemble des fonctions impaires de H.
>
> De plus, pour toutes les suites $(\omega_n)_{n\geq 0}$ de nombres positifs telles que $\sum_n 1/\omega_n < \infty$, l'espace H peut être construit de sorte que $\|z^n\|_H \leq 1 + \omega_n$ pour tout $n \geq 0$.

Preuve du théorème 9.1. Soit $(\eta_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\eta_n > 0$ et $\sum_{n\geq 0}\eta_n^2 < \infty$. Le choix de cette suite est précisé plus tard dans la preuve. Posons $a_n := 1/\eta_n^2$ $(n \geq 0)$ et $b_n := 1/\eta_n\eta_{n-1}$ $(n \geq 1)$. D'après le lemme 9.10, le système $\{x_n, y_n\}$ construit dans le lemme est une M-base. Pour $x \in \ell^2$, posons

$$J(x)(z) := \sum_{n\geq 0}\frac{\langle x, y_n\rangle_{\ell^2}}{\|y_n\|_{\ell^2}}z^n \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Pour chaque $x \in \ell^2$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{\langle x, y_n\rangle_{\ell^2}}{\|y_n\|_{\ell^2}}|z|^n\right| \leq \|x\|_{\ell^2}\sum_{n\geq 0}z^n = \frac{\|x\|_{\ell^2}}{1-|z|} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Ainsi, nous voyons que $J(x) \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ pour chaque $x \in \ell^2$ et $J : \ell^2 \to \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est une application linéaire continue. De plus, l'application J est injective. En effet, si $x \in \ell^2$ est choisi de sorte que $J(x) = 0$, alors, par unicité des coefficients du développement de Taylor de $J(x)$, nous obtenons que

$$\langle x, y_n\rangle_{\ell^2} = 0 \quad (n \geq 0).$$

Comme (y_n) engendre un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^2, on obtient que $x = 0$.

On définit maintenant l'espace de Hilbert $H := J(\ell^2)$ (l'image de J) dont le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ est défini par

$$\langle J(x), J(y)\rangle_H := \langle x, y\rangle_{\ell^2} \quad (x, y \in \ell^2).$$

Comme J est injective, ce dernier produit scalaire est bien défini. D'après le paragraphe précédent, l'inclusion $H \hookrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est continue. En d'autres mots, H est un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. De plus, comme $(x_n)_{n\geq 0}$ engendre un sous-espace vectoriel dense dans ℓ^2 et $J(\|y_n\|_{\ell^2}x_n) = z^n$ pour chaque $n \geq 0$, il s'en suit que H contient l'ensemble des polynômes et que l'ensemble des polynômes est dense dans H.

Il reste maintenant à montrer que l'ensemble des polynômes impairs n'est pas dense dans le sous-ensemble des fonctions impaires de H. Pour accomplir cela, il suffit de construire deux fonctions $f, g \in H$ telles que f est impaire, $\langle z^{2n+1}, g\rangle_H = 0$ pour chaque $n \geq 0$, mais $\langle f, g\rangle_H \neq 0$. Voici comment on fait cela. On définit les éléments u, v par les expressions suivantes :

$$u := \sum_{j\geq 0}\eta_j e_{2j+1} \quad \text{et} \quad v := \frac{1}{\eta_0}e_1 + \sum_{k\geq 0}\eta_k e_{2k}.$$

La condition $\sum_{n\geq 0}\eta_n^2 < \infty$ assure que $u, v \in \ell^2$ et on pose maintenant $f := J(u)$ et $g := J(v)$. Ainsi, les fonctions f et g s'écrivent explicitement comme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\langle u, y_n\rangle_{\ell^2}}{\|y_n\|_{\ell^2}}z^n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n\geq 0}\frac{\langle v, y_n\rangle_{\ell^2}}{\|y_n\|_{\ell^2}}z^n$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Pour chaque entier $n \geq 0$, le coefficient $\hat{f}(2n)$ de z^{2n} dans le développement de Taylor de f satisfait

$$\begin{aligned}
\|y_{2n}\|_{\ell^2} \hat{f}(2n) = \langle u, y_{2n} \rangle_{\ell^2} &= \sum_{j \geq 0} \eta_j \langle e_{2j+1}, y_{2n} \rangle_{\ell^2} \\
&= \sum_{j \geq 0} \langle e_{2j+1}, e_{2n} + a_n e_{2n+1} - b_{n+1} e_{2n+3} \rangle_{\ell^2} \\
&= \eta_n a_n - \eta_{n+1} b_{n+1} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, on obtient $\hat{f}(2n) = 0$ pour chaque n. Par conséquent, f est une fonction impaire. Aussi, pour chaque entier $n \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|y_{2n+1}\|_{\ell^2}^{-1} \langle z^{2n+1}, g \rangle_H = \overline{\langle x_{2n+1}, v \rangle_{\ell^2}} &= \overline{\langle x_{2n+1}, e_1/\eta_0 \rangle_{\ell^2}} + \sum_{k \geq 0} \eta_k \overline{\langle x_{2n+1}, e_{2k} \rangle_{\ell^2}} \\
&= \langle e_{2n+1} - a_n e_{2n} + b_n e_{2n-2}, e_1/\eta_0 \rangle_{\ell^2} \\
&\qquad + \sum_{k \geq 0} \eta_k \langle e_{2n+1} - a_n e_{2n} + b_n e_{2n-2}, e_{2k} \rangle_{\ell^2} \\
&= \begin{cases} -\eta_n a_n + \eta_{n-1} b_n, & n \geq 1 \\ 1/\eta_0 - \eta_0 a_0, & n = 0 \end{cases} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons

$$\langle f, g \rangle_H = \langle u, v \rangle_{\ell^2} = \Big\langle \sum_{j \geq 0} \eta_j e_{2j+1}, (1/\eta_0) e_1 + \sum_{k \geq 0} \eta_k e_{2k} \Big\rangle_{\ell^2} = \eta_0/\eta_0 = 1 \neq 0.$$

Ceci complète la partie de la preuve sur la non-densité de l'ensemble des polynômes impairs dans l'ensemble des fonctions impaires de H.

Finalement, on analyse la question de l'estimation de $\|z^n\|_H$. Comme $z^n = J(\|y_n\|_{\ell^2} x_n)$, on a

$$\|z^n\|_H = \Big\| \|y_n\|_{\ell^2} x_n \Big\|_{\ell^2} = \|x_n\|_{\ell^2} \|y_n\|_{\ell^2}.$$

D'après la manière dont nous avons construit x_n et y_n, on en déduit les estimés suivants :

$$\begin{aligned}
\|z^{2n}\|_H &= \|x_{2n}\|_{\ell^2} \|y_{2n}\|_{\ell^2} \leq 1 + |a_n| + |b_{n+1}| = 1 + \frac{1}{\eta_n^2} + \frac{1}{\eta_n \eta_{n+1}} \quad (n \geq 0) \\
\|z^{2n+1}\|_H &= \|x_{2n+1}\|_{\ell^2} \|y_{2n+1}\|_{\ell^2} \leq 1 + |a_n| + |b_n| = 1 + \frac{1}{\eta_n^2} + \frac{1}{\eta_n \eta_{n-1}} \quad (n \geq 1) \\
\|z\|_H &= \|x_1\|_{\ell^2} \|y_1\|_{\ell^2} \leq 1 + |a_0| = 1 + \frac{1}{\eta_0^2}.
\end{aligned}$$

Afins d'obtenir $\|z^n\| \leq 1 + \omega_n$ pour chaque n, il suffit maintenant d'avoir les inégalités suivantes :

$$\frac{3}{\eta_n^2} \leq \omega_{2n}, \quad \frac{1}{\eta_{n+1}^2} \leq \omega_{2n}, \quad \frac{3}{\eta_n^2} \leq \omega_{2n+1}, \quad \frac{1}{\eta_{n-1}^2} \leq \omega_{2n+1}.$$

Pour vérifier ces inégalités, il suffit de définir

$$\eta_n^2 := \frac{3}{\omega_{2n}} + \frac{1}{\omega_{2n-2}} + \frac{3}{\omega_{2n+1}} + \frac{1}{\omega_{2n+3}}$$

et

$$\eta_0^2 := \frac{3}{\omega_0} + \frac{3}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_3}.$$

Avec ce choix, la condition $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\omega_n} < \infty$ de l'hypothèse assure que $\sum_{n\geq 0} \eta_n^2 < \infty$. Ceci termine la preuve du théorème. □

9.3 Conséquences de la construction

Le théorème 9.1 a des conséquences importantes sur la sommabilité du développement de Taylor d'une fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

D'après la construction de H dans le théorème 9.1, les polynômes sont denses. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt, il est possible de trouver une base orthonormale de polynômes $(p_n)_{n\geq 0} \subseteq H$. Ainsi, toute fonction $f \in H$ s'écrit comme

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, p_k \rangle_H p_k$$

où la série converge vers f dans la norme de H. Ceci suggère la question suivante (en laissant tomber la propriété d'orthogonalité) : est-il possible de prendre les polynômes $p_n = s_n(f)$, où $s_n(f)$ sont les sommes partielles du développement de Taylor de $f \in H$? Une manière équivalente de poser le problème va comme suit : pouvons-nous trouver une méthode de sommabilité matricielle triangulaire $(A, c_A(H), \lim_A)$ où $A = (\alpha_{n,k})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} s_k(f) \right\|_H = 0.$$

Une première conséquence du théorème principal répond à cette question. La réponse est non !

Corollaire 9.11. *Soit H l'espace du théorème 9.1. Alors, malgré le fait que l'ensemble des polynômes soit dense dans H, il existe $f \in H$ telle que f n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par $(s_n(f))_{n\geq 0}$.*

Démonstration. D'après le théorème 9.1, il existe une fonction impaire $f \in H$ qui n'est pas approximable par des polynômes impairs. Comme f est impaire, les sommes partielles $s_n(f)$ de son développement de Taylor sont aussi des fonctions impaires. Ainsi, la fermeture de l'ensemble $\mathrm{span}\{s_n(f) : n \geq 0\}$ ne peut pas contenir f. □

Le dernier résultat s'étend en fait à toute méthode de sommabilité matricielle et certaines méthodes de sommabilité suite-fonction. En incluant la dernière partie du théorème 9.1 concernant l'estimation de la norme des monômes z^n, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 9.12. *Soit H et $(\omega_n)_{n\geq 0}$ définis comme dans le théorème 9.1. Supposons, en plus, que la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ satisfait $\lim_{n\to\infty}\omega_n^{1/n}=1$. Alors, malgré que l'ensemble des polynômes soit dense dans H, il existe $f\in H$ telle que*

1. *$\sum_{k=0}^{\infty} c_k s_k(f)$ converge dans H pour toute suite $(c_k)_{k\geq 0}$ telle que $\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}<1$;*
2. *f n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des séries précédentes.*

Démonstration. Soit f une fonction impaire qui n'est pas approximable par des polynômes impairs.

D'abord, pour le premier point, soit $(c_k)_{k\geq 0}$ une suite telle que $\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}<1$. Ainsi, d'après la dernière partie du théorème 9.1, nous avons

$$\limsup_{n\to\infty}\|z^n\|_H^{1/n}\leq\limsup_{n\to\infty}(1+\omega_n)^{1/n}\leq 1.$$

Ainsi, pour chaque $R>1$, nous avons $\|s_n(f)\|_H=O(R^k)$ (les techniques pour démontrer cela sont semblables à celles utilisées dans la proposition 7.3) et donc $\sum_{k\geq 0}|c_k|\|s_n(f)\|_H<\infty$ quel que soit la suite $(c_k)_{k\geq 0}$ telle que $\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}<1$.

Puis, le deuxième point est une conséquence du choix de f et du fait que les séries considérées $\sum_{k\geq 0}c_k s_n(f)$ appartiennent à la fermeture de $\operatorname{span}\{s_n(f)\ :\ n\geq 0\}$. Ceci termine la démonstration. $\square$

Une famille de cas particuliers du corollaire précédent est la famille des méthodes de sommabilité de série entière introduite au chapitre 2. On s'intéresse particulièrement aux méthodes de sommabilité de série entière déterminées par une série $p(r)=\sum_{n\geq 0}p_n r^n$ dont le rayon de convergence est $R_p\geq 1$. Rappelons qu'une telle méthode est définie par l'expression

$$P_r(f):=\frac{1}{p(r)}\sum_{k\geq 0}p_k s_k(f)r^k \quad (0\leq r<1).$$

Pour cette famille de méthodes de sommabilité, nous avons $c_k=p_k r^k/p(r)$ et comme le rayon de converge de la série entière p est d'au moins 1, nous pouvons facilement vérifier que

$$\limsup_{k\to\infty}|c_k|^{1/k}\leq r<1.$$

Ainsi, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 9.13. *Soient H et $(\omega_n)_{n\geq 0}$ définis comme dans le théorème 9.1. Supposons que la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ satisfait $\lim_{n\to\infty} \omega_n^{1/n} = 1$. Alors, malgré le fait que l'ensemble des polynômes soit dense dans H, il existe $f \in H$ qui n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{P_r(f) \,:\, 0 < r < 1\}$.*

En particulier, il existe une fonction $f \in H$ telle que

— $f \notin \overline{\operatorname{span}}\{f_r \,:\, 0 < r < 1\}$;

— $f \notin \overline{\operatorname{span}}\{L_r(f) \,:\, 0 < r < 1\}$.

Conclusion

Cette thèse avait comme vocation première l'étude de la sommabilité du développement de Taylor dans certains espaces de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité contenant les polynômes comme un sous-ensemble dense.

Les résultats de cette thèse suggèrent plusieurs problèmes de recherche à explorer. Nous concluons ce travail en discutant de quelques-unes de ces pistes de recherche.

Fonctions impaires et les espaces de de Branges-Rovnyak

Les résultats du chapitre 7 ont montré qu'une grande famille de méthodes de sommabilité est inefficace pour faire converger les sommes partielles $s_n(f)$ vers la fonction f dans la norme d'un espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$, même si les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(b)$. Parmi ces méthodes, nous avons analysé la méthode logarithmique et certaines méthodes de séries de puissances.

Au chapitre 9 (corollaire 9.13), nous avons montré qu'il existe un espace de Hilbert H de fonctions holomorphes sur le disque unité dans lequel les polynômes sont denses et une fonction $f \in H$ tels que f n'appartient pas à la fermeture de l'espace vectoriel engendré par les sommes partielles $s_n(f)$. Serait-il possible de construire H de sorte qu'il corresponde à un espace de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$? Autrement dit,

Question 1. *Existe-t-il un point non-extrême b et une fonction impaire f telle que f n'est pas approximable par des polynômes impairs dans la norme de $\mathcal{H}(b)$?*

Nous avons analysé un petit peu cette question et elle conduit à un problème d'optimisation. À ce jour, nous n'avons pas été en mesure de résoudre ce problème et cette question demeure ouverte.

Méthodes de sommabilité d'opérateurs

D'après les résultats de [42], les auteurs ont montré que si X est un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ qui possède la condition d'approximation bornée [1] et dans lequel les polynômes sont denses, alors il existe un schéma d'approximation polynomiale $(T_n)_{n\geq 0}$. Rappelons qu'un schéma d'approximation polynomiale est une suite d'opérateurs linéaires bornés $T_n : X \to X$ telle que la suite $(T_n(f))_{n\geq 0}$ est un polynôme et converge vers f dans la norme de X pour toute $f \in X$. De plus, les auteurs ont démontré que les opérateurs T_n peuvent être choisis de sorte que le degré de $T_n(f)$ est inférieur à n. Ils avaient alors demandé s'il est possible d'écrire ces opérateurs T_n comme

$$T_n(f) := \sum_{k=0} \alpha_{n,k} s_k(f) \quad (f \in X) \tag{9.1}$$

pour des scalaires $\alpha_{n,k}$.

Les résultats du chapitre 9 montrent qu'il existe un espace de Hilbert H de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ et une fonction $f \in H$ telle que la suite des sommes partielles $(s_n(f))_{n\geq 0}$ n'est sommable pour aucune méthode de sommabilité matricielle triangulaire. La réponse à la question de Mashreghi et Ransford est donc non, même dans le contexte des espaces de Hilbert de fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D}$. Est-ce qu'il est possible de considérer d'autres types de méthodes de sommabilité matricielles ?

Robinson [48] a étudié des méthodes de sommabilité matricielles $(A, c_A(X), \lim_A)$ où l'application A est déterminée par une matrice $(A_{m,n})_{m,n\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés $A_{m,n} : X \to X$. Il a démontré, entre autres, que le théorème de Silverman-Toeplitz s'étend à ce contexte si on remplace la condition

$$\sup_{m\geq 0} \sum_{m\geq 0} |a_{m,n}| < \infty$$

par ce qui est appelé la *norme groupée* [2]. Un excellent contre-rendu des résultats sur les méthodes de sommabilité matricielles définies par une matrice d'opérateurs linéaires est l'ouvrage de Maddox [37].

Les méthodes matricielles considérées dans cette thèse sont des cas particuliers des méthodes matricielles définies par des matrices d'opérateurs. En effet, chaque scalaire a peut être vu comme l'opérateur $A : X \to X$ défini par $A(x) = ax$ $(x \in X)$. Ainsi, une méthode de sommabilité $(A, c_A(X), \lim_A)$ définie par une matrice $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ peut être vue comme une méthode de sommabilité déterminée par une matrice d'opérateur $(A_{m,n})_{m,n\geq 0}$ où $A_{m,n}(x) := a_{m,n}x$ $(x \in X)$. Ainsi, la question suivante est une piste de recherche intéressante à envisager.

Question 2. *Pour un espace de Hilbert H de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ dans lequel l'ensemble des polynômes est dense, existe-t-il une matrice d'opérateurs linéaires bornés $(A_{m,n})_{m,n\geq 0}$ telle que pour toute $f \in H$,*

1. En anglais, la « bounded approximation property (BAP) »
2. Cette terminologie a été introduite par Lorentz et Macphail dans leur article [36])

- *$\sum_{n=0}^{m} A_{m,n}s_n(f)$ est un polynôme de degré au plus m.*
- *nous avons*

$$\lim_{m\to\infty} \Big\| f - \sum_{n=0}^{m} A_{m,n}s_n(f) \Big\|_H = 0 \quad (f \in H)\,?$$

Cette dernière question semble avoir une réponse positive pour le cas des espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ où b est non-extrême. En effet, au chapitre 6, nous avons présenté un résultat d'approximation par des opérateurs de Toeplitz de El-Fallah, Fricain, Kellay, Mashreghi et Ransford dans le contexte des espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ où b est non-extrême. Il s'agit du théorème 6.17. Soit a la fonction extérieure telle que $|b|^2 + |a|^2 = 1$ (p.p. sur $\mathbb{T}$) et $a(0) > 0$. Soit la suite $(h_n)_{n\geq 0} \subset H^\infty$ de fonctions extérieures proposée dans l'énoncé du théorème 6.17. Rappelons que ce résultat assurait que si $f \in \mathcal{H}(b)$ et si on choisit une suite de polynômes $(p_n)_{n\geq 0}$ telle que $\|f - p_n\|_{H^2} < 1/n^2$, alors $T_{\overline{h}_n}(p_n)$ est un polynôme de degré au plus celui de p_n et

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{\overline{h}_n}(p_n) - f\|_{\mathcal{H}(b)} = 0.$$

Mentionnons que les polynômes p_n dans le théorème 6.17 peuvent être judicieusement choisis. Par exemple, il est possible de prendre $p_n := s_{k_n}(f)$ où k_n est un entier choisi de sorte que $k_{n-1} < k_n$ et

$$\|f - s_{k_n}(f)\|_{H^2}^2 = \sum_{j\geq k_n} |a_j|^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Ainsi, en définissant la matrice d'opérateurs linéaires bornés $(A_{n,j})_{n,j\geq 0}$ par

$$A_{n,j} := \begin{cases} T_{\overline{h}_n} & j = k_n \\ 0 & j \neq k_n, \end{cases}$$

il semble que $(A_{n,j})_{n,j}$ est un exemple de méthode matricielle qui satisfait les critères de la question 2. Bien que la deuxième condition soit satisfaite, la méthode $(A_{n,j})_{n,j\geq 0}$ est loin de répondre à la question pour au moins deux raisons.

La première raison est reliée au degré du polynôme $T_{\overline{h}_n}(s_{k_n}(f))$. Il se peut que $T_{\overline{h}_n}(s_{k_n}(f))$ soit de degré k_n. En fait, il semble plutôt difficile d'avoir un contrôle sur le degré du polynôme $T_{\overline{h}_n}(s_{k_n}(f))$. La deuxième raison est la dépendance sur f dans la définition de la matrice $(A_{n,j})_{n,j\geq 0}$. En effet, le choix des entiers k_n dépend du choix de $s_{k_n}(f)$ et donc dépend directement de f. Or, dans l'énoncé de la question 2, les opérateurs $A_{n,j}$ ne doivent pas dépendre du choix de la fonction f. Pour ces deux raisons, la question 2 demeure encore ouverte pour les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point non-extrême. Nous formulons ce dernier problème comme une sous-question de la première question.

Question 3. *Soit b un point non-extrême. Existe-t-il une matrice d'opérateurs linéaires $(A_{m,n})_{m,n\geq 0}$ telle que $A_{m,n} : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$ et pour toute $f \in \mathcal{H}(b)$,*

- $\sum_{n=0}^{m} A_{m,n} s_n(f)$ *est un polynôme de degré au plus m.*
- *nous avons*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{m} A_{m,n} s_n(f) \right\|_b = 0 \quad (f \in H)\,?$$

Espaces de de Branges-Rovnyak et points extrêmes

Cette thèse a traité les espaces de de Branges-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point non-extrême. Nous avons analysé certains procédés de sommation appliqués à la série de Taylor d'une fonction $f \in \mathcal{H}(b)$. Pouvons-nous accomplir une analyse similaire dans le cas où b est un point extrême ?

Une première difficulté survient lorsque b est extrême. Dans ce cas, l'ensemble des polynômes n'est plus dense dans l'espace et, d'après un résultat de Sarason (voir [50, V-1]), il forme même un sous-espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent, la question principale de cette thèse concernant la sommabilité du développement de Taylor selon une méthode de sommabilité n'a plus vraiment de sens. Grâce à un résultat de Aleman et Malman [2], l'ensemble $A(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(b)$ est toutefois toujours dense dans $\mathcal{H}(b)$. En suivant la démarche de Mashreghi et Ransford sur les schémas d'approximation polynomiale dans les espaces de Banach, il est possible de démontrer qu'il existe toujours un schéma d'approximation par des fonctions continues, c'est-à-dire une suite d'opérateurs $(T_n)_{n\geq 0}$ telle que $T_n : \mathcal{H}(b) \to \mathcal{H}(b)$, $T_n(f) \in A(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(b)$ et $T_n(f) \to f$ dans la norme de l'espace $\mathcal{H}(b)$. Ceci suggère la question suivante :

Question 4. *Dans le cas où b est un point extrême, est-il possible de décrire explicitement les expressions des opérateurs T_n ?*

Une avenue à considérer pour répondre à cette question est d'essayer de trouver un remplacement au développement de Taylor d'une fonction f. Dans le cas particulier de la série de Taylor, la suite des monômes $(z^n)_{n\geq 0}$ est une base de Schauder pour l'espace de Fréchet $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Par analogie, pouvons-nous remplacer les monômes par une autre suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ et la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ par une autre topologie de sorte que $(f_n)_{n\geq 0}$ soit une base de Schauder ?

Un substitut intéressant est la base construite par Bočkarev [8]. Sa construction a répondu à un problème posé par Banach concernant l'existence d'une base de Schauder dans l'algèbre du disque. Nous allons expliciter quelque peu sa construction.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ le système de Franklin [20] de fonctions continues sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le système de Franklin[3] est une base de Schauder pour l'espace $C[0, 2\pi]$ des fonctions continues

3. Voir aussi la page de *encyclopedia of math* `https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Franklin_system`.

sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On définit les systèmes $(F_n)_{n\geq 0}$ et $(G_n)_{n\geq 0}$ par les expressions suivantes

$$F_n(\theta) := \begin{cases} f_n(2\theta) & \text{si } \theta \in [0,\pi] \\ f_n(-2\theta) & \text{si } \theta \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

et

$$G_0(\theta) := \frac{1+i}{2\sqrt{\pi}}, \quad G_n(\theta) := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(F_n(\theta) + i\tilde{F}_n(\theta)\Big) \quad (\theta \in [-\pi,\pi])$$

où

$$\tilde{F}_n(\theta) := \lim_{\varepsilon\to 0+} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{F_n(\theta+t) - F_n(\theta-t)}{2\tan\Big(t/2\Big)}\, dt.$$

Chaque F_n appartient à la classe $\mathrm{Lip}^1[-\pi,\pi]$ puisque chaque f_n appartient à $\mathrm{Lip}^1[0,2\pi]$ et donc $\tilde{F}_n$ est bien définie et continue.

De plus, le système de Franklin est un système orthonormé sur $L^2[0,2\pi]$ et notons que $f_0(\theta) = 1/\sqrt{2\pi}$ $(\theta \in [0,2\pi])$. Ceci implique que les systèmes $(F_n)_{n\geq 0}$ et $(\tilde{F}_n)_{n\geq 0}$ sont des systèmes orthonormés. De surcroît, comme toutes les fonctions F_n sont des fonctions paires, il s'en suit (par un petit changement de variable dans l'intégrale) que toutes les fonctions $\tilde{F}_n$ sont des fonctions impaires. Ainsi, chaque F_n est orthogonale à $\tilde{F}_m$ $(m,n\geq 0)$. Ces derniers faits impliquent que le système $(G_n)_{n\geq 0}$ est aussi orthonormal (dû aussi à la normalisation $1/\sqrt{2}$).

On pose finalement

$$G_n(re^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} G_n(t)\, dt \quad (0 \leq r < 1,\ -\pi \leq \theta \leq \pi). \tag{9.2}$$

Bočkarev [8, théorème 1] a démontré que $(G_n)_{n\geq 0}$ est une base de Schauder pour $A(\mathbb{D})$ et, en fait, nous avons précisément que, pour toute $f \in A(\mathbb{D})$,

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k) G_k - f \Big\|_{\infty} = 0$$

où les coefficients $\widehat{f}(k)$ sont les coefficients de Fourier calculés à partir du système $(G_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{G}_k(\theta)\, d\theta \quad (k \geq 0).$$

Autrement dit, chaque fonction $f \in A(\mathbb{D})$ s'exprime comme la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(k) G_k(z) \quad (z \in \mathbb{D}) \tag{9.3}$$

où la série converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Le système de Bočkarev propose maintenant plusieurs questionnements si l'on souhaite l'utiliser pour l'approximation de fonctions dans l'espace $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point extrême.

Question 5. *Pouvons-nous caractériser les fonctions G_n qui appartiennent à $\mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point extrême ?*

Si toutes les fonctions G_n font partie de l'ensemble $\mathcal{H}(b)$, la question suivante a du sens.

Question 6. *Est-ce que la suite des sommes partielles de la série* (9.3) *converge vers f dans la norme de $\mathcal{H}(b)$?*

Si la réponse à la dernière question est non, alors

Question 7. *Pouvons-nous appliquer une méthode de sommabilité matricielle, notée A, à la suite des sommes partielles de la série* (9.3) *pour qu'elle soit A-sommable vers f dans la norme de $\mathcal{H}(b)$?*

Une réponse positive à l'une des questions précédentes produirait un exemple de schéma d'approximation par des fonctions continues de l'espace $A(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(b)$ en posant

$$T_n(f) := \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \widehat{f}(k) G_k \quad (f \in \mathcal{H}(b),\ n \geq 0)$$

où $\dim(\mathrm{Ran}(T_n)) = n$, $\mathrm{Ran}(T_n) \subseteq A(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(b)$ et $(a_{k,n})_{k,n\geq 0}$ est une matrice de scalaires déterminant une méthode de sommabilité matricielle triangulaire A. De plus, une telle construction permettrait de fournir une preuve constructive du résultat d'Aleman et Malman sur la densité de l'ensemble $A(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(b)$ lorsque b est un point extrême.

Bibliographie

[1] A. ALEMAN : *The Multiplication Operator on Hilbert Spaces of Analytic Functions*. Thèse de doctorat, Fern Universität, Hagen, 1993.

[2] A. ALEMAN et B. MALMAN : Density of disk algebra functions in de Branges–Rovnyak spaces. *Comptes Rendus Mathématique*, 355(8):871–875, 8 2017.

[3] J. BOOS : *Classical and Modern Methods in Summability*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000. Assisted by Peter Cass, Oxford Science Publications.

[4] D. BORWEIN : On a scale of Abel-type summability methods. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:318–322, 1957.

[5] D. BORWEIN : On methods of summability based on power series. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 64:342–349, 1957.

[6] D. BORWEIN : On methods of summability based on integral functions. II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56:125–131, 1960.

[7] D. BORWEIN et B. WATSON : On the relation between the logarithmic and Borel-type summability methods. *Canad. Math. Bull.*, 24(2):153–159, 1981.

[8] S. V. BOČKAREV : Existence of a basis in the space of functions analytic in the disc, and some properties of Franklin's system. *Mat. Sb. (N.S.)*, 95(137):3–18, 159, 1974.

[9] A. BROWN et P. R. HALMOS : Algebraic properties of Toeplitz operators. *J. Reine Angew. Math.*, 213:89–102, 1963/64.

[10] K. CHANDRASEKHARAN et S. MINAKSHISUNDARAM : *Typical Means*. Oxford University Press, 1952.

[11] N. CHEVROT, D. GUILLOT et T. RANSFORD : De Branges-Rovnyak spaces and Dirichlet spaces. *J. Funct. Anal.*, 259(9):2366–2383, 2010.

[12] J. B. CONWAY : *A Course in Functional Analysis*, volume 96 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1990.

[13] L. de BRANGES : *Square Summable Power Series*. Holt-Rinehart and Winston, 1966.

[14] P. L. DUREN : *Theory of H^p Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York and London, 1970.

[15] O. EL-FALLAH, E. FRICAIN, K. KELLAY, J. MASHREGHI et T. RANSFORD : Constructive approximation in de Branges-Rovnyak spaces. *Constr. Approx.*, 44(2):269–281, 2016.

[16] O. EL-FALLAH, K. KELLAY, H. KLAJA, J. MASHREGHI et T. RANSFORD : Dirichlet spaces with superharmonic weights and de Branges–Rovnyak spaces. *Complex Anal. Oper. Theory*, 10(1):97–107, 2016.

[17] O. EL-FALLAH, K. KELLAY, J. MASHREGHI et T. RANSFORD : *A Primer on the Dirichlet Space*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2014.

[18] P. ENFLO : A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317, 1973.

[19] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS et V. ZIZLER : *Banach Space Theory : The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011.

[20] P. FRANKLIN : A set of continuous orthogonal functions. *Math. Ann.*, 100(1):522–529, 1928.

[21] E. FRICAIN et J. MASHREGHI : *The Theory of H(b) Spaces*, volume 1 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2016.

[22] E. FRICAIN et J. MASHREGHI : *The Theory of H(b) Spaces*, volume 2 de *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2016.

[23] J. B. GARNETT : *Bounded analytic functions*, volume 236 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, first édition, 2007.

[24] P. HÁJEK, V. MONTESINOS SANTALUCÍA, J. VANDERWERFF et V. ZIZLER : *Biorthogonal systems in Banach spaces*, volume 26 de *CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC*. Springer, New York, 2008.

[25] G. H. HARDY : On the Summability of Fourier's Series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 12:365–372, 1913.

[26] G. H. HARDY : *Divergent Series*. Oxford, at the Clarendon Press, 1949.

[27] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD : Theorems Concerning Cesaro Means of Power Series. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 36:516–531, 1934.

[28] G. H. HARDY et M. RIESZ : *The General Theory of Dirichlet's Series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 18. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.

[29] E. HILLE et R. S. PHILLIPS : *Functional Analysis and Semi-groups*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974. Third printing of the revised edition of 1957, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI.

[30] M. JEVTIĆ, D. VUKOTIĆ et M. ARSENOVIĆ : *Taylor Coefficients and Coefficient multipliers of Hardy and Bergman-type Spaces*, volume 2 de *RSME Springer Series*. Springer, Cham, 2016.

[31] G. F. KANGRO : Theory of summability of sequences and series. *J. Math. Sci.*, 5:1–45, 1976.

[32] Y. KATZNELSON : *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 3 édition, 2004.

[33] B. KUTTNER : On Discontinuous Riesz Means of Type n. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-37(1):354–364, 1962.

[34] P. LEONETTI : A characterization of Cesàro Convergence, 2020. Récupéré à https://arxiv.org/abs/2012.13733 le 23 janvier 2021.

[35] F. LEÓN-SAAVEDRA, M. del P. Romero de la ROSA et A. SALA : Schur lemma and uniform convergence of series through convergence methods. *Mathematics*, 8(10), 2020.

[36] G. G. LORENTZ et M. S. MACPHAIL : Unbounded operators and a theorem of A. Robinson. *Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III*, 46:33–37, 1952.

[37] I. J. MADDOX : *Infinite Matrices of Operators*, volume 786 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[38] Mark MANDELKERN : Metrization of the one-point compactification. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107(4):1111–1115, 1989.

[39] J. MASHREGHI, P.-O. PARISÉ et T. RANSFORD : Power-series methods in de Branges-Rovnyak spaces, 2021. Prépublication.

[40] J. MASHREGHI, P.-O. PARISÉ et T. RANSFORD : Failure of approximation of odd functions by odd polynomials, 2020. prépublication.

[41] J. MASHREGHI et T. RANSFORD : Hadamard multipliers on weighted Dirichlet spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 91(6):Paper No. 52, 13pp, 2019.

[42] J. MASHREGHI et T. RANSFORD : Linear polynomial approximation schemes in Banach holomorphic function spaces. *Anal. Math. Phys.*, 9(2):899–905, 2019.

[43] Vern I. PAULSEN et Mrinal RAGHUPATHI : *An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces*, volume 152 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[44] T. RANSFORD : *Potential Theory in the Complex Plane*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.

[45] S. RICHTER : A representation theorem for cyclic analytic two-isometries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 328(1):325–349, 1991.

[46] S. RICHTER et C. SUNDBERG : A formula for the local Dirichlet integral. *Michigan Math. J.*, 38(3):355–379, 1991.

[47] M. RIESZ : Sur l'equivalence de cértaines methodes de sommation. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-22(1):412–419, 1924.

[48] A. ROBINSON : On functional transformations and summability. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 52:132–160, 1950.

[49] W. RUDIN : *Real and Complex Analysis, 3rd Ed.* McGraw-Hill, Inc., 1987.

[50] D. SARASON : *Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk*. The University of Arkensas Lecture Notes in the Mathematical Sciences. Wiley-Interscience, 1994.

[51] B. SHAWYER et B. WATSON : *Borel's Methods of Summability : Theory and Applications*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

[52] K. ZHU : Duality of Bloch spaces and norm convergence of Taylor series. *Michigan Math. J.*, 38(1):89–101, 1991.

[53] A. ZYGMUND : *Trigonometric Series. Vol. I, II*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 3ième édition, 2002.